

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

**В. І. Приймак**

# **МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ЕКОНОМІЧНОГО АНАЛІЗУ**

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

*Рекомендовано  
Міністерством освіти і науки України  
як навчальний посібник для студентів  
вищих навчальних закладів*

Київ  
«Центр учбової літератури»  
2009

ББК 65в6я73  
УДК 330.4(075.8)  
П 75

*Гриф надано*  
*Міністерством освіти і науки України*  
*(Лист № 14/18-Г-2197 від 12.12.2007)*

**Рецензенти:**

**Лук'яненко І. Г.** — доктор економічних наук, професор (Національний університет “Кієво-Могилянська академія”);

**Педашковський М. О.** — доктор фізико-математичних наук, професор (Тернопільський національний економічний університет);

**Слейко В. І.** — доктор економічних наук, професор (Львівська комерційна академія)

Приймак В. І. Математичні методи економічного аналізу: *навч. посіб.*  
П 75 **[для студ. вищ. навч. закл.]** / В. І. Приймак — К.: Центр учбової літератури, 2009. — 296 с. — ISBN 978-966-364-847-7.

Висвітлено теоретичні засади економічного аналізу, суть математичних методів і моделей та особливості їх застосування у процесі дослідження діяльності господарюючих суб'єктів.

Розглянуто методи елементарної математики, математичного аналізу, математичної статистики, економетрії та дослідження операцій, які використовують під час вивчення економічних явищ і процесів, а також методику виконання аналізу господарської діяльності за умов невизначеності.

Для студентів, аспірантів та викладачів вищих закладів освіти, економістів, а також працівників економічних підрозділів, фірм, організацій і установ.

ББК 65в6я73  
УДК 330.4(075.8)

ISBN 978-966-364-847-7

© Приймак В. І., 2009  
© Центр учбової літератури, 2009

## ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА.....	5
1. МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ЯК ОСНОВА АНАЛІЗУ ДІЯЛЬНОСТІ ГОСПОДАРЮЮЧИХ СУБ'ЄКТІВ.....	7
1.1. Зростання ролі економічного аналізу в сучасних умовах розвитку виробництва.....	7
1.2. Загальна характеристика математичних методів економічного аналізу .....	12
1.3. Економіко-математичне моделювання як спосіб вивчення господарської діяльності.....	25
1.4. Особливості застосування математичних методів у економічному аналізі.....	35
2. ЕКОНОМІЧНИЙ АНАЛІЗ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ.....	42
2.1. Найпростіші математичні методи та прийоми аналізу господарської діяльності.....	42
2.2. Методи елімінування.....	51
2.3. Комплексна оцінка економічних явищ і процесів.....	57
3. МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ В ДОСЛІДЖЕННІ ЕКОНОМІЧНИХ ЯВИЩ ТА ПРОЦЕСІВ.....	66
3.1. Безумовна оптимізація.....	66
3.2. Методи диференціального числення.....	74
3.3. Інтегральний метод.....	80
4. МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА .....	87
4.1. Дослідження одновимірних статистичних сукупностей.....	87
4.2. Багатовимірна класифікація.....	101
5. ЕКОНОМЕТРИЧНІ МЕТОДИ АНАЛІЗУ ДІЯЛЬНОСТІ ГОСПОДАРЮЮЧИХ СУБ'ЄКТІВ.....	124
5.1. Парна регресія.....	124
5.2. Багатофакторна регресія.....	140
6. МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ.....	153
6.1. Лінійне програмування.....	155
6.2. Цілочислове програмування.....	176

6.3. Нелінійне програмування.....	188
7. МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ В ЕКОНОМІЧНОМУ АНАЛІЗІ.....	195
7.1. Багатокритеріальна оптимізація.....	197
7.2. Моделі управління запасами.....	202
7.3. Елементи теорії ігор.....	215
8. АНАЛІЗ ГОСПОДАРСЬКОЇ ДІЯЛЬНОСТІ ЗА УМОВ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ.....	233
8.1. Поняття лінгвістичної змінної, нечіткої множини і її функції належності.....	233
8.2. . Побудова нечіткої моделі об'єкта економічного аналізу.....	242
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	253
ДОДАТКИ.....	259

## ПЕРЕДМОВА

У нинішніх умовах господарювання прийняти правильне управлінське рішення майже неможливо без попереднього моніторингу стану об'єкта управління, ґрунтового аналізу причин та наслідків тих змін, що відбуваються в ньому. Зважаючи на це, сучасні спеціалісти в галузі економіки повинні приймати рішення на підставі детального аналізу одержаної інформації, результатів попереднього моделювання наявної ситуації. Державі потрібні висококваліфіковані фахівці, які б уміли виконувати економічний аналіз виробничих явищ та процесів із застосуванням науково обґрунтованих, зокрема математичних, методів та моделей.

Літературні джерела з курсу “Економічний аналіз” містять дуже стислий виклад математичних методів і моделей, які застосовують у процесі аналізу господарської діяльності підприємств та обґрунтування рішень щодо підвищення ефективності цієї діяльності. Використовуючи підручники і посібники тільки з цього курсу, дуже важко, а в багатьох випадках взагалі неможливо практично оволодіти вищезазначеними методами без опрацювання спеціальної літератури. Ці методи детально викладено в книжках з елементарної математики, вищої алгебри, математичного аналізу, теорії ймовірностей та математичної статистики, економетрії, математичного програмування, теорії ігор, теорії масового обслуговування, дослідження операцій, теорії нечіткої логіки та інших.

На жаль, студенти спеціальності “Облік і аудит” та деяких інших економічних спеціальностей не вивчають усіх перелічених предметів, а вміння практичного застосування цих методів може їм знадобитися у їхній майбутній практичній діяльності. Зауважимо, що не всі майбутні фахівці з економіки зможуть самостійно засвоїти ці методи за спеціальними підручниками, оскільки багато з них розраховані на спеціальну математичну підготовку.

Метою написання цього посібника було викладення у компактному і, наскільки це можливо, простому та дохідливому вигляді головних математичних методів та моделей, які використовують у процесі економічного аналізу діяльності господарюючих суб'єктів.

У навчальному посібнику обґрунтовано зростаючу роль економічного аналізу в сучасних умовах розвитку виробництва, висвітлено суть математичних методів і моделей та особливості їх застосування у процесі аналітичних досліджень діяльності підприємств та інших суб'єктів підприємництва. Розглянуто простіші математичні методи та моделі економічного аналізу, якими повинні володіти всі майбутні фахівці з економіки, оскільки їх вивчають усі студенти-економісти, а також складніші, з якими ознайомляться під час навчання тільки деякі з цих студентів, зокрема ті, що навчаються за спеціальністю “Економічна кібернетика”. У додатках подано головні означення, формули, довідкові матеріали, теореми та їх наслідки.

Посібник, значною мірою узагальнюючи здобуті студентами знання з різних математичних дисциплін, допоможе їм не тільки глибше засвоїти матеріал курсу “Економічний аналіз” та оволодіти методикою застосування необхідних математичних методів і моделей для дослідження діяльності окремих суб'єктів господарювання і вивчення складних економічних проблем, але й сприятиме розвитку їхнього логічного мислення, набуттю вмінь і навичок у вирішенні типових та нестандартних завдань, які можуть виникнути в майбутньому під час прийняття ними управлінських рішень.

Крім студентів, посібник буде корисний аспірантам та викладачам вищих закладів освіти, економістам і всім тим, хто застосовує чи застосовуватиме математичні методи і моделі під час аналізу економічних явищ та процесів.

# 1. МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ЯК ОСНОВА АНАЛІЗУ ДІЯЛЬНОСТІ ГОСПОДАРЮЮЧИХ СУБ'ЄКТІВ

## 1.1. Зростання ролі економічного аналізу в сучасних умовах розвитку виробництва

Прийняття ефективних управлінських рішень в умовах формування ринкових відносин в Україні неможливе без детальної поінформованості особи, що приймає рішення, про стан та тенденції розвитку об'єкта управління, його зв'язок з навколишнім середовищем. Крім цього, в сучасних умовах господарювання керівник підприємства, підприємець, бізнесмен, менеджер чи будь-який інший творець рішення в своїй господарській діяльності повинен використовувати необхідну суму економічних знань, а також застосовувати такі традиційні загальнонаукові методи, як спостереження, експеримент, аналіз, синтез, індукція, дедукція, порівняння та ін.

Зазначимо, що прийняттю рішення повинні передувати оцінювання ефективності розвитку керованої економічної системи стосовно створених умов внутрішнього і зовнішнього економічних середовищ, дослідження причинно-наслідкових зв'язків зміни та розвитку економічних явищ і процесів, визначення кореляційної значущості причин, які зумовлюють та визначають ці явища і процеси, побудови інформаційної моделі економічної системи та використання наукової методики досліджень. Отже, управлінські рішення мають бути науково обґрунтованими, базуватися на точних розрахунках, глибокому і всебічному аналізі діяльності господарюючих суб'єктів.

Вивчення економічних явищ і процесів потребує застосування конкретно-наукового методу – економічного аналізу.

Термін «аналіз» (грец. analysis – розкладання) у вузькому розумінні означає процеси уявного чи фактичного розчленування явища або предмета на складові частини (елементи) для їх вивчення. Це дає змогу «зазирнути» всередину досліджуваного явища чи процесу, зрозуміти його внутрішню сутність, визначити роль кожного елемента в предметі або явищі. Аналіз у широкому розумінні – це спосіб пізнання предметів і явищ навколишнього середовища, заснований на розчленуванні цілого на його складові, і

вивчення їх у всій різноманітності зв'язків і залежностей [61, с. 11]. Аналіз є прямою процедурою формування суджень, а синтез (грец. *synthesis* – поєднання) – зворотною.

Умови аналізу економічної системи відрізняються від умов вивчення багатьох інших систем матеріального світу, зокрема, технічних і технологічних. У процесі аналізу, наприклад, електричного кола відомі його структура, причинно-наслідкові зв'язки між його елементами і розрахункові величини параметрів. До того ж відомі головні закономірності, яким підпорядковується функціонування цього приладу як фізичного перетворювача. Під час аналізу і моделювання технологічних процесів настільки повною апріорною інформацією зазвичай не володіють, хоча головні фізико-хімічні закономірності їх перебігу відомі. Однак недолік апріорної інформації заповнюють дані експериментів, які проводять у дослідному порядку чи безпосередньо у виробничих умовах.

У процесі аналізу економічних процесів і систем майже все відбувається інакше. Тут здебільшого немає апріорної інформації про кількісні залежності наявних причинно-наслідкових зв'язків між показниками. Суттєво ускладнює аналіз багатоманітність динамічних властивостей економічної системи, які зумовлюють різноманітні за формою і тривалістю перехідні процеси. Вони виявляються у вигляді часових запізнень (лагів) реакції економічного об'єкта на зовнішній вплив. Наприклад, випуск продукції завжди відбувається пізніше від використання коштів на її виробництво, задоволення на ринку збільшеного попиту на деякий товар відбувається тільки після виготовлення додаткового обсягу цього товару тощо.

Суттєве значення також мають стохастичні чинники. Вони виявляються як у впливі на економіку з боку природи і суспільства, так у внутрішньо-економічних зв'язках. Структура матеріальних і духовних потреб членів суспільства, кліматичні та природні явища можуть бути визначені тільки з деякою ймовірністю. Складність аналізу економічних системи також полягає у тому, що вони є досить громіздкими. Тому під час їх аналізу складно, а в багатьох випадках неможливо виконати експерименти з такою повнотою, як для технічних систем.

Отже, складність, громіздкість і динамічність економічних, особливо соціально-економічних, процесів і систем ведуть до того,



що витрати на виробництво, економічну ефективність, продуктивність праці тощо можна попередньо розрахувати тільки з тим чи іншим рівнем достовірності. Зауважимо що, зважаючи на значну інерційність цих систем, майбутні їхні стани значною мірою зумовлені попередніми. З огляду на це досить часто інформацією під час ідентифікації динамічних характеристик економічного об'єкта є часові ряди, одержані внаслідок спостережень його входів і виходів протягом скінченного проміжку часу.

З вищезазначеного випливає, що для дослідження економічної системи в цілому та її структурних елементів потрібний спеціальний вид аналізу. Він повинен бути абстрактно-логічним методом вивчення економічних явищ та процесів. Цей аналіз називають економічним.

*Економічний аналіз* – це система спеціальних знань для дослідження зміни та розвитку економічних явищ і процесів у їх взаємозв'язку та взаємозумовленості, що визначається суб'єктивними та об'єктивними причинами з метою забезпечення цільового управління ними [51, с. 12].

Ринкова трансформація економіки України веде до того, що у процесі вироблення оптимальних управлінських рішень розширюється зона діагностики і пошуку, зростає роль економічного аналізу. Сьогодні керівник підприємства не може розраховувати тільки на свою інтуїцію. В умовах жорсткої конкуренції його рішення повинні бути науково обґрунтованими, ризик того, що на підприємстві виникне небажана ситуація, має бути мінімальним. На зростання ролі аналізу як способу управління виробництвом також впливає підвищення науко- і капіталомісткості виробництва, збільшення дефіциту та вартості сировинних ресурсів та інші чинники.

Перед економічним аналізом у сучасних умовах розвитку виробництва стоять такі головні завдання [51, с. 22]:

- визначення місця економічної системи будь-якого порядку в ринковому середовищі, стратегії та тактики її поведінки;
- обґрунтування цільових економічних програм, індикативних планів і бізнес-планів;
- оцінення виконання цільових завдань розвитку економічної системи, причин і чинників, які зумовили позитивні та негативні зміни;

- виявлення невикористаних резервів покращення економіки досліджуваного об'єкта;
- визначення пріоритетів стратегічного розвитку економічної системи, оцінення ефективності використання ресурсного потенціалу;
- розроблення й обґрунтування заходів, спрямованих на активізацію використання резервів і прийняття оптимальних управлінських рішень.

Перехід до ринкових умов господарювання змінює характер аналітичних досліджень, розширює зону діагностики та пошуку. Функціональні важелі, зокрема економічний аналіз теперішнього механізму господарювання, суттєво змінюють свою цільову орієнтацію, предмет і метод дослідження порівняно з відповідним механізмом адміністративно-командної економіки. Це потребує застосування інших методів наукових досліджень, зокрема, таких сучасних загальнонаукових методів, як моделювання, формалізації та системного підходу.

Метод моделювання в економічному аналізі полягає у тому, що економічні об'єкти, явища і процеси вивчають не безпосередньо, тобто шляхом спостереження чи експерименту, а за допомогою матеріальних чи ідеальних моделей. Отримані внаслідок дослідження моделі результати переносяться на об'єкт-оригінал, який вивчають. Найбільше застосування в економічному аналізі має метод математичного (його ще називають економіко-математичним) моделювання, який є окремим видом ідеального моделювання.

Поняття формалізація споріднене із словами формально, формула. Формалізувати якісь викладки – означає записати їх формально, зокрема, у вигляді формул. Метод формалізації в економічному аналізі – це вивчення економічних об'єктів, явищ і процесів шляхом відображення їхнього змісту, структури, змін і внутрішніх та зовнішніх зв'язків у знаковій формі, за допомогою штучних мов, зокрема, мови математики, математичної логіки тощо. Метод формалізації частково збігається з методом економіко-математичного моделювання і системним підходом.

Системний підхід передбачає вивчення економічного об'єкта як системи, тобто як єдиного цілого і як складеного із частин.

Використання цього підходу означає виконання досліджень із застосуванням системного аналізу і (або) синтезу.

Економічний аналіз – це насамперед факторний аналіз у широкому розумінні цього слова, а не тільки у вигляді стохастичного факторного аналізу. Економічний факторний аналіз передбачає поступовий перехід від результатного показника до його кінцевої факторної системи чи навпаки, визначення всіх чинників, які мають вплив на зміну цього результатного показника, їх кількісне і якісне вимірювання.

У процесі вивчення діяльності суб'єктів господарювання вирізняють макроекономічний і мікроекономічний аналіз. Макроекономічний аналіз охоплює дослідження економічних систем на рівні національної економіки, її галузевої та регіональної структури. Його результатом є оцінювання тенденцій розвитку економічної системи країни чи регіону, вироблення висновків і пропозицій щодо змін національної та регіональної економічної політики, напрацювання механізмів державного регулювання економічних відносин господарюючих суб'єктів на внутрішньому та зовнішньому ринках тощо. Мікроекономічний аналіз охоплює дослідження господарської діяльності підприємств, установ та організацій. Особливістю цього аналізу є дослідження функціонування підприємства як цілісної системи в економічних, технічних, соціальних, екологічних та інших аспектах його життєдіяльності.

Крім поділу економічного аналізу на макроекономічний і мікроекономічний, його класифікують за роллю в управлінні, часовою, просторовою та іншими ознаками. Зокрема, за роллю в управлінні вирізняють управлінський та фінансовий аналіз, за часовою ознакою – стратегічний (перспективний, прогнозний), оперативний (поточний) і ретроспективний, а за просторовою – внутрішній та зовнішній економічний аналіз.

Однак, який би з розглянутих видів економічного аналізу ми не виконували, головною його особливістю є необхідність застосування математичних методів та моделей. Зважаючи на це, для його виконання необхідні знання цих методів і вміння їх практично застосовувати.

## 1.2. Загальна характеристика математичних методів економічного аналізу

Один із досить поширених сучасних загальнонаукових методів дослідження економіки є *метод формалізації*. Формалізація є середньою ланкою між змістовним початком і змістовним кінцем дослідження [81, с. 6].

На початку дослідження економічного об'єкта потрібно його змістовно охарактеризувати. Далі треба здійснити формалізацію змістових характеристик, експерименту на формальній, знаковій (математичній чи логіко-математичній) моделі. Наприкінці, результати моделювання необхідно змістовно пояснити, інтерпретувати.

Інтерпретація – це перенесення результатів моделювання на об'єкт дослідження. Вона є особливо складною під час формалізації теоретичних об'єктів, наприклад, теорій. Зауважимо, що формальну систему можна інтерпретувати не тільки однією, а й декількома змістовними теоріями, або за допомогою іншої формальної системи. В останньому випадку обидві формальні системи будуть взаємно інтерпретовані. Наприклад, частковий випадок моделі лінійного програмування (транспортну модель) можна застосовувати у процесі складання економічного плану перевезення одного виду продукції із декількох пунктів «постачання» у пункти «споживання» цієї продукції, розв'язання задач, пов'язаних з управлінням запасами, складанням змінних графіків, призначенням працівників на робочі місця і багатьма іншими. Прикладом взаємно інтерпретованих формальних систем є графік функції і аналітична формула цієї функції.

Головним у впровадженні методу формалізації в сучасну науку є застосування принципів і положень, методологічного і формального апарату власне математики і математичної логіки. Ця тенденція одержала назву *математизації* науки.

Наслідком математизації науки є не тільки щораз більше охоплення математичними методами різноманітних галузей наукових знань, а й дедалі інтенсивніше проникнення їх у кожную науку. На стику математики та інших наук формуються нові наукові дисципліни, які за предметом вивчення є галузями певних наук, а за методом дослідження належать до математики. Це, наприклад, математична логіка, математична фізика, математична біологія, математична географія, *математична економіка* [81, с. 8].

Відповідно до трьох рівнів наукових досліджень (емпіричний, емпірично-теоретичний і теоретичний) можна виділити *три основні рівні математизації* економіки: 1) впровадження кількісних показників і мір; 2) застосування математичних засобів опрацювання первинних даних з метою виведення емпіричних закономірностей у вигляді математичних формул, рівнянь і нерівностей; 3) побудова економіко-математичних моделей, теорій, концепцій шляхом застосування аксіоматично-дедуктивного підходу.

Для економічного аналізу *перший рівень математизації* традиційний. Він охоплює різноманітні «об'ємні» показники, наприклад, чистий прибуток підприємства, кількість працюючих, рентабельність власних коштів підприємства тощо. Наведені показники вимірюють у гривнях, особах, відсотках тощо. Однак для оцінення величин, наприклад, творчих чи підприємницьких здібностей керівників підприємства, деяких інших їхніх характеристик потрібне використання експертної інформації. Отже, вимірювання величини деяких показників має не кількісний, а якісний характер, вони можуть бути як об'єктивними, так і суб'єктивними. Розглянемо їх детальніше.

Теорія об'єктивних вимірювань досить добре розроблена. Такі якісні й кількісні вимірювання виконують спеціальні прилади, дія яких ґрунтується на використанні фізичних законів. Роль такого приладу під час суб'єктивних вимірювань відводиться людині, тобто експертові, який їх виконує. Загальна теорія, яка дає змогу з єдиних позицій розглядати об'єктивні та суб'єктивні вимірювання, побудована порівняно недавно. Вона ґрунтується на використанні логіки та теорії відношень [60, с. 26].

У цій теорії формальний опис множини об'єктів  $A = \{a_1, a_2, \dots\}$  і множини бінарних однорідних відношень  $R = \{R_1, R_2, \dots, R_n\}$  між цими об'єктами виконує емпірична система з відношеннями  $M = \langle A, R \rangle$ . Тут кожний елемент  $a_i \in A$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) множини  $A$  вважатимемо  $i$ -м економічним об'єктом. Для процедури вимірювання використовують числову систему з відношеннями  $N = \langle B, S \rangle$ , де  $B = \{b_1, b_2, \dots\}$  – множина дійсних чисел, а  $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$  – множина відношень між цими числами.

Вимірювання полягає у відображенні об'єктів емпіричної системи на множину чисел таким чином, щоб відношення між числами, які відображають об'єкти, зберігали відношення між цими об'єктами. Зберігати властивості й відношення об'єктів числова система  $N$  буде в тому випадку, якщо вона ізоморфна емпіричній системі  $M$ , тобто якщо між системами  $M$  і  $N$  існує взаємно однозначне відображення (функція)  $f$  об'єктів  $a_i$  ( $i=1, 2, \dots$ ) на множину чисел  $B$ . Причому для відображення  $f$  відношення  $R_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) між об'єктами  $a_i$  та  $a_j$  ( $a_i R_k a_j$ ) наявне тоді і тільки тоді, коли наявне відношення  $S_k$  між числами  $b_i$  та  $b_j$  ( $b_i S_k b_j$ ), які відображають ці об'єкти на числовій осі.

Отже, внаслідок ізоморфізму  $f$  кожний елемент  $a_i$  носія  $A$  системи  $M$  має відповідне єдине число  $b_i = f(a_i)$ , а для кожного образу  $b_i$  є єдиний прообраз  $a_i$ .

У багатьох випадках жорстку умову взаємної однозначності відображення  $f$  можна послабити. Це приводить до гомоморфного відображення. Тому в подальших випадках будемо вважати, що один і той же образ відображення  $f$  може мати один чи декілька прообразів.

Головними проблемами теорії вимірювань є проблема існування (подання, зображення) і єдиності. Проблема існування пов'язана з доведенням справедливості приписування числових значень об'єктам чи явищам, а єдиності – із з'ясуванням того, в якому розумінні можна вести мову про єдиність цих значень. Проблема існування полягає у доведенні можливості подання емпіричної системи  $M$  за допомогою числової системи  $N$ , яка зберігає відношення між об'єктами, тобто гомоморфної чи ізоморфної. Проблема єдиності полягає у визначенні всіх можливих способів подання заданої емпіричної системи  $M$  різними числовими системами і у визначенні зв'язку між ними. Останню проблему ще можна сформулювати як проблему визначення шкали  $\langle M, N, f \rangle$ , яка є єдиною з точністю до якогось конкретного перетворення  $\varphi$ .

Отже, якщо є дві шкали  $\langle M, N, f_1 \rangle$  і  $\langle M, N, f_2 \rangle$ , для яких образи одного й того ж об'єкта  $a_i$  емпіричної системи різні ( $b' = f_1(a_i)$ ,  $b'' = f_2(a_i)$ ,  $b' \neq b''$ ), то функцію допустимого перетворення  $\varphi: b' = \varphi(b'')$  можна використати для опису поняття єдиності відображення і, відповідно, властивостей цієї функції  $\varphi$ , визначити тип шкали вимірювання. До перетворень, що характеризують основні типи шкал, належать такі: тотожне, подібності й зсуву, лінійне, монотонне і взаємно однозначне.

Для вимірювання величини економічних об'єктів можна використовувати кілька типів шкал. На відміну від простіших («слабших»), складніші («сильніші») шкали вимірювань містять більше інформації про об'єкти емпіричної системи з відношеннями, але натомість вимагають більше припущень відносно операцій і відношень над цими об'єктами. Чим більша множина числових систем, в які гомоморфно відображається розглянута емпірична система з відношеннями, тим «сильніша» шкала, за допомогою якої її вимірюють. Вибір можливої шкали вимірювань повинен узгоджуватись з метою досліджень. Наприклад, якщо метою дослідження є впорядкування регіонів за величиною їхнього трудового потенціалу, то немає необхідності оцінювати кількісні величини трудових потенціалів регіонів, досить зосередити увагу на порівнянні їхніх властивостей.

Вирізняють якісні та кількісні шкали вимірювань. В економічному аналізі найчастіше використовують номінальну і порядкуву якісні шкали та інтервальну, пропорційну й абсолютну кількісні шкали вимірювання.

*Номінальну шкалу* вимірювання (шкалу найменувань, класифікації) застосовують для групування економічних об'єктів за ознакою схожості їхніх властивостей. Визначена шкала найменувань всім об'єктам одного і того ж класу (групи) присвоює одне і те ж число, а об'єктам різних класів – різні числа. Тобто виміри у цій шкалі дає змогу визначити лише відношення тотожності (еквівалентності) або відмінності між порівнюваними об'єктами. Наприклад, підприємство, що випускає автомобілі, може класифікувати їх за кольором кузова: для зеленого кольору обирають цифру 1, для жовтого – 2, для

синього – 3 і т. д. Це не означає, що зелений колір кращий від синього. Така мітка корисна під час автоматизованого опрацювання інформації. Вона спрощує кодування і введення даних у цьому випадку. Її використовують, зокрема, під час індексації номенклатури виробів (специфікації виробів), кодування статі працівника, класифікації документів та інших носіїв інформації, нумерації підрозділів в організації тощо.

У шкалі найменувань довільне число однаково підходить для ідентифікації об'єктів. З огляду на це є велика кількість варіантів присвоєння чисел класам еквівалентних об'єктів. Поняття єдності відображення  $f$  для цієї шкали полягає у взаємоднозначності допустимого перетворення  $\varphi$ . Це означає, що якщо є два варіанти приписування числових значень класам еквівалентних об'єктів, то ці варіанти мають бути зв'язані між собою взаємоднозначно, що дає змогу визначити зв'язок між числовими варіантами опису класів еквівалентності. У цій шкалі немає поняття масштабу і початку відліку.

*Шкалу порядку* (рангову шкалу) застосовують для вимірювання впорядкування об'єктів за однією чи сукупністю ознак. Вона є інформативнішою, ніж шкала найменувань, оскільки дає змогу зіставляти альтернативи між собою. У цій шкалі підвищення чи зниження значення мітки пов'язане з відповідними змінами деякого окремого чи узагальненого показника. Наприклад, можна взяти, що цифра 1 означає низький прибуток, 2 – середній, а 3 – високий. Тобто ранг об'єкта стає більшим зі збільшенням величини мітки.

Однак рангова шкала не дає змоги у разі визначення переваги альтернативи  $A$  над альтернативою  $B$  вказати, у скільки чи на скільки  $A$  краща від  $B$ . У такій шкалі також немає поняття масштабу і початку відліку. Зважаючи на це, оцінку альтернатив можна задавати не лише числами, а й довільною упорядкованою множиною. Наприклад, у навчанні використовують оцінки знань «відмінно», «добре», «задовільно», «незадовільно» або їхні цифрові еквіваленти: «5», «4», «3», «2».

Шкала порядку єдина з точністю до монотонного перетворення. До цієї шкали можна застосувати будь-яке монотонне перетворення, не порушуючи певного порядку. Наприклад, до значення



мітки у цій шкалі можна додавати константи, брати логарифм від цього значення, підносити його до степеня тощо.

*Шкалу інтервалів* застосовують для відображення величини відмінності між властивостями об'єктів. Оцінювання за шкалою інтервалів залежить від двох довільно вибраних показників: початку відліку і масштабу, котрий визначає одиниці вимірювання. У цій шкалі відстань між двома мітками має значення та є порядковою, але немає мітки абсолютного нуля. Прикладом використання інтервальної шкали є оцінювання родючості земель певної категорії в балах чи вимірювання температури середовища у градусах Цельсія, тому що різниця між 80 і 70 градусами така ж, як і різниця між 50 і 40 градусами, а 20 градусів більше, ніж 10 градусів. Однак це не означає, що повітря при 20 градусах удвічі тепліше, ніж при 10 градусах.

Розглянута шкала не має властивості адитивності, тому до неї не можна застосувати жодної з основних арифметичних операцій. Допустимим перетворенням  $y = \varphi(x)$  для цієї шкали є лінійне перетворення  $\varphi(x) = ax + b$  ( $a > 0, b > 0$ ), де  $x, y$  – відповідно початкова і нова мітки виділених об'єктів у цих шкалах. Отже, шкала інтервалів – єдина з точністю до лінійного перетворення.

*Пропорційна шкала* (шкала відношень) є подальшим розвитком вищезазначених шкал. У цій шкалі числа відображають відношення властивостей об'єктів, тобто у скільки разів властивість одного об'єкта перевищує цю ж властивість іншого об'єкта. Допустимим перетворенням у цій шкалі є перетворення подібності:  $\varphi(x) = ax$ . Шкала відношень є частковим випадком шкали інтервалів при фіксованій нульовій точці відліку ( $b = 0$ ).

До цієї шкали можна застосувати всі арифметичні і статистичні дії. Шкалу відношень застосовують для вимірювання технічних, фізичних та інших характеристик (довжина, маса, ціна тощо), для яких існує природна нульова точка (початок відліку), що зумовлюється законами функціонування зіставлюваних систем. Наприклад, вага є пропорційною шкалі. Ця шкала має не тільки нульову точку відліку. Для цієї шкали можна стверджувати, що різниця між 5,3 та 2,8 метрами є такою ж, як і різниця між 6,9 та 4,4

метрами, а також те, що співвідношення 8,2 та 4,1 метра таке саме, як співвідношення 7,4 та 3,7 метра.

*Абсолютна шкала* є частковим випадком шкали відношень з одиничним масштабом. Допустимим перетворенням для цієї шкали є тотожне перетворення, тобто  $\varphi(x) = x$ . Звідси зрозуміло, що в цій шкалі наявне одне і тільки одне відображення об'єктів у числову систему. Абсолютну шкалу застосовують, наприклад, для вимірювання кількості людей, об'єктів, предметів тощо. Для відображення значень у цій шкалі використовують множину натуральних чисел.

Якщо величину деякого показника (узагальненого) визначають на підставі значень кількох інших показників, то кажуть, що для оцінювання першого з них треба застосувати теорію похідних вимірювань. У цьому разі суттєво зростає складність отримання остаточного результату. Такі вимірювання потребують знань не тільки значень складових показників, а й ступенів їхнього впливу на загальну оцінку узагальненого показника.

*Другий рівень математизації* полягає у застосуванні математичних засобів опрацювання даних з метою виведення емпіричних закономірностей. Як приклади можна навести визначення на рівні економіки країни емпіричної залежності між величиною створеного суспільного продукту від двох найважливіших чинників – сукупних затрат живої праці у матеріальному виробництві та сумарного обсягу використовуваних виробничих фондів у вигляді формули Кобба-Дугласа, залежність між виробництвом кінцевої продукції і виготовленням усієї продукції, беручи до уваги проміжну, у вигляді формул міжгалузевого балансу.

Формули емпіричних залежностей, які є відображенням емпіричних законів, можуть бути виведені в економіці, в суміжних із економікою науках, наприклад, у соціально-економічній географії, чи у далеких від економіки науках, наприклад, фізиці, біології тощо. В останньому випадку використання цих формул в економічному аналізі як методичних засобів потребує попереднього обґрунтування.

На другому рівні математизації особливо широко застосовуються [81, с. 10] прийоми математичної статистики, зокрема регресійний аналіз, моделювання міжгалузевих і міжтериторіальних зв'язків з допомогою засобів матричної алгебри (балансові методи, математичне програмування, методи дослідження операцій) та ін.

На *третьому рівні математизації* будують економіко-математичні моделі, теорії шляхом застосування насамперед аксіоматично-дедуктивного підходу.

Під час застосування аксіоматично-дедуктивного методу для побудови моделей і теорій вирішальне значення мають не кількісно-математичні прийоми, а засоби логіко-математичного обчислення. Суть цього методу побудови теорії чи наукової дисципліни полягає в тому, що за основу тут беруть певні вихідні (початкові) положення (аксіоми, постулати), а решта знань (закони, теореми, леми) виводять (дедукують) із початкових шляхом виведення (числення) за певними правилами [81, с. 11].

Зважаючи на це, важливим напрямом удосконалення економічного аналізу є застосування під час його проведення математичних (економіко-математичних) методів. Економіко-математичні методи – це комплекс наукових методів дослідження економічних процесів за допомогою математики і кібернетики. Застосування цих методів у процесі аналізу господарської діяльності скорочує терміни його проведення, замінює наближені чи спрощені розрахунки точними обчисленнями, дає змогу розв'язати нові багатовимірні задачі цього аналізу, які практично не можна виконати вручну чи традиційними методами.

Застосування математичних методів в економіці має багате минуле, хоча науковий напрям, пов'язаний із застосуванням математичних методів і обчислювальної техніки, швидкими темпами почав розвиватися лише наприкінці 50-х років ХХ ст.

Найважливішим у використанні математики в економіці є не виконання арифметичних розрахунків, а математичне моделювання явища, ситуації чи процесу з метою вивчення того чи іншого аспекту у його розвитку.

Спроби застосовувати математику до опису і вивчення різних економічних ситуацій були у ХVIII ст. Ще в 1766 р. Франсуа Кене (1694–1774) запропонував так звану «економічну таблицю», яка фактично була кількісною моделлю національної економіки Франції.

Активно застосовувати економіко-математичні методи в наукових дослідженнях розпочали в ХІХ ст. У виданій в Парижі 1838 р. праці французького вченого О. Курно (1801–1877) «Дос-

лідження математичних принципів теорії багатства» вперше систематично застосовано математичні методи.

Видатним представником математичного напрямку в економіці того часу був швейцарський вчений Л. Вальрас (1834–1910). Його заслугою є не тільки те, що він чітко і якісно визначив роль і місце математичних методів у вивченні економіки, але й практично проілюстрував їхні можливості. Його теорія загальної конкурентної рівноваги була протягом багатьох років рушійним чинником розвитку цих методів.

Відомими вченими, які розвивали математичні методи в економіці, були Г. Гесен (1810–1859) в Німеччині, В. Джевонс (1835–1882) і Ф. Еджворт (1845–1926) в Англії, Л. Вальрас (1834–1910) в Швейцарії, Г. Кассиль (1866–1944) у Швеції, В. Парето (1848–1923) в Італії, В. Дмитрієв (1868–1913) в Росії. Зокрема, В. Парето запропонував визначення багатоцільової оптимуму, статистичні моделі з дослідження доходів населення в різних країнах, Л. Вальрас – модель економічної рівноваги, Ф. Еджворт – модель, яка ілюструє ефективність обміну, В. Дмитрієв – модель повних господарських витрат праці та збалансованих цін.

Працювали над розвитком економіко-математичного напрямку в економічній науці і українські вчені. Творцем національної економіко-математичної школи, яка стала школою світового масштабу, є Є. Слуцький (1880–1948). Головною його працею є опублікована в 1915 р. в італійському журналі стаття «До теорії збалансованого бюджету споживача». Започаткувавши неокласичну теорію попиту, що ґрунтувалася на засадах корисності, цей український вчений-економіст вивів рівняння, яке модельно відобразило взаємозв'язок між попитом, динамікою цін і доходів. Крім Є. Слуцького, економіко-математичні методи в Україні розробляли відомі сучасники М. Столяров, Ф. Арнольд, О. Білімович та інші. Значний внесок у розвиток теорії трудової вартості й теорії граничної корисності зробив визначний український вчений-економіст М. Туган-Барановський.

З розвитком математичних і статистичних методів в економіці виник новий напрям економічних досліджень – економетрика. Хоча офіційною датою її народження багато вчених вважають 1931-й (рік заснування Міжнародного економетричного

товариства), однак започаткував термін «економетрика» львівський вчений Павло Чомпа, опублікувавши у Львові 1910 р. книгу «Нариси економетрії і природної теорії бухгалтерії, яка ґрунтується на політичній економії». Початково економетрика була введена для позначення напрямку, який повинен був синтезувати економічну теорію, математику і статистику. Однак надалі коло проблем, які розробляли в межах цього напрямку, звужилося. Сьогодні поняття «економетрика» охоплює головню побудову математико-статистичних моделей економічних процесів (так званих економетричних моделей) та застосування методів математичної статистики для визначення параметрів цих моделей.

Якщо на ранньому етапі розвитку економіко-математичних методів основним математичним апаратом було диференціальне та інтегральне числення то, починаючи з 30-х років ХХ ст., в економіку проникають нові методи дослідження, які пов'язані з поняттям опуклих конусів, багатозначних відношень, з теоремами про нерухому точку, з теорією додатних матриць тощо. Це дало можливість не тільки інтенсифікувати роботу над старими проблемами, але й поширити застосування математичних методів на ситуації нового типу. Прикладом цього є виникнення теорії ігор.

Поява наприкінці 50-х років минулого століття електронної обчислювальної техніки дала новий поштовх у застосуванні математичних методів в економіці. Ще більше проникала математика в економіку, з'явилися нові задачі, для реалізації яких потрібно було створювати нові методи й алгоритми. Виникли нові дисципліни: нелінійне програмування, динамічне програмування, теорія розкладів та ін.

Однак у колишній Радянській Україні, як і в усьому Радянському Союзі, зважаючи на ідеологічні утиски тоталітарного режиму, економіко-математичні дослідження розвивалися мляво. Наприклад, кібернетика, економетрія та деякі інші науки вважали буржуазними. Як писали в підручниках цих часів, «більшість її (економетрії) математичних формул і рівнянь є математичним вираженням антинаукових і апологетичних вульгарних політекономічних теорій»<sup>1</sup>. Хоча починаючи

---

<sup>1</sup> *Браславец М. Е.* Экономико-математические методы в организации планирования сельского хозяйства. – К.: Урожай, 1968.

з 60-х років ХХ ст. стало дещо «тепліше», і дослідження в галузі застосування економіко-математичних методів дещо відродилися і поживали. Підтвердженням цього є такі фундаментальні праці: «Экономический расчет наилучшего использования ресурсов» Л. В. Канторовича (1959), «Измерения затрат и их результатов в социалистическом хозяйстве» В. В. Новожилова (1959), «Экономико-математические методы и модели» В. С. Немчинова (1962). Заслужено набув світового авторитету заснований у 60-х ХХ ст. під керівництвом академіка В. М. Глушкова Інститут кібернетики у Києві. Досягнення цього Інституту в різних напрямках розвитку науки і техніки мали надзвичайно великий вплив на розвиток економіко-математичних методів як в Радянському Союзі, так і за кордоном. На жаль, за роки репресій багато видатних представників української наукової, зокрема, математичної еліти, були фізично знищені або виїхали з України.

Для розв'язання задач економічного аналізу застосовують різноманітні математичні методи. На рис. 1.1 подано один із варіантів схеми основних математичних методів, які застосовують в аналізі господарської діяльності підприємств і організацій [11, с. 95]. Ознаки класифікації економіко-математичних методів на цій схемі значною мірою умовні.



Рис. 1.1. Основні математичні методи, які застосовують в економічному аналізі

Зокрема, деякі із зазначених задач можна розв'язувати іншими методами, які подані на цій схемі. Наприклад, задачі керування

запасами можна розв'язувати методами математичного програмування чи із застосуванням теорії масового обслуговування. Розв'язуючи задачі мережевого планування та управління, можна застосовувати найрізноманітніші математичні методи.

Розглянуті на схемі економетричні методи можна було б віднести до методів математичної статистики, а методи математичного програмування – до методів дослідження операцій. Адже поняття «методи дослідження операцій» в навчальній літературі трактують по-різному. Одні автори відносять до цих методів методи математичного програмування, а інші – всі економіко-математичні методи.

Розглянута схема відображає сучасний стан використання різних розділів математики для розв'язування економічних задач і не є класифікатором економіко-математичних методів, оскільки не пов'язана будь-якими класифікаційними ознаками. Викладаючи матеріал посібника, ми головню дотримуватимемось цієї схеми.

Методи елементарної і вищої математики здебільшого застосовують в інших методах економічного аналізу. Однак їх можна застосовувати і окремо. Наприклад, знаходження розв'язку задачі математичного програмування без обмежень чи факторний аналіз зміни багатьох економічних показників можна виконати за допомогою диференціювання та інтегрування.

Якщо зв'язок між аналізованими характеристиками об'єктів чи процесів, які вивчають, не детермінований, а стохастичний, то практично єдиним інструментом дослідження є статистичні та імовірнісні методи. Їх також застосовують як самостійно, так і в інших методах економічного аналізу, наприклад, теорії ігор, теорії масового обслуговування, імітаційному моделюванні та ін.

Як зазначали, застосування математичних і статистичних методів в економічній теорії привело до нового напрямку досліджень, який отримав назву економетричного. Відокремлення в розглянутій схемі економетричних методів від статистичних дещо умовне, оскільки більшість математико-статистичних методів економічного аналізу є економетричними методами.

Однак загалом не можна ототожнювати економіко-математичне моделювання з економетрикою. Адже економетрика є тільки одним із напрямів економіко-математичних методів аналізу. Цей напрям полягає у статистичному вимірюванні (оцінюванні) пара-

метрів математичних виразів, що характеризують деяку економічну концепцію про взаємозв'язок і розвиток об'єкта, явища, і в застосуванні одержаних таким шляхом економічних моделей для конкретних економічних висновків [67, с. 20].

Подібно до попереднього, відокремлення методів математичного програмування від методів дослідження операцій зумовлено швидким розвитком методів математичного програмування, а також тим, що вони утворюють окрему групу основних засобів розв'язання задач оптимізації виробничо-господарської діяльності.

До методів дослідження операцій зачисляють тільки класичні методи цієї групи: методи управління запасами, мережевого планування і управління, теорії ігор, теорії масового обслуговування та ін. Аналіз за допомогою цих методів є пошуком такого співвідношення структурних взаємозв'язаних елементів систем, яке найбільшою мірою відповідає задачі одержання найкращого значення економічного показника із можливих.

Економічна кібернетика вивчає загальні закономірності побудови та функціонування складних систем з погляду законів і механізмів управління та руху інформації в них.

Крім описаного підходу, економіко-математичні методи економічного аналізу можна класифікувати за ознакою оптимальності, точності, повноти первинної інформації тощо. Якщо у якомусь методі пошук розв'язку відповідної задачі відбувається за заданим критерієм оптимальності, то цей метод відносять до групи *оптимізаційних* методів. В іншому випадку (пошук розв'язку без критерію оптимальності) розглянутий метод відносять до групи *неоптимізаційних* методів.

Розглянутий метод зачисляють до групи *точних* методів, якщо його алгоритм дає змогу одержати тільки єдиний розв'язок, інакше цей метод відносять до групи *наближених* методів. Отже, наближені методи дають змогу одержати розв'язок із будь-яким ступенем точності.

У сучасних умовах розвитку національної економіки, коли ускладнений аналіз рядів статистичних даних традиційними методами, зважаючи на значні нестаціонарності відповідних випадкових процесів та ринкової невизначеності, яка не має статистичної природи в класичному розумінні, коли класичні економіко-



математичні методи для проведення економічного аналізу застосувати не доцільно, виникає потреба у застосуванні теорії нечіткої логіки, м'яких обчислень і наближених висновків.

### **1.3. Економіко-математичне моделювання як спосіб вивчення господарської діяльності**

**1.3.1.** Впровадження в економічний аналіз математичних методів на усіх трьох рівнях, а також формування математичної економіки пов'язане з побудовою, вивченням і застосуванням математичних моделей економічних явищ, об'єктів та процесів, їхніх властивостей і відношень.

У літературі наводять різні визначення поняття моделі. Найбільш строге і формальне визначення моделі ґрунтується на понятті гомоморфізму та ізоморфізму (спрощення та структурної подібності). Спрощення і абстрагування від несуттєвих для мети дослідження властивостей об'єкта є однією з умов наукового пізнання. У спостерігача спочатку формується гомоморфний відповідно до мети дослідження образ об'єкта. Після цього спостерігач будує власне модель – абстрактну чи фізичну систему, ізоморфну, тобто взаємно однозначно тотожну сформованому раніше спрощеному образу відносно набору фіксованих властивостей або відношень.

*Модель* розглядаємо як уявну чи реальну систему, яка замінює або відтворює відповідно до мети дослідження об'єкт-оригінал таким чином, що її вивчення здатне давати нову інформацію про цей об'єкт. Отже, модель – це спеціально побудований за певними правилами, які беруть до уваги мету дослідження, спрощений аналог якоїсь реально існуючої економічної системи, який є її відтворенням чи імітуванням.

Процес побудови, дослідження та практичного використання моделі називають *моделюванням*. У процесі побудови моделі виділяють значимі для прийняття рішення елементи та зв'язки між ними, тобто досліджують певні властивості об'єкта чи процесу, нехтуючи іншими, не суттєвими для мети дослідження властивостями та зв'язками. Моделювання завжди має цілеспрямований характер і дає можливість досліджувати лише певні властивості об'єкта-оригінала.

Унаслідок спрощення модель та оригінал не є тотожними, між ними, крім схожості, наявні також певні відмінності. Тому висновки щодо структури чи поведінки об'єкта-оригінала, зроблені на підставі вивчення його моделі, потребують подальшого уточнення і корегування, оскільки вони є не достовірними, а приблизними.

Дослідження за допомогою моделі дає змогу здійснювати випробування без «руйнування» об'єкта-оригінала, експериментувати без значних фінансових, матеріальних чи моральних втрат.

Оскільки під час спрощення беруть до уваги мету дослідження, то, якщо інша мета, ми можемо отримати інший образ і, відповідно, іншу модель об'єкта-оригінала. Отже, для одного і того ж економічного об'єкта можна побудувати кілька моделей. Аналогічно до цього, одна і та ж модель може відображати декілька об'єктів чи процесів.

**1.3.2.** Вирізняють дві групи моделей: матеріальні та ідеальні. Математичні моделі належать до групи ідеальних, зокрема знакових, моделей. Якщо математична модель відображає економічний об'єкт (його властивості, відношення чи процеси, що в ньому відбуваються), то її називають *економіко-математичною*. Побудована економіко-математична модель (ЕММ) є самостійним об'єктом дослідження.

ЕММ об'єкта обов'язково містить деякі змінні. Одні з них заздалегідь визначені, а інші потрібно визначити (невідомі величини). Перші з них називають *екзогенними* (визначаються поза моделлю) змінними. До них належать змінні, які відображають фізичне втілення досліджуваного об'єкта (позначимо їх  $a_l, l \in L$ ) та зовнішні (щодо модельованого об'єкта) умови (позначимо їх  $x_i, i \in I$ ). Внутрішні екзогенні змінні іноді називають параметрами. Змінні, які визначаються за допомогою моделі, називають *ендогенними* (позначимо їх  $y_j, j \in J$ ).

Нехай, наприклад, нам необхідно визначити ефективну спеціалізацію – головну галузь багатогалузевого сільськогосподарського підприємства. Тоді екзогенними змінними моделі можуть бути такі: поголів'я і вид наявних тварин, засоби механізації, трудові ресурси, наявні площі різного типу земель (орних,

сіножатеї, пасовищ, саду, коефіцієнти ефективності праці у кожній галузі виробництва, державне законодавство щодо пільг чи грошових позик для підприємства певної спеціалізації тощо. Ендогенними змінними будуть ті, для обчислення яких і необхідно будувати відповідну ЕММ, зокрема, обсяги можливих прибутків залежно від спеціалізації, питання працевлаштування тощо.

ЕММ можна інтерпретувати як особливий перетворювач зовнішніх (відомих, екзогенних) умов об'єкта («входу»)  $X = (x_i)_{i \in I}$  в його шукані (невідомі, ендогенні) характеристики («виходу»)  $Y = (y_j)_{j \in J}$ . Деякі автори [17, с. 20] залежно від способу вираження співвідношень між зовнішніми умовами, внутрішніми параметрами і шуканими характеристиками поділяють ЕММ на два основних типи: функціональні і структурні.

У *функціональних* моделях (їх ще називають кібернетичними) інформація про внутрішню структуру об'єкта, який досліджують, не використовується, і ця структура не вивчається. Об'єкт, який досліджують за допомогою функціональної моделі, є своєрідною «чорною скринькою», внутрішня структура якої невидима. Ця модель імітує поведінку об'єкта так, що, задаючи значення «входу»  $X$ , можна отримати значення «виходу»  $Y$  (без участі інформації про  $A = (a_l)_{l \in L}$ ). Побудувати функціональну модель – означає відшукати оператор  $D$ , який зв'язує  $X$  та  $Y$ :

$$Y = D(X). \quad (1.1)$$

Такі моделі широко застосовуються в економічному регулюванні, коли на поведінку об'єкта («вихід») впливають за допомогою зміни «входу». Як приклад можна навести модель поведінки споживачів за умов товарно-грошових відносин.

На відміну від функціональних, *структурні* моделі відображають внутрішню організацію об'єкта дослідження, тобто його складові частини, внутрішні параметри, їхні зв'язки з «входом» і «виходом» тощо. Найбільш поширені два види структурних моделей:

1) усі невідомі виражаються у вигляді функцій від внутрішніх умов і внутрішніх параметрів об'єкта:

$$y_j = f_j(A, X), \quad j \in J; \quad (1.2)$$

2) задано неявні щодо невідомих характеристик співвідношення (системи рівнянь, нерівностей тощо.), з яких ці характеристики треба знайти:

$$\varphi_k(A, X, Y) = 0, \quad k \in K. \quad (1.3)$$

Хоча отримати розв'язок у вигляді співвідношення (1.2) краще, ніж шукати його з умов (1.3), але для багатьох математичних задач розв'язки не можуть бути виражені в формульному, аналітичному вигляді. Прикладом структурної моделі є модель міжгалузевого балансу.

Розвиток електронної обчислювальної техніки і розширення можливостей людино-машинного діалогу привели до виникнення *імітаційного* моделювання. Імітаційною моделлю деякого об'єкта є така його модель, над якою здійснюють машинний експеримент з метою отримання нової інформації про цей об'єкт. Машинну імітацію застосовують переважно у тих випадках, коли аналітичні розв'язки проблеми одержати неможливо, а експериментувати з реальним об'єктом недоцільно.

Як було зазначено, економічний аналіз – це насамперед факторний аналіз у широкому розумінні цього слова. Метою цих досліджень є визначення залежності результатного показника і ступеня впливу на нього системи вихідних чинників. Залежно від того, що буде первинним у цих дослідженнях, результатний показник чи незалежні чинники, вирізняють задачі прямого і зворотного факторного аналізу.

Виходячи із співвідношення екзогенних і ендогенних змінних, вирізняють *відкриті*, у яких переважають перші, та *закриті* ЕММ, у яких переважають другі змінні. Кожна модель повинна містити хоча би одну ендогенну змінну, тому повністю відкритих моделей немає. Досить рідкісні також повністю закриті економіко-математичні моделі.

ЕММ за ступенем агрегування поділяють на макроекономічні та мікроекономічні. *Макроекономічні* моделі описують економіку як єдине ціле. Змінними в цих моделях є різноманітні агреговані величини, такі, наприклад, як валовий внутрішній продукт, сукупний попит, капітал, праця тощо. *Мікроекономічні* моделі стосуються окремих економічних об'єктів, зокрема підприємств, фірм тощо.

Залежно від цільового призначення ЕММ поділяють на теоретико-аналітичні та прикладні. *Теоретико-аналітичними* називають такі моделі, які використовують у дослідженні загальних властивостей і закономірностей економічних явищ і процесів. *Прикладні* моделі застосовують для розв'язання конкретних економічних задач.

В економічному аналізі головно застосовують дескриптивні й меншою мірою нормативні (прескриптивні) ЕММ. *Дескриптивні* моделі відповідають на запитання «Як це відбувається?» чи «Як це ймовірніше всього може розвиватися далі?» Тобто вони пасивно описують і пояснюють дійсність, дають змогу зробити коротко-терміновий прогноз некерованих економічних процесів. Моделі керованих і регульованих економічних процесів називають *нормативними*. Вони відповідають на запитання «Як це повинно бути?», тобто передбачають цілеспрямовану діяльність. Їх використовують для перетворення економічної дійсності.

Залежно від відображення причинно-наслідкових зв'язків ЕММ можна поділити на детерміновані і стохастичні (імовірнісні). В *детермінованих* моделях використовують жорсткі функціональні зв'язки між змінними. Для *стохастичних* моделей характерний чинник випадковості. У таких моделях умови функціонування і характеристики станів змодельованого об'єкта є випадковими величинами.

За способом відображення чинника часу вирізняють *статичні* ЕММ, в яких усі залежності стосуються одного періоду часу, і *динамічні*, в яких відбувається процес зміни об'єкта у часі. Тобто статичні моделі відображають стан досліджуваного об'єкта на початку та (чи) наприкінці певного часового проміжку і не розглядають самого процесу переходу.

**1.3.3.** Основною частиною математизації економіки є побудова економіко-математичних моделей. Впровадження в економічний аналіз методів математичного моделювання потребує зосередження уваги на методиці цих досліджень. Адже у разі неправильної методики можна побудувати неадекватну досліджуваному об'єктові економіко-математичну модель, отримати помилковий розв'язок сформульованої задачі. З оглянутого виникає необхідність розгляду етапів виконання економічного аналізу за допомогою математичного моделювання. Можна виділити сім етапів такого дослідження.

1. *Визначення мети і розробка плану дослідження.* Замовник і виконавець дослідження спільно формулюють мету і складають приблизний план дослідження. Оскільки в результаті виконаного дослідження іноді є можливість отримати відповіді на ширше від очікуваного коло запитань, то мета дослідження не може бути надто вузькою. Хоча творчий процес, яким є економічний аналіз досліджуваного об'єкта, не завжди можна і варто контролювати, потрібний все-таки приблизний план проведення дослідження, згідно з яким має відбуватися цей аналіз.

2. *Формулювання економічної проблеми та її якісний аналіз.* Від того, наскільки повним і глибоким буде розуміння суті наявної проблеми, залежить ступінь адекватності побудованої моделі щодо об'єкта економічного аналізу. Тому цей етап є одним з найважливіших. Він охоплює вирішення найважливіших рис і властивостей об'єкта моделювання та нехтування другорядними, вивчення структури цього об'єкта і головних залежностей, які зв'язують його елементи.

Важливим тут є усвідомлення можливості розчленування проблеми на підпроблеми, окреме дослідження яких значно полегшить процес економічного аналізу. На цьому етапі окреслюють міру деталізації моделі, яку розроблятимуть, а також визначають інформаційне забезпечення задачі, вирішують питання агрегування та деталізації її екзогенних та ендегенних змінних.

3. *Побудова математичної моделі.* На цьому етапі відбувається формалізація розглянутої проблеми, тобто запис її за допомогою формального математичного апарату, математичних залежностей і відношень. Під час побудови ЕММ економічні та математичні системи наукових знань пристосовуються одна до одної. У процесі розробки моделі економічного об'єкта відбувається побудова його математично ізоморфного образу з допомогою знаків-величин, знаків-операцій (дій) і знаків-відношень, які заміщують відповідні елементи економічної дійсності, їхні властивості, взаємозв'язки тощо.

Наприклад, модель

$$x_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = y_i \quad (1.4)$$

сама по собі ще нічого не означає, поки її знакам  $x, i, -, \Sigma, j, n, a, =, y$  не поставлено у відповідність елементи, їхні властивості й відношення конкретної модельованої системи. У цій моделі знаками величин є  $x, i, j, n, a, y$ . У процесі вивчення зв'язку між виробленою і спожитою продукцією деякої галузі (в моделі міжгалузевого балансу виробництва і розподілу продукції у вартісному вигляді) їх можна відповідно інтерпретувати як вартість валової (випущеної) продукції галузі –  $x$ , вартість кінцевої (спожитої і збереженої) продукції –  $y$ , коефіцієнт прямих матеріальних затрат (кількість одиниць продукції однієї галузі, безпосередньо витрачених на виробництво одиниці продукції іншої галузі) –  $a$ , кількість галузей –  $n$  (будь-яку галузь як виробник позначають символом  $i$ , а як споживач –  $j$ ). Знаки операцій – це – (знак віднімання) та  $\Sigma$  (знак сумування). Знак відношення  $=$  (рівність). Інтерпретована таким чином формула (1.4) означає, що різниця між вартістю випущеної продукції  $i$ -ї галузі і сумою вартостей часток цієї продукції, спожитих цією ж і всіма іншими галузями, дорівнює вартості спожитої населенням і збереженої про запас продукції.

Одну і ту ж ЕММ можна застосовувати для моделювання кількох економічних об'єктів чи процесів. Зокрема, модель (1.4) можна застосовувати не лише для відображення міжгалузевого балансу виробництва і розподілу продукції. Її можна використати, зокрема, для моделювання виробничо-фінансової діяльності (техпромфінплану) підприємства [82, с. 105]. Такі ЕММ відносять до групи моделей, які називають матричними. Вони відображають структуру затрат на виробництво, розподіл продукції і заново створену вартість.

Будувати ЕММ можна індуктивним та дедуктивним методами. Під час використання індуктивного методу для виконання економічного аналізу «йдуть» від часткового до загального. Спочатку будують часткові моделі, які охоплюють простіші змінні економічного явища, об'єкта чи процесу, а потім від них переходять до загальної моделі. У разі дедуктивного методу навпаки – спочатку будують загальну модель і на її основі конструюють часткові моделі, розробляють алгоритми конкретних розрахунків.

Хоча найбільш адекватною реальній дійсності буде ЕММ, під час побудови якої застосовано як метод індукції, так і метод дедукції.

Побудована модель має якомога точніше відповідати об'єктові моделювання та зважати на головні його особливості. Але тут потрібно пам'ятати, що не завжди збільшення чинників, які взято до уваги в моделі, поліпшує цю модель і приводить до кращих результатів. Так само складність моделі не означає те, що результати проведеного з її допомогою економічного аналізу будуть ліпшими. У деяких випадках надлишкова складність і громіздкість ускладнює процес дослідження. Тому у процесі побудови моделі необхідно брати до уваги найбільш важливі чинники і умови, намагатись розробити її якомога простішою. Така ЕММ досить точно відобразить модельований реальний економічний об'єкт чи процес і буде придатною для практичного використання.

Під час побудови економіко-математичної моделі також потрібно пам'ятати і про те, що в майбутньому треба буде її використовувати для виконання розрахунків. Тому бажано, щоб вона належала деякому добре вивченому класу математичних моделей. Інакше треба буде розробляти нову методику проведення з її допомогою економічного аналізу, алгоритми виконання необхідних у цьому випадку числових розрахунків.

4. *Математичний аналіз моделі.* Головним на цьому етапі є доведення існування і єдиності розв'язку побудованої моделі. Тут застосовуються лише математичні прийоми дослідження. Якщо доведено, що задача, якій відповідає побудована модель, не має розв'язку, то потрібно відкоригувати або постановку економічної проблеми, або побудовану модель і почати дослідження спочатку. Крім доведення існування і єдиності розв'язку побудованої моделі, на цьому етапі визначають діапазони зміни змінних задачі, як вони змінюються залежно від початкових умов, які тенденції їх зміни з часом та ін. Хоча слід зауважити, що моделі складних економічних об'єктів з великими труднощами піддаються аналітичному дослідженню. Якщо неможливо визначити загальні властивості моделі аналітичними методами, застосовують чисельні методи дослідження.

5. *Підготовка початкової інформації.* Застосування будь-якого методу для проведення економічного аналізу передбачає



використання інформації про об'єкт дослідження. Це стосується і методу моделювання. Первинна інформація про об'єкт економічного аналізу потрібна для оцінювання точності моделі, а також для практичного використання результатів дослідження.

Під час побудови ЕММ потрібно брати до уваги як реальні можливості отримання первинної інформації, яка необхідна для розрахунків за цією моделлю, так і затрати на підготовку цієї інформації. Оскільки вартість інформації, беручи до уваги витрати на збирання, зберігання, пошук й опрацювання, значна, то на цьому етапі постає питання про можливість її колективного використання. Зважаючи на це, виникає питання про застосування обчислювальної техніки і системного підходу в процесі модельного дослідження економічних об'єктів. Зокрема, потрібно зважити на те, що вихідна інформація одних моделей може бути вхідною для інших.

На цьому етапі треба дослідити чутливість ЕММ від вхідних даних. Якщо модель є малочутливою до вхідних даних, тобто незначна їх зміна мало впливає на результати модельних розрахунків, то в цьому випадку можна зекономити на підготовці первинної інформації.

6. *Проведення розрахунків та верифікація моделі.* Використовуючи реальні вхідні дані, на цьому етапі виконують розрахунки за побудованою моделлю. Розробляють алгоритми для чисельного розв'язування задачі, складають програми на електронних обчислювальних машинах (ЕОМ) чи підбирають готові програмні продукти, за допомогою яких можна отримати шукані результати обчислень. Якщо відомо кілька алгоритмів знаходження розв'язку задачі, то вибирають найбільш раціональний. Наприклад, для розв'язування задач лінійного програмування можна застосувати симплексний метод, метод потенціалів чи інші.

Цей етап, деякою мірою, є продовженням четвертого етапу модельного дослідження економічних об'єктів з використанням реальних вхідних даних моделі. *Верифікація* моделі – це перевірка її адекватності модельованому об'єкту, істинності результатів розрахунків, одержаних унаслідок використання реальних даних. Кінцевим критерієм достовірності моделі є практика. Отримані внаслідок модельного дослідження результати і висновки повинні відповідати реальним умовам виробництва, одержані оцінки мають

бути економічно змістовними. У випадку невідповідності отриманих результатів реальним умовам потрібно проаналізувати причини розбіжностей, якими можуть бути недостовірність вхідної інформації чи неадекватність отриманої моделі досліджуваному економічному об'єкту.

Результати модельних розрахунків переважно використовують для перевірки адекватності дескриптивних моделей, оскільки вони стосуються аналізу минулого розвитку економічного об'єкта. Верифікацію нормативних моделей економіки виконувати важко, а часом зовсім неможливо. Адже не завжди можна перевірити вплив на ендогенні змінні якоїсь однієї екзогенної змінної, усунувши вплив інших. Ще складніше виконати верифікацію моделей довготермінового прогнозування.

Полегшує проведення верифікації моделей сучасна електронна обчислювальна техніка. Внаслідок великої швидкодії та інших можливостей за допомогою комп'ютерів можна виконувати багатоваріантні розрахунки, що допомагає точніше визначити адекватність моделі, уточнити і доповнити результати аналітичних досліджень. Деякі ЕММ можна перевірити тільки числовими методами, а аналітичним дослідженням вони не підвладні. Яким би способом не було виявлено причини невідповідності отриманих результатів модельних розрахунків реальним даним, ці причини усувають і розв'язування задачі продовжують.

*7. Реалізація результатів економічного аналізу.* Економічний аналіз методами математичного моделювання здійснюють для використання його результатів на практиці. Не можна вважати, що з побудовою і перевіркою ЕММ роботу дослідника завершено, оскільки багато труднощів виникає на завершальному етапі економічного аналізу, тобто на етапі реалізації результатів модельного дослідження економічного об'єкта.

Однією з таких ймовірних перешкод є небажання деяких керівників і менеджерів виконувати модельний аналіз економічних об'єктів і використовувати його результати у своїй практиці. Які ж цьому причини? Деякі менеджери мають недовіру до складних математичних теорій і моделей. Їхній стиль розв'язання проблем інколи радше інтуїтивний, ніж аналітичний. Крім цього, застосування ЕММ збільшує на них інформаційне навантаження, яке і

так є досить великим. Є і інші причини менеджерського опору впровадження у практику економічного аналізу математичного моделювання.

Виконавці економічного аналізу можуть ліквідувати такі перешкоди за умови [13, с. 129]:

а) зацікавленості керівництва у виконанні досліджень і здійсненні на підставі їхніх результатів необхідних змін;

б) кваліфіковано складеного плану виконання дослідження;

в) ефективної ілюстрації переваг нової методики вироблення і використання управлінських рішень над традиційними;

г) наявності ресурсів, необхідних для виконання (у разі потреби) необхідних змін і доробок.

Зауважимо, що повернення до попередніх етапів відбувається не тільки у зазначених вище випадках, тобто коли множина розв'язків моделі порожня, не вдається побудувати алгоритм розв'язування задачі, результати апробації моделі не відповідають дійсності тощо. Моделювання – це циклічний процес. Усі зазначені етапи повторюють кілька разів, розширюючи та уточнюючи знання про досліджуваний об'єкт, а також поступово удосконалюючи вихідну модель.

#### **1.4. Особливості застосування математичних методів в економічному аналізі**

Коротко охарактеризували відмінності між аналізом економічних та інших систем, обґрунтували необхідність спеціального виду аналізу для дослідження стану і поведінки економічних об'єктів. Розглянемо особливості застосування математичних методів в економіці, зокрема, у процесі аналізу діяльності господарюючих суб'єктів.

З розглянутої вище історії розвитку математичних методів видно, що застосовувати їх в економіці почали досить давно. Однак широке застосування цих методів під час розв'язання багатьох задач економічного аналізу стало практично можливим і плідним лише з появою електронної обчислювальної техніки. Використання комп'ютерної техніки підвищує продуктивність праці аналітика економічних систем, його здатність знайти ефективніше вирішення порушеної проблеми. За допомогою цієї техніки він може розв'язу-

ти такі проблеми, які одна особа неспроможна взагалі розв'язати або вона потребує для цього дуже багато часу, зважаючи на складність проблеми.

У сучасних умовах побудови ринкової економіки України, переведення бухгалтерського обліку на міжнародні стандарти, збільшення інформаційних потоків автоматизація економічного аналізу на базі комп'ютерної техніки стає об'єктивною необхідністю. Сприяє цьому розвиток настільної, зокрема портативної, обчислювальної техніки, дружнього програмного забезпечення, яке можуть використовувати навіть недосвідчені особи, а також зменшення побоювання комп'ютера у користувачів завдяки підвищенню комп'ютерної грамотності населення.

Базою модельного дослідження діяльності господарюючих суб'єктів є система економічної інформації, на якій ґрунтуються оптимальні управлінські рішення. Знайти результати економічного аналізу методами математичного моделювання як без використання, так і з використанням комп'ютерної техніки неможливо без наявності первинної інформації про об'єкти дослідження. Проблема наповнення розроблених моделей конкретною та якісною інформацією є головним гальмом для практичного застосування математичного моделювання в економіці. Якщо практично неможливо отримати достовірні дані про значення екзогенних змінних, які є складовими моделі, то, як би добре модель не описувала об'єкт дослідження, використовувати її неможливо.

Точність і повнота первинної інформації, реальні можливості її збору й опрацювання мають визначальний вплив на вибір типів прикладних моделей, з одного боку. З іншого, завдання моделювання економіки ставить нові вимоги до системи інформації [12, с. 59]. Ці проблеми є взаємозв'язаними. Досить часто відсутність надійної інформації є однією з головних причин недостатнього застосування математичних методів в економічному аналізі.

Визначеність інформації характеризується повнотою і достовірністю даних, необхідних для аналізу господарської діяльності. Повнота даних не завжди залежить від методів їх отримання. Дані можуть бути неповними, зважаючи на те, що інформацію не можна отримати з якихось причин, або коли немає інформації. Можливі випадки, коли отримання реальних даних потребує багато

праці, коштів чи часу. Невизначеність – це фундаментальна характеристика недостатньої забезпеченості процесу економічного аналізу знаннями стосовно об'єкта цього аналізу.

Причини виникнення невизначеності у процесі аналізу діяльності господарюючих суб'єктів [11, с. 16]:

1. Недетермінованість процесів, котрі відбуваються у суспільстві загалом і у діяльності господарюючих суб'єктів зокрема. Недетермінованість у більшості випадків є наслідком відсутності можливості щодо вичерпного передбачення і прогнозування процесів.

2. Немає вичерпної інформації про поведінку суб'єкта ринкової діяльності.

3. Вплив суб'єктивних чинників на отримані для виконання економічного аналізу значення початкових даних (рівень кваліфікації, приховування частини інформації, дезінформація тощо).

Ступінь повноти і достовірності первинної інформації про досліджуваний об'єкт можна покласти в основу класифікації задач економічного аналізу. Залежно від ступеня визначеності цієї інформації задачі аналізу господарської діяльності можна поділити на три групи [12, с. 59]:

- за умов визначеності;
- за умов імовірнісної визначеності;
- за умов невизначеності.

Якщо задано достатньо даних для проведення економічного аналізу, наявна повна і достовірна інформація про об'єкт цього аналізу, що дає змогу розробити його формальну математичну модель і побудувати алгоритм її розв'язування, то це *задача за умов визначеності*. Сьогодні сформульовано багато типових задач цієї групи, для яких розроблено моделі та алгоритми знаходження їхнього розв'язку. Це переважно задачі виробничо-економічного характеру.

Під час дослідження діяльності господарюючих суб'єктів не завжди наявна повна і достовірна інформація про ці процеси. Однак є випадки, коли закономірності поведінки об'єкта економічного аналізу описують за допомогою імовірнісних характеристик, тобто для невизначених параметрів може бути визначено їхній імовірнісний розподіл. Самі ж імовірнісні характеристики є вже не випадковими, з ними можна виконувати такі ж операції, як і з детерміно-

ваними. Такі задачі економічного аналізу називають *задачами за умов імовірнісної визначеності*. Результати модельного дослідження економічних об'єктів у цьому випадку уточнюють унаслідок вивчення функції щільності ймовірності, середнього значення випадкової величини, її дисперсії тощо.

Зауважимо, що математичні моделі економічного аналізу, які стосуються задач перших двох із розглянутих груп, тобто задач за умов визначеності та імовірнісної визначеності, описують найпростіші ситуації, що характерні для функціонування господарюючих суб'єктів. Їх широко використовують під час проведення економічного аналізу і досить рідко – для допомоги у разі прийняття управлінських рішень.

Однак є багато задач економічного аналізу, в яких неможливо однозначно визначити екзогенні змінні моделі досліджуваного об'єкта, явища чи процесу, а також не можна застосувати для їх вирішення теорію статистичних рішень. У цьому випадку кажуть, що економічний аналіз виконують за умов невизначеності.

Тобто *задачі за умов невизначеності* наявні під час виконання економічного аналізу з неповною та недостовірною інформацією про діяльність досліджуваного господарюючого суб'єкта і коли немає імовірних характеристик невизначених параметрів. Хіба що для цих параметрів визначена область їхньої зміни. Для таких задач, крім великої неповноти і недостовірності інформації, характерна багатоманітність і складність впливу соціальних, економічних, політичних і технічних чинників. За таких умов побудувати адекватну досліджуваному об'єкту математичну модель неможливо. З огляду на це головну роль під час розв'язання таких задач відведено людині, а математичні методи вона застосовує як допоміжні інструменти. Деякі з таких задач частково можна формалізувати, застосовуючи математичні методи, які запроваджують у практику економічних досліджень порівняно недавно. До таких методів належить, наприклад, теорія нечітких множин.

Класифікувати задачі економічного аналізу залежно від ступеня визначеності первинної інформації про об'єкт дослідження можна і по-іншому. Зокрема, деякі науковці відносять розглянуті нами задачі другої і третьої груп до задач за умов невизначеності. Задачі другої групи називають задачами за умов невизначеності

першого порядку, а третьої – задачами за умов невизначеності другого порядку. Під час економічного аналізу для вироблення раціонального, тобто отриманого на підставі логічно обґрунтованих доказів і всебічно вивчених чинників та наслідків, рішення найбільш поширеним останнім часом є поділ цих задач на добре структуровані, неструктуровані і слабоструктуровані [55, с. 60].

До добре структурованих (цілком формалізованих, кількісно сформульованих) відносять задачі організаційного управління, в яких істотні залежності визначені настільки детально, що вони можуть бути виражені в числах або символах, тому легко стандартизуються і програмуються. Однак це не означає, що ці задачі прості і їх можна легко розв'язувати. Застосування математичних методів для розв'язування деяких із них пов'язане із значними труднощами. Неструктуровані (неформалізовані, якісно виражені) задачі – це такі задачі, для яких описано лише важливі ресурси, ознаки і характеристики, а кількісні залежності між ними невідомі. Слабоструктуровані (напівструктуровані, змішані) задачі мають як кількісні, так і якісні елементи, причому маловідомі й невизначені акценти проблеми мають тенденцію домінувати. Для деяких випадків, застосовуючи теорію нечітких множин, були побудовані формальні схеми розв'язування таких задач.

Первинну інформацію для проведення модельного дослідження економічних явищ та процесів переважно отримують на підставі статистичних спостережень. В економіці виконання цих спостережень багато у чому збігається з методикою їх виконанням в інших науках, але має свої особливості. Загальновідомо, що збір даних потребує фінансових витрат. Тому статистичні спостереження треба проводити таким чином, щоб витрати на їх проведення були мінімальними.

Зважаючи на масовість значної кількості економічних явищ та процесів, тобто те, що вони не виявляються на підставі лише одного чи кількох спостережень, моделювання в економічному аналізі має спиратися на масові спостереження, які потребують значного фінансування. Зменшити ці витрати допомагає вибірковий метод спостереження, науковим підґрунтям якого є закон великих чисел. Суть цього закону полягає у зникненні в зведеному (збірному) показнику елемента випадковості, з яким пов'язані індивідуальні характеристики, внаслідок об'єднання в ньому щораз

більшої їх кількості. В економічному аналізі висновки про генеральну сукупність роблять на підставі вибірки, яка сформована із результатів вибіркових спостережень. Кількість цих спостережень має бути такою, щоб невеликими були витрати на їх проведення, а їх було достатньо для формування вибіркової сукупності. Застосування математичних методів моделювання економічних процесів виправдовує себе найбільше в тих випадках, коли є можливість нагромадити та опрацювати необхідну і достатню кількість статистичної інформації, що забезпечує репрезентативність вибірок, які аналізують, але обсяг її мінімальний.

Очевидно, що суб'єкти господарської діяльності змінюються з часом. Однією з головних характерних рис цих суб'єктів є мінливість їхніх параметрів і структурних відношень. З огляду на це виникає потреба постійного їх моніторингу і, відповідно, коригування первинної інформації про їхній стан. Водночас потрібно брати до уваги те, що ця інформація надходить для модельних розрахунків із запізненням, яке є наслідком тривалого часу спостереження за економічними процесами й опрацювання емпіричних даних.

На точність кінцевих результатів економічного аналізу із застосуванням математичних методів значною мірою впливає точність емпіричних (первинних) вимірювань. Тому необхідною умовою застосування в економічному аналізі ЕММ є удосконалення первинних вимірювачів. Водночас у процесі модельного аналізу діяльності господарюючих суб'єктів важливими є похідні вимірювання. Головним питанням є побудова похідних (нових, вторинних) вимірювачів, які досить чутливі до первинних даних. Це все потрібно брати до уваги під час математичного моделювання економічних явищ і процесів.

У більшості випадків похідними вимірювачами є інтегральні показники. Для прикладу можна навести запропонований нами алгоритм побудови комплексного інтегрального показника, який дає змогу виконувати просторово-часовий аналіз трудового, зокрема інтелектуального, потенціалу регіонів деякої території чи порівняльний аналіз певного потенціалу одночасно кількох підприємств протягом декількох проміжків часу [60, с. 101].



Економічні показники, залежно від того, який вимірювач покладено в основу, можна поділити на:

- вартісні й натуральні;
- кількісні та якісні;
- обсягові (об'ємні) і питомі.

Поділ показників на вартісні й натуральні залежить від покладених в їх основу вимірювачів. Основою вартісних показників є грошовий вимірювач. Вартісні показники є достатньо поширеними, оскільки найбільше виражають особливості ринкової економіки. Це показники реалізованої і валової продукції, прибуток, гуртовий і роздрібний товарообіг тощо. Разом з вартісними в економічному аналізі підприємств використовують натуральні показники. Їх застосовують для натурального вимірювання, наприклад, кількості холодильників у штуках, ваги м'яса в кілограмах чи тоннах, довжини тканини в метрах тощо.

Для вираження абсолютних і відносних величин, які характеризують, наприклад, обсяг виробництва і реалізації продукції, використовують кількісні показники. Вони можуть виражатися як у вартісному, так і в натуральних вимірювачах. Якісні показники використовують для визначення відповідності випущеної продукції певним вимогам, які можуть бути доволі різноманітними.

Об'ємні показники ґрунтуються на первинних вимірювачах. До них, зокрема, належать величина прибутку, кількість безробітних, площа земельних угідь тощо. Питомі показники є вторинними, похідними від відповідних об'ємних показників. Наприклад, урожайність зернових, продуктивність праці, рівень безробіття є питомими показниками.

Складність економічних процесів і явищ також є однією з особливостей застосування математичних методів в аналізі діяльності господарюючих суб'єктів. Зважаючи на це, також ускладнюється верифікація моделей, про що треба пам'ятати під час застосування ЕММ в економічному аналізі. Знання цих особливостей допоможе уникнути небажаних наслідків у процесі модельного дослідження економічних об'єктів.

## 2. ЕКОНОМІЧНИЙ АНАЛІЗ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

У першому розділі детально обґрунтовано, що будь-який кількісний економічний аналіз неможливо виконати без застосування математичних методів. У. Петті ще 1683 року зауважував: «Замість того, щоб вживати слова тільки в порівняльному і найвищому ступеня і вдаватися до умоглядних аргументів, я став на шлях вираження своїх думок мовою чисел, ваги й міри...»<sup>1</sup>. В аналізі господарської діяльності неможливо обходитись без застосування методів елементарної математики. Їх застосовують, зокрема, у традиційних економічних обчисленнях під час обґрунтування потреби в ресурсах, розроблення планів, проектів та інших розрахунків. Тож спочатку розглянемо деякі методи та прийоми економічного аналізу, які ґрунтуються на застосуванні елементарної математики.

### 2.1. Найпростіші математичні методи та прийоми аналізу господарської діяльності

**2.1.1.** Найпростішим методом економічного аналізу, який ґрунтується на застосуванні елементарної математики, є розрахунок *середніх величин*. Його також активно використовують у математичній статистиці. В економічному аналізі середні величини можна вважати найбільш уживаними узагальнюваними показниками. Метод середніх величин допомагає узагальнити однотипні показники, процеси чи явища, дає змогу перейти від одиничного до загального у процесі виконання економічного аналізу. Середня величина відображає загальне, характерне і типове для економічного явища чи процесу завдяки взаємоліквідації в ній випадкових і нетипових відмінностей між частковими величинами.

Найпоширеніший вид середньої величини – *середня арифметична*. Вирізняють просту і зважену середні арифметичні. Якщо задано значення  $x_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) якоїсь ознаки  $x$  для  $n$  однорідних об'єктів, то під час розрахунку середньої використовують формулу середньої арифметичної простої:

---

<sup>1</sup> Петті В. Экономические и статистические работы. М., 1940. – С. 156.

$$\bar{x}_{\text{проста}} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum x}{n}. \quad (2.1)$$

У випадку, коли досліджуються неоднакові об'єкти, то для розрахунку середньої використовують формулу середньої арифметичної зваженої:

$$\bar{x}_{\text{зважена}} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_n f_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n} = \frac{\sum x f}{\sum f}. \quad (2.2)$$

Цю ж формулу використовують для розрахунку середньої у разі повторення окремих значень досліджуваної ознаки, тобто у випадку, коли  $i$ -те значення  $x_i$  ознаки  $x$  повторюється  $f_i$  разів ( $i = \overline{1, n}$ ).

Наприклад, якщо в порту є п'ять підйомних кранів, які мають таку вантажопідйомність: 30, 25, 20, 10 і 5 т, то середню вантажопідйомність одного крана можна обчислити за формулою (2.1):

$$\bar{x} = \bar{x}_{\text{проста}} = \frac{30 + 25 + 20 + 10 + 5}{5} = 18 \text{ (т)}.$$

Якщо ж у порту є один кран вантажопідйомністю 30 т, два крани вантажопідйомністю 25 т, три крани вантажопідйомністю 20 т і чотири крани вантажопідйомністю 10 т, то середню вантажопідйомність одного крана можна обчислити за формулою (2.2):

$$\bar{x} = \bar{x}_{\text{зважена}} = \frac{30 \cdot 1 + 25 \cdot 2 + 20 \cdot 3 + 5 \cdot 4}{10} = 16 \text{ (т)}.$$

Визначення середньої арифметичної іноді пов'язано з великими затратами часу і праці. Спростити цю процедуру можна, скориставшись властивостями середньої величини [54, с.135].

Іноді визначення середньої арифметичної на підставі заданих початкових даних не має змісту. Наприклад, розрахувати середню швидкість автомобіля, якщо задано два проміжки шляху (160 і 180 км) і середні швидкості на них (80 і 60 км/г), за формулою середньої арифметичної неможливо. Тут середню швидкість потрібно визначити за відношенням загального шляху до загального часу, тобто за формулою середньої гармонічної:

$$\bar{v} = \frac{160 + 180}{\frac{160}{80} + \frac{180}{60}} = 64 \text{ (км/г.)}$$

*Середня гармонічна* також може бути простою чи зваженою. Їх обчислюють, відповідно, за такими формулами:

$$\bar{x}_{\text{проста гармонічна}} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\sum \frac{1}{x}}, \quad (2.3)$$

$$\bar{x}_{\text{зважена гармонічна}} = \frac{f_1 + f_2 + \dots + f_n}{\frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2} + \dots + \frac{f_n}{x_n}} = \frac{\sum f}{\sum \frac{f}{x}}. \quad (2.4)$$

Крім наведених, у процесі економічного аналізу використовують й інші середні. Зокрема, просту і зважену *середні геометричні* обчислюють за формулами:

$$\bar{x}_{\text{проста геометр.}} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} = \sqrt[n]{\prod x}, \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \bar{x}_{\text{зважена геометр.}} &= \frac{(f_1 + f_2 + \dots + f_n) \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}}{f_1 \cdot x_1 \cdot f_2 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot f_n \cdot x_n} = \\ &= \frac{(\sum f) \sqrt[n]{\prod x \cdot f}}{\prod x \cdot f}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Просту і зважену *середні квадратичні* визначають так:

$$\bar{x}_{\text{проста квадрат.}} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n}}, \quad (2.7)$$

$$\bar{x}_{\text{зважена квадрат.}} = \sqrt{\frac{x_1^2 \cdot f_1 + x_2^2 \cdot f_2 + \dots + x_n^2 \cdot f_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}} = \sqrt{\frac{\sum x^2 f}{\sum f}}. \quad (2.8)$$

Для визначення середнього рівня у моментних динамічних рядах застосовують *середню хронологічну*:

$$\bar{x}_{\text{хронологічна}} = \frac{1}{n-1} \cdot \left( \frac{x_1 + x_n}{2} + x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1} \right). \quad (2.9)$$

Зауважимо, що, хоча використання середніх величин є дієвим інструментом економічного аналізу, надмірне захоплення ними може призвести до необ'єктивних висновків. Адже середня величина ігнорує відмінності у значеннях показника, які можуть мати інтерес для цього аналізу. З огляду на це використовувати середні величини завжди потрібно обережно, пам'ятаючи, що за середньою величиною «ховається» велика кількість індивідуальних значень досліджуваної ознаки.

**2.1.2.** Використовуючи формули елементарної математики, можна розрахувати *міру розсіювання* значень  $x_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) якоїсь ознаки  $x$ . Оцінюючи значення цієї ознаки, цікаво знати, на скільки відрізняються між собою найбільше і найменше з цих величин. Виконуючи економічний аналіз процесів і явищ, обчислюють різницю цих величин:

$$R = x_{\max} - x_{\min}. \quad (2.10)$$

У статистиці цей показник називають *розмахом варіації*. Його використовують, наприклад, під час контролювання якості продукції для визначення причин, які систематично впливають на виробничий процес. Для цього відбирають через визначені проміжки часу декілька деталей і виконують їх вимірювання. Розрахувавши за результатами цих вимірювань показники розмаху варіації, на підставі зіставлення результатів обчислень роблять висновок про стійкість режиму виробничого процесу.

Цей показник дає лише загальне уявлення про розсіювання значень досліджуваної ознаки. Однак, проводячи економічний аналіз якогось явища чи процесу, потрібно знати не тільки амплітуду (розмах) значень розглянутої ознаки, але й вміти узагальнити відхилення всіх цих значень від якої-небудь типової для досліджуваної ознаки величини. Цілком логічно як таку величину використати середню арифметичну величину з усіх значень цієї ознаки, оскільки вона є своєрідним центром ваги, навколо якого відбувається коливання, розсіювання значень ознаки. Під час узагальнення цих

коливань треба знову звернутися до методу середніх величин – знайти середню величину цих відхилень за однією з формул:

$$\bar{d}_{\text{просте лін. відх.}} = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \dots + |x_n - \bar{x}|}{n} = \frac{\sum |x - \bar{x}|}{n}, \quad (2.11)$$

$$\bar{d}_{\text{зваж. лін. відх.}} = \frac{|x_1 - \bar{x}|f_1 + |x_2 - \bar{x}|f_2 + \dots + |x_n - \bar{x}|f_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n} = \frac{\sum |x - \bar{x}|f}{\sum f}. \quad (2.12)$$

Середню величину, обчислену за формулою (2.11), називають *простим*, а обчислену за формулою (2.12) – *зваженим середнім лінійним відхиленням*.

Є також інший спосіб усереднення відхилень значень ознаки від середньої арифметичної. У цьому способі всі відхилення підносять до квадрата, а потім шукають середню величину. У статистиці таку величину називають *дисперсією*. Просту та зважену дисперсію обчислюють, відповідно, за формулами:

$$\sigma_{\text{проста}}^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}, \quad (2.13)$$

$$\sigma_{\text{зважена}}^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 f_1 + \dots + (x_n - \bar{x})^2 f_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n} = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 f}{\sum f}. \quad (2.14)$$

В економічному аналізі розсіювання значень ознаки найчастіше прийнято оцінювати за допомогою *середнього квадратичного відхилення*, яке є коренем квадратним з дисперсії:

$$\sigma_{\text{просте}} = \sqrt{\sigma_{\text{проста}}^2} = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}}, \quad (2.15)$$

$$\sigma_{\text{зважене}} = \sqrt{\sigma_{\text{зважена}}^2} = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2 f}{\sum f}}. \quad (2.16)$$

За формулою (2.15) обчислюють просте, а за формулою (2.16) – зважене середнє квадратичне відхилення. Воно має таку ж розмірність (у метрах, кілограмах, літрах, відсотках, гривнях тощо), як і ознака, розсіювання якої оцінюють.

**2.1.3.** Кількісні показники, які використовують під час проведення економічного аналізу, можуть бути абсолютними чи відносними. Абсолютні показники зазвичай характеризують первинну інформацію, їх використовують для розрахунку відносних. *Абсолютні* показники засвідчують досягнутий рівень, стан об'єкта аналізу, а *відносні* – на скільки чи у скільки разів значення якогось абсолютного показника відрізняється від значення такого ж показника за інший період часу чи на іншому об'єкті.

Отже, економічне оцінювання динаміки об'єкта дослідження у часі, його структури та інтенсивності процесів, що відбуваються на ньому, виконують переважно з використанням відносних показників. Головними з них є абсолютний приріст, коефіцієнт (темп) зростання і коефіцієнт (темп) приросту.

Нехай нам задані значення  $y_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) деякого показника за  $n$  однакових проміжків часу. Тоді *базовий і ланцюговий абсолютні прирости* обчислюють, відповідно, за формулами

$$\Delta_i^B = y_i - y_1, \quad \Delta_i^L = y_i - y_{(i-1)}. \quad (2.17)$$

На практиці частіше використовують ланцюгові абсолютні прирости. Для них розраховують середній абсолютний приріст:

$$\bar{\Delta} = \frac{y_n - y_1}{n - 1}. \quad (2.18)$$

*Базовий і ланцюговий коефіцієнти зростання* обчислюють, відповідно, за такими формулами:

$$K_i^B \text{ зростання} = \frac{y_i}{y_1}, \quad K_i^L \text{ зростання} = \frac{y_i}{y_{(i-1)}}. \quad (2.19)$$

Середній коефіцієнт зростання визначають за такою формулою:

$$\bar{K} \text{ зростання} = (n - 1) \sqrt[n]{\frac{y_n}{y_1}}. \quad (2.20)$$

Якщо розраховані за формулами (2.19), (2.20) значення помножити на 100%, то отримані величини  $T_i^B$  зростання,  $T_i^L$  зростання і  $\bar{T}$  зростання називають відповідними *темпами зростання*.

Базовий і ланцюговий коефіцієнти приросту обчислюють, відповідно, за такими формулами:

$$K_{i \text{ приросту}}^B = \frac{Y_i - Y_{(i-1)}}{Y_1}, \quad K_{i \text{ приросту}}^L = \frac{Y_i - Y_{(i-1)}}{Y_{(i-1)}}. \quad (2.21)$$

Якщо розраховані за формулами (2.21) значення помножити на 100%, то отримані величини  $T_{i \text{ приросту}}^B$  і  $T_{i \text{ приросту}}^L$  називають відповідними *темпами приросту*. З формул (2.19), (2.21) видно, що ланцюгові коефіцієнт зростання і коефіцієнт приросту та ланцюгові темп зростання і темп приросту пов'язані між собою такими співвідношеннями:

$$K_{i \text{ зростання}}^L = K_{i \text{ приросту}}^L + 1, \quad (2.22)$$

$$T_{i \text{ зростання}}^L = T_{i \text{ приросту}}^L + 100\%. \quad (2.23)$$

**2.1.4.** Одним з найважливіших способів економічного аналізу є метод порівняння. За допомогою цього методу наявні значення якоїсь ознаки порівнюють з раніше відомими її значеннями чи еталоном для виявлення загальних закономірностей чи відмінностей у досліджуваних процесах. Зокрема, розглянуті в попередньому пункті відносні показники оцінення динаміки економічного явища чи процесу дадуть змогу порівнювати поточні значення розглянутої ознаки з її значеннями за попередній чи початковий періоди.

Першочерговим завданням під час застосування цього методу є вибір бази порівняння. Значення цієї бази вибирають, виходячи з цільової орієнтації аналізу, зважаючи на те, чи буде отримана оцінка зміни і розвитку досліджуваного явища або процесу логічно коректною. Наприклад, у процесі дослідження ступеня виконання чи невиконання взятих зобов'язань треба порівнювати звітні дані з плановими, а під час рейтингового оцінення – з найкращими. У першому випадку базою порівняння будуть планові значення показників, а в другому – найкращі результати. Щодо коректності оцінки, то неможливо, наприклад, порівнювати результати праці програміста і штукатура чи показники діяльності підприємств різних форм організації виробництва і праці.



Застосовуючи метод порівняння, можна визначити абсолютне та відносне відхилення значення досліджуваної ознаки від її еталонного значення. Якщо задано значення  $x_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) якоїсь ознаки  $x$  і  $x_e$  (її еталонне значення), то абсолютне відхилення  $\Delta_i^e$  обчислюють за формулою

$$\Delta_i^e = x_i - x_e .$$

Відносне відхилення – це відносна величина, яка характеризує динаміку зміни досліджуваної ознаки порівняно з її еталонним значенням. Розраховують коефіцієнт зростання ( $K_{i \text{ зростання}}^e$ ) і коефіцієнт приросту ( $K_{i \text{ приросту}}^e$ ) та темп зростання ( $T_{i \text{ зростання}}^e$ ) і темп приросту ( $T_{i \text{ приросту}}^e$ ), відповідно, за формулами:

$$K_{i \text{ зростання}}^e = \frac{x_i}{x_e}, \quad K_{i \text{ приросту}}^e = \frac{x_i - x_e}{x_e}, \quad (2.24)$$

$$T_{i \text{ зростання}}^e = \frac{x_i}{x_e} \cdot 100\%, \quad T_{i \text{ приросту}}^e = \frac{x_i - x_e}{x_e} \cdot 100\%. \quad (2.25)$$

Крім відхилень, для зіставлення динаміки зміни різних за економічним змістом параметрів використовують коефіцієнт еластичності, який відображає, на скільки пунктів зміниться значення одного параметра, якщо значення еластичного до нього параметра змінити на один пункт. *Коефіцієнт еластичності* параметра  $x$  щодо параметра  $y$  обчислюють за формулою

$$K_{\text{еластичності}}^{x,y} = \frac{K_{i \text{ приросту}}^e(x)}{K_{i \text{ приросту}}^e(y)} = \frac{T_{i \text{ приросту}}^e(x)}{T_{i \text{ приросту}}^e(y)}. \quad (2.26)$$

Якщо, наприклад, ознака  $x$  характеризує випуск продукції, а ознака  $y$  – витрати ресурсів, то цей коефіцієнт характеризує еластичність випуску за затратами. Він відображає, на скільки відсотків збільшується випуск продукції, якщо витрати ресурсів збільшуються на 1%.

**2.1.5.** В економічному аналізі досить широко застосовують *індексний метод*. Цей метод ґрунтується на побудові відносних показників. Під індексом розуміють співвідношення двох значень показника, який індексується: оціночного (поточного) і взятого за

базу порівняння. Наприклад, індекс зростання заробітної плати за рік, індекс курсової вартості акцій за місяць, регіональний індекс народжуваності тощо.

Відповідно до виду порівнянь (у часі, просторі, з певним стандартом) індекси поділяють на *динамічні, територіальні та міжгрупові*. Динамічний індекс характеризує інтенсивність динаміки деякого показника. Наприклад, відносна величина, яка характеризує збільшення виробництва електроенергії в Україні у 2006 р. порівняно з 2000 р., є індексом динаміки цього показника (виробництва електроенергії).

Територіальні індекси розраховують під час просторових порівнянь. Вони визначають ступінь відхилення значень деякого показника, наприклад, між певними об'єктами, країнами, регіонами тощо. Вибір бази порівняння тут довільний. Міжгруповий індекс характеризує відхилення від певного стандарту (еталонного, максимального чи мінімального значення) або від середнього рівня всієї сукупності.

Залежно від ступеня агрегованості інформації вирізняють індекси індивідуальні (елементарні, прості) та зведені (складні), які, відповідно, поділяють на загальні (тотальні) та групові (субіндекси). *Індивідуальний індекс* характеризує співвідношення рівнів тільки одного елемента сукупності, тобто співвідношення безпосередньо співвимірних величин. Динамічний індивідуальний індекс у частковому випадку збігається з базовим коефіцієнтом зростання. Наприклад, індивідуальний індекс зміни фізичного обсягу виготовленої продукції  $i_q$  обчислюють за формулою

$$i_q = \frac{q_1}{q_0}, \quad (2.27)$$

де  $q_0$  і  $q_1$  – обсяги виробленої продукції, відповідно, у базовому і поточному періодах часу. У цьому випадку цей індекс розраховують аналогічно до базового коефіцієнта зростання обсягу виготовленої продукції.

*Зведений індекс відображає*, як у середньому змінився показник за сукупністю елементів, тобто характеризує співвідношення рівнів декількох елементів сукупності. Наприклад, за допомогою такого індексу можна оцінити зміну рівня продуктивності праці у

процесі виробництва декількох видів продукції. Якщо сукупність, яку вивчають, складається з декількох груп, то зведені індекси, кожний з яких характеризує зміну рівнів одиниць окремої групи, називають *груповими (субіндексами)*, а зведений індекс, який охоплює всю сукупність одиниць, – *загальним (тотальним) індексом*.

Розглянемо для прикладу індекс динаміки продажу продукції. Нехай нам відомі кількості  $q_{it}$  і ціни  $p_{it}$  ( $i = \overline{1, n}; t = 0, 1$ ) кожного  $i$ -го виду продукції у базовому ( $t = 0$ ) і теперішньому ( $t = 1$ ) періодах часу. Тоді індекс зміни продажу продукції  $I_{np}$  можна обчислити за формулою

$$I_{np} = \frac{\sum_{i=1}^n p_{i1} q_{i1}}{\sum_{i=1}^n p_{i0} q_{i0}} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}. \quad (2.28)$$

Зауважимо, що індексний метод широко застосовують у статистичному аналізі [66, с. 152].

## 2.2. Методи елімінування

**2.2.1.** В основу економічного аналізу покладено факторний аналіз (у широкому розумінні цього слова, а не тільки у вигляді стохастичного факторного аналізу), який вивчає вплив конкретних чинників на величину досліджуваного (результатного) показника.

Залежно від форми зв'язку вирізняють детермінований і стохастичний факторний аналіз. Характерною ознакою детермінованого факторного аналізу є функціональний, а стохастичного – неповний, імовірнісний зв'язок факторів з результатним показником. Досить простими методами детермінованого факторного аналізу, які ґрунтуються на застосуванні елементарної математики, є методи *елімінування*. За допомогою цих методів оцінюють вплив на результатний показник якогось одного визначеного чинника у випадку усунення (елімінування) до інших чинників завдяки їх фіксації. Елімінувати – означає усунути, відхилити дію всіх чинників на зміну значень результатного показника, крім одного.

Наприклад, індекс зміни продажу продукції  $I_{пр}$ , що обчислюють за формулою (2.28), залежить від двох чинників – цін і кількостей (обсягів) товарів. Якщо зафіксувати один з цих чинників як у чисельнику, так і в знаменнику на рівні одного і того ж періоду, тобто усунути (елімінувати) його зміну, то отриманий індекс характеризуватиме зміну тільки другого (незафіксованого) чинника. Для однозначності припустимо, що ціни на продані товари не змінилися і залишилися на рівні базового періоду часу ( $p_{i0}$ ) ( $i = \overline{1, n}$ ). Тоді розглянутий індекс відобразить зміну тільки одного чинника – кількості товару ( $q$ ):

$$I_q = \frac{\sum_{i=1}^n p_{i0} q_{i1}}{\sum_{i=1}^n p_{i0} q_{i0}} = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_0 q_0}. \quad (2.29)$$

Аналогічну формулу одержимо, для розрахунку індексу зміни проданої продукції у випадку сталої кількості проданого товару на рівні базового періоду часу:

$$I_p = \frac{\sum_{i=1}^n p_{i1} q_{i0}}{\sum_{i=1}^n p_{i0} q_{i0}} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0}. \quad (2.30)$$

В обох випадках, які відображені розрахунковими формулами (2.29), (2.30), індекси ( $I_q$  і  $I_p$ ) відобразили зміну тільки одного чинника (кількості товару чи ціни) завдяки фіксуванню іншого на одному і тому ж рівні.

У процесі детермінованого моделювання залежності результатного показника  $y$  від незалежних чинників  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) найчастіше використовують такі види моделей:

1) адитивні

$$y = x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{i=1}^n x_i; \quad (2.31)$$

2) мультиплікативні

$$y = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = \prod_{i=1}^n x_i ; \quad (2.32)$$

3) кратні

$$y = \frac{x_1}{x_2} ; y = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{x_1 + x_2 + \dots + x_m} . \quad (2.33)$$

У цьому разі можуть застосовувати такі прийоми (методи) моделювання, як подовження, розширення і скорочення факторної системи.

Суть цих прийомів розглянемо на прикладі, коли вихідна факторна залежність має вигляд  $y = \frac{a_1}{a_2}$ . Якщо чисельник у цій

формулі «подовжити» (збільшити кількість часткових чинників), тобто подати у вигляді суми окремих доданків-факторів  $a_1 = a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1n}$ , то кінцеву факторну систему

$y = \frac{a_{11}}{a_2} + \frac{a_{12}}{a_2} + \dots + \frac{a_{1n}}{a_2}$  можна подати у вигляді адитивної моделі:

$$y = \sum_{i=1}^n x_i .$$

Коли «розширити» чисельник і знаменник множенням їх на одне і те ж число, тобто ввести у факторну систему її проміжні функціональні зв'язки, то отримуємо нову факторну систему

$y = \frac{a_1}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{d}{a_2} \cdot \dots$ , яка має вигляд мультиплікативної моделі

такого вигляду:  $y = \prod_{i=1}^n x_i$ . Ділення наявних чисельника і знамен-

ника на одне і те ж число  $y = \frac{a_1}{b} / \frac{a_2}{b} = \frac{a_{11}}{a_{12}}$ , тобто «скорочення»

факторної системи, дає скінченну факторну систему:  $y = \frac{x_1}{x_2}$ .

Наведені види моделей і прийоми моделювання застосовують під час проведення економічного аналізу із застосуванням методів елімінування. До таких методів належать метод ланцюгових під-

становок, метод різниці абсолютних величин, метод різниці відносних величин, метод перерахунку даних і метод пайової участі. Розглянемо коротко найбільш поширені з них.

**2.2.2.** Суть *методу ланцюгових підстановок* полягає у послідовній заміні базової величини кожного із взаємодіючих чинників (факторів) фактичною і в порівнянні результатів, які послідовно одержують, у випадку кожної такої заміни. У цьому разі вплив інших чинників на сукупний результат залишається незмінним, тобто усувається (елімінується).

Алгоритм розрахунків під час застосування методу ланцюгових підстановок є ітераційним. Кількість ітерацій визначають кількістю аналізованих факторів. Цей метод застосовують лише тоді, коли досліджують таку залежність між явищами, яка є суто функціональною. Наприклад, якщо детермінована факторна система має залежність

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (2.34)$$

то зміну її фактичного значення  $(y^1)$  стосовно базового  $(y^0)$  визначатимуть так:

$$\Delta y = y^1 - y^0 = f(x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0). \quad (2.35)$$

Зміну  $\Delta y$  під впливом фактора  $x_1$  можна обчислити за такою формулою:

$$\Delta y_{x_1} = f(x_1^1, x_2^0, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0),$$

або

$$\Delta y_{x_1} = f(x_1^1, x_2^0, \dots, x_n^0) - y^0. \quad (2.36)$$

Зміна  $\Delta y$  під впливом фактора  $x_2$  дорівнюватиме

$$\Delta y_{x_2} = f(x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^0) - f(x_1^1, x_2^0, \dots, x_n^0). \quad (2.37)$$

Аналогічно розраховують зміни  $\Delta y$  під впливом інших чинників. Запишемо формулу для знаходження такої зміни під впливом фактора  $x_n$

$$\Delta y_{x_n} = f(x_1^1, x_2^1, \dots, x_{n-1}^1, x_n^1) - f(x_1^1, x_2^1, \dots, x_{n-1}^1, x_n^0),$$

або

$$\Delta y_{x_n} = y^1 - f(x_1^1, x_2^1, \dots, x_{n-1}^1, x_n^0). \quad (2.38)$$

Отже,

$$\Delta y = \Delta y_{x_1} + \Delta y_{x_2} + \dots + \Delta y_{x_n}. \quad (2.39)$$

Цей метод застосовують, коли функціональна залежність є прямо чи обернено пропорційною і виражена у вигляді суми, добутку чи частки від ділення факторних змінних. Під час обчислень важливо забезпечити строгу послідовність підстановок, бо її самовільна зміна може призвести до неправильних результатів. Приклад застосування цього методу для розрахунку впливу факторів на обсяг промислової продукції підприємства наведено в [69, с. 56].

У разі застосування методу ланцюгових виникає необхідність класифікації факторів за значущістю їхнього впливу на результатний показник. Бажано спочатку взяти до уваги зміни кількісних, а потім якісних чинників. У випадку наявності декількох кількісних і декількох якісних факторів спочатку треба змінювати величину факторів найвищого рівня, а потім нижчого і т. д.

**2.2.3.** *Метод різниці абсолютних величин* пропонують застосовувати для розрахунку впливу чинників на зміну результатного показника в двофакторних детермінованих моделях мультиплікативного типу, коли один фактор виражає кількісні зміни, а другий – якісні. Хоча деякі автори [4, с. 23] застосовують його і у випадку більшої кількості незалежних чинників та мультиплікативно-адитивних моделей. Цей метод можна розглядати як спрощений варіант методу ланцюгових підстановок.

Нехай задано два незалежні фактори. Щоб визначити вплив кількісного фактора, треба його абсолютне відхилення помножити на базове значення якісного чинника. Вплив якісного фактора визначають добутком його абсолютного відхилення на фактичне значення кількісного чинника. Тобто, якщо

$$y = x_1 \cdot x_2, \quad (2.40)$$

де  $x_1$ ,  $x_2$  – відповідно, кількісний і якісний чинники, то вплив кількісного фактора матимемо з розрахунку

$$\Delta y_{x_1} = x_1^1 - x_1^0 = \Delta x_1 \cdot x_2^0, \quad (2.41)$$

а якісного – з формули

$$\Delta y_{x_2} = x_2^1 - x_2^0 = \Delta x_2 \cdot x_2^1. \quad (2.42)$$

Отже,

$$\Delta y = \Delta y_{x_1} + \Delta y_{x_2} \cdot \quad (2.43)$$

Якщо, наприклад, за деякий період середньоспискова кількість працівників (кількісний показник) зменшилася від 372 до 365 осіб, а середньорічний виробіток одного працівника (якісний показник) збільшився від 6022,4 до 6375,7 грн, то збільшення загального обсягу промислової продукції (результатний показник) за цей період від 2240,3 до 2327,1 тис. грн залежить від обох перших показників. Для обчислення впливу на відхилення обсягу промислової продукції першого з цих факторних показників треба скористатися формулою (2.41):

$$\Delta y_{x_1} = \Delta x_1 \cdot x_2^0 = -7 \cdot 6022,4 = -42156,8 \text{ (грн)}. \quad (2.44)$$

Отже, із зменшенням кількості працівників на сім осіб обсяг промислової продукції зменшився на 42,2 тис. грн.

За допомогою формули (2.42) обчислимо вплив на відхилення результатного показника другого факторного показника:

$$\Delta y_{x_2} = \Delta x_2 \cdot x_2^1 = 353,3 \cdot 365 = 128954,5 \text{ (грн)}.$$

Отже, із підвищенням середньорічного виробітку одного працівника на 353,3 грн обсяг промислової продукції збільшився на 131,4 тис. грн.

Виконаємо пофакторну перевірку за формулою (2.43):

$$\Delta y = \Delta y_{x_1} + \Delta y_{x_2} = -42156,8 + 128954,5 = 86797,7 \text{ (грн)}.$$

Це відповідає відхиленню за загальним показником:

$$\Delta y = 2327,1 - 2240,3 = 86,8 \text{ (тис. грн)}.$$

**2.2.4.** У методі різниці відносних величин (відсоткових різниць) під час визначення впливу кожного фактора на зміну результатного показника використовують індекси цих факторів, які обчислюють за формулою (2.27). Величину цього впливу визначають шляхом множення різниці суміжних індексів факторних показників на базовий обсяг узагальнюваного показника.

Зокрема, якщо результатний показник  $y$  залежить від  $n$  незалежних факторів  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , то зміну  $\Delta y$  під впливом кожного з цих факторів обчислюють за такими формулами:

$$\Delta y_{x_1} = \frac{(i_{x_1} - 100) \cdot y_0}{100}; \quad \Delta y_{x_2} = \frac{(i_{x_2} - i_{x_1}) \cdot y_0}{100};$$



$$\Delta y_{x_3} = \frac{(i_{x_3} - i_{x_2}) \cdot y_0}{100}; \dots \Delta y_{x_{n-1}} = \frac{(i_{x_{n-1}} - i_{x_{n-2}}) \cdot y_0}{100};$$

$$\Delta y_{x_n} = \frac{(i_y - i_{x_{n-1}}) \cdot y_0}{100}. \quad (2.45)$$

Сумарний результат зміни ( $\Delta y$ ) визначають за формулою (2.39).

Метод різниці відносних величин застосовують здебільшого у мультиплікативних моделях, хоча деякі з авторів пропонують застосовувати його і для вимірювання кількісного впливу чинників на приріст результатного показника в аддитивно-мультиплікативних моделях [4, с. 23].

### 2.3. Комплексна оцінка економічних явищ і процесів

**2.3.1.** У процесі комплексного аналізу економічних об'єктів виникає необхідність одночасного вивчення сукупності показників, значення яких відображають всі чи більшість аспектів зміни та розвитку цих об'єктів. Однак визначити, як змінився стан певного об'єкта за деякий проміжок часу або порівняти однорідні об'єкти між собою можна лише за одним показником. Звідси випливає, що для оцінення об'єкта дослідження потрібен один якийсь показник, який би синтезував всі сторони діяльності цього об'єкта. Однак складність виробничо-господарської діяльності не дає змоги виділити з множини узагальнюваних результатних показників якийсь один як основний. Зважаючи на це, під час економічного аналізу виникає необхідність зведення кількох часткових (первинних) показників до одного – інтегрального показника. Це дає змогу визначити якісну відмінність (ліпше чи гірше) досягнутого стану від бази порівняння, хоча у цьому разі неможливо виміряти ступінь (на скільки чи у скільки) цієї відмінності.

Знання алгоритмів розрахунку інтегральних показників необхідне також під час розв'язання багатокритеріальних задач економічного аналізу. Одним із основних прийомів розв'язування таких задач є зведення багатьох її критеріїв до одного. Побудова інтегрального показника тут, по суті, переводить ситуацію полікритеріального оцінювання до ситуації монокритеріального оцінювання і, відповідно, спрощує процес прийняття управлінських рішень.

Виконання економічного аналізу розглянутого об'єкта не закінчується побудовою і розрахунком інтегрального показника. Навпаки, це лише перший етап дослідження, яке продовжується вивченням системи показників, що є в основі інтегральної оцінки. Загальні висновки формують на підставі як перших, так і других досліджень. Тому потрібно знати і вміти застосовувати методи побудови інтегральних показників.

В економічному аналізі вирізняють детерміновані та стохастичні методи комплексної оцінки. Детерміновані методи є досить простими. Виконання розрахунків згідно з цими методами супроводжується використанням тільки елементарних математичних операцій. Розглянемо деякі з цих методів.

**2.3.2.** Найчастіше інтегральний показник будують в аддитивній формі. Метод детермінованої комплексної оцінки в цьому випадку називають *методом сум*. Суть його полягає у визначенні інтегрального показника  $(K_i, i = \overline{1, m})$  шляхом сумування його фактичних значень за абсолютними чи відносними вимірниками. У першому випадку цей показник обчислюють як

$$K_i = \sum_{j=1}^n x_{ij}^1, \quad (2.46)$$

у другому –

$$K_i = \sum_{j=1}^n \frac{x_{ij}^1}{x_{ij}^0}, \quad (2.47)$$

де  $x_{ij}^0$  і  $x_{ij}^1$  – базове і фактичне значення  $j$ -го ( $j = \overline{1, n}$ ) показника на  $i$ -му ( $i = \overline{1, m}$ ) об'єкті. Тут базове значення може бути плановим, одним із значень визначеного періоду, який вже минув, чи еталонним значенням показника за групою виробничих об'єктів.

Зрозуміло, що розрахувати інтегральний показник у цьому випадку можна буде лише тоді, коли значення кожного з первинних показників будуть виміряні за допомогою якоїсь із кількісних шкал. Однак для використання формули (2.46) цього недостатньо. Використання цієї формули можливе лише за умови однакової розмірності первинних показників. У випадку різної розмірності

доцільно використовувати формулу (2.47), оскільки кожний її доданок є безрозмірною величиною.

Отже, щоб усунути вплив розмірності під час зіставлення значень первинних показників з різною розмірністю, їх перед сумуванням за формулою (2.46) нормалізують (стандартизують). Для цього вводять єдиний для всіх цих показників масштаб чи зводять їх до безрозмірних величин. В останньому випадку інтегральний показник обчислюють за аналогічною до (2.46) формулою:

$$K_i = \sum_{j=1}^n y_{ij}, \quad (2.48)$$

де  $y_{ij}$  – безрозмірне значення  $j$ -го ( $j = \overline{1, n}$ ) показника на  $i$ -му ( $i = \overline{1, m}$ ) об'єкті.

Використання формули (2.47) – це не єдиний спосіб виконання цієї процедури. Звести до безрозмірних величин значення часткових показників, які виміряні у шкалах відношень, можна, зокрема, за допомогою формули

$$y_{ij} = x_{ij} / x_{j \max}, \quad (2.49)$$

а виміряні у шкалах інтервалів – такої формули:

$$y_{ij} = (x_{ij} - x_{j \min}) / (x_{j \max} - x_{j \min}), \quad (2.50)$$

де  $y_{ij}$  – безрозмірне значення  $j$ -го ( $j = \overline{1, n}$ ) показника на  $i$ -му ( $i = \overline{1, m}$ ) об'єкті;  $x_{j \min}, x_{j \max}$  – відповідно найменше і найбільше значення  $j$ -го часткового показника за всією сукупністю об'єктів.

Є й інші алгоритми зведення часткових показників до безрозмірних величин [60, с. 40]. Однак найпоширеніший спосіб стандартизації даних – їх нормалізація за середнім квадратичним відхиленням:

$$y_{ij} = (x_{ij} - \bar{x}_j) / \sigma_j, \quad (2.51)$$

де  $\bar{x}_j, \sigma_j$  визначають за такими формулами:

$$\bar{x}_j = \left( \sum_{i=1}^m x_{ij} \right) / m,$$

$$\sigma_j = \sqrt{\left[ \sum_{i=1}^m (x_{ij} - \bar{x}_j)^2 \right] / m}. \quad (2.52)$$

Під час розрахунків інтегрального показника методом сум використовувати нестандартизовані значення первинних показників можна у випадку, коли його величину визначати за формулою

$$K_i = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_{ij}, \quad (2.53)$$

де  $\alpha_j$  – коефіцієнт пріоритетності  $j$ -го часткового показника, який перетворює цей показник у безрозмірний.

Метод сум має деякі недоліки. Зокрема, значення інтегрального показника можуть бути великими і у випадку малих значень окремих часткових показників. Така ситуація може настати під час компенсації часткових показників великими значеннями інших первинних показників. Тут під малими розуміють значення, які менші, а великими – більші за деяку величину.

Цей недолік можна частково усунути, якщо поряд з інтегральним розраховувати два інші комплексні показники, які визначають суму часткових показників, відповідно, з малими і великими значеннями. Наприклад, якщо для визначення інтегральної оцінки певного об'єкта використаємо формулу (2.46), то водночас можна розраховувати такі комплексні показники

$$K_i^+ = \sum_{j=1}^n x_{ij}^+, \quad (2.54)$$

$$K_i^- = \sum_{j=1}^n x_{ij}^-, \quad (i = \overline{1, m}), \quad (2.55)$$

де

$$x_{ij}^+ = \begin{cases} x_{ij}^1 / x_{ij}^0, & \text{якщо } x_{ij}^1 \geq x_{ij}^0; \\ 0, & \text{якщо } x_{ij}^1 < x_{ij}^0; \end{cases} \quad x_{ij}^- = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x_{ij}^1 \geq x_{ij}^0; \\ x_{ij}^1 / x_{ij}^0, & \text{якщо } x_{ij}^1 < x_{ij}^0. \end{cases}$$

Застосовувати метод сум можна лише у випадку односпрямованості досліджуваних показників, коли збільшення (зменшення)

будь-якого часткового показника розглядають як поліпшення стану об'єкта дослідження, а зменшення (збільшення) довільного первинного показника веде до погіршення результатів господарської діяльності.

Отже, цей метод можна застосовувати тільки коли всі часткові показники є стимуляторами (позитивно, стимулюючи діють на розвиток економічного об'єкта) чи дестимуляторами (негативно діють на розвиток економічного об'єкта).

Якщо серед первинних показників є стимулятори і дестимулятори, то у розрахункових формулах для інтегрального показника одні з них треба брати з одним знаком, а інші – з іншим. Наприклад, стимулятори із знаком плюс, а дестимулятори – мінус чи навпаки.

Побудову інтегрального показника в цьому випадку можна виконати і за формулою (2.48). Тоді для зведення до безрозмірних величин значення стимуляторів і дестимуляторів треба використати різні алгоритми. Зокрема, стимулятори можна зводити до безрозмірних величин за формулою (2.50), а дестимулятори – за формулою

$$y_{ij} = (x_{j_{\max}} - x_{ij}) / (x_{j_{\max}} - x_{j_{\min}}). \quad (2.56)$$

Виконати цю процедуру можна і за іншими формулами [26, с. 31].

Однак серед первинних показників, крім стимуляторів і дестимуляторів, можуть бути номінатори, які в одному діапазоні своїх значень можна вважати стимуляторами, а в іншому – дестимуляторами. Отож, номінатором називають показник, який залежно від свого значення стимулює чи дестимулює певний процес.

Візьмемо, наприклад, показник «рівень безробіття». Відомо, що безробіття стимулює ефективну зайнятість, перерозподіл працівників, запобігає дефіциту робочої сили тощо. Однак воно також є великим соціальним злом. Велике безробіття спричиняє значні матеріальні втрати (зменшується вироблений національний продукт), призводить до загострення соціальних відносин, погіршення умов життя людей, інших негараздів. Для будь-якої країни у певний момент часу існує значення рівня безробіття, яке називають природним рівнем безробіття. У цьому разі ринки праці й товарів збалансовані, тобто чинники, що підвищують і знижують заробітну

плату і ціни, урівноважені. Цей рівень є ніби золотою серединою між надто високим і надто низьким безробіттям.

Нехай значення природного і реального рівнів безробіття дорівнюють відповідно  $\alpha$  і  $\beta$ . Тоді, якщо  $\beta < \alpha$ , то збільшення реального рівня безробіття в країні корисне для виробництва і поліпшує економічне становище в країні. Тобто в цьому випадку показник «рівень безробіття» є стимулятором. Якщо ж  $\beta > \alpha$ , то зростання реального рівня безробіття не корисне для економіки, цей показник є дестимулятором.

Під час визначення інтегральних показників номінатори заміняють показниками, які мають близьку змістовну інтерпретацію і є стимуляторами чи дестимуляторами.

**2.3.3.** Під час визначення інтегральних показників використовують не тільки адитивні, а й мультиплікативні моделі. Підґрунтям визначення узагальненої оцінки за *методом геометричної середньої* є мультиплікативні моделі. Алгоритм пошуку детермінованої комплексної оцінки  $(K_i, i = \overline{1, m})$  в цьому випадку містить розрахункову формулу

$$K_i = \left( \prod_{j=1}^n y_{ij} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (i = \overline{1, m}), \quad (2.57)$$

де величини  $y_{ij}$  обчислюють за формулою (2.49), коли значення первинних показників є додатні.

Отже, в методі середньої геометричної множники задовольняють умову  $0 \leq y_{ij} \leq 1$ . Цей метод доцільно застосовувати у випадку відносно малої кількості часткових показників і у випадку, коли більшість їхніх значень близька до одиниці.

Частковим випадком методу середньої геометричної є *метод коефіцієнтів*. Ці два методи майже не відрізняються один від одного. Згідно з методом коефіцієнтів інтегральний показник обчислюють так:

$$K_i = \prod_{j=1}^n y_{ij}, \quad (i = \overline{1, m}). \quad (2.58)$$

Для проведення економічного аналізу не має суттєвого значення, який з цих узагальнених показників застосовувати. Вони обидва дають змогу зробити однакові висновки.

Наведені формули застосовують у випадку, коли всі первинні показники є стимуляторами. Якщо  $j$ -й частковий показник є дестимулятором, то під час застосування цього методу звести його до стимулятора можна за такою формулою:

$$z_{ij} = 1/y_{ij}, \quad (2.59)$$

де  $z_{ij}, y_{ij}$  – відповідно зведене до стимулюючого і дестимулююче значення  $j$ -го ( $j = \overline{1, n}$ ) показника на  $i$ -му ( $i = \overline{1, m}$ ) об'єкті.

**2.3.4.** Значення первинних показників не завжди розраховують за кількісними шкалами. Деякі з цих показників можна визначати за шкалою порядку. Тоді зазначені методи не придатні для розрахунку інтегральних показників. У цьому випадку на підставі додаткової інформації потрібно звести наведені часткові показники до якоїсь кількісної шкали (якщо це можливо) і скористатись якимсь із попередніх методів, або значення всіх інших первинних показників записати у шкалі порядку й оцінювати стан об'єкта дослідження *методом суми місць*.

Цей метод передбачає обов'язкове використання шкали порядку для вимірювання значень всіх первинних показників. Спочатку всі об'єкти дослідження ранжують (впорядковують) окремо за величиною кожного із часткових показників. У результаті цієї операції  $i$ -му ( $i = \overline{1, m}$ ) об'єкту присвоюється ранг  $s_{ij}$ , який визначає місце цього об'єкта серед інших за  $j$ -м ( $j = \overline{1, n}$ ) показником. Якщо вага (коефіцієнт пріоритетності)  $j$ -го часткового показника дорівнює  $\alpha_j$ , то узагальнювальну оцінку обчислюють за формулою

$$K_i = \sum_{j=1}^n \alpha_j s_{ij}, \quad (i = \overline{1, m}). \quad (2.60)$$

Якщо  $j$ -й частковий показник є дестимулятором, то у разі застосування цього методу його треба звести до стимулятора. Цю процедуру виконують за допомогою відшукування нових рангів для всіх досліджуваних об'єктів за формулою

$$z_{ij} = m + 1 - s_{ij}, \quad (2.61)$$

де  $s_{ij}$  і  $z_{ij}$  – відповідно початковий і новий ранг  $i$ -го ( $i = \overline{1, m}$ ) об'єкта за  $j$ -м ( $j = \overline{1, n}$ ) показником.

**2.3.5.** Економічний аналіз, що ґрунтується на описаних методах знаходження інтегральних показників, зводиться до порівняння об'єктів дослідження між собою за величиною цих показників. Самі ж методи знаходження цих показників ґрунтуються на використанні аддитивних чи мультиплікативних моделей.

Розглянемо методи, які дають змогу побудувати узагальнені показники на підставі порівняння об'єктів дослідження з об'єктом-еталоном. Вони мають загальну назву – *методи відстаней*.

Якщо є стандарти, нормативи чи будь-які інші еталонні значення  $x_{0j}$ , наприклад, найбільше значення кожного показника за всіма об'єктами (якщо всі часткові показники є стимуляторами), то, агрегуючи відношення  $x_{ij}/x_{0j}$ , можна визначити ступінь відхилення  $i$ -го об'єкта від об'єкта-еталона за однією з таких формул:

$$K_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left| \frac{x_{ij}}{x_{0j}} - 1 \right|, \quad (2.62)$$

чи

$$K_i = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{j=1}^n \left( \frac{x_{ij}}{x_{0j}} - 1 \right)^2}. \quad (2.63)$$

Отже, найкращу оцінку отримують об'єкти, максимально наближені до еталона. Щоб виконати порівняльний аналіз всіх об'єктів дослідження, необхідно проранжувати їх за зростанням величини  $K_i$ .

Виходячи з мети економічного аналізу, можна агрегувати лише додатні або лише від'ємні відхилення.

Розглянуті формули можна модифікувати на випадок різної спрямованості первинних показників. Зокрема, якщо стандартиза-



цію показників-стимуляторів виконати за формулою (2.50), а дестимуляторів – за формулою (2.56), то інтегральна оцінка

$$K_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_{ij} \quad (2.64)$$

тим ближче до одиниці, чим ближчий об'єкт дослідження до еталона, тобто до такого об'єкта, у якого значення показників-стимуляторів дорівнює максимуму значень цих показників для всіх досліджуваних об'єктів, а значення показників-дестимуляторів – мінімуму їхніх значень.

Опишемо, як використовують формулу (2.64) для розрахунку індексу людського розвитку за методикою Програми розвитку ООН. Ця методика як первинні показники використовує (для  $i$ -ї країни) такі:  $x_{i1}$  – очікувана тривалість життя населення,  $x_{i2}$  – досягнутий рівень освіти,  $x_{i3}$  – реальний ВВП на душу населення. Для стандартизації цих показників прийнято такі значення:  $x_{1\max} = 85$ ,  $x_{1\min} = 25$  (найбільша і найменша очікувана тривалість життя у роках),  $x_{2\max} = 100$ ,  $x_{2\min} = 0$  (найвищий і найнижчий рівень освіти у відсотках),  $x_{3\max} = 5120$ ,  $x_{3\min} = 100$  (найбільший і найменший ВВП на душу населення до 1997 р. у дол. США)

Нехай в країні очікувана тривалість життя – 71,6 року, рівень освіти – 89%, ВВП на душу населення – 210 дол. США. Індекс людського розвитку цієї ( $i$ -ї) країни дорівнює

$$K_i = \frac{1}{3} \left( \frac{71,6 - 25}{85 - 25} + \frac{89 - 0}{100 - 0} + \frac{210 - 100}{5120 - 100} \right) = 0,55.$$

Використовувати інтегральні показники можна для виконання порівняльного аналізу у просторі чи в часі. Ми запропонували алгоритм розрахунку інтегрального показника для виконання комплексного територіально-часового порівняльного аналізу [60, с. 101]. Згідно з цим алгоритмом будують таблицю значень узагальненого показника, використовуючи яку можна порівнювати досліджувані об'єкти одночасно як за регіонами, так і за часовими проміжками.

### 3. МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ В ДОСЛІДЖЕННІ ЕКОНОМІЧНИХ ЯВИЩ І ПРОЦЕСІВ

Математичний аналіз є теоретичним підґрунтям багатьох методів дослідження економіки. Його класичні методи застосовують як самостійно (диференціювання та інтегрування), так і разом з іншими методами аналізу діяльності господарюючих суб'єктів (дослідження операцій, математичної статистики тощо). Детальніше розглянемо деякі з них.

#### 3.1. Безумовна оптимізація

**3.1.1.** У багатьох випадках прийняттю управлінського рішення передують кількісна оцінка можливих альтернатив (варіантів рішень) і вибір найкращої з них. Ці проблеми вирішують за допомогою методів дослідження операцій.

Однак у деяких випадках для знаходження відповіді на поставлене запитання не обов'язково застосовувати складні теорії, достатньо скористатися класичними методами математичного аналізу. Це стосується задач безумовної оптимізації та таких, що зводяться до них. До останніх, зокрема, належать оптимізаційні задачі з обмеженнями-рівняннями, які можна розв'язати відносно деякого достатнього набору незалежних змінних і звести початкову задачу до задачі без обмежень, зменшивши її розмірність.

Розглянемо функцію  $f(X)$ , яка задана на  $R^n$ . Ця функція може набувати скінченну чи нескінченну множину значень, бути неперервною чи розривною, може мати чи не мати першу, другу та наступні похідні. З огляду на це треба по-різному визначати, що таке максимум (мінімум) такої функції, необхідні й достатні умови існування її екстремумів тощо.

Спочатку розглянемо випадок, коли множина значень функції  $f(X)$  скінченна, де  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ . Точку  $X_0$  називають *точкою максимуму (мінімуму)* або просто *максимумом (мінімумом) функції  $f(X)$  на  $R^n$* , якщо нерівність

$$f(X_0) \geq f(X) \quad (f(X_0) \leq f(X)) \quad (3.1)$$

виконується  $\forall X \in R^n$ . Іноді ще деталізують: у випадку виконання нерівності (3.1) максимум (мінімум) називають нестрогим, а коли замість неї виконується строга нерівність  $f(X_0) > f(X)$  ( $f(X_0) < f(X)$ ), – строгим.

За означенням, *розв'язком задачі безумовної максимізації (мінімізації) функції  $f$*

$$f(X) \rightarrow \max (\min) \quad (3.2)$$

називають будь-яку точку максимуму (мінімуму) цієї функції, тобто точку, в якій функція  $f(X)$  досягає свого найбільшого (найменшого) значення. Функцію  $f(X)$  у цьому випадку називають *цільовою функцією, чи функцією мети*.

Якщо множина значень функції  $f(X)$  нескінченна, то не кожна з таких функцій має максимум чи мінімум, а навіть за їх наявності ці точки не завжди можна знайти. Тому, крім цих точок, часто знаходять локальні максимуми та мінімуми заданої функції  $f(X)$ . Їхні властивості слабші за сформульовані в умовах (3.1) властивості точки  $X_0$ .

Нехай функція  $f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  визначена в області  $C$  і  $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  – внутрішня точка цієї області. Точку  $X_0$  називають *локальним максимумом (мінімумом)*, або *точкою локального максимуму (мінімуму) функції  $f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$* , якщо є такий її  $\delta$ -окіл

$$(x_1^0 - \delta, x_1^0 + \delta; x_2^0 - \delta, x_2^0 + \delta; \dots; x_n^0 - \delta, x_n^0 + \delta),$$

що для всіх

$$X \in (x_1^0 - \delta, x_1^0 + \delta; x_2^0 - \delta, x_2^0 + \delta; \dots; x_n^0 - \delta, x_n^0 + \delta), \quad X \neq X_0$$

виконується нерівність

$$f(X_0) \geq f(X) \quad (f(X_0) \leq f(X)). \quad (3.3)$$

Локальні максимуми і мінімуми функції називають *локальними екстремумами* чи *екстремумами*. Локальні екстремуми – це точки, у яких функція набуває найбільшого (найменшого) значення порівняно з її значеннями у близьких до розглянутої точках. З цього можна зробити висновок, що локальний максимум може бути меншим за локальний мінімум.

Зазначимо, що в різних точках максимуму (мінімуму) функції  $f(X)$  вона набуває однакового значення, а в різних точках її локального максимуму (мінімуму) ця функція може набувати різних значень. Крім того, будь-яка точка максимуму (мінімуму) функції є також точкою її локального максимуму (мінімуму), але не навпаки. Зважаючи на це, функція може мати декілька локальних максимумів (мінімумів), але тільки одне, якщо воно існує, найбільше (найменше) значення. Для однозначності точку максимуму (мінімуму) функції часом називають її *абсолютним* (або *глобальним*) *максимумом* (*мінімумом*). Деколи усі такі точки називають *абсолютними* (чи *глобальними*) *екстремумами*.

Зауважимо, що для деяких функцій всі локальні екстремуми одночасно є і точками їхніх глобальних екстремумів. До таких функцій, зокрема, належать опуклі та вгнуті функції. Можна довести [63, с. 82] теорему, що якщо функція  $f(X)$  опукла (вгнута) на  $R^n$ , то будь-який локальний мінімум (максимум) цієї функції є також її глобальним мінімумом (максимумом). Наприклад, функція  $y = x^2$  є опуклою. Єдиний локальний мінімум  $x = 0$  цієї функції є і її глобальним мінімумом.

**3.1.2.** Припустимо тепер, що функція  $f: R^n \rightarrow R$  диференційована на  $R^n$ , тобто у будь-якій точці  $X \in R^n$  наявний градієнт  $\nabla f(X)$  цієї функції. Тоді, використовуючи теорему Ферма, можна довести [78, Т. 1, с. 418], що якщо в точці  $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  функція  $f(X)$  має екстремум, то частинна похідна цієї функції у точці  $X_0$  за кожною із змінних  $x_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) дорівнює нулю. Отже, для диференційованої функції  $f(X)$  умова

$$\nabla f(X) = 0 \quad (3.4)$$

є *необхідною умовою наявності екстремуму* в точці  $X$ .

Для часткового випадку, коли функція  $f(x)$  залежить тільки від однієї змінної  $x$ , умова (3.3) перетворюється в таку:

$$f'(x) = 0. \quad (3.5)$$

Точки, в яких виконуються умови (3.4) чи (3.5), називають *точками можливого екстремуму*, або *стаціонарними точками*. Стаціонарні

точки і точки, в яких похідної немає, називають *критичними точками функції*. Не завжди критична точка є точкою екстремуму. Це впливає з елементарного прикладу. Наприклад, точка  $x = 0$  є критичною, зокрема, стаціонарною для функції  $y = x^3$ , але не екстремальною.

Отже, можна підсумувати. Якщо в диференційованій функції  $f(X)$  немає стаціонарних точок, то в неї немає жодної екстремальної точки, а задача безумовної оптимізації (3.2) не має розв'язку. Крім того, можна стверджувати, що із стаціонарності точки не впливає її екстремальність.

Наприклад, розглянемо три функції:

$$f_1(x) = 2^x, \quad f_2(X) = x_1^2 + x_2^2, \quad f_3(X) = x_1^2 - x_2^2.$$

Перша з них визначена на множині дійсних чисел ( $X = x$ ), а інші дві – на  $R^2$ , тобто,  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ .

Похідна першої з цих функцій  $f_1'(x) = 2^x \ln 2$  не має нулів. Тобто рівняння  $2^x \ln 2 = 0$  не має розв'язку. Звідси множина стаціонарних точок цієї функції порожня, тому вона не має точок екстремуму.

Граденти інших двох функцій відповідно такі:

$$\nabla f_2(X) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}, \quad \nabla f_3(X) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ -2x_2 \end{pmatrix}.$$

Кожний з них має єдину (обоє одну і ту ж) стаціонарну точку  $\Theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Очевидно, що функція  $f_2(X)$  має в цій точці мінімум.

Проте для функції  $f_3(X)$  ця точка не є екстремумом, тому що для точок

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta/2 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad X_2 = \begin{pmatrix} \delta/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

із довільного  $\delta$ -околу стаціонарної точки  $\Theta$  виконуються нерівності  $f_3(X_1) = -\delta^2/4 < f(\Theta)$  і  $f_3(X_2) = \delta^2/4 > f(\Theta)$ , що суперечить означенню (3.3) локального екстремуму.

З наведених останнього і попередніх прикладів видно, що для диференційованої функції  $f(X)$  необхідні умови існування екстремуму в точці  $X$  не є достатніми. Зважаючи на це, щоб визначити, чи є стаціонарна точка екстремальною, треба провести додаткові дослідження.

**3.1.3.** Проведення досліджень стаціонарної точки  $x_0$  диференційованої функції однієї змінної  $f(x)$  на екстремум залежить від існування в цій точці другої похідної та рівності її нулю. Можна скористатись якимсь із трьох правил.

**Правило перше.** Якщо похідна функції  $f(x)$  під час переходу через стаціонарну точку  $x_0$  зліва направо змінює знак з «+» на «-», то ця стаціонарна точка є точкою максимуму, якщо ж  $f'(x)$  змінює знак з «-» на «+», то точка  $x_0$  є точкою мінімуму. Якщо зазначена похідна під час переходу через стаціонарну точку зліва направо не змінює знака, то ця точка не є точкою екстремуму.

Наприклад, функція  $y = x^4$  має одну стаціонарну точку  $x_0 = 0$  ( $y' = 4x^3, 3x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$ ). Під час переходу через стаціонарну точку зліва направо похідна  $y' = 4x^3$  цієї функції змінює знак з від'ємного ( $y'(-1) = -4 < 0$ ) на додатний ( $y'(1) = 4 > 0$ ). Тому стаціонарна точка  $x_0 = 0$  є точкою екстремуму, а саме мінімуму функції  $y = x^4$ .

Функція  $y = x^5$  має також одну таку ж стаціонарну точку:  $x_0 = 0$  ( $y' = 5x^4, 5x^4 = 0 \Rightarrow x = 0$ ). Однак похідна цієї функції  $f'(x) = 5x^4 > 0$  для всіх  $x \neq 0$ , тому не змінює знака в разі переходу через критичну точку  $x = 0$ . Отже,  $x = 0$  не є точкою екстремуму цієї функції.

Розглянемо приклад економічної задачі. Підприємець виготовляє  $q$  виробів певного виду за ціною  $P(q) = 40 - 0,05q$  гривень. Його витрати виробництва є функцією від кількості цих виробів, яка має вигляд  $C(q) = 0,03q^2 + 8q + 200$  грн. Визначити оптимальний обсяг випуску продукції і відповідний максимальний прибуток.

За умовою задачі прибуток підприємця описує функція

$$\Pi(q) = q \cdot P(q) - C(q) = -0,08q^2 + 32q - 200.$$

Знайдемо стаціонарні точки функції  $\Pi(q)$ :

$$P'(q) = -0,16q + 32 \Rightarrow -0,16q + 32 = 0 \Rightarrow q = 200.$$

Оскільки  $P'(100) = 16 > 0$ , а  $P'(300) = -16 < 0$ , тобто похідна досліджуваної функції прибутку  $P(q)$  під час переходу через стаціонарну точку  $q = 200$  зліва направо змінює знак з додатного на від'ємний, то ця точка є точкою максимуму прибутку. Максимальний прибуток  $P_{\max} = P(200) = 3000$  грн.

Зауважимо, що перше правило перевірки стаціонарної точки функції  $f(x)$  на екстремум можна застосовувати для перевірки на екстремум будь-якої критичної точки цієї функції, тобто точки, яка належить області визначення функції і в якій похідна дорівнює нулю чи не існує.

**Правило друге.** Якщо друга похідна в стаціонарній точці  $x_0$  функції  $f(x)$  додатна ( $f''(x_0) > 0$ ), то  $x_0$  є точкою мінімуму, якщо ж  $f''(x_0) < 0$ , то  $x_0$  – точка максимуму цієї функції.

Визначити екстремальність стаціонарної точки за цим правилом можна тільки у випадку відмінності другої похідної в цій точці від нуля.

Якщо розглянути попередню задачу, то друга похідна від прибутку підприємця в стаціонарній точці  $q = 200$  є від'ємною ( $P''(200) = -0,16 < 0$ ). Згідно з другим правилом ця точка є точкою максимуму прибутку. До такого ж висновку ми дійшли, використовуючи перше правило.

**Правило третє.** Якщо першою відмінною від нуля в стаціонарній точці  $x_0$  є похідна парного порядку, то точка  $x_0$  є точкою екстремуму, якщо ж непарного, то в цій точці екстремуму немає. За наявності екстремуму точка  $x_0$  буде точкою локального максимуму у випадку  $f^{(n)}(x_0) < 0$  і точкою локального мінімуму у випадку  $f^{(n)}(x_0) > 0$ .

Розглянуті функції  $y = x^4$  і  $y = x^5$  мають однакову стаціонарну точку  $x_0 = 0$ . Однак для першої функції всі похідні в точці  $x_0 = 0$  від першого до третього порядку ( $y' = 4x^3$ ,  $y'' = 12x^2$ ,  $y''' = 24x$ ) дорівнюють нулю, а першою відмінною від нуля в цій стаціонарній точці є

похідна четвертого (парного) порядку ( $y^{(4)} = 24 > 0$ ). Тому в цій точці є локальний мінімум. Для другої функції дорівнюють нулю в точці  $x_0 = 0$  всі похідні від першого до четвертого порядку ( $y' = 5x^4$ ,  $y'' = 20x^3$ ,  $y''' = 60x^2$ ,  $y^{(4)} = 120x$ ). Першою відмінною від нуля в цій стаціонарній точці є похідна п'ятого (непарного) порядку ( $y^{(5)} = 120$ ), тому в цій точці екстремуму немає.

**3.1.4.** Додаткові дослідження для з'ясування наявних екстремальних властивостей стаціонарних точок функції багатьох змінних є набагато складнішими. Розглянемо їх.

Нехай функція  $f: R^n \rightarrow R$  неперервно диференційована і  $X_0$  – її стаціонарна точка. Можна довести, що якщо гесіан  $\nabla^2 f(X_0)$  є додатно (від'ємно) визначеною матрицею, то  $X_0$  – локальний мінімум (максимум), а якщо невизначеною матрицею, тобто відповідна їй квадратична форма може набувати як додатних, так і від'ємних значень, то  $X_0$  не є екстремальною точкою. Якщо ж відповідна гесіану  $\nabla^2 f(X_0)$  квадратична форма набуває лише недодатних або лише невід'ємних значень, то з'ясування наявності екстремуму в точці  $x_0$  потребує додаткових досліджень.

Для функції двох змінних  $f(X)$ , де  $X = (x_1, x_2)^T$ , стаціонарна точка буде екстремальною, якщо в цій точці

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 > 0 \quad (\text{максимум, якщо } \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} < 0 \text{ і мінімум, якщо}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} > 0), \text{ і не матиме екстремуму, якщо } \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 < 0.$$

Щоб з'ясувати визначеність гесіана  $\nabla^2 f(X_0)$  (для цього можна скористатися методом Сільвестра), треба затратити багато зусиль. Це зробити простіше під час дослідження на екстремальність стаціонарних точок опуклих чи вгнутих функцій.

У цьому випадку можна скористатися такою теоремою: для опуклої (вгнутої) функції будь-яка стаціонарна точка є її абсолютним мінімумом (максимумом). Тобто для диференційованої опуклої (вгнутої) функції  $f(X)$  умова рівності градієнта в точці  $X_0$  нулю



$\nabla f(X_0) = 0$  є не лише необхідною, а й достатньою умовою мінімуму (максимуму) цієї точки.

Для прикладу розглянемо дві функції

$$f_1(X) = x_1^2 + 5x_1x_2 + 4x_2^2 \quad \text{і} \quad f_2(X) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2,$$

де  $X = (x_1, x_2)^T$ .

Знайдемо градієнти і гесіани цих функцій:

$$\nabla f_1(X) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 5x_2 \\ 5x_1 + 8x_2 \end{pmatrix}, \quad \nabla f_2(X) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 4x_2 \\ 4x_1 + 10x_2 \end{pmatrix},$$

$$\nabla^2 f_1(X) = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f_2(X) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}.$$

З рівності нулю градієнтів знаходимо стаціонарні точки досліджуваних функцій. Як перша, так і друга функції мають єдину однакову стаціонарну точку  $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Хоча обидва гесіани не зале-

жать від значень вектора  $X$ .

Знайдемо визначеність матриць, якими є ці гесіани. Skorистаємось методом Сільвестра. Головний мінор першого порядку для гесіана функції  $f_1(X)$  додатний ( $\Delta_1 = |2| = 2$ ), а другого –

від'ємний ( $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 8 - 5 \cdot 5 = -9 < 0$ ), тому за критерієм Сіль-

вестра матриця гесіана не є додатно визначена. Знаки мінорів чергуються, але мінор першого порядку не від'ємний, а додатний, тому ця матриця не є від'ємно визначеною. Отже, гесіан функції  $f_1(X)$  є невизначеною матрицею і ця стаціонарна точка не є екстремальною точкою.

Для гесіана функції  $f_2(X)$  головні мінори першого і другого порядку додатні ( $\Delta_1 = |2| = 2 > 0$ ,  $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 2 \cdot 10 - 4 \cdot 4 = 4 > 0$ ),

тому за критерієм Сільвестра матриця гесіана є додатно визначена і  $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  є точкою мінімуму. Отриманий висновок буде очевидним,

якщо записати досліджувану функцію у вигляді суми двох повних квадратів:  $f_2(X) = (x_1 + 2x_2)^2 + x_2^2$ . Звідси видно, що коли значення хоча б однієї змінної відмінне від нуля, то значення функції буде додатним. Ця функція дорівнюватиме нулю (найменше значення функції) лише в стаціонарній точці  $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Це також впливає з

того, що функції  $f_2(X)$  опукла.

**3.1.5.** Як зазначали, до необхідності знаходження екстремуму деякої функції зводяться задачі умовної оптимізації, в яких обмеження є тільки у вигляді рівнянь, які можна розв'язати відносно деякого набору незалежних змінних. Наприклад, якщо ми маємо задачу оптимізації з кількома обмеженнями-рівняннями

$$f(X) = 3x_1x_2(x_3 - 2)(x_4 + 7)^2 \rightarrow \max;$$

$$x_1 + x_3 = 8; \quad 2x_1 + 4x_2 - x_4 = 5,$$

то спочатку спростимо її, усунувши рівняння-обмеження. Знайдемо з рівнянь-обмежень значення змінних

$$x_3 = 8 - x_1 \quad \text{та} \quad x_4 = 2x_1 + 4x_2 - 5$$

і підставимо їх у функцію мети. У результаті одержимо задачу безумовної оптимізації

$$f(X) = 3x_1x_2(6 - x_1)(2x_1 + 4x_2 + 2)^2 \rightarrow \max.$$

Якщо рівняння-обмеження неможливо розв'язати відносно деякого набору незалежних змінних через складність функцій чи наявність багатьох рівнянь-обмежень, то, щоб розв'язувати цю задачу, доцільно скористатись якимсь методом математичного програмування, зокрема методом множників Лагранжа.

## 3.2. Методи диференціального числення

**3.2.1.** Найпоширенішими в економічному аналізі діяльності господарюючих суб'єктів, як зазначали, є задачі прямого детермінованого факторного аналізу. З економічного погляду до таких задач належить розрахунок кількісного значення чинників, які впливають на зміну результатного показника. З математичного погляду задачі прямого детермінованого факторного аналізу є задачами дослідження функції багатьох змінних.

Подані в попередньому розділі методи елементарної математики, які активно застосовують в економічному аналізі, здебільшого ґрунтувалися на простих логічних міркуваннях. Однак глибоким і строгим теоретичним підґрунтям кількісного визначення впливу окремих чинників на значення результатного показника є диференціювання.

Розглянемо функцію  $f: R^n \rightarrow R$ , яка диференційована на  $R^n$ . У теорії диференціального числення лінійна частина приросту диференційованої в точці  $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^T$  функції (повний диференціал) складається з доданків, значення кожного з яких визначають як добуток відповідної частинної похідної на приріст змінної, за якою обчислена ця похідна. Повний диференціал функції  $f(X)$  в точці  $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^T$  обчислюють за формулою

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i, \quad (3.6)$$

а її приріст  $\Delta f$  можна записати як

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i + o(\rho), \quad (3.7)$$

де  $df$  і  $\Delta f = \Delta f(X_0) = f(X_1) - f(X_0)$  – відповідно повний диференціал і приріст цієї функції в точці  $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^T$ ,  $X_1 = (x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)^T$ ;  $dx_i$  і  $\Delta x_i = x_i^1 - x_i^0$  – відповідно диференціал і приріст  $i$ -ї ( $i = \overline{1, n}$ ) незалежної змінної (фактора);

$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f'_{x_i}(X_0)$  – частинна похідна за змінною  $x_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) функції

$f(X)$  в точці  $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^T$ ;

$\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^n \Delta x_i^2}$  – відстань між точками  $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^T$  і

$X_1 = (x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)^T$ ;

$o(\rho)$  – безмежно мала величина вищого порядку, ніж  $\rho$ .

У методі диференціального числення точний вираз для приросту функції (3.7) замінюють наближенням

$$\Delta f \cong \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i, \quad (3.8)$$

а вплив  $i$ -го ( $i = \overline{1, n}$ ) фактора на зміну функції визначають як

$$\Delta f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i. \quad (3.9)$$

Отже, в цьому методі приріст функції замінюють повним диференціалом, а так званий нерозкладений залишок  $o(\rho)$ , який інтерпретують як логічну похибку методу диференціювання, не беруть до уваги. Проте параметр  $\rho$  буде малий тільки у випадку досить малої зміни екзогенних чинників. У разі достатньо значної зміни цих чинників значення параметра  $\rho$  можуть суттєво відрізнятись.

Зважаючи на однозначність подання повного диференціала функції через диференціали незалежних змінних, застосування методу диференціального числення для визначення впливу незалежних чинників на результатний показник може призвести до значних похибок, оскільки в ньому не беруть до уваги величину залишкового члена  $o(\rho)$ . Якраз у цьому полягає «незручність» методу диференціювання для економічних розрахунків, в яких, у більшості випадків, має бути точна залежність зміни результатного показника від впливу незалежних чинників.

Нехай, наприклад, задана функція двох змінних  $u = xu$ . Тоді її частинні похідні дорівнюють  $\frac{\partial u}{\partial x} = y$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = x$ . Якщо відомі початкові й кінцеві значення факторів та результатного показника  $(x_0, y_0, u_0, x_1, y_1, u_1)$ , то вплив факторів на зміну результатного показника визначають, відповідно, такими формулами:

$$\Delta u_x = y_0 \Delta x, \quad \Delta u_y = x_0 \Delta y.$$

Заміна приросту функції повним диференціалом приводить до похибки, яка дорівнює залишковому члену  $o(\rho)$ . Для розглянутого прикладу він дорівнюватиме  $\Delta x \Delta y = (x_1 - x_0)(y_1 - y_0)$  [2, с. 118].

Отже, для мультиплікативної функції  $u = xu$  оцінка впливу незалежних чинників на результатний показник методом диферен-

ціального числення веде до похибки, яка дорівнює добутку приросту аргументів.

**3.2.2.** Нехай розглянута нами функція  $f(X)$ , де

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T,$$

визначена і неперервна в замкнутій області  $C$  і має неперервні частинні похідні  $f'_{x_i} (i = \overline{1, n})$  всередині цієї області. Тоді можна записати формулу скінченних приростів [78, с. 390]:

$$\Delta f(X_0) = f(X_1) - f(X_0) = \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(x_1^0 + \theta \Delta x_1, x_2^0 + \theta \Delta x_2, \dots, x_n^0 + \theta \Delta x_n) \cdot \Delta x_i, \quad (3.10)$$

де  $X_1 = (x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)^T$ ,  $x_i^1 = x_i^0 + \Delta x_i$  ( $i = \overline{1, n}$ );

$X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^T$ ;  $\theta \in (0, 1)$ .

Цю рівність, що дає точний вираз для приросту функції за будь-яких скінченних приростів  $\Delta x_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) аргументів, можна протиставити наближеній рівності (3.9), відносна похибка якої прямує до

нуля, лише у випадку безмежно малого  $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^n \Delta x_i^2}$ . Використовувати для визначення впливу незалежних факторів на результатний показник формулу (3.10) важко, бо невідомий параметр  $\theta \in (0, 1)$ , а використання формули (3.8) через нехтування залишком  $o(\rho)$  може призвести до значних похибок.

З огляду на це в економічному аналізі у випадку двох незалежних чинників для зменшення цієї похибки почали застосовувати метод простого додавання нерозкладеного залишку. У цьому методі додають нерозкладений залишок до якісного чи кількісного фактора або ділять цей залишок між двома факторами порівно.

Візьмемо, наприклад, мультиплікативну функцію  $u = xy$ . Тоді, враховуючи результати розрахунків у попередньому пункті ( $o(\rho) = o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) = \Delta x \Delta y$ ), вплив першого та другого факторів на зміну цієї функції згідно з першою модифікацією цього методу визначають як  $\Delta u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + o(\rho) = y_0 \Delta x + \Delta x \Delta y = \Delta x(y_0 + \Delta y) = \Delta x y_1$ ,

$$\Delta u_y = \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y = x_0 \Delta y, \text{ а другої} - \Delta u_x = y_0 \Delta x, \Delta u_y = x_0 \Delta y + \Delta x \Delta y = \\ = \Delta y(x_0 + \Delta x) = \Delta y x_1.$$

Згідно з третьою модифікацією цього алгоритму розрахунки для розглянутої функції  $u = xy$  треба виконувати за такими формулами:

$$\Delta u_x = y_0 \Delta x + \frac{o(\rho)}{2} = y_0 \Delta x + \frac{\Delta x \Delta y}{2}, \Delta u_y = x_0 \Delta y + \frac{o(\rho)}{2} = x_0 \Delta y + \frac{\Delta x \Delta y}{2}.$$

В економічному аналізі використовують й інші модифікації методу простого додавання нерозкладеного залишку, які під час його додавання беруть до уваги вагові коефіцієнти для якісного і кількісного незалежних чинників [2, с. 123]. Хоча практично їх використовують дуже рідко.

Головним недоліком усіх модифікацій цього методу є те, що їх застосування, хоча і усуває проблему нерозкладеного залишку, обмежене двофакторними мультиплікативними моделями. Під час застосування цього методу виникає необхідність визначення тільки одного кількісного й одного якісного чинників, які впливають на зміну результатного показника. Тому використовувати його для факторного аналізу багатофакторних систем недоцільно.

**3.2.3.** Глибоке розуміння суті, що закладена у формулі (3.10), привело вчених до подальшого розвитку методу диференціального числення і розроблення методу *подрібнення приростів факторів*. Суть цього методу полягає у діленні приростів кожної із змінних на достатньо малі відрізки і перерахунку значень частинних похідних у випадку кожного переміщення у просторі. Приріст  $\Delta u$  функції  $u = f(X)$  у точці  $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^T$  згідно з цим методом обчислюють за формулою

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \left( \Delta' x_i \sum_{j=0}^m f'_{x_j} (x_1^0 + j \Delta' x_1, x_2^0 + j \Delta' x_2, \dots, x_n^0 + j \Delta' x_n) \right) + \varepsilon, \\ \Delta' x_i = \frac{x_i^1 - x_i^0}{m} \quad (i = \overline{1, n}), \quad (3.11)$$

де  $m$  – кількість відрізків, на які поділяється приріст кожного фактора;

$\varepsilon$  – загальна похибка приросту функції, яка зменшується із збільшенням  $m$ .

Зважаючи на це, зміну  $\Delta u_i$  функції  $u = f(X)$  внаслідок зміни фактора  $x_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) на величину  $\Delta x_i = x_i^1 - x_i^0$  обчислюють за формулою

$$\Delta u_i^m = \Delta' x_i \sum_{j=0}^m f'_{x_i}(x_1^0 + j\Delta' x_1, x_2^0 + j\Delta' x_2, \dots, x_n^0 + j\Delta' x_n). \quad (3.12)$$

Для функції двох змінних  $u = f(x, y)$  формули (3.11), (3.12) спрощують. Вони матимуть такий вигляд:

$$\Delta u = \Delta' x \sum_{j=0}^m f'_x(x_0 + j\Delta' x, y_0 + j\Delta' y) + \Delta' y \sum_{j=0}^m f'_y(x_0 + j\Delta' x, y_0 + j\Delta' y) + \varepsilon, \quad (3.13)$$

$$\Delta' x = \frac{x_1 - x_0}{m}, \quad \Delta' y = \frac{y_1 - y_0}{m}.$$

$$\Delta u_x^m = \Delta' x \sum_{j=0}^m f'_x(x_0 + j\Delta' x, y_0 + j\Delta' y),$$

$$\Delta u_y^m = \Delta' y \sum_{j=0}^m f'_y(x_0 + j\Delta' x, y_0 + j\Delta' y). \quad (3.14)$$

Метод подрібнення приростів факторів має переваги перед деякими іншими методами, зокрема, методом ланцюгових підстановок, але, на відміну від вищезазначеного методу, потребує диференційованості розглянутої функції. Як і метод ланцюгових підстановок, метод подрібнення приростів факторних ознак не зв'язаний з послідовністю підстановок та вибором якісних і кількісних чинників, за його допомогою можна однозначно визначити величину впливу факторів у разі заздалегідь заданої точності розрахунків.

Наприклад, розглянемо дві функції двох змінних:

$$u = f_1(x, y) = xy \quad \text{і} \quad u = f_2(x, y) = \frac{x}{y}.$$

Оскільки  $\frac{\partial f_1}{\partial x} = y$ ,  $\frac{\partial f_1}{\partial y} = x$ ,  $\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{1}{y}$ , а  $\frac{\partial f_2}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}$ , то, нехтуючи  $\varepsilon$

у випадку великих  $m$ , за формулами (3.13), (3.14) матимемо таке:

$$\Delta u^m = \Delta u_x^m + \Delta u_y^m,$$

$$\begin{aligned}\Delta u_x^m &= \Delta f_{1x}^m = \Delta' x \sum_{j=0}^m (y_0 + j\Delta' y), \\ \Delta u_y^m &= \Delta f_{1y}^m = \Delta' y \sum_{j=0}^m (x_0 + j\Delta' x), \\ \Delta u_x^m &= \Delta f_{2x}^m = \Delta' x \sum_{j=0}^m \frac{1}{y_0 + j\Delta' y}, \\ \Delta u_y^m &= \Delta f_{2y}^m = -\Delta' y \sum_{j=0}^m \frac{x_0 + j\Delta' x}{(y_0 + j\Delta' y)^2}.\end{aligned}$$

Ми розглянули тільки деякі методи економічного аналізу, які ґрунтуються на теорії диференціального числення, хоча їх є набагато більше. Суть деяких з них і бібліографію щодо цих методів подано в [2].

### 3.3. Інтегральний метод

**3.3.1. Інтегральний метод** економічного аналізу застосовують для визначення величини факторних впливів на результатний показник, що виражено неперервно диференційованою функцією деяких економічних показників (чинників). Його підґрунтям є такі ж ідеї, як у методі подрібнення приростів факторів (див. п. 3.2.3). Розрахункові формули цього методу отримують з формул

(3.11), (3.12), якщо  $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^n \Delta x_i^2} \rightarrow 0$  чи  $m \rightarrow \infty$ . Зокрема,

$$\Delta u_i = \lim_{m \rightarrow \infty} \Delta u_i^m = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^m f'_{x_i}(x_1^0 + j\Delta' x_1, \dots, x_n^0 + j\Delta' x_n) \Delta' x_i = \int_{\Gamma} f'_{x_i} dx_i, \quad (3.15)$$

де  $\Gamma$  – прямолінійний орієнтований відрізок у просторі  $R^n$ , що з'єднує точку  $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^T$  з точкою  $X_1 = (x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)^T$ .

Звідси, крім неперервної диференційованості зазначеної функції, умовами застосування цього методу є прямолінійність зміни цієї функції між початковою та кінцевою точкою елементарного періоду, тобто найменшого періоду часу, протягом якого хоча б один із факторів змінить своє значення, і постійність співвідношення швидкостей зміни всіх факторів.

Зауважимо, що хоча зміна цих факторів в області визначення функції може відбуватися не за прямою, а за деякою орієнтованою



кривою, можна вважати, що протягом елементарного періоду розглянута траєкторія є прямолінійним відрізком, який з'єднує початкову і кінцеву точки цього періоду.

Детальніше розглянемо формули, які є основою цього методу. Як і в п. 3.2.3, припустимо, що функція  $u = f(X)$ , де  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , визначена та неперервна в замкнутій області  $C$  і має неперервні частинні похідні  $f'_{x_i}$  ( $i = \overline{1, n}$ ) всередині цієї області.

Нехай в  $n$ -вимірному просторі задано  $m$  точок

$$X_j = (x_1^j, x_2^j, \dots, x_n^j), \quad (j = \overline{1, m}),$$

де  $x_i^j$  – значення  $i$ -го чинника в момент  $j$ . Беручи до уваги те, що параметричне рівняння відрізка  $X_j$  і  $X_{j+1}$  ( $j = \overline{1, m-1}$ ) має вигляд

$$x_i = x_i^j + (x_i^{j+1} - x_i^j)\theta; \quad (i = \overline{1, n}); \quad 0 \leq \theta \leq 1,$$

вплив  $i$ -го фактора на зміну результатного показника за період  $j$

$$\Delta u_{ij} = \int_{L_j} f'_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_i; \quad (i = \overline{1, n})$$

можна записати так:

$$\begin{aligned} \Delta u_{ij} = & \int_0^1 f'_{x_i} (x_1^j + (x_1^{j+1} - x_1^j)\theta, x_2^j + (x_2^{j+1} - x_2^j)\theta, \dots, x_n^j + \\ & + (x_n^{j+1} - x_n^j)\theta) \cdot (x_i^{j+1} - x_i^j) d\theta, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m-1}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Розраховавши за формулою (3.16) всі величини  $\Delta u_{ij}$ , ( $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, m-1}$ ), одержимо матрицю  $(\Delta u_{ij})_{n, m-1}$ , яка є базою для знаходження впливу незалежних чинників на зміну результатного показника.

Знайдемо суми кожного рядка  $\Delta u_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) і всіх елементів цієї матриці  $\Delta u$ :

$$\Delta u_i = \sum_{j=1}^{m-1} \Delta u_{ij}, \quad i = \overline{1, n}; \quad (3.17)$$

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m-1} \Delta u_{ij}. \quad (3.18)$$

Одержані величини  $\Delta u_i$  і  $\Delta u$  характеризують відповідно вплив  $i$ -го фактора на зміну результатного показника і повний приріст цього показника.

Процес знаходження цих величин можна автоматизувати, оскільки розрахувати значення отриманих інтегралів можна методами наближених обчислень з використанням комп'ютерної техніки і розробленого на цей час обширного їх програмного і математичного забезпечення. Теоретичним підґрунтям цих розрахунків можуть бути прості (наприклад, квадратурні формули Ньютона-Котеса) чи складніші (наприклад, формули Гауса, Чебишева чи Ейлера-Маклорена) формули [79, с. 243].

**3.3.2.** Інтегральний метод факторного аналізу має свої переваги перед іншими методами економічного аналізу. Важливою особливістю цього методу є його універсальність. Він дає загальний підхід до розв'язування різноманітних задач факторного аналізу незалежно від кількості елементів, які належать до моделі факторної системи, і форми зв'язку між ними.

Розглянутий метод часто застосовують у процесі детермінованого економічного аналізу. Порівняно з іншими методами факторного аналізу інтегральний метод усунув неоднозначність під час визначення величин впливу факторів і дав змогу отримати найбільш точний результат. У багатьох інших методах визначення впливу факторів на зміну результатного показника точний вираз для приросту функції замінюють наближеним, а нерозкладений залишок, який інтерпретують як логічну похибку методу, не беруть до уваги.

Наприклад, у методі диференціального числення вплив чинників на зміну функції визначають формулою (3.8). У результаті розрахований (наближений) приріст функції відрізняється від точного її значення на величину  $o(\rho)$ , яка не дорівнює нулю і буде малою тільки у випадку досить малої зміни екзогенних чинників.

Отже, із збільшенням величини змін факторів різниця між розрахованими за інтегральним методом і методом диференціального числення значеннями зміни функції буде більш значною. Величина цієї різниці буде тим меншою, чим менша величина приростів факторів, які належать до факторної системи.

Застосування інтегрального методу економічного аналізу для побудови моделей факторних систем залежить від того, чи є інфор-

мація про зміни факторів всередині аналізованого періоду. Якщо такої інформації нема, то залишається єдина можливість розглядати цей період як елементарний і проводити розрахунки за орієнтованою прямою  $\Gamma$ . Такі задачі є найбільше розроблені й поширені в детермінованому економічному аналізі. Деякі автори цей тип задач факторного аналізу називають *статистичним* [2, с. 132], оскільки чинники, які беруть у цьому участь, характеризуються незмінністю положення щодо одного фактора, постійністю умов аналізу змінних факторів незалежно від розміщення їх в моделі факторної системи. Співвимірність приростів факторів відбувається за відношенням до одного вибраного для цієї мети фактора.

Наприклад, розрахункові задачі, які пов'язані з аналізом виконання плану чи динаміки показників, якщо порівнюють з попереднім періодом, треба віднести до статистичного типу задач інтегрального методу факторного аналізу.

За наявності інформації про зміни факторів всередині аналізованого періоду і бажання взяти їх до уваги треба розподілити зазначений період відповідно до цих даних на ряд елементарних періодів. Для кожної пари точок  $X_j$  і  $X_{j+1}$  ( $j = \overline{1, m-1}$ ) розрахунки треба виконувати за деякою кривою  $\Gamma$ , яка з'єднає ці точки. Виникає проблема, як визначити справжній вигляд кривої  $\Gamma$ , за якою відбувся у часі рух факторів  $x_i$ , ( $i = \overline{1, n}$ ). Оскільки ці фактори змінюються на кожному етапі, на які розподілено весь аналізований період, то цей тип задач факторного аналізу іноді називають *динамічним*.

Якщо, наприклад, розглянути часовий ряд економічних показників, то для нього можна підібрати наближене рівняння, яке описує поведінку аналізованих факторів у часі за весь розглянутий період. Ми тут можемо визначити значення факторів і результатного показника у кожному елементарному періоді, які можуть відрізнитися з переходом від одного часового проміжку до іншого. Тому розрахунки, які пов'язані з аналізом часових рядів, можна віднести до динамічних задач інтегрального методу факторного аналізу.

**3.3.3.** Можна довести, що будь-яка модель скінченної факторної системи зводиться до двох видів – мультиплікативної і кратної [2, с. 134]. Виникає необхідність дослідження тільки цих двох видів

моделей факторних систем, оскільки інші моделі є їхніми різновидами. Зважаючи на це, методика практичного застосування інтегрального методу економічного аналізу і детальні формули розрахунку впливу чинників розглянемо на прикладі статичних мультиплікативної і кратної моделей факторних систем.

Спочатку запишемо загальні формули для розрахунку приросту функції  $\Delta u$  задач факторного аналізу статичного типу в точці

$$X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^T$$

$$\Delta u = \Delta f(X_0) = f(X_1) - f(X_0),$$

де  $X_1 = (x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)^T$ .

На підставі формул (3.16), (3.18) для цього матимемо

$$\Delta u = \Delta f = \sum_{i=1}^n \Delta u_i, \quad (3.19)$$

де

$$\Delta u_i = \int_0^1 f'_{x_i}(x_1^0 + \Delta x_1 \theta, x_2^0 + \Delta x_2 \theta, \dots, x_n^0 + \Delta x_n \theta) \Delta x_i d\theta,$$

$$\Delta x_i = x_i^1 - x_i^0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.20)$$

Зробимо заміну  $\theta = \frac{x_1}{\Delta x_1}$ . Тоді формули (3.20) набудуть такого вигляду:

го вигляду:

$$\Delta u_i = \int_0^{\frac{\Delta x_i}{\Delta x_1}} f'_{x_i}(x_1^0 + x_1, x_2^0 + k_2 x_1 \theta, \dots, x_n^0 + k_n x_1 \theta) k_i dx_1, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.21)$$

де  $k_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta x_1}, i = \overline{1, n}$ .

Конкретизуємо спочатку формули (3.21) для мультиплікативної функції

$$u = f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)^T = \prod_{i=1}^n x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n. \quad (3.22)$$

Складові  $\Delta u_i (i = \overline{1, n})$  приросту цієї функції в точці

$$X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^T$$

$$\Delta u = \Delta f = \prod_{i=1}^n x_i^1 - \prod_{i=1}^n x_i^0 = \sum_{i=1}^n \Delta u_i$$

відповідно до формул (3.21) для  $i = 1$  матимуть такий вигляд:

$$\Delta u_1 = \int_0^{\Delta x_1} \prod_{i=2}^n (x_i^0 + k_i x_1) dx_1, \quad (3.23)$$

а для  $i = \overline{2, n}$  – такий:

$$\Delta x_i = \int_0^{\Delta x_1} (k_i \cdot (x_1^0 + x_1) \cdot (x_2^0 + k_2 x_1) \cdot \dots \cdot (x_{i-1}^0 + k_{i-1} x_1) \times \\ \times (x_{i+1}^0 + k_{i+1} x_1) \cdot \dots \cdot (x_n^0 + k_n x_1) \cdot dx_1). \quad (3.24)$$

Наприклад, для функції  $u = f(x, y, z, t) = x \cdot y \cdot z \cdot t$  формули (3.23), (3.24) будуть такими

$$\begin{aligned} \Delta u_x &= \int_0^{\Delta x} (y_0 + k_y x)(z_0 + k_z x)(t_0 + k_t x) dx; \\ \Delta u_y &= \int_0^{\Delta x} k_y (x_0 + x)(z_0 + k_z x)(t_0 + k_t x) dx; \\ \Delta u_z &= \int_0^{\Delta x} k_z (x_0 + x)(y_0 + k_y x)(t_0 + k_t x) dx; \\ \Delta u_t &= \int_0^{\Delta x} k_t (x_0 + x)(y_0 + k_y x)(z_0 + k_z x) dx. \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\text{де } k_y = \frac{\Delta y}{\Delta x}; k_z = \frac{\Delta z}{\Delta x}; k_t = \frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

Аналогічно знаходять формули для визначення впливу окремих факторів на зміну результатного показника, відповідна факторна модель якого є кратною.

Візьмемо, наприклад, таку кратну модель:

$$u = f(x, y, z, t) = \frac{x}{y + z + t}. \quad (3.26)$$

Тоді структура факторної системи буде такою:

$$\Delta u = \frac{x_1}{y_1 + z_1 + t_1} - \frac{x_0}{y_0 + z_0 + t_0} = \Delta u_x + \Delta u_y + \Delta u_z + \Delta u_t, ,$$

а її складові –

$$\Delta u_x = \int_0^{\Delta x} \frac{dx}{y_0 + z_0 + t_0 + k_x x};$$

$$\begin{aligned}\Delta u_y &= -\int_0^{\Delta x} \frac{k_y(x_0 + x)dx}{(y_0 + z_0 + t_0 + k_x x)^2}; \\ \Delta u_z &= -\int_0^{\Delta x} \frac{k_z(x_0 + x)dx}{(y_0 + z_0 + t_0 + k_x x)^2}; \\ \Delta u_t &= -\int_0^{\Delta x} \frac{k_t(x_0 + x)dx}{(y_0 + z_0 + t_0 + k_x x)^2};\end{aligned}\quad (3.27)$$

де  $k_x = \frac{\Delta y + \Delta z + \Delta t}{\Delta x}$ ;  $k_y = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ;  $k_z = \frac{\Delta z}{\Delta x}$ ;  $k_t = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ .

**3.3.4.** Розрахунки визначених інтегралів, якими виражаються впливи факторів на зміну результатного показника, як зазначали, можна виконувати наближено на комп'ютері з використанням квадратурних формул або вручну відповідно до загальних правил інтегрування. В останньому випадку можна скористатись готовими розрахунковими формулами елементів структури факторної системи (див., наприклад, [11, с. 139, 142; 10, с. 30]).

Для простих функцій, коли є невелика кількість факторів, їх досить просто знаходити. Наприклад, розглянемо функцію  $u = f(x, y) = x \cdot y$ . Тоді за формулами (3.23), (3.24)

$$\begin{aligned}\Delta u_x &= \int_0^{\Delta x} (y_0 + k_y x) dx = \left( y_0 x + \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{\Delta x} = y_0 \Delta x + \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{(\Delta x)^2}{2} \\ &= \Delta x \left( y_0 + \frac{y_1 - y_0}{2} \right) = \Delta x \left( \frac{y_0 + y_1}{2} \right); \\ \Delta u_y &= \int_0^{\Delta x} k_y (x_0 + x) dx = \frac{\Delta y}{\Delta x} \left( x_0 x + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{\Delta x} = \Delta y \left( \frac{x_0 + x_1}{2} \right).\end{aligned}$$

Аналогічно знаходять відповідні формули для більшої кількості факторів чи іншого виду підінтегральної функції.

## 4. МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Економетрія, як зазначали, вивчає кількісні закономірності та взаємозв'язки економічних об'єктів, явищ і процесів за допомогою математико-статистичних методів та моделей. Вона поєднує економічну теорію, математику та статистику і є інструментом, який дає змогу перейти від якісного рівня економічного аналізу до рівня, що використовує кількісні статистичні характеристики досліджуваних величин. З огляду на це більшість методів математичної статистики, які застосовують в економічному аналізі, є економетричними.

Зважаючи на це, методам математичної статистики в економічному аналізі ми відвели два розділи. У першому з них розглянуто методи аналізу одно- і багатовимірних статистичних сукупностей, кластерний і дискримінантний аналіз, а в наступному – інші економетричні методи і моделі.

### 4.1. Дослідження одновимірних статистичних сукупностей

**4.1.1. Математична статистика** вивчає методи збору, опрацювання та аналізу статистичних даних для одержання наукових та практичних висновків, активно використовуючи засоби теорії ймовірностей.

До головних завдань, які вирішує математична статистика, можна віднести такі:

- а) розробка способів збору та групування статистичних даних, одержаних у результаті спостережень чи спеціальних експериментів;
- б) визначення закону розподілу випадкової величини чи системи випадкових величин за статистичними даними, а також його невідомих параметрів;
- в) оцінення залежності випадкової величини від інших випадкових величин;
- г) перевірка правдивості припущень про закон розподілу випадкової величини, про форму зв'язку між випадковими величинами або про значення параметра, який оцінюють.

Множина об'єктів, яку досліджує математична статистика, повинна бути однорідною. Таку *множину однорідних об'єктів називають статистичною сукупністю*.

Дослідженню підлягають як якісні ознаки об'єктів статистичної сукупності, так і кількісні. Якісна ознака характеризує певну властивість або стан, якими володіють об'єкти сукупності (стать, професія, якість продукції тощо). Кількісні ознаки вимірюють числами. Ці ознаки бувають *дискретними* та *неперервними*.

Вирізняють генеральну та вибірку статистичні сукупності. **Генеральна сукупність** – це множина об'єктів, що підлягає статистичному дослідженню. Множину об'єктів, які випадково відібрані з генеральної сукупності, називають **вибірковою сукупністю**, або **вибіркою**.

Кількість елементів вибіркової та генеральної сукупностей називають їхнім **обсягом** і позначають відповідно  $n$  та  $N$ .

Суттєвою вимогою до вибірки є її **репрезентативність**. Це означає, що вибірка повинна правильно відображати пропорції генеральної сукупності. Наприклад, у процесі дослідження безробіття опитувати треба як мешканців міських, так і сільських поселень, як чоловіків, так і жінок, як молодих, так і старших тощо.

Згідно із законом великих чисел вибірка буде репрезентативною, якщо, з одного боку, кожний об'єкт вибірки вибраний з генеральної сукупності випадково, з іншого, всі об'єкти генеральної сукупності мають однакову ймовірність потрапити у вибірку.

Можна виокремити два види відбору об'єктів з генеральної сукупності. Якщо після відбору і спостереження об'єкта його, перед відбором наступного, повертають назад у генеральну сукупність, то таку вибірку називають **повторною**, в іншому випадку – **безповторною**. Відмінність між повторною і безповторною вибірками нівелюється, якщо обсяг генеральної сукупності є досить великий.

**4.1.2.** Перед нами може стояти завдання дослідити якусь одну ознаку об'єкта чи декілька. У процесі дослідження однієї ознаки об'єктів вибірки внаслідок збору інформації про цю ознаку ми отримуємо ряд чисел, який називають *статистичним рядом*. Ці числа можуть характеризувати окрему ознаку явища, яке вивчають, або зміни цього явища у часі.

За своїм змістом статистичні ряди поділяють на неупорядковані та упорядковані. Ряд, одержаний внаслідок спостережень, буде *неупорядкованим*. Отже, на початковому етапі статистичного аналізу отримують неупорядкований статистичний ряд.



Розглянемо приклад. Нехай нам відома урожайність зернових у центнерах з одного гектара на двадцяти п'яти земельних ділянках: 24, 35, 20, 37, 31, 25, 29, 40, 31, 22, 27, 32, 25, 33, 20, 29, 38, 31, 31, 27, 40, 32, 25, 21, 37. Отже, в нашому випадку ознака  $X$  – урожайність зернових, а наведений ряд чисел – неупорядкований статистичний ряд.

Упорядкувавши ці числа за зростанням, отримаємо такий ряд: 20, 20, 21, 22, 24, 25, 25, 25, 27, 27, 29, 29, 31, 31, 31, 31, 32, 32, 33, 35, 37, 37, 38, 40, 40. Цей ряд буде *упорядкованим*, чи *ранжированим*, статистичним рядом. Значення  $x_1 = 20$  спостерігали  $n_1 = 2$  рази, значення  $x_2 = 21 - n_2 = 1$  раз і т. д. Значення спостереження  $x_i (i = 1, 2, \dots)$ , тобто окреме конкретне значення ознаки  $X$ , яка має здатність варіювати (змінюватися), називають **варіантами**, а послідовність варіант, записаних у зростаючому чи спадному порядку, – **варіаційним рядом**. Додатне число  $n_i$ , яке свідчить, скільки разів варіанта  $x_i (i = 1, 2, \dots)$  трапляється у вибірці, називають **частотою**, а відношення

$\frac{n_i}{n} = W_i$  – **відносною частотою (частістю) варіанти**, де

$$\sum_{i=1}^k n_i = n - \text{обсяг вибірки. Очевидно, що } \sum_{i=1}^k W_i = 1.$$

Варіаційні ряди можуть бути дискретними чи неперервними.

Якщо у варіаційному ряді підрахувати, скільки різних значень набуває варіюючи ознака і скільки одиниць сукупності їм відповідає, та подати у вигляді таблиці, то одержимо **дискретний ряд розподілу** (табл. 4.1).

Таблиця 4.1

Варіанта ( $x_i$ )	Частота ( $n_i$ )	Варіанта ( $x_i$ )	Частота ( $n_i$ )	Варіанта ( $x_i$ )	Частота ( $n_i$ )
1	2	1	2	1	2
20	2	27	2	35	1
21	1	29	2	37	2
22	1	31	4	38	1
24	1	32	2	40	2
25	3	33	1	Р а з о м	25

Часто поряд із розподілом частоти варіанти потрібно мати розподіл *нагромадженої частоти*  $S_i (i = 1, 2, \dots)$ , що одержують

послідовним додаванням частот чергового інтервалу, починаючи з першого і закінчуючи заданим інтервалом. Нагромадження частот називають *кумуляцією*. Кумулювати також можна відносні частоти варіант. У результаті одержують *нагромаджені відносні частоти (частоти)*.

Дискретний ряд розподілу розглянутого прикладу (табл. 4.1) з урахуванням відносних частот та нагромаджених частот і частостей матиме такий вигляд (табл. 4.2).

Таблиця 4.2

Варіанта ( $x_i$ )	Частота ( $n_i$ )	Нагромаджена частота ( $S_i$ )	Частість ( $W_i$ )	Нагромаджена частість ( $V_i$ )
20	2	2	0,08	0,08
21	1	3	0,04	0,12
22	1	4	0,04	0,16
24	1	5	0,04	0,20
25	3	8	0,12	0,32
27	2	10	0,08	0,40
29	2	12	0,08	0,48
31	4	16	0,16	0,64
32	2	18	0,08	0,72
33	1	19	0,04	0,76
35	1	20	0,04	0,80
37	2	22	0,08	0,88
38	1	23	0,04	0,92
40	2	25	0,08	1,00

Перелік всіх варіант варіаційного ряду і відповідних їм частот чи частостей ще називають *статистичним розподілом вибірки*.

Якщо значення варіант згрупувати в інтервали, то одержимо інтервальний ряд. **Інтервальним** називають ряд згрупованих варіантів у визначених межах або розподіл частот між інтервалами варіювання значень ознаки. Частоту, яка відповідає інтервалу, визначають як кількість варіант, що потрапили в цей інтервал. До інтервалу вводять ті варіанти, що є меншими або дорівнюють верхній межі інтервалу і більшими за нижню межу. В інтервальному ряді частоти і частості також можна кумулювати.

Інтервальний ряд будують переважно для неперервної ознаки. Для дискретної ознаки такі ряди будують на підставі дискрет-

ного ряду. Кількість груп, на які треба розчленувати сукупність, може бути відома чи невідома. У першому випадку довжину інтервалу обчислюють за формулою

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{m}, \quad (4.1)$$

де  $x_{\max}$ ,  $x_{\min}$  – найбільша та найменша варіанти,  $m$  – кількість груп. Межі інтервалів визначають відповідно до довжини інтервалу і заданої кількості груп розчленування.

Якщо кількість таких груп невідома, то довжину інтервалу можна обчислити за формулою Стерджесса:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 2,303 \cdot \lg n}, \quad (4.2)$$

де  $n$  – обсяг вибірки.

Для нашого прикладу одержимо

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 2,303 \cdot \lg n} = \frac{40 - 20}{1 + 2,303 \cdot \lg 25} \cong 4,7.$$

Заокруглимо знайдену величину до п'яти. У результаті наш інтервальний ряд буде таким (табл. 4.3).

**Таблиця 4.3**

Група	варіант ( $x_i$ )	Частота ( $n_i$ )	Нагромаджена частота ( $S_i$ )	Частість ( $W_i$ )	Нагромаджена частість ( $V_i$ )
I	18 - 23	4	4	0,16	0,16
II	23 - 28	6	10	0,24	0,40
III	28 - 33	9	19	0,36	0,76
IV	33 - 38	4	23	0,16	0,92
V	38 - 43	2	25	0,08	1,00

**4.1.3.** На підставі даних вибірки дослідник має зробити висновки про генеральну сукупність. Ці висновки можуть стосуватися підбору закону розподілу генеральної сукупності чи оцінення параметрів відомого закону розподілу.

*Статистичною оцінкою* невідомого параметра випадкової величини  $X$  генеральної сукупності називають висновок, зроблений на підставі параметрів вибірки. Для статистичної оцінки, яка давала б найліпше наближення параметрів, які оцінюють, розроблено три вимоги: незміщеність, ефективність і змістовність (обґрунтованість).

**Незмщеною** називають статистичну оцінку  $\theta^*$ , математичне сподівання якої дорівнює параметру  $\theta$ , що оцінюють за наявності будь-якого обсягу вибірки, тобто

$$M(\theta^*) = \theta. \quad (4.3)$$

Якщо вимога (4.3) не виконується, то оцінку називають **зміщеною**.

**Ефективною** називають таку статистичну оцінку  $\theta^*$ , яка за наявності заданого обсягу вибірки  $n$  має найменшу дисперсію.

Статистичну оцінку, яка, якщо  $n \rightarrow \infty$ , прямує за ймовірністю до параметра, що оцінюють, називають **змістовною, обґрунтованою**.

**4.1.4.** Статистичний розподіл містить повну інформацію про сукупність. Однак великі обсяги інформації іноді зменшують ефективність її використання. Надмірність інформації про якусь ознаку ускладнює аналіз цієї ознаки. Нераціональність використання в деяких випадках всієї цієї інформації пояснюють ще й тим, що під час розв'язування визначених задач цю інформацію можна успішно замінити незначною кількістю зведених характеристик розподілу. До того ж мистецтво статистичного аналізу саме й визначається не безпосереднім застосуванням статистичного розподілу, а тим, наскільки успішно і повно вдається виконати такий аналіз, спираючись на мінімальну кількість показників.

Як для випадкових величин, для опису статистичних розподілів аналогічно використовують здебільшого три види характеристик (показників), які обчислюють за результатами спостережень і називають статистичними характеристиками:

- 1) середні характеристики центральної тенденції,
- 2) характеристики мінливості (варіації) варіантів,
- 3) характеристики форми розподілів.

Одними з найважливіших характеристик варіаційних рядів є середні значення, оскільки навколо них концентруються значення ознаки, які спостерігають.

Нехай нам потрібно вивчити кількісну ознаку  $X$  деякої дискретної генеральної сукупності обсягу  $N$ . Значення цієї ознаки

можуть бути різні  $x_1, x_2, \dots, x_N$  чи кожне з них  $x_1, x_2, \dots, x_k$  може мати відповідно частоту  $N_1, N_2, \dots, N_k$ , причому  $\sum_{i=1}^k N_i = N$ .

**Генеральною середньою**  $\bar{x}_Г$  називають середнє арифметичне значень ознаки генеральної сукупності і розраховують відповідно за формулами (2.1) чи (2.2). Тобто в першому випадку

$$\bar{x}_Г = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N x_i, \quad (4.4)$$

а в другому

$$\bar{x}_Г = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^k (x_i N_i). \quad (4.5)$$

**Вибірковою середньою**  $\bar{x}_В$  називають середнє арифметичне значень ознаки вибіркової сукупності. Отже, якщо значення  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ознаки  $X$  вибірки різні, то згідно з формулою (2.1)

$$\bar{x}_В = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i, \quad (4.6)$$

а якщо значення  $x_1, x_2, \dots, x_k$  ознаки мають відповідно частоти  $n_1, n_2, \dots, n_k$   $\left( \sum_{i=1}^k n_i = n \right)$ , то за формулою (2.2)

$$\bar{x}_В = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^k (x_i n_i). \quad (4.7)$$

Вибіркову середню інтервального ряду наближено можна знайти, прийнявши як варіант середини інтервалів цього ряду. Вибіркова середня є незміщеною оцінкою генеральної середньої. Тобто

$$M(\bar{x}_В) = \bar{x}_Г. \quad (4.8)$$

Можна довести, що оцінка  $\bar{x}_В$  для  $\bar{x}_Г$  є також і змістовною. Отже, зі збільшенням обсягу вибірки  $n$  вибіркова середня  $\bar{x}_В$  прямує до  $\bar{x}_Г$ .

**Модю** (*Mo*) називають варіанту, яка найчастіше трапляється у варіаційному ряду. Для дискретного ряду мода відповідає значенню ознаки у найбільшій кількості одиниць.

Для інтервального ряду з рівними інтервалами модальний інтервал, що містить моду, визначають за найбільшою частотою, а

якщо нерівні інтервали – за найбільшою щільністю. Якщо рівні інтервали, моду всередині модального інтервалу можна визначити за формулою

$$Mo = x_0 + h \cdot \frac{n_m - n_{m-1}}{2n_m - n_{m-1} - n_{m+1}}, \quad (4.9)$$

де  $Mo$  – мода,  $x_0$  – початок модального інтервалу (нижня межа),  $n_m, n_{m-1}, n_{m+1}$  – частоти відповідно модального, передмодального і післямодального інтервалів,  $h$  – довжина інтервалу.

Зокрема, для розглянутого раніше прикладу інтервального ряду (див. табл. 4.3) модальним є третій інтервал ( $m=3$ ). Початком цього інтервалу є нижня межа  $x_0=28$ , довжина інтервалу  $h=5$ , частота модального інтервалу  $n_m=n_3=9$ , передмодального –  $n_{m-1}=n_2=6$  і післямодального –  $n_{m+1}=n_4=4$ . Підставляючи ці значення у формулу (4.9), знайдемо значення моди всередині модального інтервалу:

$$Mo = 28 + 5 \cdot \frac{9 - 6}{2 \cdot 9 - 6 - 4} = 28 + 5 \cdot \frac{3}{8} = 28,875.$$

*Медіаною* ( $Me$ ) називають варіанту, яка поділяє варіаційний ряд на дві частини, рівні за кількістю варіант: із значенням ознаки більшим і меншим за це значення. Медіана – це середина варіаційного ряду.

Якщо варіаційний (рангований) ряд має непарну кількість членів  $n=2m+1$ , то  $Me=x_{m+1}$ . Зокрема, для нашого прикладу

$$n = 25, \quad m = \frac{n-1}{2} = 12. \quad \text{Тому } Me = x_{m+1} = x_{13} = 31.$$

Коли кількість членів ряду парна, тобто  $n = 2m$ , то

$$Me = \frac{x_m + x_{m+1}}{2}.$$

В інтервальному ряді інтервал, який містить медіану, визначають відповідно до нагромаджених частот. Медіанному інтервалу відповідає перша з нагромаджених частот, яка перевищує половину всього обсягу сукупності. Всередині знайденого інтервалу медіану обчислюють за формулою

$$Me = x_0 + h \cdot \frac{\frac{n}{2} - S_{m-1}}{n_m}, \quad (4.10)$$

де  $Me$  – медіана,  $x_0$  – нижня межа медіанного інтервалу,  $n = \sum_{i=1}^k n_i$  – сума всіх частот (обсяг вибірки),  $n_m$  – частота медіанного інтервалу,  $S_{m-1}$  – нагромаджена частота інтервалу, який передує медіанному,  $h$  – довжина інтервалу.

Для нашого прикладу  $m = 3$  (медіанним є третій інтервал),  $x_0 = 28$ ,  $n = 25$ ,  $n_m = n_3 = 9$ ,  $S_{m-1} = S_2 = 10$ ,  $h = 5$ . Отже,

$$Me = 28 + 5 \cdot \frac{\frac{25}{2} - 10}{9} = 28 + \frac{25}{18} \cong 29,39.$$

Величину мінливості (розсіювання) оцінюють за допомогою дисперсії та середнього квадратичного відхилення.

**Генеральну дисперсію** (дисперсію генеральної сукупності)  $D_\Gamma$  обчислюють за формулою (2.13) чи (2.14). Отже, якщо значення  $x_1, x_2, \dots, x_N$  ознаки  $X$  генеральної сукупності різні, то, згідно з формулою (2.13)

$$D_\Gamma = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}_\Gamma)^2, \quad (4.11)$$

і якщо значення  $x_1, x_2, \dots, x_k$  ознаки мають відповідно частоти  $N_1, N_2, \dots, N_k$   $\left( \sum_{i=1}^k N_i = N \right)$ , то за формулою (2.14)

$$D_\Gamma = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^k ((x_i - \bar{x}_\Gamma)^2 N_i). \quad (4.12)$$

**Вибіркову дисперсію** (дисперсію вибірки)  $D_B$  обчислюють за цими ж формулами. Отже, якщо значення  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ознаки  $X$  вибірки різні, то

$$D_B = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_B)^2, \quad (4.13)$$

і якщо значення  $x_1, x_2, \dots, x_k$  ознаки мають відповідно частоти  $n_1, n_2, \dots, n_k$  ( $\sum_{i=1}^k n_i = n$ ), то

$$D_B = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^k ((x_i - \bar{x}_B)^2 n_i). \quad (4.14)$$

Вибіркове і генеральне середні квадратичні відхилення обчислюють за формулами (2.15), (2.16).

Як генеральну, так і вибірку дисперсію можна обчислити за формулою

$$D = \overline{x^2} - (\bar{x})^2, \quad (4.15)$$

де  $\bar{x}$  знаходять за однією з формул (4.4), (4.5) чи (4.6), (4.7), а  $\overline{x^2}$  – за тими ж формулами, підставивши в них замість  $x_i$   $x_i^2$ .

Дисперсію  $D(x)$  ще називають *варіацією* ознаки  $x$  і позначають  $\text{var}(x)$ .

Вибіркову дисперсію інтервального ряду наближено можна знайти, якщо взяти як варіант середини інтервалів цього ряду.

Як і генеральну середню, треба вміти оцінити генеральну дисперсію з допомогою вибіркової. Однак вибіркова дисперсія є зміщеною оцінкою  $D_r$ . Тому для оцінення генеральної дисперсії використовують *виправлену дисперсію*

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_B = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_B)^2}{n-1}, \quad (4.16)$$

яка вже є її незміщеною оцінкою, а корінь з цієї дисперсії є *виправлене середнє квадратичне відхилення*, яке використовують для оцінювання середнього квадратичного відхилення генеральної сукупності.

Як видно із формул (4.13), (4.16), вони відрізняються тільки знаменниками. Очевидно, що, якщо достатньо великі обсяги вибірки  $n$ , вибіркова та виправлена дисперсії відрізняються незначно. Тому на практиці виправлену дисперсію використовують, коли приблизно  $n < 30$ .

**Моментом  $M'_k$  (емпіричним) порядку  $k$  називають середнє значення  $k$ -го степеня відхилень варіант ознаки  $X$  від деякої**



постійної величини  $a$ . Отже, якщо значення  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ознаки  $X$  вибірки різні, то

$$M'_k = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - a)^k, \quad (4.17)$$

і якщо значення  $x_1, x_2, \dots, x_m$  ознаки мають відповідно частоти  $n_1, n_2, \dots, n_m$  ( $\sum_{i=1}^m n_i = n$ ), то

$$M'_k = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^m ((x_i - a)^k n_i). \quad (4.18)$$

Якщо  $a=0$ , цей момент називають *початковим*, а якщо  $a = \bar{x}_b$  – *центральною емпіричним моментом порядку  $k$* .

Використовуючи центральні емпіричні моменти третього і четвертого порядку, обчислюють асиметрію та ексцес емпіричних розподілів.

**4.1.5.** Якщо оцінку параметрів розподілу генеральної сукупності визначають одним числом, то її називають *точковою*. Такими були формули (4.6) і (4.16). Однак для вибірки малого обсягу точкова оцінка може значно відрізнятись від параметра, який оцінюють, що може призвести до грубих помилок. Тому вводять інтервальні оцінки.

**Інтервальною називають оцінку, яку визначають двома числами – кінцями інтервалу.**

Нехай за даними вибірки знайдена статистична оцінка  $\theta^*$  невідомого параметра  $\theta$ , яку вважатимемо постійним числом. Очевидно, що  $\theta^*$  тим точніше визначає параметр  $\theta$ , чим менша за абсолютною величиною різниця  $|\theta^* - \theta|$ .

Число  $\delta$ , для якого виконується нерівність  $|\theta^* - \theta| < \delta$ , називають *точністю* оцінки.

*Надійністю (довірчою ймовірністю)* оцінки параметра  $\theta$  за  $\theta^*$  називають ймовірність  $\gamma$ , з якою виконується нерівність  $|\theta^* - \theta| < \delta$ . Іншими словами,

$$\gamma = P(|\theta^* - \theta| < \delta). \quad (4.19)$$

Зазвичай надійність оцінки задають заздалегідь і як значення  $\gamma$  вибирають число, близьке до одиниці, наприклад, 0,95; 0,99; 0,999.

Якщо у формулі (4.19) замість нерівності  $|\theta^* - \theta| < \delta$  використати тотожну їй нерівність  $\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta$ , то одержимо

$$\gamma = P(\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta). \quad (4.20)$$

Ця формула означає, що ймовірність того, що інтервал  $(\theta^* - \delta, \theta^* + \delta)$  містить (покриває) невідомий параметр  $\theta$ , дорівнює  $\gamma$ . Цей інтервал називають *довірчим інтервалом*, чи *інтервалом довір'я*. Випадкові кінці  $\theta^* - \delta$ ,  $\theta^* + \delta$  цього інтервалу називають *довірчими межами*.

Нехай кількісна ознака  $X$  генеральної сукупності розподілена за нормальним законом, середнє квадратичне відхилення якої  $\sigma$  відоме. Тоді довірчий інтервал [103, с. 215]

$$\left( \bar{x}_B - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x}_B + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} \right) \quad (4.21)$$

покриває математичне сподівання  $\sigma$  генеральної сукупності із заданою надійністю  $\gamma$ . Тут  $\bar{x}_B$  – вибіркoва середня,  $n$  – обсяг вибірки, а  $t$  – значення функції Лапласа  $\Phi(t)$ , коли  $\Phi(t) = \gamma/2$ .

Якщо  $\sigma$  невідоме, то довірчий інтервал має такий вигляд [15, с. 217]:

$$\left( \bar{x}_B - \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}, \bar{x}_B + \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} \right), \quad (4.22)$$

де  $s$  – виправлене вибіркoве середнє квадратичне відхилення, а  $t_\gamma$  шукають за таблицями за заданими  $n$  і  $\gamma$ .

**4.1.6.** У процесі дослідження генеральної сукупності на підставі вибірки часто доводиться робити деякі припущення, а потім перевіряти їх за допомогою статистичних методів. Якщо таке припущення стосується вигляду невідомого розподілу генеральної сукупності чи параметрів відомих розподілів, то його називають *статистичною гіпотезою*. Можливі інші гіпотези: про рівність параметрів двох чи декількох розподілів, про незалежність вибірок тощо.

Нульовою (основною) називають запропоновану гіпотезу, яку позначають  $H_0$ .

Альтернативною (конкуруючою) називають гіпотезу  $H_1$ , яка суперечить основній.

Вирізняють також гіпотези за кількістю припущень. Простою називають гіпотезу, яка має одне припущення, інакше гіпотеза є складною. Для того, щоб переконатися, яка з гіпотез правильна (основна чи конкуруюча), потрібно їх перевірити. Оскільки перевірку виконують статистичними методами, то її називають статистичною.

Очевидно, що під час прийняття рішень за допомогою гіпотез можливі помилки. Ці помилки бувають двох родів.

Помилка першого роду полягає у тому, що не буде взята до уваги правильна гіпотеза, тобто основна гіпотеза вважатиметься неправильною, коли насправді вона правильна.

Помилка другого роду полягає у тому, що буде прийнята неправильна гіпотеза, тобто основна гіпотеза, коли насправді вона помилкова.

Зауважимо, що єдиний спосіб одночасно зменшити ймовірності похибок першого та другого родів – це збільшення обсягу вибірки.

Ймовірність допустити помилку першого роду позначають  $\alpha$  і називають *рівнем значущості*. Його задають достатньо малим. Переважно використовують значення  $\alpha$ , що дорівнюють 0,05; 0,01 і т.д. Наприклад, якщо  $\alpha = 0,01$ , то це означає, що в одному випадку із 100 є ризик допустити помилку першого роду (вважати неправильною правильну гіпотезу  $H_0$ ).

Висновки про правильність зроблених гіпотез роблять на підставі спеціально підібраної величини, точне чи наближене значення якої відоме.

Статистичним критерієм (чи просто критерієм) називають випадкову величину  $K$ , на підставі значення якої перевіряють нульову гіпотезу.

Є багато різних критеріїв, однак найчастіше застосовують критерії узгодженості Пірсона –  $\chi^2$ ,  $t$  – Стьюдента,  $F$  – Фішера та ін.

Спостережене значення критерію узгодженості обчислюють на підставі даних вибірки.

Множину можливих значень обраного критерію узгодженості завжди можна поділити на дві підмножини, що не перетинаються: одна з них містить значення критерію, за яких гіпотеза  $H_0$  відхиляється, а друга – за яких вона приймається. Першу з них називають *критичною областю*, а другу – *областю прийняття гіпотези*.

Оскільки критерій узгодженості  $K$  – одновимірний випадковий величина, то усі її можливі значення належать деякому інтервалу. Тому інтервалами будуть також критична область і область прийняття нульової гіпотези, а це означає, що є точки, які ці інтервали відокремлюють.

*Критичними точками (межами)* критерію  $K$  називають точки  $k_{кр}$ , які відокремлюють критичну область від області прийняття гіпотези. Значення критичних точок для розподілу Стюдента і  $\chi^2$  подано у додатку Д.

Залежно від розміщення критичної точки щодо критичної області критичні точки поділяють на односторонню та двосторонню (правосторонню і лівосторонню).

*Правосторонньою* називають критичну область, яку визначають нерівністю  $K > k_{кр}$ , де  $k_{кр}$  – додатне число.

*Лівосторонньою* називають критичну область, яку визначають нерівністю  $K < k_{кр}$ , де  $k_{кр}$  – від’ємне число.

*Двосторонньою* називають критичну область, яка задовольняє нерівності  $K < k_{кр1}$  і  $K > k_{кр2}$ .

У більшості випадків для двосторонньої критичної області точки  $k_{кр1}$  і  $k_{кр2}$  розташовані симетрично відносно нуля, тобто  $k_{кр1} = -k_{кр2}$ .

Розглянемо застосування критерію Пірсона до перевірки гіпотези про нормальний розподіл генеральної сукупності. Аналогічно цей критерій можна застосувати і до інших розподілів.

Нехай у вибірці значення  $x_1, x_2, \dots, x_k$  ознаки  $X$  мають відповідно частоти  $n_1, n_2, \dots, n_k$   $\left( \sum_{i=1}^k n_i = n \right)$ . Щоб за допомогою цього

критерію, якщо заданий рівень значущості  $\alpha$ , перевірити основну гіпотезу  $H_0$  (генеральна сукупність розподілена нормально), треба:

1) обчислити теоретичні частоти  $n'_i$  для варіант вибірки, якщо вони не задані;

2) обчислити спостережене значення критерію  $\chi^2_{cn}$  за формулою

$$\chi^2_{cn} = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}; \quad (4.23)$$

3) знайти ступінь вільності  $\chi^2$  за формулою

$$K = k - 3; \quad (4.24)$$

4) за додатком Д знайти критичну точку  $\chi^2_{kp}$ , яка відповідає заданому рівню значущості  $\alpha$  та ступеню вільності  $K$ .

На підставі знайдених  $\chi^2_{cn}$  та  $\chi^2_{kp}$  треба зробити висновок: якщо  $\chi^2_{cn} < \chi^2_{kp}$ , то гіпотезу  $H_0$  приймають; якщо  $\chi^2_{cn} > \chi^2_{kp}$ , то гіпотезу  $H_0$  треба відхилити.

## 4.2. Багатовимірна класифікація

### 4.2.1. Загальна характеристика методів класифікації багатовимірних статистичних сукупностей

4.2.1.1. Переважній більшості сукупностей соціально-економічних явищ властива внутрішня їх розшарованість і неоднорідність. Це зумовлено нерівномірністю розвитку окремих одиниць сукупності й своєрідністю умов, у яких вони функціонують. Однак виявлені в процесі дослідження закономірності є сталими лише в однорідній сукупності. Тому статистичні моделі й прогнози треба будувати стосовно однорідних сукупностей об'єктів економічного аналізу.

У літературі запропоновано багато визначень поняття однорідності. Вважатимемо, що сукупність однорідна, якщо усі її одиниці мають спільні властивості і риси, які визначають однакісність і належність цих одиниць до одного і того ж типу. Хоча ідеально однорідних сукупностей майже немає. Багато економічних сукупностей можна вважати однорідними з деяким наближенням.

У процесі побудови статистичних моделей і пошуку прогнозу однорідними вважають [26, с. 36] сукупності, яким властивий симет-

ричний, нормальний розподіл. Завдяки властивостям цього розподілу нормальну криву застосовують як стандарт. Щоб оцінити узгодженість емпіричного розподілу з нормальним, найпоширенішими є критерії Пірсона  $\chi^2$  та Колмогорова-Смирнова  $d$ .

Розглянемо приклад перевірки гіпотези  $H_0$  про узгодженість емпіричного і теоретичного нормального розподілів у разі застосування критерію  $\chi^2$  для рівня значущості  $\alpha = 0,05$ . Нехай нам відомі емпіричні  $n_i$  та теоретичні  $n'_i$  частоти [59, с. 332] (табл. 4.4).

Таблиця 4.4

$n_i$	6	13	38	74	106	85	30	14
$n'_i$	3	14	42	82	99	76	37	13

В умові задачі теоретичні частоти задані, тому не потрібно їх розраховувати. Оскільки  $k = 8$ , то за формулою (4.24)  $K = k - 3 = 8 - 3 = 5$ .

З таблиці критичних точок розподілу  $\chi^2(\alpha, K)$  (додаток Д) для  $\alpha = 0,05$  та  $K = 5$  знаходимо  $\chi_{кр}^2 = 11,1$ .

Для обчислення  $\chi_{сн}^2$  за формулою (4.23) використаємо розрахункову таблицю (табл. 4.5).

Таблиця 4.5

$n_i$	$n'_i$	$n_i - n'_i$	$(n_i - n'_i)^2$	$(n_i - n'_i)^2 / n'_i$
6	3	3	9	3
13	14	-1	1	0,07
38	42	-4	16	0,38
74	82	-8	64	0,78
106	99	7	49	0,49
85	76	9	81	1,07
30	37	-7	49	1,32
14	13	1	1	0,08

Просумувавши числа в останньому стовпчику, знайдемо  $\chi_{сн}^2 = 7,19$ . Оскільки  $7,19 < 11,1$ , тобто  $\chi_{сн}^2 < \chi_{кр}^2$ , тому за правилом Пірсона гіпотезу  $H_0$  про узгодженість емпіричного і теоретичного

розподілів треба прийняти. Це є наслідком того, що розбіжність емпіричних та теоретичних частот незначна. Отже, з ймовірністю 95% можна стверджувати, що розглянутій сукупності властивий нормальний розподіл.

Якщо теоретичні частоти не задані, то їх легко розрахувати [15, с. 333]. Зроблені висновки за критерієм  $\chi^2$  значною мірою залежать від кількості груп, частота яких має бути не менша від 5. Окрім того, критерій  $\chi^2$  не враховує послідовність знаків відхилень частот, за наявності серій знаків надійність висновку зменшується. Цих вад позбавлений критерій Колмогорова-Смирнова  $d$ , який дає швидкий результат, особливо у випадку використання інтегрованої системи опрацювання інформації *Statistika* [26, с. 38].

**4.2.1.2.** У випадку неоднорідності сукупності об'єктів економічного аналізу її треба поділити на однорідні підсукупності (класи, групи, кластери, таксони). Цей процес називають *класифікацією*, чи *групуванням*. Потреба у класифікації сукупності економічних об'єктів може виникнути і з огляду на інші причини. Зважаючи на це, потрібно знати, які є способи класифікації статистичних сукупностей та як їх практично застосовувати.

Однорідні групи з неоднорідної сукупності об'єктів виділити досить просто тільки у тих випадках, якщо відмінності їх очевидні і стійкі та можуть бути описані однією чи декількома ознаками. Практично така ситуація буває рідко. Тому завдання класифікації сукупності в загальному випадку досить складне.

За способом формування однорідних груп можна вирізняти три основні схеми класифікації:

- традиційна (послідовного поділу);
- на підставі побудови інтегрального показника;
- методами багатовимірного статистичного аналізу.

Перший спосіб класифікації є найпростіший і найдавніший. Типовим його прикладом є комбінаційне групування, коли формування груп відбувається шляхом послідовного поділу сукупності спочатку за першою, найбільш вагомою ознакою, одержаних частин – за другою, менш вагомою, і т. д. Наприклад, класифікація підприємств спочатку за галуззю, потім за регіоном розміщення, далі – за кількістю працівників і т. д. На кожному кроці поділу сукупності до уваги беруть лише одну ознаку. Класифікаційні озна-

ки попередньо мають бути ієрархічно упорядкованими за своєю вагомістю. Тут чітко зберігається принцип ієрархії груп. Хоча у невеликих за обсягом сукупностях можливості використання такої схеми класифікації обмежені.

Інші дві схеми класифікації використовують множину класифікаційних ознак одночасно. Більшість методів класифікації, які належать до цих схем, отримали широке застосування разом з появою електронної обчислювальної техніки. У кожному з цих методів будь-яку одиницю сукупності описують множиною ознак і геометрично інтерпретують як точку у багатовимірному просторі, а групи формують на підставі близькості точок у цьому просторі.

Класифікація на підставі побудови інтегрального показника передбачає конструювання багатовимірних інтегральних оцінок (індексів, рейтингів). Використовуючи величину цього узагальненого показника для кожної одиниці сукупності, класифікують ці одиниці за традиційною схемою.

Класифікація методами багатовимірного статистичного аналізу зводиться до виділення згущень точок (об'єктів) у багатовимірному просторі ознак. Ці згущення у різних алгоритмах багатовимірної класифікації виділяють по-різному, але загальним для них всіх є те, що групи формують на підставі «близькості» об'єктів за комплексом ознак.

Кожний з цих підходів до групування одиниць сукупності має свої переваги і недоліки. Перший з них є найпростішим, але потребує достатнього обсягу початкових даних. Класифікуючи методом послідовного поділу, можна зруйнувати класи, що наявні, жорстко заданими інтервалами ознак. Зважаючи на цей головний недолік, перший з цих підходів виділення типів об'єктів за комплексом ознак не завжди є ефективний, оскільки з додаванням кожної нової ознаки небезпека зруйнування об'єктивно існуючих однорідних груп зростає. Його слід застосовувати у випадку, коли об'єкт описують переважно якісними ознаками і їхня кількість не дуже велика, а також заздалегідь відомо, що вони нерівнозначні з погляду мети класифікації.

Підходи до формування груп, які використовують множину класифікаційних ознак одночасно, краще, ніж комбінаційні групування, узгоджують з тезою про існування природних типів об'єктів,



які близькі за комплексом ознак. Але ці підходи мають складніші, порівняно з першим, алгоритми розрахунку.

Хоча великої відмінності між методами усіх цих підходів немає. Цілі їх збігаються, а головна відмінність полягає у тому, що у випадку застосування методу групувань можна заздалегідь сконструювати типи об'єктів. У разі використання другого підходу попередньо потрібно побудувати інтегральний показник, а сам поділ на класи залежить від мети групування та інших міркувань дослідника. У процесі використання третього підходу дослідник лише вказує напрям пошуку, а формування класів відбувається автоматично.

Підхід, що ґрунтується на побудові інтегрального показника, краще використовувати у випадку, коли метою групування деякої сукупності є не тільки побудова класів з однорідними елементами, а й розміщення в подальшому цих класів за збільшенням чи зменшенням деякої узагальненої характеристики об'єктів цієї сукупності, яка залежить від значень декількох ознак. Зокрема, під час групування регіонів України за станом їхнього ринку праці доцільно використовувати підхід на підставі інтегрального показника [58, с. 78].

Класифікація методами багатовимірного статистичного аналізу дає найкращі результати, порівняно з першими двома підходами, але без застосування комп'ютерної техніки використати її практично дуже важко. Недоліком підходу, що ґрунтується на побудові інтегрального показника, є те, що в цьому випадку відбувається втрата інформації, оскільки точки-об'єкти в багатовимірному векторному просторі спочатку проєктуються на пряму лінію (виражається інтегральним показником), а не групуються в кластери відразу, як це відбувається у методах третього з розглянутих підходів класифікації.

Традиційна схема класифікації досить проста і найбільш поширена в практичному використанні для статистичного аналізу багатовимірних економічних сукупностей. Вона широко описана у статистичній літературі. Труднощі тут можуть виникнути лише у випадку, коли в невеликих за обсягом статистичних сукупностях кількість групувальних ознак перевищує три-чотири. Тоді одержані групи досить малі і не придатні для статистичного аналізу.

Для побудови однорідних груп об'єктів у цьому випадку можна скористатися багатокроковим методом послідовного поділу

сукупності, який ґрунтується на аналізі коефіцієнтів варіації якісних ознак. Коефіцієнт варіації  $Q(x)$  якісної ознаки  $x$  обчислюють за формулою

$$Q(x) = \frac{\left( N^2 - \sum_{i=1}^l n_i^2 \right) \cdot l}{(l-1) \cdot N^2}, \quad (4.25)$$

де  $l$  – кількість градацій ознаки  $x$ ;

$n_i$  – кількість об'єктів, які приймають  $i$ -ту градацію ознаки ( $i = \overline{1, l}$ );

$N$  – кількість об'єктів сукупності  $\left( N = \sum_{i=1}^l n_i \right)$ .

Детальніше методика використання коефіцієнта варіації для побудови однорідних груп у багатокроковому методі послідовного поділу сукупності описана в [67, с. 53].

Другий спосіб класифікації передбачає побудову інтегрального показника. Алгоритми побудови таких показників описано в 2.3.

Найскладнішими є методи побудови однорідних груп об'єктів, які належать до третього із розглянутих підходів класифікації сукупності. Проте вони найбільш ефективні. Детальніше розглянемо методи цієї схеми класифікації.

## 4.2.2. Кластерний аналіз

**4.2.2.1.** Методи багатовимірної класифікації, що належать до третьої із розглянутих схем класифікації, поділяють на два типи: *кластерного* та *дискримінантного* аналізу. Характерною відмінністю між методами цих типів є те, що в методах кластерного аналізу немає, а в методах дискримінантного аналізу наявна навчальна вибірка, тобто апріорна інформація про розподіл генеральної сукупності. З огляду на це кластерний аналіз називають ще класифікацією без навчальної вибірки, а дискримінантний – із навчальної вибіркою.

Термін «кластерний аналіз» запропонував К.Тріон 1939 р.<sup>1</sup> (англ. cluster – гроно, згусток, група елементів, яка характеризується деякою спільною властивістю). Цей аналіз часто називають

<sup>1</sup> *Trion R. G. Cluster analysis. – L.: Ann Arbor Edwards Bros, 1939.*

ще автоматичною класифікацією, таксономією (англ. taxon – систематизована група будь-якої категорії) чи розпізнаванням образів без навчальної вибірки, а отримані в результаті поділу групи – кластерами, таксонами чи образами.

Сьогодні науковці розробили декілька методів багатовимірної класифікації. До них належить метод Чеканівського, дендритів, куль [56], «ближнього сусіда», «дальнього сусіда», «середнього зв'язку» та інші [21, с. 248]. Кількість груп, на які поділяють всю сукупність, може бути заздалегідь заданою чи визначатися в процесі дослідження на підставі природного розшарування сукупності об'єктів на однорідні групи. Якщо в першому випадку завжди є розв'язок задачі класифікації, то в другому може виявитися, що множина початкових даних не має природного розшарування на кластери, тобто утворює один кластер.

За способом кластеризації вирізняють *ієрархічні* та *ітераційні* процедури. Ієрархічні методи, відповідно, поділяють на *агломеративні* (тобто такі, що послідовно об'єднують об'єкти у більші групи) і *дивізімні* (які послідовно розділяють об'єкти на дрібніші (менші) однорідні групи). Ітераційні процедури складаються з кількох кроків, на кожному з яких виконують визначені операції. Деякі з цих кроків повторюються доти, поки склад кожного із сформованих кластерів не буде однорідним.

Ієрархічні методи кластеризації хоча і прості, але громіздкі у разі їх практичного використання. Алгоритми розрахунків цих методів потребують багато часу і великої ємності машинної пам'яті. Коли кількість спостережень більша від декількох сотень, то реалізація цих алгоритмів недоцільна, а в багатьох випадках неможлива.

Кластерний аналіз передбачає таких чотири етапи:

- формування ознакової множини;
- вибір способу стандартизації ознак;
- вибір міри схожості одиниць сукупності й обґрунтування (у разі необхідності) вагових коефіцієнтів;
- визначення процедури групування об'єктів.

Розглянемо детальніше формування інформаційної бази й алгоритми розрахунків у кластерних процедурах класифікації.

**4.2.2.2.** Якщо в сукупності міститься  $n$  об'єктів, кожний з яких характеризується  $m$  ознаками, то стан цієї сукупності можна описати матрицею

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nm} \end{pmatrix}, \quad (4.26)$$

де  $x_{ij}$  – значення  $j$ -ї ознаки для  $i$ -го об'єкта. Тут  $i$ -й рядок цієї матриці, тобто вектор  $X_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im})$ , ідентифікуватимемо з  $i$ -м об'єктом.

Величини  $x_{ij}$  можуть відповідати трьом типам змінних: кількісним, ранговим і якісним. Кількісні змінні вимірюють за допомогою шкали відношень чи інтервалів, рангові – за допомогою шкали порядку і якісні – за допомогою шкали найменувань. Нагадаємо, що тільки над кількісними змінними можна виконувати арифметичні операції. Значення рангових змінних можна упорядкувати і перенумерувати натуральними числами, а якісних – перенумерувати, але ці номери не будуть відображати якоїсь упорядкованості.

Усі первинні дані (значення їх містяться в матриці  $X$ ) мають бути одного типу. В іншому випадку їх зводять до однієї шкали. Зокрема, кількісні змінні зводять до рангових за допомогою ранжування їхніх значень і заміною рангових натуральними числами. Рангові змінні автоматично стають якісними, якщо не зважати на упорядкованість їхніх значень. Якщо якась якісна змінна є дихотомічною (набуває тільки два значення, які, переважно, позначають числами 0 і 1), то тоді всі інші недихотомічні якісні змінні потрібно звести до перших. Це можна зробити, співставивши кожному із можливих значень якісної змінної свою дихотомічну змінну, яка дорівнюватиме одиниці, якщо якісна змінна набула це значення, і нуль – в іншому випадку.

Початкові дані в задачах кластерного аналізу можуть бути задані не тільки у вигляді матриці  $X$ , а й у вигляді квадратної матриці

$$R = (r_{ij})_{n \times n}, \quad (4.27)$$

де  $r_{ij}$  – число, яке визначає ступінь близькості  $i$ -го об'єкта до  $j$ -го.

Кластери, сформовані внаслідок роботи алгоритмів кластерного аналізу, мають бути однорідними, тобто об'єкти сукупності, які належать одній класифікаційній групі, мають бути схожими між собою. Щоб визначити ці характеристики, між об'єктами використовують три *типи мір схожості*: відстань у метричних просторах, коефіцієнти подібності і коефіцієнти зв'язку.

Коефіцієнти подібності й коефіцієнти зв'язку можна назвати мірами близькості: чим більша їхня величина, тим «ближче» об'єкти один до одного. Для міри відстані навпаки: чим більша їхня величина, тим більша «відмінність» між об'єктами.

Отже, поняття однорідності об'єктів задають або введенням правила обчислення відстані  $\rho(X_i, X_j)$  між будь-якою парою досліджуваних об'єктів  $X_i, X_j, (i, j = \overline{1, n})$ , або заданням деякої функції  $r(X_i, X_j)$ , яка характеризує ступінь близькості  $i$ -го та  $j$ -го об'єктів. Для цих функцій повинні виконуватись такі умови:

- 1) симетрії:  $\rho(X_i, X_j) = \rho(X_j, X_i)$ ,

$$r(X_i, X_j) = r(X_j, X_i), (i, j = \overline{1, n});$$

- 2) максимальної схожості об'єкта із самим собою  $\rho(X_i, X_j) = \min \rho(X_i, X_j) = 0$ ,  $r(X_i, X_j) = \max_j r(X_i, X_j)$ ,  $(i, j = \overline{1, n})$ ;

- 3) монотонного спадання  $r(X_i, X_j)$  за  $\rho(X_i, X_j)$ , тобто з нерівності  $\rho(X_k, X_i) \geq \rho(X_i, X_j)$  має випливати нерівність  $r(X_k, X_i) \leq r(X_i, X_j)$ .

Зауважимо, що міри схожості можна визначати не тільки між об'єктами, а й між ознаками.

Вибір міри схожості є вузловим моментом кластерного аналізу, від якого залежить кінцевий варіант поділу сукупності на однорідні групи. Цей вибір має залежати від мети дослідження та деяких інших чинників.

**4.2.2.3.** У кластерних процедурах класифікації використовують різні *метрики та міри близькості*. Попередньою процедурою знаходження відстані є стандартизація значень усіх ознак. Це можна зробити, зокрема, за якоюсь із формул (2.48) – (2.50).

Нехай  $X_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im})$ , а  $Y_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{im})$ , де  $x_{ik}$  та  $y_{ik}$  – відповідно нестандартизоване і стандартизоване значення  $k$ -ї ознаки для  $i$ -ї одиниці сукупності ( $i = \overline{1, n}$ ). Найбільш поширеною під час визначення відстані в процедурах кластерного аналізу є метрика Евкліда. Відстань  $\rho_E(X_i, X_j)$  між  $i$ -ю та  $j$ -ю одиницями сукупності в цьому випадку обчислюють за формулою

$$\rho_E(X_i, X_j) = \rho_E(Y_i, Y_j) = \sqrt{\sum_{k=1}^m (y_{ik} - y_{jk})^2}. \quad (4.28)$$

У частковому випадку, коли простір двовимірний, матимемо звичну нам відстань між двома точками на площині.

Використовувати формулу (4.28) для розрахунку відстані доречно, коли компоненти вектора  $X$  однорідні за фізичним розумінням і однаково важливі для класифікації.

Зауважимо, що зведення до безрозмірних величин у кластерному аналізі може призвести до небажаних наслідків. Якщо кластери добре розділені за однією ознакою і не розділені за іншою, то після нормування дискримінуючі можливості першої ознаки будуть зменшені, зважаючи на збільшення «шумового» ефекту іншої.

Якщо ознаки різновагомі й відомо, що  $k$ -та ознака має вагу  $\omega_k$ , то для розрахунків можна скористатися формулою «зваженої» евклідової відстані

$$\rho_{зЕ}(Y_i, Y_j) = \sqrt{\sum_{k=1}^m \omega_k (y_{ik} - y_{jk})^2}. \quad (4.29)$$

Вага  $\omega_k$  пропорційна до ступеня важливості ознаки в задачі класифікації. Переважно приймають  $0 \leq \omega_k \leq 1$ , де  $k = 1, 2, \dots, m$ .

Щоб визначити «ваги», потрібно виконати додаткові дослідження. Досить часто для цього залучають експертів. Хоча деякі вчені пропонують брати як ваги  $\omega_k$  величину, яка є обернено пропорційною до середнього квадратичного відхилення значень ознаки  $x_k, k = \overline{1, m}$ . [64, с. 58]. Однак визначення ваг тільки за даними вибірки може призвести до неправильних висновків.

Крім зазначених, використовують узагальнену відстань Махаланобіса, яку обчислюють за формулою

$$\rho_{Mx}(Y_i, Y_j) = \sqrt{(Y_i - Y_j) \cdot \Sigma^{-1} (Y_i - Y_j)^T}, \quad (4.30)$$

де  $\Sigma$  – коваріаційна матриця зв'язку ознак, яка має розмірність  $m \times m$ .

Аналогічно вводять узагальнену «зважену» відстань Махаланобіса. На практиці використовують й інші метрики, зокрема *манхеттенську відстань*:

$$\rho_{Mh}(Y_i, Y_j) = \sum_{k=1}^m |y_{ik} - y_{jk}|.$$

Якщо змінні дихотомічні, тобто їхні значення записані двійковим кодом (набором нулів та одиниць), то для оцінювання ступеня близькості одиниць сукупності використовують відстань Хемінга та коефіцієнт подібності  $r_{ij}$ . Хемінгову відстань  $\rho_x(Y_i, Y_j)$  обчислюють за формулою

$$\rho_x(X_i, X_j) = \sum_{k=1}^m |x_{ik} - x_{jk}|. \quad (4.31)$$

Тут  $x_{ik}$  може набувати значення тільки нуль та одиницю. Отже, хемінгова відстань дорівнює числу значень відповідних ознак, що не збігаються в розглянутих  $i$ -му та  $j$ -му об'єктах. Наприклад, для оцінювання якості продукції певного виду визначено  $m$  параметрів. Якщо  $k$ -й параметр для  $i$ -го виробу відповідає стандарту, то  $x_{ik} = 1$ , а якщо не відповідає, то  $x_{ik} = 0$ . Нехай  $m = 10$  і  $X_i = (0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1)$ ,  $X_j = (0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1)$ . Тоді  $\rho_x(X_i, X_j) = 4$ .

Подібно розраховують коефіцієнти подібності. Загальну кількість дихотомічних ознак, які використовують для характеристики економічного об'єкта, позначимо  $m$ , а відповідну зальну кількість значень властивостей, які збіглися для  $i$ -ї та  $j$ -ї одиниць сукупності, кількість одиниць одиничних властивостей, які збіглися для  $i$ -ї та  $j$ -ї одиниць сукупності, й кількість одиничних значень властивостей для  $i$ -ї одиниці сукупності –  $zs_{ij}; os_{ij}; o_i$ . Використовуючи ці позначення для  $i$ -ї та  $j$ -ї одиниць сукупності, розраховують такі *коефіцієнти подібності*:

- коефіцієнт Рао:  $r_{ij}^P = \frac{os_{ij}}{m}$ ;

- коефіцієнт Хемінга:  $r_{ij}^X = \frac{zS_{ij}}{m}$ ;
- коефіцієнт Роджерса-Танімото:  $r_{ij}^{PT} = \frac{oS_{ij}}{o_i + o_j - oS_{ij}}$ ;
- коефіцієнт Жаккарда:  $r_{ij}^{JK} = \frac{oS_{ij}}{oS_{ij} + m - zS_{ij}}$ .

Зокрема, для попереднього прикладу  $m=10$ ,  $oS_{ij}=3$  і коефіцієнт Рао дорівнюватиме  $r_{ij}^P = \frac{3}{10} = 0,3$ .

Крім наведених, для оцінення ступеня подібності двох дихотомічних ознак вводять й інші коефіцієнти [26, с. 47]. Переважно значення коефіцієнта подібності не менше від нуля і не більше від одиниці. Вибір для економічного аналізу якогось із цих коефіцієнтів є певною мірою суб'єктивним. Він залежить від того, що для дослідника є більш значущим: одиничні чи нульові значення ознаки, порозрядний збіг чи незбіг значень тощо.

Іноді як міру близькості об'єктів під час їх класифікації використовують деякі фізичні змістовні параметри, які тією чи іншою мірою характеризують взаємовідношення між цими об'єктами. Зокрема, задачу класифікації галузей економіки з метою їх агрегування можна розв'язати на підставі матриці міжгалузевого балансу.

Якщо елементи  $x_{ij}$  цієї матриці характеризують суму річних поставок  $i$ -ї галузі в  $j$ -ту в грошовому вираженні, то як міру близькості  $r_{ij}$  між цими галузями приймають відповідні елементи *симетричної нормованої матриці міжгалузевого балансу* [21, с. 247]. Операція нормування в цьому випадку полягає у заміні грошових виразів поставок  $i$ -ї галузі в  $j$ -ту часткою цих поставок щодо всіх поставок  $i$ -ї галузі. Симетризацію нормованої матриці міжгалузевого балансу можна виконати, виразивши через середні значення близькість взаємних поставок між  $i$ -ю та  $j$ -ю галуззю та, що в цьому випадку,  $r_{ij} = r_{ji}$ .

Як було зазначено, міри схожості можна визначати і між ознаками, які використовують для характеристики об'єктів дос-



лідження. У цьому виникає потреба, коли постає завдання зменшити розмірність заданого простору ознак, тобто вибрати із заданої множини  $m$  ознак найбільш суттєві та інформативні. Тоді кожному з цих ознак розглядають як об'єкт, що підлягає класифікації. Припускають, що ознаки однієї групи якимсь чином зв'язані між собою і несуть інформацію про деяку одну властивість об'єкта. Зважаючи на це, для подальших досліджень з кожної класифікаційної групи залишають по одному представнику.

Оскільки об'єктами такої класифікації є ознаки, то як міру схожості між ними використовують коефіцієнти зв'язку. Тип цих коефіцієнтів залежить від ознак, які підлягають класифікації. Якщо, наприклад, значення ознак вимірюють за допомогою кількісних шкал, то як вимірник сили зв'язку між ознаками переважно використовують різні характеристики ступеня їх корельованості, передусім *коефіцієнт кореляції*. Ступінь однорідності між ознаками, які виміряні в шкалі порядку, можна визначити за допомогою *коефіцієнта рангової кореляції*. У деяких задачах використовують інші міри схожості. Зауважимо, що формалізувати цей етап процесу класифікації поки що неможливо.

**4.2.2.4.** Під час кластерного аналізу треба чітко розуміти, як визначають відстань між двома групами об'єктів. Її можна розраховувати по-різному. Найбільш уживаними під час визначення *відстані*  $\rho(S_i, S_m)$  між кластерами  $S_i$  і  $S_m$  є алгоритми:

- *одиночного зв'язку (близького сусіда)*

$$\rho_{\min}(S_i, S_m) = \min_{\substack{x_i \in S_i \\ x_j \in S_m}} \rho(x_i, x_j); \quad (4.32)$$

- *повного зв'язку (далекого сусіда)*

$$\rho_{\max}(S_i, S_m) = \max_{\substack{x_i \in S_i \\ x_j \in S_m}} \rho(x_i, x_j); \quad (4.33)$$

- *середнього зв'язку*

$$\rho_{cp}(S_i, S_m) = \frac{1}{n_i n_m} \sum_{x_i \in S_i} \sum_{x_j \in S_m} \rho(x_i, x_j); \quad (4.34)$$

- *центру ваги*

$$\rho(S_i, S_m) = \rho(\bar{x}_i, \bar{x}_m), \quad (4.35)$$

де  $S_i$  –  $i$ -й кластер (група, клас),  $n_i$  – кількість об’єктів кластера  $S_i$ ,  $\bar{x}_i$  – середнє арифметичне векторних спостережень кластера  $S_i$ , тобто «центр ваги»  $i$ -ї групи.

А. М. Колмогоров ввів *узагальнену відстань*

$$\rho_{yz}(S_i, S_m) = \left( \frac{1}{n_i n_m} \sum_{x_j \in S_i} \sum_{x_j \in S_m} \rho^k(x_i, x_j) \right)^{1/k}, \quad (4.36)$$

яка як часткові випадки охоплює всі вищерозглянуті види відстаней [21, с. 249].

Отже, відстань між кластерами можна обчислити за багатьма формулами. Зважаючи на це, розділити на групи задану сукупність можна також багатьма способами. Іноді порівнюють якість цих способів поділу. Для цього шукають поділ на групи, коли досягається екстремум деякого *функціонала якості*, який вибирають відповідно до емпіричних міркувань. Є декілька підходів до побудови таких функціоналів [21, с. 250]. Вони ґрунтуються на сумуванні внутрішньогрупових дисперсій, попарних внутрішньогрупових відстаней між елементами чи інших підходах.

**4.2.2.5.** На практиці досить часто використовують агломеративні ієрархічні кластер-процедури. Принцип роботи цих процедур полягає у послідовному об’єднанні спочатку найближчих груп елементів, а далі щораз більш віддалених одна від одної. На першому кроці об’єднання всі одиниці сукупності розглядають як окремі кластери. На кожному наступному кроці відбувається об’єднання якоїсь пари кластерів в один. Повна кластеризація  $n$  одиниць сукупності відбувається за  $(n-1)$  крок.

Іноді в алгоритм розрахунку вводять обмеження на найбільшу відстань між елементами одного кластера, яку називають *порогом*. Поріг вибирають суб’єктивно або за деякою схемою. Якщо під час об’єднання двох кластерів в один виявиться, що відстань між деякими об’єктами перевищує цей поріг, то ці об’єкти за певними правилами відносять до різних кластерів.

Першим кроком ієрархічної агломеративної кластер-процедури є вибір міри схожості між елементами сукупності і їхніми групами та розрахунок матриці відстаней між об’єктами.

Наступні кроки цієї процедури полягають у повторенні трьох таких дій:

- пошук мінімальної відстані між кластерами, які на першому кроці об'єднання будуть містити тільки по одному об'єкту (нехай це буде відстань між  $i$ -м та  $j$ -м кластерами  $S_i$  та  $S_j$ );
- об'єднання кластерів  $S_i$  та  $S_j$  в один кластер  $S_{(i,j)}$ ;
- перерахування елементів матриці відстаней між кластерами, розмірність якої зменшується на одиницю. Відстань між кластером  $S_i$  і сформованим кластером  $S_{(i,j)}$  обчислюють за формулою [66, с. 249]

$$\rho_{i,(i,j)} = \rho(S_i, S_{(i,j)}) = \alpha\rho_{ii} + \beta\rho_{ij} + \gamma\rho_{jj} + \delta|\rho_{ii} - \rho_{jj}|, \quad (4.37)$$

де  $\rho_{pq} = \rho(S_p, S_q)$  – відстань між кластерами  $S_p$  та  $S_q$ ;

$\alpha, \beta, \gamma$  і  $\delta$  – числові коефіцієнти, значення яких визначає специфіку алгоритму. Якщо відстань між класами визначають за принципом одиничного зв'язку, то ці коефіцієнти будуть такими:  $\alpha = \beta = -\delta = 0,5; \gamma = 0$ . Якщо за принципом повного зв'язку, то  $\alpha = \beta = \delta = 0,5; \gamma = 0$ , а якщо за принципом середнього зв'язку, то

$$\alpha = \frac{n_i}{n_i + n_j}, \beta = \frac{n_j}{n_i + n_j}, \gamma = \delta = 0.$$

*Приклад.* За допомогою агломеративної ієрархічної процедури кластерного аналізу з використанням метрики Евкліда й алгоритму одиничного зв'язку розрахунку відстані між кластерами класифікувати шість областей України за станом їхнього ринку праці у 2006 р., якщо кожна з них характеризується такими показниками:  $x_1$  – рівень безробіття за методологією Міжнародної організації праці, відсотків;  $x_2$  – навантаження на одне вільне робоче місце (вакансію), осіб;  $x_3$  – рівень зареєстрованого безробіття, відсотків (див. табл. 4.6).

З метою усунення різниці в одиницях виміру заданих показників перейдемо за допомогою формул (2.50), (2.51) від фактичних значень факторних ознак  $x_1, x_2, x_3, x_4$  до відповідних нормованих значень  $y_1, y_2, y_3, y_4$ . Найпростіші статистичні оцінки факторів є такими:  $\bar{x}_1 = 7,8$ ;  $\bar{x}_2 = 13,3$ ;  $\bar{x}_3 = 3,98$ ;  $\sigma_1 = 1,8$ ;  $\sigma_2 = 10,5$ ;  $\sigma_3 = 1,76$ .

Таблиця 4.6

## Ситуація на ринку праці областей України

№ за/п	Область	$x_1$	$x_2$	$x_3$
1	Дніпропетровська	5,5	3	2,4
2	Донецька	6,2	2	1,9
3	Рівненська	9,7	20	5,2
4	Тернопільська	9,1	24	6,6
5	Харківська	6,6	4	2,6
6	Черкаська	9,8	27	5,2

Далі, скориставшись формулою (4.28), розрахуємо матрицю відстаней між досліджуваними областями. Вона буде матиме такий вигляд:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0,49 & 3,26 & 3,70 & 0,63 & 3,67 \\ & 0 & 3,20 & 3,76 & 0,50 & 3,63 \\ & & 0 & 0,95 & 2,74 & 0,66 \\ & & & 0 & 3,28 & 0,93 \\ & & & & 0 & 3,18 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Матриця відстаней між областями є симетричною, тому записуватимемо лише значення, які лежать над головною діагоналлю.

З матриці  $R_1$  видно, що найближчими ( $\min_{i,j} \rho_{ij}(Y_i, Y_j) = \min_{i,j} \rho_{ij} = \rho_{12} = 0,49$ ) є перший і другий об'єкти сукупності (Дніпропетровська і Донецька області), а тому вони об'єднуються в один кластер. Після об'єднання одержуємо п'ять кластерів (табл.4.7).

Таблиця 4.7

Номер кластера	1	2	3	4	5
Склад кластера	(1, 2)	(3)	(4)	(5)	(6)

Відстань між кластерами визначимо за формулою (4.37). Відстань між кластером  $S_{(1,2)}$  і об'єктом  $S_3$  буде такою:

$$\begin{aligned} \rho_{(1,2),3} &= 0,5\rho_{13} + 0,5\rho_{23} - 0,5|\rho_{13} - \rho_{23}| = \\ &= 0,5 \cdot 3,26 + 0,5 \cdot 3,20 - 0,5|3,26 - 3,20| = 3,20. \end{aligned}$$

Отже, відстань дорівнює відстані від третього об'єкта до найближчого йому об'єкта з тих, що належать до кластера  $S_{(1,2)}$ .

Аналогічно знаходять відстані між кластером  $S_{(1,2)}$  і об'єктами  $S_4$ ,  $S_5$  і  $S_6$ , які, відповідно, дорівнюють:  $\rho_{(1,2),4} = 3,70$  ( $\rho_{14} = \underline{3,70}$ ;  $\rho_{24} = 3,76$ );  $\rho_{(1,2),5} = 0,5$  ( $\rho_{15} = 0,63$  і  $\rho_{25} = \underline{0,50}$ );  $\rho_{(1,2),6} = 3,63$  ( $\rho_{16} = 3,67$  і  $\rho_{26} = \underline{3,63}$ ). Відстані між решту кластерами залишаються без зміни.

У результаті одержуємо матрицю відстаней

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3,20 & 3,70 & \underline{0,50} & 3,63 \\ & 0 & 0,95 & 2,74 & 0,66 \\ & & 0 & 3,28 & 0,93 \\ & & & 0 & 3,18 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки найменшою є відстань між першим і четвертим кластерами, тобто між  $S_{(1,2)}$  і  $S_5$  ( $\rho_{(1,2),5} = 0,5$ ), то об'єднаємо їх. Після об'єднання матимемо чотири кластери:  $S_{(1,2,5)}$ ,  $S_3$ ,  $S_4$  і  $S_6$ . Знову знайдемо матрицю відстаней за формулою (4.37):

$$R_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2,74 & 3,28 & 3,18 \\ & 0 & 0,95 & \underline{0,66} \\ & & 0 & 0,93 \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

З матриці  $R_3$  видно, що об'єднати треба другий і четвертий кластери, тобто  $S_3$  і  $S_6$ . Об'єднавши ці кластери в один і розрахувавши відстані між новими кластерами  $S_{(1,2,5)}$ ,  $S_{(3,6)}$ ,  $S_4$ , одержимо таку матрицю відстаней:

$$R_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2,74 & 3,28 \\ & 0 & \underline{0,93} \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

Залишається об'єднати кластери  $S_{(3,6)}$ ,  $S_4$  в один  $S_{(3,4,6)}$ . Одержимо два кластери  $S_{(1,2,5)}$  і  $S_{(3,4,6)}$ , відстань між якими за принципом найближчого сусіда дорівнює  $\rho_{(1,2,5),(3,4,6)} = 2,74$ . Вона є досить великою порівняно з відстанями між об'єктами всередині цих кластерів. Хоча ці два кластери можна ще об'єднати в один, однак

перевагу тут треба надати передостанньому етапові класифікації, коли всі об'єкти об'єднані у два кластери:  $S_{(1,2,5)}$  і  $S_{(3,4,6)}$ .

### 4.2.3. Дискримінантний аналіз

До дискримінантного аналізу належать так звані методи класифікації з учителем. Цей аналіз (на відміну від кластерного аналізу) не утворює нових класів, а допомагає виявити відмінність між наявними класами і віднести новий (нерозпізнаний) об'єкт до одного з них за принципом максимальної схожості. Наприклад, спираючись на певну систему характеристик, можна класифікувати підприємців (осіб, що приймають рішення) на три категорії: схильних, несхильних і нейтральних до ризику.

Детальніше задачу розрізнення (дискримінації) формують так. За заданої множини  $L$  сукупностей  $S_l (l = \overline{1, L})$  треба визначити правило, згідно з яким заданий за допомогою вектора  $X^* = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  об'єкт треба віднести до однієї з них. Для побудови правила дискримінації весь вибірковий простір  $\Omega$  значень вектора  $X^*$  поділяють на області  $\Omega_l (l = \overline{1, L})$  так, що у разі потрапляння  $X^*$  в  $\Omega_l$  об'єкт належатиме до сукупності  $S_l$ .

Апріорна інформація про сукупності  $S_l (l = \overline{1, L})$  може бути подана як у вигляді деяких відомостей про функції  $n$ -вимірного розподілу ознак у кожній сукупності, так і у вигляді вибірок з цієї сукупності.

Нехай в нас є  $L$  класів (сукупностей), які характеризуються  $m$  ознаками, і  $\bar{x}_{ij}$  – середнє значення  $j$ -ї ознаки в  $l$ -му класі. Для  $l$ -го класу ( $l = \overline{1, L}$ ) побудуємо функцію

$$f_l = a_{l0} + a_{l1}x_{11} + a_{l2}x_{12} + \dots + a_{lm}x_{lm}, \quad (4.38)$$

де  $a_{ij}$  – коефіцієнти без змістовної інтерпретації, алгоритм розрахунку яких подано в [76, с. 113]. Цю функцію називають *дискримінантною*. Її геометричною інтерпретацією є точка в  $m$ -вимірному Евклідовому просторі, координатами якого є середні значення класифікаційних ознак  $l$ -го класу. Значення  $f_l$  для  $L$  класів розглядають як центри їх тяжіння і називають *центроїдами*.

Процедура класифікації ґрунтується на геометричній близькості нової одиниці сукупності  $X^*$  до центроїдів виділених класів. Критерієм оптимальності поділу нової сукупності на класи є максимум відношення міжкласової варіації до внутрішньокласової. Детальну методику, алгоритм розрахунку і виконання дискримінантного аналізу на підставі функцій (4.38) з використанням інтегрованої системи опрацювання даних *Statistica* подано в [26, с. 49].

Якщо інформація про класифікаційні групи подана за допомогою вибірок із них, то завдання дискримінантного аналізу полягає у побудові за допомогою цих навчаючих вибіркових спостережень правила, яке дає можливість віднести будь-який новий об'єкт до однієї із заданих множин. Під час розв'язання таких задач не треба знань про точні функціональні розподіли. Розв'язати такі задачі дискримінації можна на підставі незначної апріорної інформації про сукупності, що особливо доречно для практичних застосувань.

Розглянемо детальніше методику дискримінантного аналізу для навчальних вибірок, які мають нормальний закон розподілу з невідомими, але однаковими коваріаційними матрицями. Опишемо випадок, коли є тільки дві тривимірні генеральні сукупності  $X$  і  $Y$ , з яких взято навчальні вибірки обсягами відповідно  $n_1$  і  $n_2$ :

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n_1 1} & x_{n_1 2} & x_{n_1 3} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ \dots & \dots & \dots \\ y_{n_2 1} & y_{n_2 2} & y_{n_2 3} \end{pmatrix}. \quad (4.39)$$

Нехай задана матриця

$$Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ \dots & \dots & \dots \\ z_{l1} & z_{l2} & z_{l3} \end{pmatrix}, \quad (4.40)$$

кожний рядок якої характеризує нове спостереження (об'єкт сукупності). Треба визначити, до якої сукупності об'єктів ( $X$  чи  $Y$ ), віднести кожен з нових об'єктів, які задані рядками матриці  $Z$ .

Вирішити поставлене завдання можна за допомогою методики дискримінантного аналізу, яка складається з наступних кроків.

1. Для навчаючих вибірок  $X$  та  $Y$  визначаємо вектори середніх  $\bar{X}$  і  $\bar{Y}$  та коваріаційних матриць  $S_x$  і  $S_y$ :

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix}; S_x = \begin{pmatrix} S_{11(x)} & S_{12(x)} & S_{13(x)} \\ S_{21(x)} & S_{22(x)} & S_{23(x)} \\ S_{31(x)} & S_{32(x)} & S_{33(x)} \end{pmatrix};$$

$$\bar{Y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \bar{y}_3 \end{pmatrix}; S_y = \begin{pmatrix} S_{11(y)} & S_{12(y)} & S_{13(y)} \\ S_{21(y)} & S_{22(y)} & S_{23(y)} \\ S_{31(y)} & S_{32(y)} & S_{33(y)} \end{pmatrix}, \quad (4.41)$$

де

$$\bar{x}_j = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} x_{ij}; \quad \bar{y}_j = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} y_{ij};$$

$$S_{kj(x)} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} (x_{ij} - \bar{x}_j)(x_{ik} - \bar{x}_k) = \overline{x_j x_k} - \bar{x}_j \bar{x}_k; \quad S_{kj(x)} = S_{jk(x)};$$

$$S_{kj(y)} = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} (y_{ij} - \bar{y}_j)(y_{ik} - \bar{y}_k) = \overline{y_j y_k} - \bar{y}_j \bar{y}_k; \quad S_{kj(y)} = S_{jk(y)},$$

$(j, k = 1, 2, 3)$ .

2. Використовуючи розраховані значення елементів коваріаційних матриць  $S_x$  та  $S_y$ , знаходимо незміщену оцінку сумарної коваріаційної матриці

$$\hat{S} = \frac{1}{n_1 + n_2 - 2} (n_1 S_x + n_2 S_y). \quad (4.42)$$

3. На підставі коваріаційної матриці (4.42) обчислюємо обернену матрицю  $\hat{S}^{-1}$ , за допомогою якої одержуємо вектор оцінки коефіцієнтів дискримінантної функції

$$a = \hat{S}^{-1} (\bar{X} - \bar{Y}). \quad (4.43)$$

4. Для матриць початкових даних  $X$  і  $Y$  знаходимо оцінки векторів значень дискримінантної функції  $\hat{U}_x = X \cdot a$ ,  $\hat{U}_y = Y \cdot a$ , та їхні середні значення

$$\bar{\hat{u}}_x = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} \hat{u}_{xi}, \quad \bar{\hat{u}}_y = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} \hat{u}_{yi}. \quad (4.44)$$



5. Визначаємо межу дискримінації  $\hat{C}$  за формулою

$$\hat{C} = \frac{1}{2} (\bar{u}_x + \bar{u}_y). \quad (4.45)$$

6. Для кожного рядка матриці  $Z$  знаходимо оцінку дискримінантної функції. Зокрема, для  $\nu$ -го рядка цієї матриці, який характеризує  $\nu$ -й об'єкт, що підлягає дискримінації, цю оцінку обчислюють за формулою

$$\hat{u}_\nu = z_{\nu 1} a_1 + z_{\nu 2} a_2 + z_{\nu 3} a_3. \quad (4.46)$$

7. Порівнюємо одержану за формулою (4.46) оцінку дискримінантної функції для кожного об'єкта з межею дискримінації  $\hat{C}$ . Якщо для  $\nu$ -го об'єкта ( $\nu$ -го рядка матриці  $Z$ )  $\hat{u}_\nu \geq \hat{C}$ , то цей об'єкт потрібно віднести до сукупності  $X$ . Якщо ж  $\hat{u}_\nu < \hat{C}$ , то  $\nu$ -й об'єкт треба віднести до сукупності  $Y$ .

Таблиця 4.8

Інформація про підприємства кожної групи

Група підприємств	Основні фонди	Трудові ресурси	Балансовий прибуток
Передові ( $X$ )	224,228	17,115	22,981
	151,827	14,904	21,481
	147,313	13,627	28,669
	152,253	10,545	10,199
Інші ( $Y$ )	46,757	4,428	11,124
	29,033	5,510	6,091
	52,134	4,214	11,842
	37,050	5,527	11,873
	63,979	4,211	12,860

Ми розглянули найпростіший випадок, коли наявні тільки дві навчальні вибірки. В інших випадках, коли дискримінація здійснюється за трьома чи більше навчальними вибірками, завдання дискримінантного аналізу значно ускладнюється і не завжди є однозначним. Тобто не завжди досліджуваний об'єкт вдається однозначно віднести до деякої навчальної вибірки.

*Приклад.* Задана інформація про введення в дію основних фондів (в умовних грошових одиницях), трудові ресурси (в тис. осіб) і балансовий прибуток (в умовних грошових одиницях) дев'яти підприємств, які поділено на дві групи [21, с. 260]. Перша група

складеться з чотирьох передових підприємств, друга містить п'ять інших підприємств (табл. 4.8). Визначити, до якої групи віднести підприємство  $Z$ , для якого значення зазначених трьох показників відповідно дорівнюють 55,451; 9,592 і 12,840.

Розрахуємо вектори середніх значень  $\bar{X}$  і  $\bar{Y}$  та коваріаційних матриць  $S_x$  і  $S_y$  для груп передових та інших підприємств. Візьмемо до уваги, що матриця  $X$  формується із даних верхньої частини таблиці 4.8, а матриця  $Y$  – з нижньої,  $n_1 = 4$ ,  $n_2 = 5$ , а  $Z = (55,451 \ 9,592 \ 12,840)$ . У результаті розрахунків одержимо

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} 168,920 \\ 14,048 \\ 20,835 \end{pmatrix}; \bar{Y} = \begin{pmatrix} 45,793 \\ 4,778 \\ 10,758 \end{pmatrix};$$

$$S_x = \begin{pmatrix} 1025,610 & 55,666 & 28,945 \\ & 5,647 & 10,274 \\ & & 44,880 \end{pmatrix}; S_y = \begin{pmatrix} 145,867 & -6,610 & 22,787 \\ & 0,372 & -0,902 \\ & & 5,750 \end{pmatrix}.$$

Тоді незміщена оцінка сумарної коваріаційної матриці дорівнюватиме

$$\hat{S} = \frac{1}{4+5-2} (4S_x + 5S_y) = \begin{pmatrix} 690,253 & 27,088 & 32,816 \\ & 3,492 & 5,226 \\ & & 29,753 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо тепер обернену матрицю до  $\hat{S}$

$$\hat{S}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,0020945 & -0,0173491 & 0,0007371 \\ & 0,5321430 & -0,0743344 \\ & & 0,0456538 \end{pmatrix}$$

і вектор оцінок коефіцієнтів дискримінантної функції

$$a = \hat{S}^{-1} (\bar{X} - \bar{Y}) = \hat{S}^{-1} \begin{pmatrix} 123,128 \\ 9,270 \\ 10,074 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1044998 \\ 2,0475006 \\ -0,1363498 \end{pmatrix}.$$

Оцінки дискримінантних функцій і їхні середні значення для матриць  $X$  і  $Y$  дорівнюють

$$\hat{U}_x = Xa = \begin{pmatrix} 55,346433 \\ 43,457381 \\ 39,399054 \\ 36,113833 \end{pmatrix}; \hat{U}_y = \begin{pmatrix} 12,437003 \\ 13,486817 \\ 12,46277 \\ 13,571031 \\ 13,555623 \end{pmatrix};$$

$$\bar{u}_x = 43,577047; \bar{u}_y = 13,102648.$$

На підставі знайдених середніх значень оцінок дискримінантних функцій розраховуємо межу дискримінації

$$\hat{C} = \frac{1}{2}(43,577047 + 13,102648) = 28,339847.$$

Визначимо можливість віднесення нового об'єкта (рядка  $Z$ ) до групи передових. Оскільки матриця  $Z$  має тільки один рядок, то  $\hat{u}_v$  позначимо через  $\hat{u}_z$ . Тоді згідно з формулою (4.46) матимемо

$$\hat{u}_z = 0,1044998 \cdot 55,451 + 2,0478006 \cdot 9,952 - 0,1363498 \cdot 12,840 \cong 23,69.$$

Порівнюючи  $\hat{u}_z$  і  $\hat{C}$ , одержимо  $\hat{u}_z < \hat{C}$  ( $23,69 < 28,34$ ). Отже нове підприємство з характеристиками  $Z$  не можна віднести до групи передових підприємств.

## 5. ЕКОНОМЕТРИЧНІ МЕТОДИ ДІЯЛЬНОСТІ ГОСПОДАРЮЮЧИХ СУБ'ЄКТІВ

### 5.1. Парна регресія

**5.1.1.** Соціально-економічні явища навколишнього світу є взаємозв'язані та взаємозумовлені. Будь-яке явище є наслідком дії певної групи причин і водночас причиною інших явищ. З огляду на це дослідження економічних явищ та процесів повинно супроводжуватися вивченням і вимірюванням взаємозв'язків між ними. *Галузь економічної науки, яка вивчає методи кількісного вимірювання таких взаємозв'язків, називають економітрією.* Головним завданням економітрії є виявлення і кількісне оцінювання причинних зв'язків між економічними явищами та процесами.

У процесі вивчення таких взаємозв'язків потрібно розуміти, що наслідок визначається не тільки причиною, яка його зумовила. Ті ж самі причини за одних умов спричиняють один наслідок, а за інших – другий. Тому наслідок залежить також від умов, у яких діє причина. Вивчаючи закономірності зв'язку, причину та умови об'єднують в одне поняття «фактор» («чинник»). Відповідно *ознаки (статистичні змінні)*, які характеризують фактори, називають *факторними*, чи *незалежними*, а ті, що характеризують наслідки, – *результативними* (чи *залежними*) змінними. Факторні змінні ще називають пояснюючими (чи екзогенними) змінними, а результативні – поясненими (чи ендогенними) змінними.

Зауважимо, що зв'язок між довільними змінними може бути *функціональний* та *стохастичний*. У разі функціонального зв'язку кожному значенню однієї змінної (фактора), наприклад,  $x$  відповідає одне або кілька чітко визначених значень іншої змінної (функції), наприклад,  $y$ .

Такі зв'язки наявні здебільшого в математиці, фізиці, хімії, астрономії і деяких інших «точних» науках. Наприклад, площа круга ( $S = \pi \cdot R^2$ ) і довжина кола ( $C = 2 \cdot \pi \cdot R$ ) повністю визначаються радіусом  $R$ , струм в електричному колі зростає прямо пропорційно до збільшення напруги тощо.

Між змінними, що характеризують економічні явища та процеси, функціональні зв'язки трапляються рідко. Залежність в економіці не простежується під час дослідження окремих одиниць

сукупності, проте вона чітко виявляється у процесі аналізу достатньо великої сукупності в цілому. Здебільшого між статистичними змінними наявні стохастичні залежності, які виявляються у тому, що одна з них (наприклад,  $y$ ) реагує на зміну іншої (наприклад,  $x$ ) зміною свого *умовного закону розподілу*, тобто зміною певної множини значень ознаки  $y$ , відповідних кожному значенню ознаки  $x$ . Наприклад, урожайність сільськогосподарських культур залежить від внесених у ґрунт добрив. Однак ця залежність не буде функціональною, оскільки на врожайність також впливають кліматичні умови, сорт насіння та інші чинники.

Якщо умовні розподіли замінюються одним параметром (середньою тих значень ознаки  $y$ , які відповідають одному значенню ознаки  $x$ ), то такий зв'язок називають *кореляційним*. Тобто кореляційний зв'язок є різновидом стохастичного і виявляється у зміні середніх умовних розподілів. Розглядатимемо тільки кореляційні зв'язки між ознаками.

Дисперсійний аналіз дає змогу виявити стохастичний зв'язок між змінними. Однак для поглибленого дослідження взаємозв'язку явищ ця методика непридатна, оскільки не дає змоги виразити наявні залежності у вигляді певного математичного рівняння. Логічним продовженням дисперсійного аналізу є *кореляційно-регресійний аналіз*, за допомогою якого можна не тільки поглибити описані дослідження, а й кількісно оцінити характер та механізм взаємодії статистичних змінних. Цей метод вивчає кількісні характеристики кореляційних зв'язків. Він дає змогу виконати два головні завдання:

1) визначення форми і параметрів рівняння зв'язку, тобто знаходження математичної моделі залежності кореляційно зв'язаних змінних;

2) вимірювання тісноти (щільності) зв'язку.

Перше з цих завдань можна віднести до проблем регресійного аналізу.

Під час вивчення зв'язків між змінними слід також визначити, яка з ознак є причиною, а яка – наслідком. Якщо взяти приклад урожайності зернових і кількості внесених у ґрунт добрив, то другу змінну слід прийняти за незалежну, а врожайність – залежну. Причинний зв'язок визначають на підставі якісного аналізу чи інтуїції.

Виявити наявність кореляційного зв'язку можна, використавши комбінаційний розподіл елементів сукупності. Приклад такого розподілу наведено в табл. 5.1. Було зроблено вибірку 100 чоловіків і поділено на групи за ознаками:  $x$  – зріст у сантиметрах і  $y$  – вага у кілограмах. Кожна група чоловіків за їхнім зростом характеризується своїм особливим розподілом чоловіків за масою. Це умовні розподіли.

Таблиця 5.1

Залежність маси чоловіка від його зросту

$x \setminus y$	60-70	70-80	80-90	90-100	Разом	Середня маса, кг
До 170	12	5	1	0	18	68,9
170-175	3	15	5	2	25	77,4
175-180	2	8	15	5	30	82,7
180 і більше	1	4	7	15	27	88,3
У цілому	18	32	28	22	100	80,7

Середню масу чоловіків у кожній групі і у сукупності в цілому подано в останній графі табл.5.1. Розрахунок їх виконано за формулою (2.2). Зокрема, першій групі відповідає така середня маса:

$$\bar{y}_1 = \frac{12 \cdot 65 + 5 \cdot 75 + 1 \cdot 85 + 0 \cdot 95}{18} = 68,9.$$

Аналогічно розраховують інші середні.

Зростання групових середніх від групи до групи (із зростанням зросту) свідчить про наявність кореляційного зв'язку між зростом чоловіка і його масою.

**5.1.2.** Висновком про наявність кореляційної залежності між двома змінними не закінчується аналіз зв'язку між ними. Треба знати, наскільки тісний цей зв'язок (наскільки значним є вплив однієї змінної на іншу), побудувати емпіричну лінію регресії, визначити форму і параметри рівняння регресії. *Емпірична лінія регресії* подана груповими середніми залежної ознаки  $\bar{y}_j$ , кожна з яких належить до відповідного інтервалу значень групувального фактора  $x_j$ . *Рівняння регресії* є певною функцією  $\hat{y} = f(x)$ , яка описує теоретичну лінію регресії. Наприклад, вважають, що оптимальна маса дорослої людини у кілограмах має бути на 100 одиниць менша за її зріст у сантиметрах. Якщо чоловік 173 см зросту важить 78 кг, то йому за цим співвідношенням до нор-

мальної маси треба схуднути на 5 кг. За цим припущенням співвідношення між масою і зростом людини можна записати у вигляді рівняння:  $\hat{y} = x - 100$ , де  $y$  – маса,  $x$  – зріст. Записане рівняння є рівнянням регресії, а залежність і відповідний їй графік прямої лінії на площині буде лінією регресії. Тут  $y$  і  $\hat{y}$  відображають відповідно емпіричні та теоретичні значення незалежної змінної.

Отже, *теоретична лінія регресії* виражає функціональний зв'язок між розглянутими двома змінними  $x$  та  $y$  в середньому. Її можна зобразити графічно на площині, використовуючи декартову систему координат. На відміну від емпіричної, теоретична лінія регресії неперервна. Подаючи  $y$  як функцію від  $x$ , абстрагуються від множинності причин, штучно спрощуючи механізм формування варіації  $y$ .

Розглянута форма залежності між масою та зростом людини надто спрощена. Насправді із збільшенням зросту маса зростає з деяким коефіцієнтом пропорційності  $b$ , тобто  $\hat{y} = bx - 100$ . У випадку нерівномірного співвідношення варіації взаємозв'язаних ознак рівняння регресії може бути нелінійним. Вибір та обґрунтування виду функціональної залежності змінної  $y$  від  $x$  ґрунтуються на теоретичному аналізі суті зв'язку.

Найпоширеніший спосіб вибору цієї залежності візуальний. Функцію регресії в цьому випадку вибирають з графіка емпіричної лінії регресії. До його недоліків слід віднести те, що різні дослідники на підставі одного й того самого графіка вибирають різні функції. Зауважимо, що на результат вибору значно впливає масштаб графічного зображення цієї лінії. Є інші способи вибору виду рівняння регресії [24, с. 22], які можна використати на практиці у процесі регресійного аналізу взаємозв'язку двох чинників.

Для того, щоб відобразити характерні особливості зв'язку конкретних явищ, використовують різні за функціональним видом рівняння. Якщо зі зміною фактора  $x$  результат  $y$  змінюється більш-менш рівномірно, то такий зв'язок описують лінійною функцією  $\hat{y} = a + bx$ , в іншому випадку використовують нелінійні рівняння регресії. Залежно від того, збільшуються значення  $y$  із збільшенням  $x$  чи зменшуються, напрям зв'язку змінюється чи ні,

прирости значень  $y$  зі зміною  $x$  прискорені чи сповільнені, використовують такі функції регресії:

$$\text{степеневу } \hat{y} = ax^b;$$

$$\text{гіперболу } \hat{y} = a + \frac{b}{x};$$

параболу  $\hat{y} = a + bx + cx^2$  та інші.

**5.1.3.** Щоб виконати економетричний аналіз взаємозв'язку досліджуваних змінних за допомогою рівнянь регресії, треба знати величини наявних параметрів  $a, b, c$  та інших. Науковці пропонують кілька способів визначення цих параметрів. Найпростішим і найбільш уживаним серед них є метод найменших квадратів. Суть його полягає в тому, що невідомі параметри знаходять з умови мінімізації суми квадратів відхилень емпіричних значень  $y$  від теоретичних  $\hat{y}$ . Розглянемо його детальніше для випадку лінійного рівняння регресії.

Нехай проведено  $n$  спостережень, у результаті яких одержано значення  $(x_j, y_j)$ ,  $(j = \overline{1, n})$ . Тоді *просту вибірккову модель лінійної регресії* запишемо так:

$$y = b_0 + b_1x + u, \quad (5.1)$$

де  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  – вектор спостережень за залежною змінною;

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  – вектор спостережень за незалежною змінною;

$b_0, b_1$  – невідомі параметри регресійної моделі;

$u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  – вектор випадкових величин (похибок).

Запишемо векторне рівняння (5.1) у вигляді системи

$$y_j = b_0 + b_1x_j + u_j, \quad (j = \overline{1, n}), \quad (5.2)$$

де  $x_j, y_j$  –  $j$ -ті фактичні (практичні) значення відповідно змінних  $x$  та  $y$ ;

$u_j$  – похибка  $j$ -го значення  $y_j$  (випадкова величина).

Похибка  $u_j$  визначає відстань між точками  $(x_j, y_j)$ ,  $(x_j, \hat{y}_j)$ ,  $(j = \overline{1, n})$ , де  $\hat{y}_j$  називають *теоретичним* значенням змінної  $y$  і обчислюють за формулою

$$\hat{y}_j = b_0 + b_1x_j. \quad (5.3)$$



Отже,  $u_j$  є відстань (відхилення) за вертикаллю від точки  $(x_j, y_j)$  до прямої

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x. \quad (5.4)$$

Для знаходження невідомих параметрів  $b_0, b_1$  треба скористатися певним критерієм, який би дав змогу вибрати з множини можливих прямих (5.4) «найкращу» з погляду певного критерію. Використовувати критерій мінімізації суми відхилень  $u_j$  недоцільно, бо  $\sum_{j=1}^n u_j$  може дорівнювати нулю, якщо сума від'ємних і додатних відхилень однакова. Тому мінімізують суму квадратів відхилень  $u_j$ . Величина цієї суми залежатиме безпосередньо від розсіювання точок навколо лінії регресії.

Отже, метод найменших квадратів використовує критерій мінімізації суми квадратів відхилень  $u_j$ :

$$\sum_{j=1}^n u_j^2 \rightarrow \min. \quad (5.5)$$

Скориставшись (5.2), критерій (5.5) матиме такий вигляд:

$$\sum_{j=1}^n u_j^2 = \sum_{j=1}^n (y_j - b_0 - b_1 x_j)^2 = f(b_0, b_1) \rightarrow \min. \quad (5.6)$$

Необхідною умовою екстремуму функції, згідно з формулою (3.4), є рівність нулю її градієнта, тобто частинних похідних за всіма змінними (параметрами  $b_0, b_1$ ). У нашому випадку, беручи до уваги (5.6), цю умову запишемо так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(b_0, b_1)}{\partial b_0} &= -2 \sum_{j=1}^n (y_j - b_0 - b_1 x_j) = 0; \\ \frac{\partial f(b_0, b_1)}{\partial b_1} &= -2 \sum_{j=1}^n x_j (y_j - b_0 - b_1 x_j) = 0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Після деяких перетворень формул (5.7) для знаходження невідомих параметрів  $b_0, b_1$  одержимо таку систему нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} nb_0 + b_1 \sum_{j=1}^n x_j = \sum_{j=1}^n y_j; \\ b_0 \sum_{j=1}^n x_j + b_1 \sum_{j=1}^n x_j^2 = \sum_{j=1}^n x_j y_j. \end{cases} \quad (5.8)$$

Розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь (5.8) після підстановки в неї значень  $\sum_{j=1}^n x_j, \sum_{j=1}^n y_j, \sum_{j=1}^n x_j^2, \sum_{j=1}^n x_j y_j$ , обчислених на підставі сукупності спостережень, буде таким:

$$b_1 = \frac{\sum_{j=1}^n x_j \sum_{j=1}^n y_j - n \sum_{j=1}^n x_j y_j}{\left(\sum_{j=1}^n x_j\right)^2 - n \sum_{j=1}^n x_j^2}; \quad b_0 = \frac{\sum_{j=1}^n x_j \sum_{j=1}^n x_j y_j - \sum_{j=1}^n x_j^2 \sum_{j=1}^n y_j}{\left(\sum_{j=1}^n x_j\right)^2 - n \sum_{j=1}^n x_j^2}. \quad (5.9)$$

З метою спрощення виразу для  $b_1$  поділимо чисельник і знаменник першої формули (5.9) на  $(-n^2)$ . У результаті матимемо таке:

$$b_1 = \frac{\frac{1}{n} \left( \sum_{j=1}^n x_j y_j \right) - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j^2 - \bar{x}^2}, \quad (5.10)$$

де  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j$ ;  $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_j$ .

Виконавши нескладні перетворення, вираз (5.10) можна записати ще так:

$$b_1 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y})}{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\text{var}(x)}, \quad (5.11)$$

де  $\text{cov}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y})$ ;  $\text{var}(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2$ .

Тепер поділимо перше рівняння системи (5.8) на  $n$  і перенесемо другий доданок його лівої частини у праву частину, одержимо простіший порівняно з (5.9) вираз для розрахунку  $b_0$ :

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}. \quad (5.12)$$

Отже, застосовуючи метод найменших квадратів, ми знайшли формули (5.9)–(5.12) для визначення невідомих параметрів  $b_0$  та  $b_1$  і можемо записати в явному вигляді регресію  $y$  від  $x$  згідно з формулою (5.1) чи (5.4).

*Приклад.* Аналізують ефективність роботи відділу маркетингу фірми, що виготовляє мобільні телефони. Для цього використовують наявну інформацію (див. табл. 5.2) про кількість проданих телефонів ( $y_j$ , штук) і витрати ( $x_j$ , тис. грн) фірми на просування товару на ринку у 5 ( $n=5$ ) містах ( $j=1,2,3,4,5$ ) з майже однаковими умовами (кількість потенційних клієнтів, ставлення до товарного знаку і т. п.).

Для того, щоб визначити залежність кількості проданих телефонів від витрат фірми на рекламу, припустимо, що цю залежність описує лінійна функція (5.4). Розрахуємо її невідомі параметри за формулами (5.11), (5.12). Попередні розрахунки подамо у табл. 5.2.

Таблиця 5.2

$j$	$y_j$	$x_j$	$x_j^2$	$x_j y_j$
1	900	12	144	10800
2	650	7	49	4550
3	1050	17	289	17850
4	1000	15	225	15000
5	800	9	81	7200
$\Sigma$	4400	60	788	55400
$\Sigma/n$	880	12	157,6	11080

Під час знаходження невідомих параметрів  $b_0$  та  $b_1$  було виконано послідовно такі розрахунки:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j = \frac{60}{5} = 12; \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_j = \frac{4400}{5} = 880;$$

$$\text{var}(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j^2 - \bar{x}^2 = \frac{788}{5} - 144 = 13,6;$$

$$\text{cov}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j y_j - \bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{55400}{5} - 10560 = 520;$$

$$b_1 = \frac{\text{cov}(x, y)}{\text{var}(x)} = \frac{520}{13,6} = 38,24;$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x} = 880 - 38,24 \cdot 12 = 421,18.$$

На підставі знайдених параметрів  $b_0$  та  $b_1$  отриману пряму запишемо у вигляді  $\hat{y} = 38,24x + 421,18$ .

Зауважимо, що такі ж значення невідомих параметрів отримаємо під час розрахунків їх за формулою (5.9) чи (5.10), (5.12).

**5.1.4.** Разом з відомостями про характер зв'язку між аналізованими змінними і знайденим рівнянням регресії важливе значення для економічного аналізу має оцінка тісноти (щільності) зв'язку, тобто узгодженості варіації взаємозв'язаних ознак. Значний вплив ознаки  $x$  на ознаку  $y$  виявляється у закономірній зміні значень  $y$  зі зміною значень  $x$ . За відсутності зв'язку варіація  $y$  не залежить від варіації  $x$ .

Найпростішим і найбільш уживаним критерієм, за допомогою якого одержують кількісну оцінку зв'язку між двома показниками  $x$  та  $y$ , є *коефіцієнт кореляції*. Його обчислюють за такою формулою:

$$r_{xy} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sqrt{\text{var}(x)\text{var}(y)}} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2 \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2}}, \quad (5.13)$$

де  $\text{cov}(x, y)$  – коефіцієнт коваріації між  $x$  та  $y$ ;

$\text{var}(x)$ ,  $\text{var}(y)$  – дисперсія відповідно змінної  $x$  та  $y$ ;

$\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  – середні відповідно змінної  $x$  та  $y$ .

Сфера використання цього коефіцієнта обмежується лінійною залежністю.

Як видно з формули (5.13), чим більша алгебраїчна сума добутоків відхилень  $\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y})$ , тим тісніший зв'язок між змінними  $x$  та  $y$ . Гранична сума добутоків цих відхилень дорівнює

$\sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2 \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2}$ , що характерно для функціонального зв'язку. Виходячи з формули (5.13), можна зробити висновок, що  $|r_{yx}| \leq 1$ . Абсолютна величина коефіцієнта кореляції тим ближча до одиниці, чим тісніший кореляційний зв'язок. Від'ємні значення цього коефіцієнта свідчать про

обернений зв'язок, а додатні – про прямий. Якщо  $|r_{yx}| = 1$ , то між

$x$  та  $y$  є функціональний зв'язок, а коли величина коефіцієнта кореляції близька до нуля, то зв'язку між цими змінними немає.

Зауважимо, що відмінність від нуля чи навіть близькість до одиниці величини коефіцієнта кореляції не є підтвердженням причинно-наслідкового зв'язку між досліджуваними явищами. Вона характеризує лише міру кореляції між змінними.

На практиці часом використовують інші модифікації наведеної формули коефіцієнта кореляції. Зокрема,

$$r_{yx} = \frac{\frac{1}{n} \left( \sum_{j=1}^n x_j y_j \right) - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{\left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j^2 - \bar{x}^2 \right) \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_j^2 - \bar{y}^2 \right)}}. \quad (5.14)$$

Розрахуємо коефіцієнт кореляції між змінними  $y$  (кількість проданих телефонів) і  $x$  (витрати фірми на рекламу). Скористаємось початковими даними і результатами розрахунків попереднього прикладу (див. табл. 5.2).

Оскільки

$$\text{var}(x) = 13,6; \quad \text{cov}(x, y) = 520;$$

$$\text{var}(y) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_j^2 - \bar{y}^2 = \frac{3975000}{5} - 774400 = 20600,$$

то згідно з формулою (5.13) одержимо

$$r_{yx} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sqrt{\text{var}(x) \text{var}(y)}} = \frac{520}{\sqrt{13,6 \cdot 20600}} = \frac{520}{529,3} = 0,98.$$

Знайдений коефіцієнт кореляції свідчить про дуже вагомий вплив реклами на обсяги реалізованої продукції.

У випадку нелінійної залежності вимірювання тісноти зв'язку ґрунтується на співвідношенні варіацій теоретичних та емпіричних (фактичних) значень залежної ознаки  $y$ .

Якщо до різниці  $y_j - \bar{y}$  додати і відняти одну і ту ж величину  $\hat{y}_j$ , значення цієї різниці не зміниться. Можна записати, що

$$(y_j - \bar{y}) = (\hat{y}_j - \bar{y})(y_j - \hat{y}_j). \quad (5.15)$$

Першу різницю у формулі (5.15), тобто  $(y_j - \bar{y})$  у статистиці, називають *загальним відхиленням*. Різницю  $(\hat{y}_j - \bar{y})$  називають *відхиленням, яке можна пояснити*, а різницю  $(y_j - \hat{y}_j)$  – *відхиленням, яке не можна пояснити (непояснене відхилення)*, виходячи з регресійної прямої.

Можна довести [47, с. 55], що аналогічну рівність зберігають відповідні суми квадратів відхилень

$$\sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2 = \sum_{j=1}^n (y_j - \hat{y}_j)^2 + \sum_{j=1}^n (\hat{y}_j - \bar{y}_j)^2, \quad (5.16)$$

де  $\sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2$  – загальна сума квадратів, яку переважно позначають *SST* ;

$\sum_{j=1}^n (y_j - \hat{y}_j)^2$  – сума квадратів помилок, яку позначають *SSE* ;

$\sum_{j=1}^n (\hat{y}_j - \bar{y}_j)^2$  – сума квадратів, що пояснює регресію, яку позначають *SSR* .

Отже, рівність (5.16) у скороченому вигляді можна записати так:  $SST = SSE + SSR$  .

Поділимо обидві частини (5.16) на обсяг вибірки  $n$ , одержимо таку рівність:

$$\sigma_y^2 = \sigma_{\hat{y}}^2 + \sigma_u^2, \quad (5.17)$$

де  $\sigma_y^2 = \sigma_{\text{заг}}^2 = \frac{\sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2}{n}$  – загальна дисперсія ознаки  $y$  ;

$\sigma_{\hat{y}}^2 = \sigma_{\text{регр}}^2 = \frac{\sum_{j=1}^n (\hat{y}_j - \bar{y})^2}{n}$  – дисперсія, що пояснює регресію (пояснена дисперсія);

$\sigma_u^2 = \sigma_{\text{нох}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_j - \hat{y}_j)^2}{n}$  – дисперсія похибок (дисперсія випадкових відхилень, залишкова чи непояснена дисперсія).

На підставі порівняння поясненої та непоясненої дисперсії можна зробити висновок, що чим більша пояснена і менша непояснена дисперсія, тим зв'язок між змінними  $y$  та  $x$  тісніший, і навпаки, чим менша пояснена і більша непояснена дисперсія, тим слабший цей зв'язок. На практиці часто розраховують непояснену дисперсію, а пояснену дисперсію знаходять як різницю загальної і непоясненої дисперсії на підставі рівності (5.17).

В економетрії разом з непоясненою дисперсією використовують корінь квадратний з цієї величини  $\sigma_u$ . Нову величину

$$\sigma_u = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (y_j - \hat{y}_j)^2}{n}} \quad (5.18)$$

називають *стандартною похибкою оцінки* за рівнянням регресії чи *стандартною похибкою оцінки*.

Поділимо тепер обидві частини рівності (5.17) на  $\sigma_y^2$ , одержимо

$$1 = \frac{\sigma_{\hat{y}}^2}{\sigma_y^2} + \frac{\sigma_u^2}{\sigma_y^2}. \quad (5.19)$$

Другий доданок у правій частині рівності (5.19) є складовою дисперсії, яку не можна пояснити через регресійний зв'язок. Перший доданок є пропорцією дисперсії помилок у загальній дисперсії, тобто це частина дисперсії, яку можна пояснити через регресійну лінію. Її використовують для вимірювання тісноти зв'язку.

*Індексом (відношенням) детермінації* називають частину дисперсії, що пояснює регресію, її позначають  $i^2$  ( $d$ ). Тобто

$$i^2 = \frac{\sigma_{\hat{y}}^2}{\sigma_y^2}. \quad (5.20)$$

З формули (5.19) випливає, що індекс детермінації завжди додатний і перебуває в межах від нуля до одиниці ( $0 \leq i^2 \leq 1$ ).

Квадратний корінь з індексу детермінації називають *індексом кореляції* ( $i$ ). Обидва ці індекси можна використовувати для вивчення тісноти зв'язку між ознаками при довільній її формі – як прямолінійній, так і криволінійній.

У випадку лінійної моделі зв'язку індекс детермінації називають *коефіцієнтом детермінації* і позначають  $R^2$ . Можна довести, що коефіцієнт детермінації дорівнює квадрату коефіцієнта кореляції [47, с. 58].

Використовуючи формулу (5.20), обчислимо індекс детермінації для розглянутого раніше прикладу (див. табл. 5.2). Розрахунок поясненої дисперсії за формулою

$$\sigma_{\hat{y}}^2 = \frac{\sum_{j=1}^n (\hat{y}_j - \bar{y})^2}{n}$$

потребує визначення всіх величин

$\hat{y}_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ), а це досить трудомісткий процес. Крім цього, неминучі у цій процедурі заокруглення приведуть до наближеного значення дисперсії. З огляду на це зручніше для знаходження поясненої дисперсії використати іншу формулу, в якій не треба виконувати розрахунок  $\hat{y}_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ).

Для лінійної регресії ця формула така [54, с. 235]:

$$\sigma_{\hat{y}=b_0+b_1x}^2 = b_0 \frac{\sum_{j=1}^n y_j}{n} + b_1 \frac{\sum_{j=1}^n x_j y_j}{n} - \left( \frac{\sum_{j=1}^n y_j}{n} \right)^2. \quad (5.21)$$

Оскільки  $\sigma_y^2 = \text{var}(y) = 20600$ , а за формулою (5.21)

$$\sigma_{\hat{y}}^2 = 421,18 \cdot 880 + 38,24 \cdot 11080 - 880^2 = 19937,6,$$

$$\text{то } i^2 = \frac{19937,6}{20600} = 0,9678.$$

Звідси  $\sqrt{i^2} = 0,98 = r_{yx}$ , про що було вище зазначено.

Аналогічно розраховують індекс детермінації для будь-якої регресійної залежності.

Отже, індекс детермінації та індекс кореляції є більш універсальними показниками порівняно з коефіцієнтами детермінації і кореляції, оскільки ці індекси можна розраховувати для будь-яких моделей, а зазначені коефіцієнти – лише для лінійних моделей зв'язку.



**5.1.5.** Обмеженість за обсягом статистичних сукупностей, для яких виконується розрахунок показників регресії і кореляції, може стати причиною того, що знайдені параметри рівняння регресії, індекси чи коефіцієнти детермінації і кореляції будуть спотворені впливом випадкових чинників. Пряма регресії, яка відображає реальний стан розглянутого явища, може не збігатися з побудованою прямою на підставі рівняння (5.4). Тому треба перевірити, наскільки зазначені показники характерні для того комплексу умов, у яких перебуває досліджувана сукупність, чи не є вони результатом збігу випадкових обставин, знайти інтервали довіри для параметрів регресійної моделі, тобто інтервали, у які із заданою ймовірністю потрапляють їхні значення.

Припустимо, що випадкова величина

$$u_j = y_j - \hat{y}_j \quad (5.22)$$

має нормальний розподіл. В економічних дослідженнях відхилення  $y_j - \hat{y}_j$  рідко можна пояснити дією випадкових величин, особливо тоді, коли рівняння регресії має лише одну незалежну змінну. На залежну змінну здебільшого впливає багато випадкових з погляду якісного аналізу чинників. Однак, як впливає з теореми Ляпунова, для забезпечення близького до нормального розподілу величини  $y_j - \hat{y}_j$  достатньо, щоб вплив кожного окремого чинника був незначним порівняно із сумою впливу всіх чинників.

Для того, щоб побудувати інтервал довіри оцінки за рівнянням регресії, вводять поняття *граничної похибки оцінки*

$$\Delta_u = t_p \cdot \sigma_u, \quad (5.23)$$

де  $\sigma_u$  – стандартна похибка оцінки;

$t_p$  – імовірнісний коефіцієнт, який за заданих значень ймовірності  $p = 1 - \alpha$  ( $\alpha$  – рівень істотності) знаходять за таблицями нормального закону розподілу, якщо обсяг вибірки  $n$  досить великий, і за таблицями розподілу Стюдента, коли сукупність спостережень мала.

Інтервал довіри оцінки за рівнянням одержуємо шляхом віднімання і додавання граничної похибки і теоретичних значень залежної змінної [25, с. 26]:

$$\hat{y}_j - \Delta_u \leq y_j \leq \hat{y}_j + \Delta_u. \quad (5.24)$$

Підставимо в (5.24) замість  $\hat{y}_j$  її значення із (5.3), одержимо

$$b_0 + b_1 x_j - \Delta_u \leq y_j \leq b_0 + b_1 x_j + \Delta_u. \quad (5.25)$$

На підставі (5.25) обидві межі довіри оцінки за рівнянням можна подати у вигляді функцій

$$\begin{aligned} y &= (b_0 - \Delta_u) + b_1 x; \\ y &= (b_0 + \Delta_u) + b_1 x, \end{aligned} \quad (5.26)$$

які на графіку зображують прямі лінії, паралельні до лінії регресії і віддалені від неї на відстань  $\Delta_u$  за вертикаллю.

Для великої вибірки ймовірнісний коефіцієнт, якщо ймовірність  $p = 0,683$ , дорівнює одиниці ( $t_p = 1$ ), а гранична похибка збігається зі стандартною:  $\Delta_u = \sigma_u$ .

У цьому випадку на графіку між прямими, що відповідають рівнянням (5.26), є інтервал, який теоретично охоплює 68% спостережень, половина з яких лежить вище, а інша половина – нижче від лінії регресії.

Коли гранична похибка вдвічі більша за стандартну похибку ( $\Delta_u = 2\sigma_u$ ), поза цими прямими повинно бути 5% спостережень, а за межами трьох стандартних відхилень від лінії регресії ( $\Delta_u = 3\sigma_u$ ) практично не повинно бути жодного спостереження.

Значущість показників регресії і кореляції перевіряють за допомогою критеріїв Стюдента і Фішера. Якщо розраховане (фактичне чи емпіричне) значення критерію більше від критичного, то досліджуваний параметр значущий чи зв'язок між ознаками не є випадковий.

У випадку лінійного зв'язку для оцінки значущості параметрів рівняння регресії і коефіцієнта кореляції використовують критерій Стюдента. Для  $b_0$  його обчислюють за формулою

$$t_{b_0} = b_0 \cdot \sqrt{\frac{n-2}{\sigma_u^2}}, \quad (5.27)$$

а для  $b_1$  – за формулою

$$t_{b_1} = b_1 \cdot \sqrt{\frac{(n-2) \cdot \sigma_x^2}{\sigma_u^2}}, \quad (5.28)$$

де  $\sigma_x^2$  – дисперсія змінної  $x$ ;

$\sigma_u^2$  – не пояснена дисперсія.

Щоб перевірити значущість коефіцієнта кореляції  $r$  з використанням критерію Стюдента, емпіричне значення статистики обчислюють за формулою

$$t_r = r \cdot \sqrt{\frac{(n-2) \cdot \sigma_y^2}{\sigma_u^2}} = r \cdot \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}. \quad (5.29)$$

Критичне значення  $t_\alpha$  для рівня значущості (істотності)  $\alpha$  знаходять за таблицею розподілу Стюдента для числа ступенів вільності  $\nu = n - 2$ . Якщо емпіричне значення критерію  $t_{em}$  більше від критичного  $t_\alpha$ , то параметр вважають значущим (з надійністю (ймовірністю)  $p = 1 - \alpha$  відхиляється нульова гіпотеза про те, що параметр насправді дорівнює нулю і лише внаслідок випадкових обставин він виявився рівним величині, яку перевіряють).

Для розглянутого раніше прикладу (див. табл. 5.2) емпіричні значення критерію Стюдента, обчислені за формулами (5.21)–(5.23), будуть такими:

$$t_{b_0} = 421,18 \cdot \sqrt{\frac{5-2}{662,4}} = 28,34; \quad t_{b_1} = 38,24 \cdot \sqrt{\frac{(5-2) \cdot 13,6}{662,4}} = 9,49;$$
$$t_r = 0,98 \cdot \sqrt{\frac{(5-2) \cdot 20600}{662,4}} = 9,47.$$

За таблицями розподілу Стюдента (див. додаток Д) для  $\nu = 5 - 2 = 3$  і  $\alpha = 0,05$  знаходимо критичне значення  $t_{кр} = 3,18$ . Усі три емпіричні значення статистики більші від критичного, що свідчить про значущість обох параметрів рівняння регресії та коефіцієнта кореляції, тобто вплив реклами на обсяги реалізованої продукції досить значний. Причому ризик помилилися становить не більше ніж у 5% випадків.

Для кожного параметра  $b_l$  ( $l = 0, 1$ ) рівняння регресії можна побудувати межі довіри:  $(b_l - t_\alpha \mu_l; b_l + t_\alpha \mu_l)$ , де  $t_\alpha$  – коефіцієнт довіри за розподілом Стюдента, якщо  $\nu = n - 2$  ступені вільності і рівні значущості  $\alpha$ , а  $\mu_l$  – середня похибка  $b_l$  ( $l = 0, 1$ ). Ці похибки можна обчислити за такими формулами:

$$\mu_0 = \frac{\sigma_u}{\sqrt{n-2}}, \quad \mu_1 = \frac{\sigma_u}{\sqrt{(n-2) \cdot \sigma_x^2}}. \quad (5.30)$$

У випадку криволінійного зв'язку значущість індексу детермінації перевіряють за допомогою критерію Фішера. Значення критерію  $F$  можна обчислити за однією з таких формул:

$$F = \frac{\sigma_y^2}{\sigma_u^2} \cdot \frac{n-m}{m-1} = \frac{i^2}{1-i^2} \cdot \frac{n-m}{m-1}, \quad (5.31)$$

де  $m$  – кількість параметрів у рівнянні регресії. Критичне значення критерію знаходять за таблицями розподілу Фішера для прийнятого рівня значущості  $\alpha$  і чисел ступенів вільності  $\nu_1 = m-1, \nu_2 = n-m$ .

## 5.2. Багатофакторна регресія

**5.2.1.** У процесі економічного аналізу діяльності господарюючих суб'єктів ендогенна змінна, зазвичай, залежить від впливу не одного, а багатьох чинників. Буває, що кожен із цих незалежних чинників окремо може і не мати вирішального впливу, але вплив кількох чинників є достатньо сильним, щоб за їхніми змінами можна було стверджувати про величину залежної змінної. Зокрема, для розглянутого в попередньому параграфі прикладу на кількість проданих телефонів впливають не тільки обсяги витрат фірми на рекламу, а й середня заробітна плата населення у регіонах продажу, імідж марки продукції серед населення, інші чинники.

Досліджуючи залежності величини балансового прибутку підприємств регіону від незалежних чинників, було б помилковим припускати, що на цю величину впливають тільки обсяги основних фондів. Ця ендогенна змінна залежить і від кількості трудових ресурсів, вартості оборотних фондів, впровадження інновацій тощо. Під час послідовного вивчення впливу кожного з цих чинників на залежну змінну в нас будуть певні похибки. Зокрема, регіони з вищою забезпеченістю основними фондами мають більші витрати трудових ресурсів і оборотних фондів. Зважаючи на це, пояснити різницю в балансових прибутках лише впливом основних фондів можна тільки умовно. Ця різниця зумовлена не тільки неоднаковістю основних фондів, але й деякими іншими чинниками, кореляційно пов'язаними з основними фондами.

У процесі дослідження впливу іншого чинника на балансовий прибуток одержимо також умовні показники. Якщо ж на

підставі цих результатів розглядати спільний вплив двох чинників, то матимемо подвійний рахунок.

Вищезазначену особливість продемонструємо на прикладі, який розглянуто в [25, с. 55]. У цьому прикладі на підставі даних областей України досліджено вплив різних чинників на балансовий прибуток. У результаті виявлено, що введення в дію основних фондів пояснює близько 90% дисперсії балансового прибутку (коефіцієнт детермінації), трудові ресурси – 85%, впровадження нових технологічних процесів – 53% від дисперсії балансового прибутку. Тож сума пояснених дисперсій розглянутих чинників дорівнює  $90\% + 85\% + 53\% = 228\%$ , що більше за 100%. Зважаючи на це, результати послідовного аналізу не можна об'єднувати, оскільки це призводить до повторного рахунку.

Для дослідження сумісного впливу сукупності чинників на величину аналізованого показника використовують багатофакторний кореляційно-регресійний аналіз. З допомогою цього аналізу можна знайти явний вигляд залежності досліджуваного показника від тих чинників, що впливають на його зміну, а також кількісно оцінити їхній вплив.

**5.2.2.** Зв'язок між трьома і більше ознаками досліджують за допомогою *множинного (багатофакторного) кореляційно-регресійного аналізу*. Цей аналіз охоплює визначення тісноти зв'язку між ознаками, побудову моделей множинної регресії, дослідження значущості складових моделі та значущості моделі в цілому тощо. Для побудови моделі (рівняння) множинної регресії потрібно визначити аналітичний вигляд зв'язку між результативною змінною ( $y$ ) і факторними змінними (ознаками чи факторами)  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ , тобто знайти функцію

$$\hat{y} = f(x_1, x_2, \dots, x_k). \quad (5.32)$$

Процес побудови цієї моделі має декілька етапів:

- відбір факторних змінних;
- вибір форми зв'язку (рівняння регресії);
- забезпечення достовірності первинних даних і достатнього обсягу сукупності для одержання незміщених оцінок.

Хоча часто відбір факторних змінних і вибір форми зв'язку виконують у комплексі, повторюючи послідовно їх декілька разів, поки не будуть остаточно відібрані необхідні чинники і буде побудована функція (модель) залежності від них.

Важливою проблемою під час побудови рівняння множинної регресії є відбір і введення в модель найбільш важливих та суттєвих чинників. З одного боку, чим більше факторних змінних введено у рівняння, тим воно точніше описує явище. Однак, з іншого, із збільшенням цих змінних ускладнюється реалізація такої моделі, збільшуються затрати машинного часу на її розв'язання.

Зменшення розмірності моделі завдяки вилученню друго-рядних, економічно і статистично несуттєвих чинників сприяє простоті й якості її реалізації. Хоча зменшення кількості факторних змінних може привести до того, що побудована модель буде недостатньо адекватною досліджуваним явищам і процесам.

Складність процедури відбору чинників полягає ще й у тому, що дуже часто факторні змінні перебувають у залежності одна від одної. Якщо в модель вводять два чи більше тісно взаємозв'язаних чинники, то поряд з одним рівнянням регресії можуть з'явитися інші функціональні залежності, які не гірші від першої. Подібне явище, яке називають *мультиколінеарністю*, спотворює величину коефіцієнтів регресії, утрудняє їхню економічну інтерпретацію.

Чинники відбирають на підставі якісного, теоретичного аналізу з одночасним використанням статистико-математичних критеріїв. На практиці часто використовують відбір, що складається з трьох стадій. На першій стадії за допомогою змістовно-якісного аналізу та інтуїтивно-логічних передумов вибирають певні чинники. Особливих обмежень немає.

На другій стадії виконують порівняльну оцінку і вилучають деякі чинники. Це роблять на підставі поєднання якісного аналізу й індексів кореляції та оцінюючи їх значимість. Для цього складають матрицю попарних коефіцієнтів кореляції  $(r_{ij}) = (r_{x_i x_j})$ ,  $i, j = \overline{0, k}$ , які вимірюють тісноту лінійного зв'язку кожного чинника з ендогенною ознакою  $y = x_0$  і з кожною із решта екзогенних ознак  $x_j$  ( $j = \overline{1, k}, j \neq i$ ).

Кореляційна таблиця дає змогу виявити чинники, які мають тісний лінійний кореляційний зв'язок з результативною змінною та з іншими незалежними змінними. У результаті в моделі залишають ті чинники, які тісно зв'язані з незалежною змінною, а також ті, які

не є мультиколінеарними до залишених у моделі інших чинників. Одним з індикаторів визначення наявності мультиколінеарності між чинниками  $x_i$  та  $x_j$  ( $i, j = \overline{1, k}$ ) є перевищення парним коефіцієнтом кореляції  $r_{ij}$  величини 0,8.

Мультиколінеарність усувають унаслідок вилучення із кореляційної моделі одного чи декількох лінійно-зв'язаних чинників або перетворення початкових факторних ознак у нові, згруповані чинники. Питання про те, які з чинників треба вилучити, вирішують на підставі якісного і логічного аналізу явища, яке вивчають.

На третій, завершальній, стадії відбору чинників будують різні варіанти багатofакторних моделей (рівнянь множинної регресії) й оцінюють значущість їхніх параметрів за критерієм Стюдента. Якщо в моделі є незначущі параметри, то з неї вилучають той чинник, коефіцієнт при якому незначущий і має найменший коефіцієнт довіри  $t$ . Після цього модель будують заново і знову оцінюють значущість у всіх залишених коефіцієнтів регресії. Знову перевіряють коефіцієнти моделі на значущість і т. д. Процес вилучення чинників продовжують доти, поки не буде отримано рівняння регресії, всі коефіцієнти якого значущі.

Зауважимо, що вилучення з моделі чинників, коефіцієнти при яких незначущі, виконують лише у випадках, коли головний інтерес становлять самі ці коефіцієнти як показники ефекту впливу чинників. Якщо ж в задачі дослідження передбачається головне використання моделі в цілому для одержання розрахункових значень  $\hat{y}$ , то недостатній рівень значущості коефіцієнта регресії не є ще вирішальним аргументом щодо вилучення із моделі відповідного чинника, особливо якщо він важливий економічно і його не можна ігнорувати у практичному впливі на ендогенний показник. З огляду на це, здебільшого, з моделі вилучають лише ті чинники, без яких суттєво не збільшується скорегована залишкова дисперсія, яку визначають як суму квадратів відхилень, поділену не на кількість спостережень  $n$ , а на  $(n - m)$ , де  $m$  – кількість параметрів рівняння регресії.

Крім розглянутого, для відбору факторних ознак використовують спосіб *покрокової регресії* (покроковий регресійний аналіз). Його суть полягає у послідовному введенні нових чинників у рів-

няння регресії з наступною перевіркою їх значущості на підставі  $t$ -критерію Стюдента. Якщо внаслідок введення в модель відповідного чинника величина множинного коефіцієнта кореляції збільшилася, а коефіцієнти регресії не змінилися чи змінилися незначно, то цей чинник значущий за критерієм Стюдента і його необхідно ввести в рівняння регресії. Одночасно застосовують і зворотний метод, тобто вилучають чинники, які стали незначущими на підставі  $t$ -критерію Стюдента.

Другий етап побудови регресійної моделі – вибір форми зв'язку. Це завдання є досить складним, оскільки вплив різних чинників взаємно переплітається, і не має можливості графічного контролю, як у випадку парної регресії.

Вибір типу рівняння регресії ускладнюється і тим, що, використовуючи математичний апарат, для будь-якої форми залежності можна підібрати цілий ряд рівнянь, які з визначеним наближенням будуть описувати ці зв'язки. У деяких випадках можна скористатися результатами попередніх аналогічних досліджень чи результатами подібних робіт у суміжних галузях знань.

Для визначення виду вихідного рівняння регресії часто застосовують *метод перебору* різних рівнянь, хоча він досить трудомісткий і пов'язаний з великими обсягами обчислювальних робіт.

Суть цього методу полягає у тому, що всі рівняння регресії, відібрані для опису зв'язків заданого явища чи процесу, статистично перевіряють, переважно, з використанням  $t$ -критерію Стюдента і  $F$ -критерію Фішера. Зважаючи на великий обсяг обчислювальних робіт, цю перевірку виконують з використанням комп'ютерної техніки.

Практика побудови багатофакторних моделей взаємозв'язку свідчить, що всі реально існуючі залежності між соціально-економічними явищами можна описати, використовуючи *п'ять типів моделей* [85, с. 55]:

1) лінійна:

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_kx_k; \quad (5.33)$$

2) степенева:

$$\hat{y} = b_0 \cdot x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2} \cdot \dots \cdot x_k^{b_k}; \quad (5.34)$$

3) показникова:

$$\hat{y} = e^{b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_kx_k}; \quad (5.35)$$



4) параболічна:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + \dots + b_k x_k^2; \quad (5.36)$$

5) гіперболічна:

$$\hat{y} = b_0 + \frac{b_1}{x_1} + \frac{b_2}{x_2} + \dots + \frac{b_k}{x_k}. \quad (5.37)$$

Однак можливо використовувати в моделях множинної регресії і більш складні математичні функції. Практично це роблять рідко, оскільки складні функції не тільки важко економічно тлумачити, а й обчислення їхніх параметрів, де наявні великі обсяги первинних даних, стає досить важким навіть завдяки застосуванню комп'ютерної техніки.

Як і у випадку парної регресії, тут найчастіше використовують лінійні моделі (5.33), оскільки вони найпростіші. Дуже часто для реально існуючих залежностей між соціально-економічними явищами із зростанням незалежної змінної пропорційно чи майже пропорційно їй збільшується залежна від неї змінна. Нелінійні форми залежностей в теоретичних викладках часто зводять до лінійних шляхом лінеаризації. Наприклад, замість степеневі функції (5.34) в теоретичних перетвореннях використовують лінійно-логіфічну функцію

$$\hat{y}' = b'_0 + b'_1 x'_1 + b'_2 x'_2 + \dots + b'_k x'_k, \quad (5.38)$$

де  $\hat{y}' = \lg \hat{y}$ ;  $b'_0 = \lg b_0$ ;  $x'_i = \lg x_i, (i = \overline{1, k})$ .

Рівняння (5.38) отримано з рівняння (5.34) шляхом його логарифмування.

Треба звернути увагу на достовірність і надійність первинних даних та достатній обсяг статистичної сукупності. Дослідник повинен намагатися отримати якомога точніші початкові дані і якомога більшу кількість спостережень, оскільки це є однією з передумов побудови адекватних регресійних моделей.

**5.2.3.** Як і у випадку парної регресії, найпростішим методом знаходження невідомих параметрів  $b_i, (i = \overline{0, k})$  рівняння множинної регресії є метод найменших квадратів. Суть його полягає у мінімізації суми квадратів відхилень фактичних даних  $y$  від теоретичних  $\hat{y}$ . Розглянемо його детальніше для випадку лінійного рівняння регресії (5.33).

Нехай проведено  $n$  спостережень, у результаті яких одержано значення  $(y_j, x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{kj}), (j = \overline{1, n})$ .

На підставі цих спостережень лінійну вибіркову багатофакторну регресійну модель у вигляді системи рівнянь можна записати таким чином:

$$y_j = b_0 + b_1 x_{1j} + b_2 x_{2j} + \dots + b_k x_{kj} + u_j, \quad (j = \overline{1, n}), \quad (5.39)$$

у векторному вигляді –

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_k x_k + u, \quad (5.40)$$

і у матричному вигляді –

$$y = Xb + u, \quad (5.41)$$

де  $y$  – залежна змінна, яку в рівнянні (5.40) можна, а рівнянні (5.41) треба розглядати як вектор  $y = (y_1, y_1, \dots, y_n)^T$ ;

$x_1, x_2, \dots, x_k$  – незалежні змінні чи чинники, які в рівнянні (5.40) можна розглядати як вектори

$$x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})^T, \quad (i = \overline{1, k});$$

$b = (b_0, b_1, \dots, b_k)^T$  – транспонований вектор невідомих параметрів;

$u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$  – транспонований вектор випадкових величин (помилки чи залишків);

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \dots & x_{k1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \dots & x_{k2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{kn} \end{pmatrix} \text{ – матриця спостережень.}$$

Теоретичні значення  $\hat{y}_j (j = \overline{1, n})$  обчислюють за формулою

$$\hat{y}_j = b_0 + b_1 x_{1j} + b_2 x_{2j} + \dots + b_k x_{kj}, \quad (j = \overline{1, n}). \quad (5.42)$$

Вектор невідомих параметрів  $b$  знаходимо методом найменших квадратів, мінімізуючи суму квадратів залишків:

$$f(b) = \sum_{j=1}^n u_j^2 = \sum_{j=1}^n (y_j - \hat{y}_j)^2 \rightarrow \min.$$

Звідси і з (5.42) одержимо

$$f(b) = \sum_{j=1}^n (y_j - b_0 - b_1 x_{1j} - b_2 x_{2j} - \dots - b_k x_{kj})^2 \rightarrow \min. \quad (5.43)$$



регресійної моделі буде тим кращою, чим менше розсіювання фактичних значень  $y$  щодо значень цієї змінної, обчислених за формулою (5.32), тобто чим менша дисперсія похибок

$$\sigma_u^2 = \sigma_{y \cdot 123 \dots k}^2 = \frac{\sum_{j=1}^n (y_j - \hat{y}_j)^2}{n}, \quad (5.47)$$

сума квадратів відхилень фактичних значень  $y$  від обчислених за рівнянням множинної регресії

$$SSE = \sum_{j=1}^n (y_j - \hat{y}_j)^2 \quad (5.48)$$

чи виправлена середня квадратична похибка цього рівняння

$$s_{y \cdot 123 \dots k} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (y_j - \hat{y}_j)^2}{n - m}}, \quad (5.49)$$

де  $k$  – кількість чинників;

$n$  – кількість одиниць спостережень;

$m$  – кількість сталих величин у рівнянні регресії.

У формулах (5.47) і (5.49) в індексі дисперсії похибок  $\sigma_{y \cdot 123 \dots k}^2$  і середньої квадратичної похибки  $s_{y \cdot 123 \dots k}$  перед крапкою зазначено залежні ознаки чи їхні номери, а після крапки – номери факторних ознак, вплив яких відображає цей показник.

Усі показники, які обчислюють за формулами (5.47)–(5.49), мають таку ж розмірність, що й  $y$ . Якраз це іноді створює незручності під час виконання економічного аналізу. Зважаючи на це, для оцінення побудованої моделі регресії варто використовувати показники, які були б безрозмірними.

До таких показників, які є абстрактною мірою тісноти зв'язку між залежною змінною і факторами регресійної моделі, належать *індекс множинної детермінації* (сукупний індекс детермінації) та *індекс множинної кореляції*, який дорівнює квадратному кореню з першого індексу. Обидва ці індекси характеризують силу спільного впливу деяких чинників на величину залежної змінної  $y$ . Індекс множинної детермінації можна обчислити за однією із формул:

$$I_{y^{123\dots k}}^2 = \frac{\sigma_{\hat{y}}^2}{\sigma_y^2} = 1 - \frac{\sigma_u^2}{\sigma_y^2} = 1 - \frac{s_{y^{123\dots k}}^2}{s_y^2}, \quad (5.50)$$

де

$$\sigma_{\hat{y}}^2 = \frac{\sum_{j=1}^n (\hat{y}_j - \bar{y})^2}{n};$$

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2}{n};$$

$$s_y = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2}{n - m}}.$$

$I_{y^{123\dots k}}^2$  демонструє, яку частину загальної дисперсії  $y$  пояснюють чинники, що є складовими рівняння регресії (у випадку форми зв'язку). Цей індекс, як і індекс множинної кореляції  $I_{y^{123\dots k}}$ , може набувати значення від 0 до 1. Чим величина його ближча до 1, тим тісніший зв'язок між залежною і незалежними змінними.

Обидва розглянуті індекси можна використовувати для вимірювання тісноти зв'язку між залежною змінною і факторами регресійної моделі за наявності будь-якої її форми – як лінійної, так і криволінійної. У випадку лінійного зв'язку індекси  $I_{y^{123\dots k}}^2$  та  $I_{y^{123\dots k}}$  називають *коефіцієнтами* і позначають відповідно через  $R_{y^{123\dots k}}^2$  та  $R_{y^{123\dots k}}$ . Коефіцієнт множинної детермінації  $R_{y^{123\dots k}}^2$  має такий самий смисл, як і сукупний індекс детермінації. Його можна обчислити не тільки за формулою (5.50), а й за іншими формулами [54, с. 247].

Коефіцієнт множинної кореляції ( $R$ ) (на відміну від індексу множинної кореляції ( $I$ )) може набувати як додатні значення (прямий лінійний зв'язок), так і від'ємні (обернений лінійний зв'язок). Рівність цього коефіцієнта нулю означає, що лінійного зв'язку немає.

Близькість до одиниці індексу (коефіцієнта) множинної детермінації ще не означає, що кожний з незалежних чинників має

значний вплив на  $y$ . У цій ситуації вплив окремих чинників може бути незначним, а введення їх у рівняння регресії – не виправданим. Щоб у процесі економічного аналізу не потрапити в таку ситуацію, крім розрахунків показників, які відображають тісноту зв'язку змінної  $y$  з усіма чинниками, бажано визначити ступінь впливу кожного з цих чинників на зміну величини залежної змінної. Про це можна судити за величиною *індексів* (для лінійного зв'язку *коефіцієнтів*) *частинної* (*чистої* чи *окремої*) *кореляції*.

Розглянемо формули розрахунку цих показників для випадку лінійної залежності. Припустимо, що змінна  $y$  лінійно залежить від чинників  $x_1$  і  $x_2$ . Побудовані рівняння парної і багатофакторної регресії мають такий вигляд:

$$y = a_0^1 + a_1^1 x_1; \quad (5.51)$$

$$y = a_0^2 + a_2^2 x_2; \quad (5.52)$$

$$y = a_0^0 + a_1^0 x_1 + a_2^0 x_2. \quad (5.53)$$

Для перших двох випадків, які відображаються рівняннями (5.51) і (5.52), зв'язок між залежною і незалежною змінною можна охарактеризувати відповідно такими коефіцієнтами парної кореляції:

$$r_{y,1} = \sqrt{1 - \frac{s_{y,1}^2}{s_y^2}}; \quad r_{y,2} = \sqrt{1 - \frac{s_{y,2}^2}{s_y^2}}, \quad (5.54)$$

де  $s_{y,1}$  і  $s_{y,2}$  – середня квадратична похибка відповідно для рівняння (5.51) та (5.52).

Аналогічно вводять коефіцієнт окремої кореляції  $r_{y,1,2}$  ( $r_{y,2,1}$ ), який характеризує міру збільшення кореляції внаслідок введення іншого чинника, тобто демонструє тісноту зв'язку між незалежною змінною  $x_1$  ( $x_2$ ) і залежною змінною  $y$ , коли беруть до уваги вплив чинника  $x_2$  ( $x_1$ ). Його обчислюють за формулою [82, с. 50]:

$$r_{y,1,2} = \sqrt{1 - \frac{s_{y,1,2}^2}{s_{y,2}^2}} \left( r_{y,2,1} = \sqrt{1 - \frac{s_{y,1,2}^2}{s_{y,1}^2}} \right), \quad (5.55)$$

де  $s_{y,1,2}$  – середня квадратична похибка для рівняння (5.53).

Коефіцієнти  $r_{y1}$  і  $r_{y12}$  суттєво відрізняються один від одного. Зокрема,  $r_{y1}$  характеризує силу дії чинника  $x_1$  у моделі парної кореляції (5.51), яка взагалі не зважає на вплив чинника  $x_2$ . Зміна ж залежної змінної  $y$ , яка фактично зумовлена обома чинниками, значною мірою стосується лише одного – першого. Коефіцієнт частинної кореляції  $r_{y12}$  також визначає силу дії чинника  $x_1$ , але у такій моделі, яка вже бере до уваги вплив чинника  $x_2$ . У процесі аналізу окремої кореляції з першим чинником другий ніби залишається незмінним і не може зумовити зміну  $y$  залежно від коливання змінної  $x_1$ .

Для випадку  $n$  незалежних чинників, які впливають на зміну  $y$ , коефіцієнт частинної кореляції для чинника  $x_i$  визначають за такою формулою:

$$r_{y123\dots k} = \sqrt{1 - \frac{s_{y^{123\dots k}}^2}{s_{y^{23\dots k}}^2}}, \quad (5.56)$$

де  $s_{y^{123\dots k}}^2$  – середній квадрат відхилення фактичних значень  $y$  від лінії регресії, знайденої з урахуванням усіх факторів;

$s_{y^{23\dots k}}^2$  – середній квадрат відхилення фактичних значень  $y$  від лінії регресії, яка охоплює усі чинники, крім першого.

За абсолютною величиною коефіцієнт частинної кореляції змінюється від 0 до 1. Його знак збігається із знаком коефіцієнта регресії, який стоїть біля змінної у рівнянні лінійного зв'язку.

Показники множинної регресії та кореляції, як і показники парної регресії, можуть залежати від впливу випадкових чинників. Їх значущість, тобто оцінку того, наскільки вони вільні від випадкових впливів, перевіряють за допомогою критерію Стюдента і критерію Фішера, використовуючи формулу (5.31) та інші [82, с. 50].

**5.2.5.** При побудові лінійного рівняння багатфакторної регресії крім мультиколінеарності можуть трапитись і деякі інші особливі випадки. До них відносяться гетероскедастичність та автокореляція. Розглянемо коротко суть цих понять.

Під час побудови моделі класичної лінійної регресії припускають, що дисперсія залишків  $u_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) є сталою вели-

чиною. Таку властивість цієї дисперсії називають *гомоскедастичністю*. Однак на практиці явище гомоскедастичності часто порушується. У цьому випадку, тобто коли дисперсія залишків змінюється для кожного спостереження або групи спостережень, це явище називають *гетероскедастичністю*.

За наявності гетероскедастичності оцінки параметрів рівняння регресії, отримані методом найменших квадратів, здебільшого залишаються незміщеними, обґрунтованими, але неефективними. В результаті, із зростанням розкиду значень залишків, зростатиме дисперсія оцінок параметрів моделі, що приведе до збільшення їхніх стандартних похибок. Крім цього, інтервали довіри оцінок параметрів моделі також будуть більшими.

Економетрична модель, якій притаманна гетероскедастичність, є узагальненою моделлю, і для оцінювання її параметрів слід скористатися узагальненим методом найменших квадратів. Методи визначення гетероскедастичності і метод найменших квадратів визначення параметрів рівняння регресії описані у підручниках з економетрії, наприклад [47; 53].

Одним з припущень класичного регресійного аналізу є припущення про незалежність випадкових величин. Якщо це припущення порушується, то ми маємо справу з автокореляцією. Може скластися враження, що автокореляція і серійна кореляція – це одне і теж. Однак це не так.

*Автокореляцією* називають залежність між значеннями однієї вибірки із запізненням на один лаг. Можна сказати, що автокореляція – це наявність взаємозв'язку між послідовними елементами часового чи просторового ряду даних. Методи тестування автокореляції, її причини та практичні і теоретичні наслідки, а також методи знаходження невідомих параметрів моделі в умовах автокореляції детально висвітлено в [47; 53].



## 6. МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Методи математичного програмування<sup>1</sup> призначені для розв'язування задач оптимізації виробничо-господарської діяльності. За своєю суттю ці методи – засіб планових розрахунків. Цінність їх для економічного аналізу у тому, що вони дають змогу оцінювати напруженість планових завдань, дефіцитність результатів та ступінь досягнення потенціалу, визначати лімітуючі ресурси, «вузькі місця», ступінь конкурентності тощо.

Загальну задачу математичного програмування формулюють таким чином. Знайти екстремум (максимум чи мінімум залежно від практичного сенсу задачі) функції

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (6.1)$$

за умов

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \{ \leq, =, \geq \} b_i \quad (i = \overline{1, m}), \quad (6.2)$$

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in Q, \quad (6.3)$$

де  $Q$  – деяка множина  $n$ -вимірному евклідового простору  $R^n$ .

Множина  $Q$  найчастіше є такою:

$$Q = \{ X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n \mid x_i \geq 0, i = \overline{1, n} \}. \quad (6.4)$$

Функцію (6.1) називають *цільовою функцією*, а умови (6.2) – *обмеженнями*. Зрозуміло, що в кожному з обмежень (6.2) вибирають тільки один якийсь знак ( $\leq, =, \geq$ ). Усі функції  $g_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ) і  $f$ , а також числа  $b_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ) вважають заданими. Множину точок, що задовольняє умови (6.1), (6.2), називають *допустимою множиною*.

Оскільки екстремуму задачі (6.1)–(6.3) досягають на межі допустимої множини, то застосувати класичні методи пошуку умовного екстремуму функцій для розв'язування цієї задачі практично неможливо<sup>2</sup>. З огляду на це для дослідження задач типу (6.1) – (6.3) розроблено спеціальні методи.

---

<sup>1</sup> Слово «програмування» запозичене із зарубіжної літератури і означає «планування».

<sup>2</sup> Обґрунтування див. у б.1.

Математичне програмування поділяють на такі основні розділи: лінійне програмування, нелінійне програмування, стохастичне програмування і динамічне програмування.

*Лінійним програмуванням* називають розділ математичного програмування, що вивчає задачі типу (6.1) – (6.3), в яких функції  $g_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ) і  $f$  є лінійними, тобто

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \quad (i = \overline{1, m}),$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n,$$

де  $a_{ij}$  ( $i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$ ),  $c_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) – задані константи, а множину  $Q$  можна задати формулою (6.4).

З економічного змісту багатьох практичних задач випливає вимога цілочисловості всіх або частини змінних величин. Задачі такого типу називають задачами *лінійного цілочислового програмування*. Якщо додаткову вимогу цілочисловості накладено на всі змінні, то таку задачу лінійного цілочислового програмування називають *повністю цілочисловою*, а якщо це обмеження стосується лише частини змінних – *частково цілочисловою*.

*Нелінійним програмуванням* називають розділ математичного програмування, що вивчає задачі типу (6.1)–(6.3), в яких функція  $f$  або хоч би одна з функцій  $g_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ) є нелінійною. Найбільш вивченими класами задач нелінійного програмування є задачі квадратичного програмування, опуклого програмування і сепарабельного програмування.

*Квадратичним програмуванням* називають розділ математичного програмування, що вивчає задачі типу (6.1)–(6.3), в яких функції  $g_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ) є лінійними, а функція  $f$  є сумою лінійної і квадратичної форм

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_i x_j.$$

*Опуклим програмуванням* називають розділ математичного програмування, що вивчає задачі типу (6.1)–(6.3), в яких функції  $g_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ) і  $f$  є опуклими. Вважають, що множина  $Q$  є опуклою. Зауважимо, що особливістю такої задачі є її *одноекстремальність*, тобто в ній нема локальних екстремумів. За певних умов задача

лінійного й квадратичного програмування є окремим випадком задачі опуклого програмування.

*Сепарабельним програмуванням* називають розділ математичного програмування, що вивчає задачі типу (6.1)–(6.3), в яких функції  $g_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ) і  $f$  є сепарабельними, тобто такими, що складаються із суми інших функцій. Частковим випадком сепарабельної функції є лінійна функція.

*Стохастичним програмуванням* називають розділ математичного програмування, який вивчає моделі вибору оптимальних розв'язків у ситуаціях, що характеризуються випадковими величинами. Задачі стохастичного програмування виникають за умови неточності вхідної інформації.

*Динамічним програмуванням* називають розділ математичного програмування, який вивчає багатокрокові процеси пошуку розв'язку. Є задачі, процес пошуку розв'язку яких доцільно поділити на кілька етапів, тобто виконувати не відразу, а послідовно, крок за кроком. Цей процес можна описати певним одноманітним математичним апаратом, яким є теорія динамічного програмування.

### **6.1. Лінійне програмування**

Лінійне програмування – найбільш поширений математичний метод в економічному аналізі. Перші наукові публікації з цієї тематики з'явилися ще в 30-х роках ХХ ст. В Угорщині Б. Егерварі опублікував працю (1931), присвячену проблемам мінімізації під час транспортування вантажів. На підставі цієї праці згодом було розроблено ефективний метод розв'язування транспортних задач лінійного програмування, який увійшов до літератури під назвою *угорського методу*. Російський математик Л. Канторович 1939 р. опублікував працю «Математичні методи в організації і плануванні виробництва», в якій запропонував один з методів розв'язування задач лінійного програмування – метод розв'язкових множників. Однак це були тільки окремі публікації. Широкий інтерес до теорії і практики лінійного програмування виявили наприкінці 40-х–на початку 50-х років після розробки американським математиком Дж. Данцігом симплексного методу розв'язування задач такого типу.

**6.1.1.** В економіці ми завжди шукаємо найкращі чи оптимальні значення показників. Отже, практично всі економічні задачі екстремальні. Проте в реальній ситуації виходить, що багаточисельні чинники досягнення результатів можуть збігатися чи суперечити один одному. Наприклад, задачі знаходження максимуму випуску продукції і мінімуму затрат несумісні: у випадку найменшої кількості затрат (нульовій) продукції взагалі не можна отримати. Тому в кожній задачі може бути тільки один *критерій оптимальності*, а всі інші чинники треба розглядати як обмеження. Такі задачі називають також *оптимальними*.

Стосовно до економічного аналізу лінійне програмування є сукупністю математичних методів, які дають змогу в умовах обмежених ресурсів за прийнятим критерієм оптимальності вибрати із всіх варіантів один чи декілька найкращих. У цьому разі мають на увазі, що всі умови цих задач можуть бути описані лінійними рівняннями чи нерівностями.

Під час постановки задачі лінійного програмування необхідні початкові дані, які можна розділити на три групи. Передусім це дані, пов'язані з кількісним вираженням прийнятого критерію оптимальності. Якщо цей критерій може бути кількісно визначеним і математично формалізованим, то кожний вид корисної діяльності чи одиничний результат її (наприклад, випуск одиниці товару визначеного виду) повинен отримати кількісну оцінку. Кількість цих оцінок  $n$ , які іноді називають оцінками цільової функції, повинна відповідати кількості видів корисної діяльності (чи технологій). Усі ці оцінки можуть бути упорядковані у вигляді вектора оцінок цільової функції  $c = (c_1, c_2, \dots, c_j, \dots, c_n)$ .

Друга група початкових даних пов'язана з наявними виробничими ресурсами, з обсягами їхніх запасів. Нехай величина запасу  $i$ -го ресурсу дорівнює  $b_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ). Тоді всі числа, які визначають величини запасів ресурсів, утворюють вектор

$$A_0 = (b_1, b_2, \dots, b_i, \dots, b_m)^T.$$

Третя група початкових даних пов'язана з використанням виробничих ресурсів у різних видах корисної діяльності (технології) і подана нормативами використання. Нехай норма витрат  $i$ -го ресурсу на виробництво одиниці  $j$ -го товару визначається

величиною  $a_{ij}$ . Тоді завдяки нормі витрат ресурсів усіх видів на виробництво одиниці  $j$ -го товару, що впорядковані у вигляді вектора, одержимо опис технології виробництва одиниці  $j$ -го товару:  $A_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{ij}, \dots, a_{mj})^T$ .

У цьому упорядкованому наборі нормативів немовби уречевлена технологія виробництва  $j$ -го товару. Якщо ці технологічні нормативи оцінити в грошовому вимірі й повністю перерахувати всі види ресурсів, які використовують у виробництві одиниці  $j$ -го продукту, то цей вектор буде калькуляцією собівартості одиниці цього продукту. Під час постановки задачі лінійного програмування всі вектори технологічного опису виробництва всіх товарів упорядковують у матрицю порядку  $m \times n$ , яку іноді називають *матрицею технології*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (6.5)$$

Серед нормативних коефіцієнтів у матриці (6.5) можуть траплятися як додатні, так і від'ємні числа. У випадку від'ємних значень ці коефіцієнти можуть бути витлумачені не як норми затрат, а як норми побічного випуску. Обсяг випуску  $j$ -го товару (чи інтенсивність  $j$ -ї технології) позначимо  $x_j$ . Тоді впорядкований набір цих чисел утворює вектор випуску товарів:

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)^T.$$

Під час побудови математичної моделі, наприклад, задачі планування виробництва, потрібно брати до уваги, що загальний обсяг  $i$ -го ресурсу, який використовують у виробництві згідно з планом, становить

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \quad (i = \overline{1, m}).$$

Оскільки цей обсяг не може перевершувати запас  $i$ -го ресурсу, то  $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ).

Очевидно, що  $x_j \geq 0$  ( $j = \overline{1, n}$ ). Економічний зміст цих обмежень полягає в тому, що або шукані обсяги продукції випускають ( $x_i > 0$ ), або ні ( $x_i = 0$ ).

Прибуток, одержаний від виробництва  $x_j$  одиниць  $j$ -го товару, становить  $c_j x_j$ , а загальний прибуток від виробництва

$$L = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n.$$

Отже, математична модель цієї задачі є такою: знайти максимум лінійної функції (форми)

$$L = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (6.6)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = \overline{1, m}), \quad (6.7)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}). \quad (6.8)$$

Нагадаємо, що в моделі (6.6) – (6.8)

$c_j$  – прибуток від реалізації одиниці товару  $j$ -го виду;

$a_{ij}$  – кількість одиниць ресурсу  $i$ -го виду, що використовують для виробництва одиниці товару  $j$ -го виду;

$b_i$  – максимальна кількість одиниць ресурсу  $i$ -го виду, що можна використати у виробництві (запас одиниць ресурсу  $i$ -го виду);

$x_j$  – кількість одиниць товару  $j$ -го виду, що планують виробити (шукані величини);

$m$  – кількість видів ресурсів, які використовують у виробництві;

$n$  – кількість видів товарів, що можуть виробляти з наявних ресурсів.

Оскільки похідна функції  $L$  за змінною  $x_j$  дорівнює ненульовій сталій  $c_j$ , то очевидно, що скористатися класичними методами знаходження умовного екстремуму цієї функції неможливо. Потрібно шукати інші методи.



$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n = A_0, \quad (6.13)$$

$$X \geq 0. \quad (6.14)$$

Якщо в задачі (6.12)–(6.14) рівняння (6.13) замінити на таке рівняння

$$AX = A_0, \quad (6.15)$$

то кажуть, що ця задача записана у матричній формі.

Вектор  $X = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)^T$ , компоненти якого задовольняють умови (6.10), (6.11), називають *допустимим розв'язком (планом)* задачі лінійного програмування. Позначимо множину всіх допустимих розв'язків цієї задачі  $M$ . Щоб розв'язати задачу лінійного програмування (6.9)–(6.11), треба знайти найкращий план серед усіх допустимих її розв'язків. Проблема вибору виникає лише тоді, коли множина  $M$  містить принаймні два елементи. Розглянемо найзагальніше означення найкращого (оптимального) розв'язку. Для цього введемо поняття повноти і транзитивності бінарних однорідних відношень.

У математиці *n-місним відношенням* називають підмножину декартового добутку  $n$  множин. Наприклад, декартів добуток множин  $A_1 = \{\text{висота, вага}\}$ ;  $A_2 = \{\text{Петро, Іван, Степан}\}$ ;  $A_3 = \{169, 175, 182, 72, 74, 85\}$ ;  $A_4 = \{\text{см, кг}\}$   $A_4 = \{\text{см, кг}\}$  міститиме всі можливі четвірки елементів (кортежі) по одному з кожної множини:  $\langle \text{висота, Петро, 169, кг} \rangle$ ,  $\langle \text{висота, Петро, 182, см} \rangle$ ,  $\langle \text{висота, Петро, 175, см} \rangle$  і т.д. А відповідне чотиримісне відношення міститиме ті кортежі, які відповідають реальним даним щодо висоти і маси зазначених осіб:  $\langle \text{висота, Петро, 169, см} \rangle$ ,  $\langle \text{висота, Іван, 175, см} \rangle$ ,  $\langle \text{висота, Степан, 182, см} \rangle$ ,  $\langle \text{маса, Петро, 72, кг} \rangle$ ,  $\langle \text{маса, Іван, 74, кг} \rangle$ ,  $\langle \text{маса, Степан, 85, кг} \rangle$ .

Якщо відношення задане на одній множині, тобто  $A_i = A \ (i = \overline{1, n})$ , то його називають *однорідним*, а коли  $n = 2$  – *бінарним*. Те, що пара елементів  $X_1$  і  $X_2$  (кортеж  $\langle X_1, X_2 \rangle$ ) належить бінарному однорідному відношенню  $R \ (\langle X_1, X_2 \rangle \in R)$ , записують так:  $X_1 R X_2$ .



Бінарне однорідне відношення  $R$  може мати різні властивості, зокрема

- рефлексивності:

$$\forall X \in M \Rightarrow XRX;$$

- симетричності:

$$\forall X_1, X_2 \in M, X_1RX_2 \Rightarrow X_2RX_1;$$

- транзитивності:

$$\forall X_1, X_2, X_3 \in M, (X_1RX_2) \wedge (X_2RX_3) \Rightarrow X_1RX_3;$$

- повноти:

$$\forall X_1, X_2 \in M \Rightarrow (X_1RX_2) \vee (X_2RX_1),$$

де символами  $\wedge$  і  $\vee$  відповідно позначено логічні операції «кон'юнкція» і «диз'юнкція».

Зауважимо, що повне бінарне відношення має властивість рефлексивності.

Найважливіші взаємозв'язки між допустимими планами задач лінійного програмування відображаються однорідними бінарними відношеннями переваги (переважності). Основні серед цих відношень є такі: «не гірше», «рівноцінно» та «краще».

Відношенням «не гірше» (позначають символом « $\succ=$ ») називають таке бінарне однорідне відношення, яке має властивості транзитивності і повноти. Беручи до уваги вище, можна стверджувати, що це відношення також рефлексивне.

Визначити відношення переваги «рівноцінність» ( $\approx$ ) і «краще» ( $\succ$ ) можна за допомогою відношення «не гірше» ( $\succ=$ ):

$$\forall X_1, X_2 \in M, (X_1 \approx X_2) \Leftrightarrow (X_1 \succ= X_2) \wedge (X_2 \succ= X_1);$$

$$\forall X_1, X_2 \in M, (X_1 \succ X_2) \Leftrightarrow (X_1 \succ= X_2) \wedge (X_2 \neg \succ= X_1),$$

де запис  $X_2 \neg \succ= X_1$  означає таке: «неправильно, що  $X_2 \succ= X_1$ », тобто, що елемент  $X_2$  не перебуває у відношенні переважності  $\succ=$  з елементом  $X_1$ .

Легко переконатися у тому, що відношення рівноцінності (його ще називають відношенням еквівалентності) має властивості рефлексивності, симетричності й транзитивності.

Для введення поняття оптимального розв'язку використаємо відношення «не гірше». *Оптимальним планом* задач лінійного

програмування (6.9)–(6.11) називають такий розв’язок  $X_{opt}$  із множини допустимих розв’язків  $M$ , який для певного повного і транзитивного відношення переваги  $\succ=$  не гірший (кращий або еквівалентний) за будь-який інший допустимий розв’язок  $X$  цієї множини. Тобто план  $X_{opt}$  буде оптимальним, якщо

$$\forall X \in M \Rightarrow X_{opt} \succ= X.$$

Отже, оптимальним планом (*оптимальним розв’язком* чи просто *розв’язком*) задач лінійного програмування називають план, який мінімізує лінійну форму (6.9). Переважно в задачі лінійного програмування є нескінченна кількість допустимих розв’язків. Крім цього, множина допустимих розв’язків  $M$  цієї задачі є опуклою. Очевидно, що  $M$  може бути порожньою множиною, опуклим многогранником або необмеженою опуклою многогранною областю. У випадку порожньої множини  $M$  треба уточнити модель задач лінійного програмування, оскільки вона не має розв’язку. Якщо  $M$  – опуклий многогранник, то задача завжди має розв’язок. У випадку, коли  $M$  – необмежена опукла многогранна область, задача має розв’язок лише тоді, коли лінійна функція обмежена на множині планів.

Можна довести, що лінійна функція  $L$  задачі лінійного програмування (6.9)–(6.11) досягає мінімального значення у крайній точці опуклої множини  $M$  планів цієї задачі. Якщо лінійна функція набуває мінімального значення більш ніж в одній крайній точці множини  $M$ , то вона набуває цього ж значення в будь-якій точці, яка є опуклою комбінацією цих точок. Звідси пошук оптимального плану задач лінійного програмування можна обмежити перебором крайніх точок множини  $M$ . Ці точки ще називають *опорними* (*базисними*) *планами* задач лінійного програмування. Якраз цей факт лежить в основі симплексного методу розв’язування задач лінійного програмування. Однак у цьому методі здійснюється не хаотичний перебір крайніх точок опуклої множини планів задач лінійного програмування, а цілеспрямований, який веде до зменшення значення цільової функції.

Якщо в задачі лінійного програмування тільки дві невідомі змінні, тобто вектор  $X$  двовимірний ( $n = 2$ ), то її легко розв’язати графічно.

Виявляється, що для того, щоб вектор  $X = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)^T$  був опорним планом задачі лінійного програмування, необхідно і достатньо, щоб вектори  $A_j$ , які відповідають додатним компонентам  $x_j$ , утворювали лінійно незалежну систему. Беручи до уваги  $m$ -вимірність векторів  $A_j$ , можна стверджувати, що максимальна кількість цих векторів, які б разом утворювали лінійно незалежну систему, не перевищує  $m$ . Звідси випливає, що кожний опорний план містить не більше ніж  $m$  додатних компонент. Якщо цей план містить рівно  $m$  додатних компонент, то його називають *невиродженим*, а якщо менше від  $m$  – *виродженим*. *Базисом опорного плану*  $X$  називають набір  $m$  лінійно незалежних векторів, серед яких є всі ті, що відповідають додатним компонентам цього плану. Очевидно, що невивроджений опорний план має єдиний базис, а вироджений – декілька.

**6.1.3.** Розглянемо *алгоритм симплексного методу* розв'язування задач лінійного програмування, який ще називають методом послідовного поліпшення плану. Цей алгоритм передбачає, що вже відомий якийсь опорний план цієї задачі, який називають *початковим опорним планом*. Не зменшуючи загальності вважатимемо, що початковий опорний план  $X$  має вигляд

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_m, 0, \dots, 0) \quad (6.16)$$

і базис, що йому відповідає, складається з векторів  $A_1, A_2, \dots, A_m$ . Знайдемо розклад векторів  $A_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) через вектори базису. Нехай

$$A_j = x_{1j}A_1 + x_{2j}A_2 + \dots + x_{mj}A_m \quad (j = \overline{1, n}).$$

Обчислимо різниці  $\Delta_j = z_j - c_j$  для всіх  $j$  ( $j = \overline{1, n}$ ),

де  $z_j = c_1x_{1j} + c_2x_{2j} + \dots + c_mx_{mj}$ ,

і значення лінійної форми  $z_0$  для плану  $X$

$$z_0 = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_mx_m.$$

Для зручності обчислень їх результати заносять у таблицю. Заповнимо першу симплекс-таблицю (див. табл. 6.1). У першому стовпчику цієї таблиці записуємо номер рядка, у другому – вектори базису опорного плану, у третьому і четвертому – відповідно, коефіцієнти лінійної форми і компоненти опорного плану, що відповідають цим векторам; а далі – коефіцієнти розкладу всіх векто-

рів через вектори базису опорного плану (в перших  $m$  рядках) і значення лінійної форми  $z_0$  та значення різниць  $\Delta_j = z_j - c_j$  (в  $(m+1)$ -му рядку). У заголовку таблиці над позначенням векторів  $A_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) зазначаємо числові значення всіх коефіцієнтів лінійної форми. Зауважимо, що в тих стовпчиках, які відповідають векторам базису опорного плану, тільки один елемент дорівнюватиме одиниці, а всі інші – нулю. Зокрема, завжди  $\Delta_j = 0$  для тих індексів  $j$ , які відповідають векторам базису.

Таблиця 6.1

$i$	Б	$c$	$A_0$	$c_1$	$c_2$	...	$c_l$	...	$c_m$	$c_{m+1}$	...	$c_k$	...	$c_n$
				$A_1$	$A_2$	...	$A_l$	...	$A_m$	$A_{m+1}$	...	$A_k$	...	$A_n$
1	$A_1$	$c_1$	$x_1$	1	0	...	0	...	0	$x_{1,m+1}$	...	$x_{1k}$	...	$x_{1n}$
2	$A_2$	$c_2$	$x_2$	0	1	...	0	...	0	$x_{2,m+1}$	...	$x_{2k}$	...	$x_{2n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$
$l$	$A_l$	$c_l$	$x_l$	0	0	...	1	...	0	$x_{l,m+1}$	...	$x_{lk}$	...	$x_{ln}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$
$m$	$A_m$	$c_m$	$x_m$	0	0	...	0	...	1	$x_{m,m+1}$	...	$x_{mk}$	...	$x_{mn}$
$m+1$			$z_0$	$\Delta_1$	$\Delta_2$	...	$\Delta_l$	...	$\Delta_m$	$\Delta_{m+1}$	...	$\Delta_k$	...	$\Delta_n$

Тут можливі такі три випадки:

1. Для всіх індексів  $j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) виконується умова  $\Delta_j = z_j - c_j \leq 0$ .

2. Є такий індекс  $j$ , для якого  $\Delta_j = z_j - c_j > 0$  і всі коефіцієнти розкладу вектора  $A_j$  через вектори базису  $x_{ij} \leq 0$  ( $i = \overline{1, m}$ ).

3. Для кожного індексу  $j$ , для якого  $\Delta_j = z_j - c_j > 0$ , серед коефіцієнтів  $x_{ij}$  ( $i = \overline{1, m}$ ) розкладу вектора  $A_j$  через вектори базису є хоча би один додатний.

У першому випадку розв'язування задачі припиняється, оскільки  $X$  – оптимальний опорний план. У другому випадку лінійна форма на множині планів є необмеженою, задача лінійного програмування не має розв'язку. У третьому випадку, якщо  $X$  –

невироджений опорний план, можна перейти до нового опорного плану, значення лінійної форми для якого буде менше, ніж значення лінійної форми для  $X$ . Якщо  $X$  – вироджений опорний план, то перехід до нового опорного плану з меншим значенням лінійної форми не завжди можна виконати, тому що може трапитись так, що під час такого переходу вироджений опорний план  $X$  залишиться без зміни, а зміниться тільки базис, який йому відповідає.

Нехай виконуються умови третього випадку. Перехід до нового опорного плану відбувається згідно з таким алгоритмом:

1. Знайти вектор  $A_j$ , який потрібно ввести у базис. У новий базис вводять той вектор  $A_j$ , який відповідає максимальній різниці

$$\Delta_j = z_j - c_j.$$

Припустимо, для однозначності, що  $\max_j \Delta_j = \Delta_k$ , тобто вводимо в базис вектор  $A_k$ .

2. Знайти вектор  $A_j$ , який потрібно вивести з базису. На практиці з базису виводять той вектор  $A_j$ , який відповідає найменшому відношенню  $x_i/x_{ik}$ , де мінімум беруть за тими  $i$ , для яких  $x_{ik} > 0$ .

Нехай для однозначності

$$\min_{i, x_{ik} > 0} \frac{x_i}{x_{ik}} = \frac{x_l}{x_{lk}},$$

тобто виводимо з базису вектор  $A_l$ . Елемент  $x_{lk}$  прийнято називати *розв'язковим*, чи *провідним*.

Отже, ми припустили, що від опорного плану  $X$ , який заданий формулою (6.16), ми переходимо до нового опорного плану

$$X' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n),$$

де  $x'_i = 0$  ( $i \neq 1, 2, \dots, l-1, l+1, \dots, m, k$ ), якому відповідатиме базис, що складається з векторів  $A_1, A_2, \dots, A_{l-1}, A_{l+1}, \dots, A_m, A_k$ .

3. Перейти до нової симплекс-таблиці згідно з таким алгоритмом:

а) поставити у перший стовпчик таблиці номери рядків від 1 до  $m+1$ . Заповнити стовпчики для векторів базису та коефіцієнтів лінійної форми, що відповідають векторам базису: на місце елементів цих стовпчиків поставити елементи відповідних стовпчиків попередньої таблиці, замінивши в них вектор  $A_l$  на  $A_k$  і коефіцієнт  $c_l$  на  $c_k$ ;

б) знайти всі інші елементи рядка таблиці, в якому є розв'язковий елемент, діленням їх на цей розв'язковий елемент. Оскільки ми припустили, що розв'язковим елементом є елемент  $x_{lk}$ , то знаходимо елементи  $l$ -го рядка нової таблиці за формулами

$$x'_k = \frac{x_l}{x_{lk}}, \quad x'_{kj} = \frac{x_{lj}}{x_{lk}} \quad (j = \overline{1, n}). \quad (6.17)$$

Знайдені числа будуть коефіцієнтами біля вектора  $A_k$  під час розкладу відповідно векторів  $A_j$  ( $j = \overline{0, n}$ ) через вектори базису  $A_1, A_2, \dots, A_{l-1}, A_k, A_{l+1}, \dots, A_m$ ;

в) обчислити невідомі елементи рядків 1, 2, ...,  $l-1, l+1, \dots, m$  нової таблиці. Для того, щоб знайти  $i$ -й рядок ( $i \neq l, i \neq m+1$ ) нової таблиці, треба всі елементи  $l$ -го рядка нової таблиці помножити на  $x_{ik}$  і відняти одержаний результат від відповідних елементів  $i$ -го рядка попередньої таблиці. Тобто невідомі елементи цих рядків нової таблиці обчислити за такими формулами:

$$x'_i = x_i - \frac{x_l}{x_{lk}} x_{ik}, \quad x'_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{lj}}{x_{lk}} x_{ik} \quad (j = \overline{1, n}). \quad (6.18)$$

Знайдені числа будуть коефіцієнтами біля векторів  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, l-1, l+1, \dots, m$ ) унаслідок розкладу векторів  $A_j$  ( $j = \overline{0, n}$ ) через вектори базису  $A_1, A_2, \dots, A_{l-1}, A_k, A_{l+1}, \dots, A_m$ ;

г) розрахувати елементи  $(m+1)$ -го рядка нової таблиці відніманням від певних елементів старої таблиці відповідних елементів  $l$ -го рядка нової таблиці, помножені на  $\Delta_k$ . Тобто числа останнього рядка нової таблиці знайти за формулами

$$z'_0 = z_0 - \frac{x_l}{x_{lk}} \Delta_k, \quad \Delta'_j = \Delta_j - \frac{x_{lj}}{x_{lk}} \Delta_k \quad (j = \overline{1, n}). \quad (6.19)$$

Ці числа будуть новими значеннями відповідно лінійної форми  $L(X')$  і різниць  $\Delta_j = z_j - c_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ).

Отже, отримуємо таку нову симплекс-таблицю (табл. 6.2).

Таблиця 6.2

$i$	Б	$c$	$A_0$	$c_1$	$c_2$	$\dots$	$c_l$	$\dots$	$c_m$	$c_{m+1}$	$\dots$	$c_k$	$\dots$	$c_n$
				$A_1$	$A_2$	$\dots$	$A_l$	$\dots$	$A_m$	$A_{m+1}$	$\dots$	$A_k$	$\dots$	$A_n$
1	$A_1$	$c_1$	$x'_1$	1	0	$\dots$	$x'_{1l}$	$\dots$	0	$x'_{1,m+1}$	$\dots$	0	$\dots$	$x'_{1n}$
2	$A_2$	$c_2$	$x'_2$	0	1	$\dots$	$x'_{2l}$	$\dots$	0	$x'_{2,m+1}$	$\dots$	0	$\dots$	$x'_{2n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
$l$	$A_k$	$c_k$	$x'_k$	0	0	$\dots$	$x'_{kl}$	$\dots$	0	$x'_{k,m+1}$	$\dots$	1	$\dots$	$x'_{kn}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
$m$	$A_m$	$c_m$	$x'_m$	0	0	$\dots$	$x'_{ml}$	$\dots$	1	$x'_{m,m+1}$	$\dots$	0	$\dots$	$x'_{mn}$
$m+1$			$z'_0$	0	0	$\dots$	$\Delta'_l$	$\dots$	0	$\Delta'_{m+1}$	$\dots$	0	$\dots$	$\Delta'_n$

У стовпчику  $A_0$  містяться ненульові компоненти нового опорного плану  $X'$  і значення його лінійної форми  $z'_0 = L(X')$ . Цей план буде таким:  $X' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_{l-1}, 0, x'_{l+1}, 0, 0, \dots, x'_k, 0, 0, \dots, 0)$ .

Для нової симплекс-таблиці знову можливі три випадки. Якщо знайдений опорний план  $X'$  не є оптимальним, то переходимо до третього опорного плану і т. д. Через скінченне число кроків ми знайдемо оптимальний план або переконаємось у тому, що задача є нерозв'язною. Зауважимо, що в алгоритмі симплексного методу можливе зациклення, коли задача не може бути розв'язана без використання спеціальних прийомів виходу з циклу.

Зазначимо, що алгоритм цього методу реалізований у деяких пакетах прикладних програм. Тому розв'язувати задачі лінійного програмування можна з використанням комп'ютерної техніки.

**П р и к л а д 6.1.** Користуючись алгоритмом симплексного методу, знайти оптимальний план задачі

$$L = x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 \rightarrow \min; \quad (6.20)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 6, \end{cases} \quad (6.21)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 4}, \quad (6.22)$$

якщо задано її початковий план  $X_1 = \left( \frac{11}{5}; 0; \frac{9}{5}; \frac{8}{5} \right)$ .

*Розв'язання.* Заданий початковий опорний план – невинроджений. Йому відповідає базис, що складається з векторів

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо розклад векторів  $A_j$  ( $j = \overline{0, 4}$ ) через вектори цього базису.

$$A_0 = \alpha A_1 + \beta A_3 + \gamma A_4,$$

або

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Звідси

$$\begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 2 \\ 2\alpha + \beta - 2\gamma = 3 \\ \alpha + 3\beta - \gamma = 6 \end{cases}$$

Розв'язок цієї системи  $\alpha = 11/5, \beta = 9/5, \gamma = 8/5$  обов'язково збігатиметься з ненульовими коефіцієнтами початкового опорного плану.

Далі отримаємо

$$A_1 = \alpha A_1 + \beta A_3 + \gamma A_4 \Rightarrow \alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 0.$$

$$A_2 = \alpha A_1 + \beta A_3 + \gamma A_4 \Rightarrow \alpha = 3/5, \beta = -3/5, \gamma = 4/5.$$

$$A_3 = \alpha A_1 + \beta A_3 + \gamma A_4 \Rightarrow \alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 0.$$

$$A_4 = \alpha A_1 + \beta A_3 + \gamma A_4 \Rightarrow \alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 1.$$

Тепер можна заповнити першу симплекс-таблицю (табл. 6.3).



Таблиця 6.3

$i$	Б	$c$	$A_0$	1 $A_1$	-1 $A_2$	-1 $A_3$	4 $A_4$
1	$A_1$	1	11/5	1	3/5	0	0
2	$A_3$	-1	9/5	0	-3/5	1	0
3	$A_4$	4	8/5	0	4/5	0	1
4			34/5	0	27/5	0	0

В останньому рядку таблиці у стовпчику для  $A_0$  записано значення лінійної форми  $z_0 = L(x_i)$ , яке вона набуває для цього опорного плану, а в стовпчиках для  $A_j$  ( $j = \overline{1, 4}$ ) – значення оцінок  $\Delta_j = z_j - c_j$ . Значення для  $z_0$  і  $z_j$  отримано за формулами

$$z_0 = \sum_{i=1}^3 c_{k_i} x_{k_i}, \quad z_j = \sum_{i=1}^3 c_{k_i} x_{k_{ij}}, \quad j = \overline{1, 4}, \quad (6.23)$$

де  $c_{k_i}, x_{k_i}$  – відповідно коефіцієнти лінійної форми і компоненти опорного плану, що відповідають базисним векторам  $A_1, A_3, A_4$ ;  $x_{k_{ij}}$  – коефіцієнти розкладу  $j$ -го вектора за векторами базису.

Якщо всі різниці  $\Delta_j = z_j - c_j < 0$  ( $j = \overline{1, 4}$ ), то опорний план є оптимальний. У нас  $z_2 - c_2 = 27/5 > 0$ . Отже, початковий опорний план не є оптимальний і його треба поліпшити. Перейдемо до іншого опорного плану, якому відповідатиме новий базис і для якого значення цільової функції буде не більше за  $z_0 = 34/5$ . Оскільки  $\max_j(z_j - c_j) = z_2 - c_2 = 27/5$ , то вводимо в новий базис вектор  $A_2$ . Беручи до уваги, що

$$\min_j \frac{x_{k_i}}{x_{k_{i2}}} = \min \left( \frac{x_1}{x_{12}}, \frac{x_4}{x_{42}} \right) = \min \left( \frac{11/5}{3/5}, \frac{8/5}{4/5} \right) = 2 = \frac{x_4}{x_{42}},$$

де мінімум беремо за тими  $i$ , для яких  $x_{k_{i2}} > 0$ , то виводимо з базису вектор  $A_4$ . Розв'язковим елементом є  $x_{42} = 4/5$  (у таблиці виділено курсивом). Коли б серед елементів стовпчика, що відповідає вектору  $A_2$ , не було додатних, за винятком останнього,

то лінійна форма на множині планів була б необмежена. Перетворимо елементи цієї таблиці згідно із симплекс-алгоритмом, отримаємо другу таблицю (табл. 6.4).

Таблиця 6.4

$i$	Б	$c$	$A_0$	1 $A_1$	-1 $A_2$	-1 $A_3$	4 $A_4$
1	$A_1$	1	1	1	0	0	-3/4
2	$A_3$	-1	3	0	0	1	3/4
3	$A_2$	-1	2	0	1	0	5/4
4			-4	0	0	0	-27/4

Табл. 6.4 утворена з табл. 6.3 так: а) на місце  $A_4$  і  $c_4$  записано відповідно  $A_2$  і  $c_2$ ; б) усі інші елементи третього рядка (стовпчики, які відповідають векторам  $A_j, j = \overline{1, 4}$ ) отримано діленням старих елементів на розв'язковий, тобто за формулою

$$y'_{3j} = y_{3j} / y_{32} \quad (y_{32} = 4/5), \quad j = \overline{0, 4},$$

де  $y_{ij}, y'_{ij}$  – елементи  $i$ -го рядка і стовпця, який відповідає вектору  $A_j, j = \overline{0, 4}$ , відповідно табл. 1 і 2; в) елементи  $i$ -го рядка ( $i \neq 3$ ) отримано за формулою  $y'_{ij} = y_{ij} - y_{3j}y_{i2} / y_{32}, i = 1, 2, 4, j = \overline{0, 4}$ .

Для самоконтролю елементи четвертого рядка табл. 6.4 паралельно можна знаходити за тим самим алгоритмом, що й елементи останнього рядка табл. 6.3. Отриманий симплекс-таблиці відповідає такий опорний план:  $X^* = (1, 2, 3, 0)$ . Оскільки в цій таблиці серед різниць  $z_j - c_j$  немає додатних, то план  $X^*$  є оптимальним, а оптимальне значення лінійної форми дорівнює  $-4$ .

Коли в задачах лінійного програмування початковий опорний план не заданий, то його треба знайти. Для цього потрібно розв'язати додаткову задачу. Шуканий початковий опорний план основної задачі лінійного програмування будують на підставі оптимального плану допоміжної задачі за елементарними правилами. Завдання полегшується, коли обмеження задачі (6.10) мають  $m$  різних одиничних векторів  $A_j$ . Тоді, підставивши нулі за-

мість тих невідомих  $x_j$ , які не відповідають цим одиничним векторам  $A_j$ , отримаємо систему  $m$  лінійно незалежних рівнянь з  $m$  невідомими. Розв'язок цієї системи дасть нам ненульові компоненти початкового опорного плану задачі лінійного програмування.

**6.1.4.** Оптимальний план задачі лінійного програмування можна знайти і за допомогою двоїстого симплекс-методу, хоча, зазвичай, для розв'язування задач лінійного програмування його не застосовують. Однак без нього не можна обійтись під час розгляду методу Р. Гоморі розв'язування задач лінійного цілочислового програмування (див. 6.2). Коротко розглянемо цю теорію.

Виявляється, що з кожною задачею лінійного програмування зв'язана деяка інша, також цілком визначена задача лінійного програмування. Зв'язок цих двох задач взаємний і настільки тісний, що під час розв'язуванні однієї з них фактично розв'язується й інша [78, с. 79]. Такі дві задачі називають *парою взаємно двоїстих задач* лінійного програмування, а теорію, яка вивчає їхні властивості, – *теорією двоїстості*. Зокрема, двоїстою до задачі лінійного програмування, яка записана в канонічній матричній формі (6.12), (6.15), (6.14), є задача

$$L^* = YA_0 \rightarrow \max ; \quad (6.24)$$

$$YA \leq c, \quad (6.25)$$

де  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ .

Для розуміння двоїстого симплекс-методу введемо деякі означення. Розглянемо задачу лінійного програмування, записану в канонічній формі (6.12)–(6.14). Вектор  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  називають *опорним розв'язком* системи лінійних рівнянь (6.13), якщо його компоненти задовольняють систему (6.13) і вектори  $A_j$ , що відповідають ненульовим компонентам  $x_j$ , утворюють лінійно незалежну систему. *Базисом опорного розв'язку*  $X$  системи (6.13) називають довільну лінійно незалежну систему з  $m$  векторів  $A_j$ , що містить усі вектори, які відповідають ненульовим компонентам вектора  $X$ . Опорний розв'язок  $X$  системи (6.13) називають *псевдопланом* задачі (6.12)–(6.14), якщо для всіх  $j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) виконується умова  $\Delta_j \leq 0$ .

Двоїтий симплекс-метод розв'язування задачі лінійного програмування полягає в послідовному переході від одного псевдоплану задачі до іншого, значення лінійної форми для якого більше, ніж для попереднього псевдоплану. Розглянемо алгоритм цього методу. Припустимо, що початковим псевдопланом задачі (6.12)–(6.14) є вектор  $X$ . Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що  $X$  має такий вигляд:

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$$

і базис, який йому відповідає, складається з векторів  $A_1, A_2, \dots, A_m$ . Знайдемо для цього псевдоплану розклад векторів  $A_j$  через вектори базису, оцінки  $\Delta_j$  і значення лінійної форми  $z_0$ . Нехай

$$A_j = x_{1j}A_1 + x_{2j}A_2 + \dots + x_{mj}A_m \quad (j = \overline{1, n}).$$

Тоді

$$\begin{aligned} \Delta_j &= c_1x_{1j} + c_2x_{2j} + \dots + c_mx_{mj} - c_j \quad (j = \overline{1, n}), \\ z_0 &= c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_mx_m. \end{aligned}$$

Складемо звичайну симплекс-таблицю, в якій у стовпчику для  $A_0$  будуть стояти компоненти псевдоплану, що відповідають векторам його базису.

Якщо всі  $x_k \geq 0$  ( $k = \overline{1, m}$ ), то початковий псевдоплан  $X$  – оптимальний план задачі (6.12)–(6.14). На цьому процес розв'язування задачі завершується.

Припустимо, що серед  $x_k$  ( $k = \overline{1, m}$ ) є від'ємні величини. Тоді можливі такі два випадки:

1. Є такий індекс  $k$  ( $k = \overline{1, m}$ ), для якого  $x_k < 0$ , а всі коефіцієнти  $x_{kj} \geq 0$  ( $j = \overline{1, n}$ ).

2. Для кожного індексу  $k$  ( $k = \overline{1, m}$ ), для якого  $x_k < 0$ , серед коефіцієнтів  $x_{kj}$  ( $j = \overline{1, n}$ ) є хоча б один від'ємний.

У першому випадку задача (6.12)–(6.14) не має планів. У другому можна перейти до іншого псевдоплану, значення лінійної форми для якого більше, ніж значення лінійної форми для початкового псевдоплану.

Припустимо, що справедливий другий випадок. До нового псевдоплану переходять так. Серед компонент псевдоплану  $x_k$  ( $k = \overline{1, m}$ ) вибираємо від'ємну. Нехай вибраною від'ємною компонентою є  $x_l$ . Тоді вектор  $A_l$  виводитимемо з базису. Якщо

$$\min_j \frac{\Delta_j}{x_{lj}} = \frac{\Delta_k}{x_{lk}},$$

де мінімум беруть за тими  $j$ , для яких  $x_{lj} < 0$ , то вектор  $A_k$  вводимо в базис на місце вектора  $A_l$ . До нової симплекс-таблиці переходять за такими ж правилами, як і для звичайного симплексного алгоритму.

Через скінченну кількість кроків ми знайдемо псевдоплан, усі компоненти якого є невід'ємні (тобто оптимальний план задачі), або переконаємось в тому, що задача не має розв'язку.

Отже, двоїстий симплекс-метод відрізняється від звичайного правилом вибору вектора, який треба вивести з базису, і вектора, який слід ввести в базис.

Для розв'язування задачі лінійного програмування двоїстим симплекс-методом необхідно мати початковий псевдоплан і базис, що йому відповідає. Є кілька способів знаходження початкового псевдоплану, які за складністю еквівалентні пошуку початкового опорного плану під час розв'язування задачі звичайним симплексним методом. Однак у багатьох випадках початковий псевдоплан можна знайти безпосередньо із двоїстої задачі.

**6.1.5.** Однією з основних спеціальних моделей лінійного програмування є *транспортна задача*. Це пояснюють тим, що на транспорті, в постачально-збутових і торговельних організаціях, у будь-якій галузі економіки важливе значення має зниження транспортних витрат на перевезення вантажів. Крім цього, до транспортної задачі зводять і деякі виробничі задачі, зокрема, задачу оптимального використання різних видів пального за умови різних типів агрегатів, у яких його використовують; задачу визначення оптимальної структури використання сільськогосподарських угідь з метою одержання максимальних обсягів продукції, задачу оптимізації завантаження обладнання на виробництві з використанням різних технологій та ін. Водночас транспортна

модель і її узагальнення є частковими випадками деяких мережевих моделей [71, т.1, с. 241].

Розглянемо формулювання транспортної задачі в загальному випадку. Нехай у пунктах постачання  $A_1, A_2, \dots, A_m$  міститься однорідний товар, який треба перевезти в пункти споживання  $B_1, B_2, \dots, B_n$ . Відомо, скільки одиниць товару є в кожному пункті постачання, скільки одиниць товару потребує кожний пункт споживання, а також вартість перевезення одиниці товару з кожного пункту постачання у кожний пункт споживання.

Припустимо, що виконується умова балансу, тобто загальна кількість одиниць товару, який є в пунктах постачання, збігається із загальною кількістю одиниць товару, що потребують пункти споживання. Тоді з економічного погляду задачу формулюють так: треба так запланувати перевезення товару з пунктів постачання в пункти споживання, щоб весь товар з пунктів постачання був вивезений, потреби всіх пунктів споживання були задоволені й водночас загальна вартість усіх перевезень була б мінімальною.

Для запису задачі в математичній формі введемо такі позначення:

$a_i$  – кількість одиниць товару, що міститься в  $i$ -му пункті постачання  $A_i$  ( $i = \overline{1, m}$ );

$b_j$  – кількість одиниць товару, що потребує  $j$ -й пункт споживання  $B_j$  ( $j = \overline{1, n}$ );

$c_{ij}$  – вартість перевезення одиниці товару з  $i$ -го пункту постачання  $A_i$  в  $j$ -й пункт споживання  $B_j$ ;

$x_{ij}$  – кількість одиниць товару, що планується перевезти з  $i$ -го пункту постачання  $A_i$  в  $j$ -й пункт споживання  $B_j$  (шукані величини).

Безпосередньо з умов задачі отримуємо наступну модель лінійного програмування: знайти мінімум лінійної форми

$$L = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (6.26)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1, m}), \quad (6.27)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1, n}), \quad (6.28)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}). \quad (6.29)$$

Цільова функція (6.23) мінімізує сукупні затрати на транспортування всіх партій товару із всіх пунктів постачання у всі пункти споживання. Система обмежень (6.24) свідчить про те, що весь товар із кожного пункту його постачання повинен бути повністю вивезений. Система обмежень (6.25) демонструє, що потреба в товарі у кожному пункті споживання має бути задоволена. Система обмежень (6.26) засвідчує, що за кожним маршрутом або перевозиться деяка кількість товару, або ні.

Умова виконання балансу

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

для розв'язування транспортної задачі не є суттєвою, оскільки за її відсутності ведення фіктивного пункту постачання чи споживання з нульовою вартістю перевезень відповідно з нього чи до нього відновлює цю умову.

Отже, транспортна задача є задачею лінійного програмування з  $n + m$  обмеженнями-рівняннями і  $n + m$  невідомими. Ця задача завжди має розв'язок. Можна довести, що кількість лінійно незалежних рівнянь системи (6.24), (6.25) дорівнює  $m + n - 1$ . Тобто одне з цих  $n + m$  рівнянь залежить від інших і, в результаті, вся система має не єдиний, а безліч розв'язків.

Транспортну задачу як задачу лінійного програмування можна розв'язати за допомогою алгоритму симплексного методу. Однак, унаслідок практичної важливості цієї задачі та специфіки обмежень (обмеження задачі задані у вигляді лінійних рівнянь, кожне невідоме належить лише до двох рівнянь, коефіцієнти при невідомих – одиниці) для її розв'язання розроблений простіший, ніж у загальному випадку, варіант симплексного методу – *метод потенціалів*. Крім того, для розв'язування транспортної задачі створені інші спеціальні методи.

Наявні скінченні алгоритми розв'язування транспортної задачі поділяють на дві групи. Перша група алгоритмів ґрунтується на найбільш популярному методі лінійного програмування – симплексному. До цієї групи належать такі методи: потенціалів, розподільчий і його модифікації, Глейзала, квадратів. Друга група ґрунтується на, так званому, методі послідовного скорочення нев'язок розв'язування задач лінійного програмування. До другої групи належать методи розв'язкових доданків, диференціальних рент і угорський метод з різними модифікаціями. Щоб ознайомитись з цими методами, можна скористатися спеціальною літературою, зокрема [78, с. 112; 75, с. 227] та ін.

## 6.2. Цілочислове програмування

**6.2.1.** Під час розв'язування задач економіки й управління господарським процесом досить часто трапляються задачі, в яких частина або всі змінні мають бути лише цілими або дискретними значеннями. Це, зокрема, задачі, в яких змінні величини означають кількість одиниць неподільної продукції, наприклад, розподіл виробничих завдань між підприємствами, розкрій матеріалів, завантаження обладнання, розподіл літаків за рейсами, а також задачі з виробництва неподільної продукції.

Якщо одиниця становить малу частину всього обсягу виробництва, то оптимальний розв'язок знаходять звичайним симплексним методом, заокруглюючи його до цілих одиниць, відповідно до змісту задачі. У протилежному випадку заокруглення може призвести до розв'язку, який далекий від оптимального цілочислового розв'язку. Заокруглення компонент цілочислового розв'язку до найближчих цілих чисел може не лише відвести від оптимального плану, а й вивести за межі множини планів. Наприклад, якщо розв'язати задачу  $L = -2x + y \rightarrow \min$ ;

$$\begin{cases} -x + y \leq 2, \\ 3x - 5y \leq 6, \\ 5x + 9y \leq 36; \end{cases}$$

$x \geq 0, y \geq 0$ ;  $x, y$  – цілі, без урахування умови цілочисловості змінних, то одержимо [78, с. 170], що лінійна форма досягає мінімуму в



точці  $C(4,5;1,5)$ . Заокруглення компонент розв'язку до найближчих цілих чисел приводить до точок  $X_1 = (5; 2)$ ,  $X_2 = (5; 1)$ ,  $X_3 = (4; 2)$ ,  $X_4 = (4; 1)$ . Жодна з цих точок не належить до множини планів задачі, бо не задовольняє задану систему нерівностей.

Розв'язавши задачу графічно [78, с. 170], отримаємо розв'язок  $X = (3; 1)$ . Мінімальне значення лінійної форми становить -5 одиниць.

Хоча на сьогодні розроблено чимало методів розв'язування цілочислових задач, жоден з них не забезпечує бажаної ефективності відповідних обчислювальних процедур, що особливо виявляють у випадку збільшення розмірності задачі. На відміну від задач лінійного програмування, час розв'язування яких порівняно невеликий, реалізація цілочислових алгоритмів в багатьох випадках досить утруднена.

Історично першою задачею цілочислового типу була опублікована угорським математиком Б. Егерварі (1932) задача про призначення персоналу. Систематичні дослідження цілочислового програмування починаються з 1955 р., коли на Другому симпозіумі з лінійного програмування була розглянута задача про бомбардувальника, відома також як задача про ранець.

**6.2.2.** Проблеми, зумовлені вимогами цілочисловості значень змінних, виникають не лише за умови лінійних математичних моделей. Однак ми коротко розглянемо лише лінійні задачі. Математичну модель задачі лінійного цілочислового програмування формулюють так: треба знайти екстремум (мінімум чи максимум) лінійної функції

$$L = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

за умов

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \{ \leq, =, \geq \} b_i \quad (i = \overline{1, m}),$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}),$$

$x_j$  – ціле ( $j = 1, 2, \dots, n_1; n_1 \leq n$ ).

Якщо  $n_1 < n$ , то задачу називають *частково цілочисловою*, якщо  $n_1 = n$ , то – *повністю цілочисловою*.

Усі спеціальні методи розв'язування задач лінійного цілочислового програмування можна поділити на три групи: методи відтинання (метод Р. Гоморі та ін.); комбінаторні методи (метод гілок і меж та ін.); методи випадкового пошуку й евристичні методи.

**6.2.3.** Розглянемо метод розв'язування задач лінійного цілочислового програмування, який був запропонований 1958 р. американським математиком Р. Гоморі спочатку для повністю цілочислових задач лінійного програмування, а згодом частково цілочислових задач. Цей метод належить до групи методів відтинання.

Нехай задача лінійного цілочислового програмування має такий вигляд:

$$L = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min; \quad (6.30)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{1, m}), \quad (6.31)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}), \quad (6.32)$$

$$x_j - \text{ціле} \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (6.33)$$

Із вищезазначеного випливає, що множина планів задачі (6.30)–(6.32), тобто задачі лінійного цілочислового програмування без вимоги цілочисловості, є опуклою множиною, яку позначимо  $M$ . Множина планів задачі лінійного цілочислового програмування (6.30)–(6.33) – сукупність ізольованих цілочислових точок, які належать  $M$ . Позначимо цю множину  $N$ , а її опуклу оболонку –  $S$ . Очевидно, що  $S \subset M$ . Оскільки всі крайні точки множини  $S$  є цілочисловими, то оптимальний план задачі з лінійною формою (6.30) і допустимою множиною  $S$  збігається з оптимальним планом задачі (6.30)–(6.33). Ця властивість дає змогу застосувати для розв'язування задачі лінійного цілочислового програмування методи розв'язування задач лінійного програмування. Якраз вона лежить в основі методів відтинання.

Ідея методів відтинання відображена у їхній назві. Від множини допустимих розв'язків задачі лінійного програмування (6.30)–(6.32) «відтинають» ту її частину, яка містить оптимальний неціло-



Таблиця 6.5

$i$	Б	$c$	$A_0$	$c_1$	$c_2$	$\dots$	$c_l$	$\dots$	$c_m$	$c_{m+1}$	$\dots$	$c_n$
				$A_1$	$A_2$	$\dots$	$A_l$	$\dots$	$A_m$	$A_{m+1}$	$\dots$	$A_n$
1	$A_1$	$c_1$	$\bar{x}_1$	1	0	$\dots$	0	$\dots$	0	$x_{1,m+1}$	$\dots$	$x_{1n}$
2	$A_2$	$c_2$	$\bar{x}_2$	0	1	$\dots$	0	$\dots$	0	$x_{2,m+1}$	$\dots$	$x_{2n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
$l$	$A_l$	$c_l$	$\bar{x}_l$	0	0	$\dots$	1	$\dots$	0	$x_{l,m+1}$	$\dots$	$x_{ln}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
$m$	$A_m$	$c_m$	$\bar{x}_m$	0	0	$\dots$	0	$\dots$	1	$x_{m,m+1}$	$\dots$	$x_{mn}$
$m+1$			$z_0$	0	0	$\dots$	0	$\dots$	0	$\Delta_{m+1}$	$\dots$	$\Delta_n$

Можливі два випадки:

а) одержаний оптимальний план  $\bar{X}$  цієї задачі є цілочисловим, тобто всі  $\bar{x}_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ) – цілі;

б) серед компонент оптимального плану  $\bar{X}$  є хоча би одна дробова.

У випадку а) розв'язування задачі припиняється. Вектор  $\bar{X}$  є розв'язком задачі (6.30) – (6.33). У випадку б) процес розв'язування задачі лінійного цілочислового програмування продовжують.

Нехай виконуються умови випадку б). Тобто якась компонента оптимального плану  $\bar{X}$  є дробова. Припустимо, що дробовою є компонента  $\bar{x}_l$ . Тоді серед коефіцієнтів  $x_{lj}$  ( $j = m+1, \dots, n$ ) також повинні бути дробові. Справді, якщо б серед  $x_{lj}$  ( $j = m+1, \dots, n$ ) не було дробових, то не можна було б підібрати цілих значень для  $x_l, x_{m+1}, \dots, x_n$ , щоб виконувалась рівність

$$x_l = \bar{x}_l - \sum_{j=m+1}^n x_{lj} x_j. \quad (6.34)$$

А це означало б протилежне до нашого припущення, що задача (6.30)–(6.33) не має розв'язку.

2. Ввести в задачу (6.30)–(6.33) додаткове обмеження

$$z = -\{\bar{x}_i\} - \sum_{j=m+1}^n (-\{x_{ij}\})x_j. \quad (6.35)$$

де  $z$  нова змінна,

$\{x\} = x - [x]$  – дробова частина числа  $x$ ,

$[x]$  – ціла частина числа  $x$  (тобто найбільше ціле число, яке не перевищує числа  $x$ ).

Можна довести, що, якщо  $X \in N$ , виконуються умови  $z$  – ціле і  $z \geq 0$ . Введене лінійне обмеження (6.35) відтинає від допустимої множини частину області, в якій немає планів задачі (6.30)–(6.33), але є знайдений оптимальний план  $\bar{X}$  задачі (6.30)–(6.32) [78, с. 178].

Із вигляду цього додаткового обмеження впливає його лінійна незалежність від інших обмежень.

3. Табл. 6.5 (останню симплекс-таблицю для розв'язування задачі (6.30)–(6.32)) доповнити  $(m+1)$ -м рядком, який відповідає додатковому обмеженню (6.35), і новим стовпчиком з коефіцієнтами розкладу нового вектора  $A_{n+1}$ , який відповідатиме новій змінній  $z$ , через вектори базису (базис доповнюється вектором  $A_{n+1}$ ).

Після доповнення табл. 6.5 отримаємо нову таблицю. Як видно з табл. 6.6, таке доповнення не змінить елементів  $(m+1)$ -го рядка, бо в лінійній формі коефіцієнт, що стоїть біля нової змінної  $z$ , дорівнює нулю. Оскільки  $\bar{x}_i \geq 0$  ( $i = \overline{1, m}$ ),  $-\{\bar{x}_i\} < 0$ , то розширена таблиця дає псевдоплан і, зрозуміло, що подальше розв'язування розширеної задачі доцільно проводити двоїстим симплексним методом. На першій же ітерації двоїстого симплекс-методу вектор  $A_{n+1}$ , який відповідає додатковій змінній  $z$ , буде виведений із базису.

4. Знайти оптимальний план розширеної задачі, користуючись двоїстим симплекс-методом. Після одержання оптимального плану потрібно перевірити його на цілочисловість. У випадку, коли одержаний оптимальний план цієї задачі є цілочисловим, розв'язування задачі лінійного цілочислового програмування (6.30)–(6.33) закінчують. Одержаний план є розв'язком цієї задачі.

Таблиця 6.6

$i$	Б	$c$	$A_0$	$c_1$ $A_1$	$c_2$ $A_2$	$\dots$	$c_l$ $A_l$	$\dots$	$c_m$ $A_m$	$c_{m+1}$ $A_{m+1}$	$\dots$	$c_n$ $A_n$	0 $A_{n+1}$
1	$A_1$	$c_1$	$\bar{x}_1$	1	0	$\dots$	0	$\dots$	0	$x_{1,m+1}$	$\dots$	$x_{1n}$	0
2	$A_2$	$c_2$	$\bar{x}_2$	0	1	$\dots$	0	$\dots$	0	$x_{2,m+1}$	$\dots$	$x_{2n}$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$
$l$	$A_l$	$c_l$	$\bar{x}_l$	0	0	$\dots$	1	$\dots$	0	$x_{l,m+1}$	$\dots$	$x_{ln}$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$
$m$	$A_m$	$c_m$	$\bar{x}_m$	0	0	$\dots$	0	$\dots$	1	$x_{m,m+1}$	$\dots$	$x_{mn}$	0
$m+1$			$z_0$	0	0	$\dots$	0	$\dots$	0	$\Delta_{m+1}$	$\dots$	$\Delta_n$	0
$m+2$	$A_{n+1}$	0	$-\{\bar{x}_l\}$	0	0	$\dots$	0	$\dots$	0	$-\{x_{l,m+1}\}$	$\dots$	$-\{x_{ln}\}$	1

Якщо він виявиться не цілочисловим, то будують нове додаткове обмеження (переходимо до п. 2 алгоритму) і продовжують розв'язувати задачу двоїтим симплекс-методом вже з двома додатковими обмеженнями і т. д.

Зауважимо, що якщо в кінці деякої великої ітерації (великою ітерацією називають виконання 2–4 алгоритму) виявиться, що базис містить вектор, який відповідає одній з додаткових змінних і значення цієї змінної в оптимальному плані є додатне, то рядок і стовпчик симплексної таблиці, що відповідають цій змінній, можна вилучити.

П р и к л а д 6.2. Знайти розв'язок такої задачі лінійного цілочислового програмування:

$$L = x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \min; \quad (6.36)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4; \end{cases} \quad (6.37)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 3}; \quad (6.38)$$

$$x_j - \text{цілі}, \quad j = \overline{1, 3}. \quad (6.39)$$

*Розв'язання.* Скористаємось алгоритмом Р. Гоморі. Спочатку знайдемо розв'язок вихідної задачі без вимоги цілочисловості змінних. Початковий опорний план задачі лінійного цілочислового програмування (6.36)–(6.38) не заданий і не очевидний. Зважаючи на це, для знаходження цього плану побудуємо і розв'яжемо допоміжну задачу.

$$\overline{L} = x_4 + x_5 \rightarrow \min; \quad (6.40)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 4; \end{cases} \quad (6.41)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 5}. \quad (6.42)$$

Допоміжна задача (6.40)–(6.42) має очевидний (його знайдено підстановкою в систему (6.41) замість  $x_1, x_2, x_3$  нулів) опорний план  $X_{\text{од}} = (0, 0, 0, 5, 4)$ , якому відповідає базис, що складається з векторів  $A_4, A_5$ . Розв'яжемо її симплекс-методом (табл. 6.7).

Таблиця 6.7

$i$	Б	$c$	$A_0$	0	0	0	1	1
				$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$
1	$A_4$	1	5	2	1	1	1	0
2	$A_5$	1	4	3	-2	3	0	1
3			9	5	-1	4	0	0
1	$A_4$	1	7/3	0	7/3	-1	1	-2/3
2		0	4/3	1	-2/3	1	0	1/3
3	$A_1$		7/3	0	7/3	-1	0	-5/3
1	$A_2$	0	1	0	1	-3/7	3/7	-2/7
2		0	2	1	0	5/7	2/7	1/7
3	$A_1$		0	0	0	0	-1	-1

Із останньої симплекс-таблиці випливає, що  $\min \overline{L} = 0$ , якщо  $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = x_4 = x_5 = 0$ . Базис, який відповідає оптимальному плану допоміжної задачі, складається з векторів  $A_1, A_2$ . До нього не належать штучні вектори. Початковий опорний план вихідної

задачі – це вектор  $X_{пв} = (2, 1, 0)$ , якому відповідає базис, що складається з векторів  $A_1, A_2$ .

Тепер складемо першу симплекс-таблицю для розв'язування вихідної нецілочислової задачі (6.36)–(6.38). Для її заповнення треба використати останню симплекс-таблицю (табл. 6.7).

Таблиця 6.8

$i$	Б	$c$	$A_0$	1 $A_1$	1 $A_2$	-1 $A_3$
1	$A_2$	1	1	0	1	-3/7
2	$A_1$	1	2	1	0	5/7
3			3	0	0	9/7

Таблиця 6.8 відрізняється від останньої симплекс-таблиці (табл. 6.7) допоміжної задачі тим, що вилучено стовпчики, які відповідають штучним векторам  $A_4, A_5$ , а значення коефіцієнтів  $c_j$  взято з лінійної форми  $L$  вихідної задачі (6.36) – (6.38). Крім того, елементи останнього рядка обчислено на підставі нових значень коефіцієнтів  $c_j$ .

З табл. 6.8 видно, що знайдений початковий опорний план вихідної задачі не оптимальний. Перейдемо до іншого опорного плану, склавши другу симплекс-таблицю (табл. 6.9).

Таблиця 6.9

$i$	Б	$c$	$A_0$	1 $A_1$	1 $A_2$	-1 $A_3$
1	$A_2$	1	11/5	3/5	1	0
2	$A_3$	-1	14/5	7/5	0	1
3			-3/5	-9/5	0	0

Отримали оптимальний план вихідної задачі (6.36)–(6.38). Це план  $X_{об} = X_1 = (0, 11/5, 14/5)$ . Оптимальне значення лінійної форми для цього плану дорівнює  $-3/5$ .

Оскільки оптимальний план вихідної задачі не є цілочисловим, то введемо додаткове обмеження, що має властивість правильності. За змінну, на основі якої можна скласти відтинання, можна брати  $x_2$  або  $x_3$  (друга і третя компоненти оптимального



плану є дробові). Побудуємо додаткове обмеження на основі змінної  $x_2$ . Воно буде мати такий вигляд:

$$x_4 = -\{\bar{x}_2\} + \{x_{21}\}x_1,$$

де  $\bar{x}_2 = 11/5$ ,  $x_{21} = 3/5$ ,  $\{x\}$  – дробова частина числа  $x$ .

Отже,  $x_4 = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}x_1$ .

Розв'яжемо тепер задачу (6.36)–(6.38) з цим додатковим обмеженням. Для цього доповнимо останню симплекс-таблицю (табл. 6.9) новим рядком, який відповідатиме новому обмеженню

$$-\frac{3}{5}x_1 + x_4 = -\frac{1}{5},$$

і новим стовпчиком з коефіцієнтами розкладу нового вектора  $A_4$ , який відповідатиме новій змінній  $x_4$ , через вектори базису (базис доповнюють вектором  $A_4$ ). Одержимо нову симплекс-таблицю (табл. 6.10).

Таблиця 6.10

$i$	Б	$c$	$A_0$	1 $A_1$	1 $A_2$	-1 $A_3$	0 $A_4$
1	$A_2$	1	11/5	3/5	1	0	0
2	$A_3$	-1	14/5	7/5	0	1	0
3	$A_3$		-3/5	-9/5	0	0	0
4	$A_4$	0	-1/5	-3/5	0	0	1

З цієї розширеної табл. 6.10 видно, що ми отримали псевдоплан (елемент, що наведений у четвертому рядку і стовпчику  $A_0$ , від'ємний). Тому продовжуємо розв'язувати «розширену» задачу з допомогою двоїстого симплекс-методу. На першій же ітерації двоїстого симплекс-методу вектор  $A_4$  виводимо з базису ( $-1/5 < 0$ ). Оскільки

$$\min_{j, x_{4j} < 0} \frac{\Delta_j}{x_{4j}} = \min \left( \frac{\Delta_1}{x_{41}} \right) = \frac{-9/5}{-3/5} = 3 = \frac{\Delta_1}{x_{41}}$$

(в нас тільки  $x_{41} < 0$ ), то вектор  $A_1$  вводимо в базис. Складемо другу симплекс-таблицю (табл. 6.11). До нової симплекс-таблиці

переходять за такими ж формулами, як і для звичайного симплексного методу.

Таблиця 6.11

$i$	Б	$c$	$A_0$	1 $A_1$	1 $A_2$	-1 $A_3$	0 $A_4$
1	$A_2$	1	2	0	1	0	1
2	$A_3$	-1	7/3	0	0	1	7/3
3	$A_3$		0	0	0	0	-3
4	$A_1$	0	1/3	1	0	0	-5/3

Оскільки в стовпчику  $A_0$  всі елементи плану невід'ємні, то перша велика ітерація закінчена і знайдено новий оптимальний план  $X_2 = (1/3, 2, 7/3)$ , який є нецілочисловий. Введемо додаткове обмеження за змінною  $x_1$

$$-\frac{1}{3}x_4 + x_5 = -\frac{1}{3}.$$

Побудуємо нову симплекс-таблицю і, скориставшись двоїтим симплекс-методом, знайдемо новий оптимальний план у наступній великій ітерації. Результати обчислень записуємо в таблицю (табл. 6.12).

Таблиця 6.12

$i$	Б	$c$	$A_0$	1 $A_1$	1 $A_2$	-1 $A_3$	0 $A_4$	0 $A_5$
1	$A_2$	1	2	0	1	0	1	0
2	$A_3$	-1	7/3	0	0	1	7/3	0
3	$A_3$		0	0	0	0	-3	0
4	$A_1$	0	1/3	1	0	0	-5/3	0
5	$A_5$	0	-1/3	0	0	0	-1/3	1
1	$A_2$	1	1	0	1	0	0	3
2	$A_3$	-1	0	0	0	1	0	7
3	$A_3$		3	0	0	0	0	-9
4	$A_1$	1	2	1	0	0	0	-5
5	$A_4$	0	1	0	0	0	1	-3

Серед елементів стовпчика  $A_0$ , які відповідають векторам базису, немає від'ємних, тому отриманий псевдоплан є планом, а саме оптимальним планом.

Так ми отримали оптимальний план  $X_3 = (2, 1, 0)$  наступної великої ітерації, який є цілочисловим, а отже, розв'язком заданої задачі лінійного цілочислового програмування. Значення лінійної форми для нього дорівнює 3.

Якщо на початку ввести додаткове обмеження не за змінною  $x_2$ , а за  $x_3$ , то для отримання розв'язку достатньо було б однієї великої ітерації (табл. 6.13).

Таблиця 6.13

$i$	Б	$c$	$A_0$	1 $A_1$	1 $A_2$	-1 $A_3$	0 $A_4$
1	$A_2$	1	11/5	3/5	1	0	0
2	$A_3$	-1	14/5	7/5	0	1	0
3			-3/5	-9/5	0	0	0
4	$A_4$	0	-4/5	-2/5	0	0	1
1	$A_3$	1	1	0	1	0	3/2
2	$A_3$	-1	0	0	0	1	7/2
3			3	0	0	0	-9/2
3	$A_1$	1	2	1	0	0	-5/2

Недоліками методу Р. Гоморі є, по-перше, багаторазовість використання двоїстого симплекс-методу і зв'язані з ним похибки обчислень; по-друге, побудова додаткових обмежень. Цих недоліків немає в методі гілок і меж, який уперше запропонований у праці Ленда і Дога (1960).

Метод гілок і меж належить до групи комбінаторних методів дискретного програмування і є одним з найпоширеніших методів цієї групи. Є різні модифікації цього методу, спрямовані на розв'язування конкретних типів задач. Для ознайомлення з цими методами можна скористатись спеціальною літературою, зокрема [78, с 186; 45, с. 251] та ін.

### 6.3. Нелінійне програмування

**6.3.1. Математична модель задачі нелінійного програмування.** Якщо в моделі математичного програмування цільова функція чи хоча б одна функція  $g_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ) у лівій частині обмежень (6.2) є нелінійною, то її називають моделлю задачі нелінійного програмування.

Реальні задачі економічного аналізу здебільшого є нелінійними. Однак дуже часто для полегшення роботи їх спрощують, замінюючи лінійними. Наприклад, ефективність виробництва змінюється переважно непропорційно до масштабу використання ресурсів унаслідок розподілу витрат виробництва на змінні та умовно-постійні, вплив різних зовнішніх та внутрішніх чинників тощо. Зважаючи на це, відповідна цій задачі модель буде нелінійною.

Запишемо математичну модель задачі нелінійного програмування у такому вигляді:

$$F = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max(\min), \quad (6.43)$$

за умов

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i; \quad i = \overline{1, k}; \quad (6.44)$$

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i; \quad i = \overline{k+1, m}. \quad (6.45)$$

У цьому випадку цільова функція  $F$  може мати кілька екстремальних точок.

Множину точок  $n$ -вимірного векторного простору, координати яких задовольняють умови (6.44) і (6.45), позначимо також  $M$ . У разі необхідності набір обмежень (6.44), (6.45) завжди можна звести або до системи, яка містить лише нерівності

$$g_i(X) = b_i \Leftrightarrow \begin{cases} g_i(X) \geq b_i, \\ g_i(X) \leq b_i, \end{cases} \quad i = \overline{k+1, m},$$

або, давши фіктивні змінні  $y$ , до системи рівнянь:

$$g_i(X) \geq b_i \Leftrightarrow g_i(X) - y^2 = b_i, \quad i = \overline{1, k}.$$

Як і в задачах лінійного програмування, вектор

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n) \in M$$

називають *допустимим планом*, а якщо він максимізує (мінімізує) цільову функцію (6.43) – *оптимальним планом задачі нелінійного програмування*. В останньому випадку  $X$  буде точкою глобального максимуму (мінімуму).

Задачі нелінійного програмування мають деякі властивості, наявність яких ускладнює процес їх розв’язування порівняно із задачами лінійного програмування. Це зокрема, такі властивості.

1. Множина допустимих планів  $M$  може мати досить складну структуру (наприклад, бути невиконним чи незв’язним).

2. Глобального максимуму (мінімуму) можна досягати як всередині множини  $M$ , так і на його межах (де він не збігатиметься з жодним із локальних екстремумів).

3. Цільова функція  $f$  може бути недиференційованою, що утруднює застосування методів математичного аналізу.

Зважаючи на це, універсального методу розв’язання нелінійних екстремальних задач немає. Методи знаходження розв’язку задач нелінійного програмування розробляють під спеціальні класи задач. Сьогодні існують такі методи нелінійного програмування [41]:

- класичний метод оптимізації (за допомогою множників Лагранжа);
- метод Куна-Такера;
- метод прямого пошуку;
- градієнтний метод;
- метод Ньютона та його модифікації;
- оптимізація за наявності обмежень (методи змінних допусків, метод множників Лагранжа, метод штрафних функцій та інші).

Метод штрафних функцій у поєднанні з методами пошуку безумовного екстремуму є універсальним засобом розв’язання задач математичного нелінійного програмування.

**6.3.2. Метод множників Лагранжа (класична задача оптимізації).** Одним з найбільш загальних підходів до розв’язування задач умовної оптимізації (коли в задачі, крім цільової функції, є обмеження) є *метод множників*. Його розробив Лагранж для випадку, коли всі обмеження задачі є класичними, тобто рівняннями. Згодом, на підставі ряду узагальнень цього методу,

були запропоновані алгоритми розв'язування задач з неklasичними умовами.

У 3.1 ми розглядали задачі умовної оптимізації з обмеженими рівняннями, які можна було розв'язати відносно деякого набору незалежних змінних. Початкову задачу внаслідок вилучення цих змінних можна звести до задачі безумовної оптимізації та розв'язати її за допомогою класичних методів математичного аналізу. Якщо таку процедуру виконати не вдається, то доцільно застосувати метод множників Лагранжа.

Для кращого розуміння цього методу спочатку пояснимо його ідею на простому прикладі задачі нелінійного програмування з двома змінними  $x_1, x_2$  і одним обмеженням-рівнянням  $g(x_1, x_2) = b$ , яке можна розв'язати відносно другої змінної  $x_2 = \varphi(x_1)$ . Припустимо, що цільова функція  $F = f(x_1, x_2)$  і функція  $g(x_1, x_2)$  неперервно-диференційовані. Знайдемо необхідні умови, яким має задовольняти точка локального екстремуму.

Беручи до уваги наше припущення, одержимо рівність  $F = f(x_1, \varphi(x_1)) = \eta(x_1)$ . З обмеження  $g(x_1, x_2) = b$  випливає, що з усіх точок площини  $x_1 O x_2$  нас цікавлять лише ті точки, котрі лежать на кривій  $x_2 = \varphi(x_1)$ . Якщо в деякій із цих точок  $F$  досягає локального екстремуму, то і  $\eta(x_1)$  досягає екстремуму  $\eta^0$ . Зауважимо, що цей екстремум не є умовним, оскільки спосіб побудови функції  $\eta(x_1)$  передбачає урахування початкового обмеження і ніяких додаткових вимог до  $x_1$  ставити не треба. Отже, першу координату  $x_1^0$

екстремальної точки  $X^0$  можна знайти з рівняння 
$$\left[ \frac{d\eta(x_1)}{dx_1} \right]_{x_1^0} = 0.$$

Оскільки  $\eta(x_1) = f(x_1, x_2)$  і  $g(x_1, x_2) = b \Leftrightarrow x_2 = \varphi(x_1)$ , то 
$$\frac{d\eta}{dx_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{d\varphi}{dx_1} \quad \text{і} \quad \frac{\partial g}{\partial x_1} + \frac{\partial g}{\partial x_2} \cdot \frac{d\varphi}{dx_1} = 0.$$
 Звідси отримуємо, що 
$$\frac{d\varphi}{dx_1} = - \frac{\partial g / \partial x_1}{\partial g / \partial x_2} \quad \text{і} \quad \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial g / \partial x_1}{\partial g / \partial x_2} \right]_{x_1^0} = 0.$$

Якщо відношення  $\frac{\partial f / \partial x_2}{\partial g / \partial x_2}$  позначити  $\lambda$  і припустити, що

$\frac{\partial g}{\partial x_2} \neq 0$ , то шукані необхідні умови існування екстремуму можна

записати так:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda \cdot \frac{dg}{dx_1} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda \cdot \frac{dg}{dx_2} = 0; \quad g(x_1, x_2) - b = 0. \quad (6.46)$$

Рівняння (6.46) треба розглядати як систему. Їх сумісне розв'язування відносно невідомих  $x_1, x_2, \lambda$  дає змогу знайти всі точки, в яких очікується локальний екстремум функції  $F$ . Головне тут полягає у тому, що цю систему можна отримати більш коротким і формальним шляхом. Підґрунтям його є те, що необхідною умовою існування екстремуму функції  $f(X)$  є рівність нулю її градієнта (див. 3.1). Цей шлях полягає у тому, що на підставі даних вихідної задачі будують функцію

$$f(x_1, x_2) + \lambda [b - g(x_1, x_2)] = \Phi(x_1, x_2, \lambda),$$

а потім прирівнюють до нуля частинні похідні  $\partial \Phi / \partial x_1$ ,  $\partial \Phi / \partial x_2$ ,  $\partial \Phi / \partial \lambda$ , вважаючи  $x_1, x_2, \lambda$  незалежними змінними. Функцію  $\Phi(x_1, x_2, \lambda)$  називають *функцією Лагранжа*, а множник  $\lambda$  – *множником Лагранжа*. Суть методу множників Лагранжа полягає якраз у знаходженні розв'язку системи (6.46) з наступною перевіркою достатніх умов екстремуму у всіх знайдених точках  $X^0$ , порівнянні отриманих результатів і виборі найкращого з них (глобального оптимуму)  $X^*$ .

Розглянемо цей метод у загальному вигляді. Нехай нам задана задача нелінійного програмування: знайти

$$F = f(X) \rightarrow \max(\min) \quad (6.47)$$

За наявності обмежень

$$g_i(X) = b_i, \quad i = \overline{1, m}; \quad X = (x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (6.48)$$

Причому є похідні  $dF / dx_j$ ;  $dg_i / dx_j$ .

Алгоритм цього методу складаються з чотирьох кроків.

1. Будують функцію Лагранжа

$$\Phi(X, \Lambda) = f(X) + \sum_{i=1}^m \lambda_i [b_i - g_i(X)], \quad (6.49)$$

де  $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ ,  $\lambda_i$ ,  $i = \overline{1, m}$  – множники Лагранжа.

2. Знаходять частинні похідні

$$\frac{\partial \Phi(X, \Lambda)}{\partial x_j} = \frac{\partial f(X)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i(X)}{\partial x_j}; \quad j = \overline{1, n};$$

$$\frac{\partial \Phi(X, \Lambda)}{\partial \lambda_i} = b_i - g_i(X); \quad i = \overline{1, m}$$

за змінними  $x_j$ ,  $j = \overline{1, n}$  і  $\lambda_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

3. Розв'язують систему  $m + n$  рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\partial f(X)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i(X)}{\partial x_j} = 0; & j = \overline{1, n}, \\ b_i - g_i(X) = 0; & i = \overline{1, m} \end{cases} \quad (6.50)$$

відносно  $m + n$  невідомих  $x_j$ ,  $j = \overline{1, n}$  та  $\lambda_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

4. Досліджують точки, які задовольняють систему (6.50), на максимум (мінімум) за допомогою достатньої умови екстремуму.

Необхідність виконання останнього етапу зумовлена тим, що рівність градієнта функції нулю є необхідною, а не достатньою умовою екстремуму. Достатні умови екстремуму існують, але справедливі для більш часткових ситуацій (у разі досить жорстких припущень відносно функцій  $f$  і  $g_i$ ). Застосування їх на практиці зумовлює чималі труднощі.

Перевагою розглянутого методу є те, що він дає змогу перейти від умовної оптимізації до безумовної і, відповідно, розширити арсенал доступних засобів вирішення проблеми. Проте неважко простежити, що задача розв'язування системи рівнянь (6.50), до якої зводиться цей метод, у загальному випадку не є набагато простішою від вихідної проблеми пошуку екстремуму (6.47)–(6.48). До того ж трапляються випадки, коли очевидно, що екстремальні точки  $X$  існують, але визначити їх із системи (6.50) неможливо. Наприклад, у задачі знаходження мінімуму функції  $F = x_2$  якщо  $x_1^2 + x_2^2 = 0$ , область визначення містить єдину точку  $X = (0, 0)$ , яка і є екстремальною. Якщо ж знаходити її з рівнянь



$\partial\Phi/\partial x_1 = -2\lambda x_1 = 0$ ;  $\partial\Phi/\partial x_2 = 1 - 2\lambda x_2 = 0$ ;  $\partial\Phi/\partial\lambda = -x_1^2 - x_2^2 = 0$ , то виконати це не вдасться. Тобто потрібні якісь додаткові засоби, які б усували виникле ускладнення і давали змогу застосовувати метод ширше. Виявляється [20, с. 64] достатньо задавати функцію Лагранжа у вигляді  $\Phi(X, \Lambda) = \lambda_0 f(X) + \sum_{i=1}^m \lambda_i [b_i - g_i(X)]$ , і тоді формальні труднощі аналізу рівнянь (6.50) зменшуються, причому перетворення  $\lambda_0$  в нуль свідчить про «виродженість» обмежень задачі.

**П р и к л а д 6.3.** Знайти оптимальний розв'язок нелінійної задачі методом множників Лагранжа.

$$F = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 4)^2 \rightarrow \min$$

За наявності обмеження  $x_1 + x_2 = 7$ .

*Розв'язання.* Складемо функцію Лагранжа:

$$\Phi(x_1, x_2, \lambda) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 4)^2 + \lambda(7 - x_1 - x_2).$$

Знайдемо похідні від функції Лагранжа за змінними  $x_1, x_2, \lambda$  і прирівняємо їх до нуля. Отримаємо таку систему трьох рівнянь з трьома невідомими  $x_1, x_2, \lambda$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial\Phi}{\partial x_1} = 2(x_1 - 1) - \lambda = 0; \\ \frac{\partial\Phi}{\partial x_2} = 2(x_2 - 4) - \lambda = 0; \\ \frac{\partial\Phi}{\partial \lambda} = 7 - x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Виразивши  $x_1$  з третього рівняння та підставивши його в перше, зведемо нашу систему до такої:

$$\begin{cases} 2(7 - x_2 - 1) - \lambda = 0; \\ 2(x_2 - 4) - \lambda = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши її, отримаємо значення всіх невідомих у функції Лагранжа та величину цільової функції для цих значень

$$x_1^0 = 2; \quad x_2^0 = 5; \quad \lambda^0 = 1; \quad F^0 = (2 - 1)^2 + (5 - 4)^2 = 2.$$

Оскільки цільова функція є опуклою вниз, то в точці  $X^0 = (5; 2)$  вона досягає свого глобального мінімуму, і  $F_{\min}^0 = 2$ .

**Зауваження.** Ми розглянули метод використання множників Лагранжа під час побудови критеріїв оптимальності з обмеженнями у вигляді рівностей. Кун та Таккер використали цей підхід також на випадок, коли обмеження задачі нелінійного програмування мають вигляд як рівностей, так і нерівностей. Вони виявили необхідні й достатні умови оптимальності для задач нелінійного програмування, вважаючи, що функція мети та функції обмежень диференціюються. Ці умови оптимальності відомі як умови Куна-Таккера, або задачі Куна-Таккера.

На деякому етапі процесу розв'язування задач отримуємо план  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Теорема Куна-Таккера дають змогу визначити оптимальність або неоптимальність допустимого плану екстремальної задачі. Є різні варіанти умов Куна-Таккера і різні приклади їх використання в теорії екстремальних задач [41, с.189]. Методи розв'язування інших типів задач нелінійного програмування розглянуто в [5; 40; 45] та ін.

## 7. МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ В ЕКОНОМІЧНОМУ АНАЛІЗІ

Під час проведення економічного аналізу складних систем застосовують спеціальні методи, які прийнято об'єднувати терміном «дослідження операцій». Ці методи дають змогу використовувати спільний підхід та спільну мову до багатьох добре структурованих проблем вибору. Результати такого аналізу полегшують менеджерам прийняти правильне рішення.

Термін «дослідження операцій» походить від назви підрозділу англійської армії, який на початку Другої світової війни застосував кількісні методи в опрацюванні радарних спостережень. Початково ці методи застосовували здебільшого для вироблення і обґрунтування рішень, які приймали у військових операціях. Зважаючи на це, в мові дослідження операцій використовують деякі військові терміни, зокрема операція, стратегія тощо.

*Дослідження операцій* – це наукові кількісні методи прийняття найкращого рішення у різних галузях діяльності людини. Предметом дослідження операцій є системи, які являють собою взаємодіючу сукупність об'єктів і призначені для досягнення деякої конкретної мети. До методів дослідження операцій належать математичне програмування, теорія ігор, методи мережевого планування і управління, теорія масового обслуговування, теорія управління запасами та ін. Незважаючи на те, що математичне програмування є складовою дослідження операцій, але оскільки воно сьогодні є досить розвинутою теорією математичних методів економічного аналізу, ми відокремили його в окремий розділ.

Основними в теорії дослідження операцій є такі поняття: операція, оперуюча сторона (організатор операції), стратегія оперуючої сторони, критерій ефективності рішень і деякі інші.

*Операцією* називають сукупність дій, які об'єднані єдиним задумом і спрямовані на досягнення певної мети. Особу чи сукупність осіб, які прагнуть до цієї мети і відповідають за проведення операції, називають *оперуючою стороною (організатором чи дослідником операції)*. Оперуюча сторона у своєму розпорядженні завжди має деякий запас ресурсів. Вона домагається поставленої мети внаслідок використання цих ресурсів. Ці ресурси називають *активними засоба-*

ми, а способи їх використання – *стратегіями (рішеннями) оперуючої сторони*. Стратегію (рішення), яка за деякими міркуваннями є кращою чи не гіршою за будь-яку із всіх решти стратегій, називають *оптимальною*.

Організатора (дослідника) операції ще називають *особою, яка приймає рішення*. Цим акцентують, що саме ця людина (група людей) робить остаточний вибір із множини альтернативних стратегій (рішень) і, отже, несе повну відповідальність за проведення і наслідки операції.

Головним завданням дослідження операцій є порівняння різних стратегій і вибір найкращої в певному розумінні серед них. Особа, яка приймає рішення, повинна мати можливість оцінити різні наслідки операції, які відповідають різним рішенням. У кожній операції має бути кількісний показник прийнятного способу порівняння між собою довільних альтернативних рішень. Такий показник називають *критерієм ефективності*. Критерій ефективності є математичним еквівалентом мети операції. Він дає змогу кількісно оцінити ступінь досягнення цієї мети.

Мета операції може бути якісною і кількісною. Суть *якісної мети* полягає у тому, що вона може бути досягнута чи ні. Критерій ефективності в цьому випадку характеризує лише факт досягнення чи недосягнення мети. Математично критерій ефективності ( $F$ ) для такої мети можна прийняти такий, що дорівнює деякому додатному числу  $a$  (зокрема,  $a$  може дорівнювати 1), якщо мети досягають, і недодатному числу  $b$  (зокрема,  $b$  може дорівнювати 0), якщо мети не досягають. У випадку, коли необхідно акцентувати, що мета обов'язково повинна бути досягнута, можна прийняти  $b = -\infty$ .

Суть задачі дослідження операцій з *кількісною метою* полягає у прагненні до збільшення чи зменшення деякого показника, який характеризує рівень (ступінь) досягнення цієї мети. Саме цей показник і буде у цій задачі критерієм ефективності.

Однак оцінювати якість стратегії за допомогою лише одного критерію ефективності не завжди можливо, оскільки таких критеріїв для багатьох операцій можна запропонувати декілька (тривалість операції, очікуваний прибуток, загальні транспортні витрати тощо). Задачі такого типу називають багатокритеріальними, або задачами векторної оптимізації.

Розглянемо коротко суть і методи розв'язування задач багатокритеріальної оптимізації та інші (крім математичного програмування) методи дослідження операцій, які застосовують у процесі економічного аналізу.

## 7.1. Багатокритеріальна оптимізація

**7.1.1.** У загальному випадку математична модель задачі багатокритеріальної оптимізації (операції) має такий вигляд:

$$F = F(X, Y) \rightarrow \max; \\ X \in M, \quad (7.1)$$

де  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  – стратегія (рішення), елемент  $x_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) якої виражає, наприклад, кількість  $i$ -го ресурсу;

$Y = (y_1, y_2, \dots, y_k)^T$  – вектор неконтрольованих чинників;

$M$  – множина всіх стратегій, які допустимі для цієї задачі (область допустимих значень);

$F(X, Y) = (f_1(X, Y), f_2(X, Y), \dots, f_m(X, Y))^T$  – цільова  $m$ -компонентна (критеріальна) вектор-функція (критерій ефективності), що охоплює такі часткові цільові (критеріальні) функції  $f_j(X, Y)$ ; ( $j = \overline{1, m}$ ) (часткові чи локальні критерії), які не зводяться (в крайньому випадку на першому етапі моделювання) в єдину цільову функцію.

Припускають, що значення кожної із цих часткових цільових функцій шляхом підходящого вибору елемента (стратегії)  $X$  із множини  $M$  бажано зробити (для визначеності) найбільшим. Якщо ж якась часткова цільова функція в економічній задачі оптимізації для найкращого її розв'язку має досягти мінімуму, то її, як було зазначено, можна звести до задачі на максимум, помноживши на  $(-1)$ .

Отже, перед нами стоїть завдання знайти таку стратегію  $X^*$  із множини допустимих значень  $M$ , для якої кожна із часткових цільових функцій  $f_j(X, Y)$ ; ( $j = \overline{1, m}$ ) досягала б на цій множині свого найбільшого значення. З теоретичного погляду нам треба знайти такий  $n$ -вимірний вектор  $X^* \in M$ , за якого було б найбільш переважаюче співвідношення між частковими цільовими

функціями  $f_j(X, Y)$ ; ( $j = \overline{1, m}$ ), чи по-іншому, який відповідав би екстремуму апіорно невідомої функції  $V(F(X, Y))$ .

Під час вибору найкращої стратегії може статися так, що у разі будь-якої заміни даного рішення  $X_1 \in M$  на інше рішення  $X_2 \in M$  значення одних часткових цільових функцій збільшаться, а інших – зменшаться. Між деякими локальними критеріями може виникнути суперечність, суть якої полягає у тому, що поліпшення якого-небудь одного локального критерію (на множині альтернативних стратегій) веде до погіршення іншого. Наприклад, у більшості випадків суперечливими є бажання підвищити надійність технічного пристрою і знизити його вартість.

Якраз зазначена особливість є типовою для багатокритеріальних задач оптимізації. У цих задачах немає абсолютно найкращих (за всіма критеріями одночасно) стратегій (розв'язків). Це є наслідком того (про що легко самотійно переконатися), що бінарне однорідне відношення «не гірше», яке задане на множині допустимих значень у певній задачі багатокритеріальної оптимізації, є транзитивним, але не має властивості повноти.

Однак це не означає, що неможливо раціоналізувати вибір розв'язку цієї задачі.

**7.1.2.** Розв'язок задачі багатокритеріальної оптимізації знаходять у кілька етапів. Кількість цих етапів залежить від умови задачі (від тих проблем, які треба вирішити) і може бути не меншою від двох.

Перш ніж перейти до викладення теорії розв'язування задач багатокритеріальної оптимізації розглянемо основні поняття, які в ній використовують.

Розв'язок цієї задачі, який є оптимальним за однією із часткових цільових функцій, називають *субоптимальним*. Оскільки в загальному випадку субоптимальні розв'язки для різних часткових цільових функцій не збігаються, то необхідний вибір таких розв'язків, які будуть найкращими з погляду сукупності цих функцій.

Розв'язок  $\hat{X}$  задачі (7.1) називають *ефективним*, якщо не існує якого-небудь іншого її розв'язку  $X$ , для якого значення всіх функцій  $f_j(X, Y)$  не менше від  $f_j(\hat{X}, Y)$ , а значення хоча би однієї

часткової цільової функції строго більше (позначатимемо  $F(X, Y) \succ F(\hat{X}, Y)$ ).

Множину ефективних розв'язків позначимо так:  $M^k \subset M$ . Цю множину ще називають *областю компромісу*, чи *множиною Парето*, а її елементи – *оптимумами за Парето* (за іменем відомого італійського економіста-математика кінця XIX – початку XX ст.).

Підмножину  $M^s = M \setminus M^k$  називають *областю згоди*. У цій області розв'язок за довільним локальним критерієм можна поліпшити без погіршення розв'язку за будь-яким іншим локальним критерієм.

Отже, множину допустимих розв'язків (область допустимих значень)  $M$  задачі векторної оптимізації можна поділити на дві підмножини  $M^s$  і  $M^k$ , перетин яких є порожньою множиною.

Очевидно, що оптимальний розв'язок належатиме тільки області компромісу  $M^k$  з області допустимих значень  $M$ . Якраз знаходження множини  $M^k$  є першим логічним етапом векторної оптимізації. Цей етап не є обов'язковим, але його бажано виконувати, оскільки він дає змогу звужити область допустимих значень, в якій знаходять оптимальний розв'язок. До того ж у деяких випадках розв'язування задачі векторної оптимізації закінчується виділенням області компромісів, забезпечуючи прийнятну для практичних потреб точність отриманого розв'язку.

Виконати цей перший логічний етап векторної оптимізації у повному вигляді здебільшого важко. Ситуація полегшується, якщо множина  $M$  замкнута і опукла, а часткові функції  $f_j(X, Y)$  – вгнуті [17, с. 60]. Якщо ж множина  $M$  не опукла чи не всі  $f_j(X, Y)$  вгнуті, то знаходження ефективних розв'язків ускладнюється.

Звуживши область вибору найкращих розв'язків задачі векторної оптимізації за допомогою знайденої множини Парето, переходять до другого етапу її розв'язування. Це пошук *компромісу* між цілями, які не збігаються і є суперечливими. Треба визначити принципову схему розумного компромісу, яка дала б змогу виділити в деякому розумінні найкращий розв'язок чи мінімальну

множину, всередині якої розв'язки не вирізнялись би за своєю перевагою.

Отже, оптимальний розв'язок в області компромісу  $M^K$  може бути знайдений лише після того, як буде вибрана деяка схема компромісу, а саме визначено правило порівняння двох векторів-розв'язків. У більшості випадків схеми компромісу приводять векторну задачу до скалярної, даючи змогу мати справу з єдиним критерієм ефективності. А однокритеріальну задачу вже можна розв'язати якимось методом математичного програмування чи іншим методом дослідження операцій.

Якщо локальні критерії мають різні одиниці вимірювання, то їх попередньо треба звести до безрозмірного вигляду (нормалізувати). Сьогодні розроблено багато різних схем нормалізації. Деякі з них розглянуто нами в 2.3. Залежно від вибраної схеми компромісу потреба у нормалізації локальних критеріїв може і не виникнути.

Крім різних одиниць вимірювання, локальні критерії можуть мати різні ступені важливості, які необхідно брати до уваги під час розв'язування задачі. Ці ступені переважно задають у вигляді вектора пріоритетів під час постановки задачі. Вектор пріоритетів ми вже брали до уваги у формулі (2.52) під час побудови інтегрального показника.

**7.1.3.** Найпоширенішою схемою компромісу є скаляризація (згортка) векторного критерію оптимальності. Головними питаннями, які виникають під час реалізації цього підходу, є врахування пріоритету часткових критеріїв оптимальності, зіставлення масштабів їхнього вимірювання і знаходження між ними розумних компромісів.

Методику побудови інтегрального показника ми розглядали в 2.3. Зведення багатьох критеріїв до одного має багато спільного з цією методикою. Однак в задачах багатокритеріальної оптимізації побудова одного (глобального) критерію оптимальності на підставі локальних критеріїв має свою специфіку. Розглянемо детальніше способи згортки кількох локальних критеріїв до одного.

*Згортькою векторного критерію ефективності* називають процедуру отримання глобального критерію як функції часткових критеріїв ефективності, тобто  $F_{\Sigma} = \Phi(f_1, f_2, \dots, f_m)$ .



**7.1.3.1.** Сумування (множення), чи «економічний» спосіб згортки. Під час згортки цього типу функція  $\Phi(f_1, f_2, \dots, f_m)$  має вигляд суми

$$F_1(X) = \sum_{j=1}^m \alpha_j f_j(X). \quad (7.2)$$

Тут параметри  $\alpha_j, j = \overline{1, m}$  можуть мати різний зміст: визначають відносну важливість кожного із часткових критеріїв та можуть додатково мати властивості

$$\begin{aligned} 0 \leq \alpha_j \leq 1, j = \overline{1, m}; \\ \sum_{j=1}^m \alpha_j = 1; \end{aligned} \quad (7.3)$$

є нормуючими множниками, якщо часткові критерії ефективності мають різний масштаб вимірювання і т.д. У формулі (7.2), як і в наступних, вектор  $Y$  для простоти опускатимемо.

Перевагою цього способу згортки є те, що тут наочно імітується вплив коефіцієнтів пріоритету  $\alpha_j$  на вибір оптимального розв'язку. Недоліком є те, що вона допускає різку диференціацію значень часткових цільових функцій. Зважаючи на це, цю модель треба доповнювати умовами, які обмежують диференціацію рівнів часткових функцій. Під час обґрунтування коефіцієнтів  $\alpha_j$  необхідно також брати до уваги масштаби зміни часткових функцій.

Принцип «справедливого» компромісу, який відображає формула (7.2), можна математично виразити і в «сильнішій» формі. Ми можемо, зокрема, вважати справедливим такий компроміс, коли під час порівняння варіантів розв'язків відносно зниження за одним критерієм не переважає відносного підвищення за іншим. Такій умові відповідає узагальнений критерій

$$F_2(X) = \prod_{j=1}^m f_j(X). \quad (7.4)$$

Припускають, що всі часткові критерії однаково важливі. Однак вони можуть мати різний ступінь важливості. Останньому випадку відповідає така функція:

$$F_3(X) = \prod_{j=1}^m (f_j(X))^{\alpha_j}. \quad (7.5)$$

**7.1.3.2. Логічне згортання критеріїв.** Припускають, що всі часткові критерії є якісними, тобто набувають значення 0 чи 1. Тоді узагальнений критерій можна отримати такими способами:

1) введенням протилежної мети, такої, яка приводить до невиконання  $j$ -ї мети, тобто

$$f_j^n(X) = 1 - f_j(X); \quad (7.6)$$

2) логічного множення, коли узагальнений критерій полягає у досягненні мети всіх часткових критеріїв, тобто

$$F_4(X) = f_1(X) \wedge f_2(X) \wedge \dots \wedge f_m(X); \quad (7.7)$$

3) логічного додавання, коли узагальнений критерій полягає у досягненні мети хоча б одним частковим критерієм, тобто

$$F_5(X) = f_1(X) \vee f_2(X) \vee \dots \vee f_m(X). \quad (7.8)$$

З математичної логіки відомо, що дії (7.6)–(7.8) визначають повну систему, булевих функцій. За допомогою комбінації дій (7.6)–(7.8) можна подати будь-яку функцію  $F_\Sigma = \Phi(f_1, f_2, \dots, f_m)$ .

Інші способи згортки часткових критеріїв оптимальності та інші підходи до розв'язування задач багатокритеріальної оптимізації подано, зокрема, в [17, с. 63; 63, с. 390; 35, с. 25].

## 7.2. Моделі управління запасами

**7.2.1. Суть оптимального управління запасами.** Для забезпечення неперервного й ефективного функціонування організації необхідно створювати *запаси*, тобто ресурси, які придатні для вживання, але в цей момент їх не використовують. Це можуть бути люди, матеріали, машини, гроші тощо. Періодично запаси треба поповнювати.

З яким інтервалом часу і якими обсягами потрібно їх поповнювати? Відповідь на це запитання дає *теорія управління запасами*. Методи, які вона розробляє, дають змогу організувати такий рівень виробництва продукції або рівень надходження ресурсів, який забезпечив би найбільш оптимальне задоволення попиту в майбутньому. Ця теорія є складовою теорії дослідження операцій і містить певний інструментарій щодо постановок і методів розв'язування відповідних задач – *задач управління запасами*. За допомогою аналізу моделей цих задач визначають обсяг і черговість поповнення та постачання запасів, коли забезпечуються мінімальні сумарні

витрати на доставку, зберігання запасів і на збитки, пов'язані з незадоволенням попиту.

У будь-якій задачі управління запасами потрібно визначити кількість продукції, яку замовляють, і терміни розміщення замовлень. Потребу можна задовольнити шляхом одноразового створення запасу на весь розглянутий період часу чи з допомогою створення запасу для кожного заздалегідь визначеного проміжку часу цього періоду. У першому випадку буде багато надлишкового запасу, що веде до збільшення питомих (віднесених до одиниці часу) капітальних вкладень, але частота розміщення замовлень менша і дефіцит виникатиме рідше. У другому випадку питомі капітальні вкладення будуть меншими, але збільшиться частота розміщення замовлень і зросте ризик дефіциту.

Інтерес практиків до таких задач легко зрозуміти. Адже недостатні обсяги запасів призводять до перебоїв у роботі економічних суб'єктів, збільшують ймовірність штрафів і погіршують їхній імідж унаслідок несвочасності поставок продукції замовникам тощо. Надмірний рівень запасів «заморожує» кошти, збільшує затрати на зберігання та догляд за ними, призводить до морального і фізичного їх старіння.

Для кожного із зазначених крайніх випадків характерні значні економічні втрати. Рішення відносно обсягу замовлення і моменту його розміщення можуть ґрунтуватися на мінімізації відповідної функції загальних витрат, які охоплюють затрати, що зумовлені втратами від надлишкового запасу чи дефіциту.

Отже, будь-яка модель керування запасами у кінцевому підсумку повинна дати відповідь на два запитання:

1. Скільки купляти (виготовляти)?
2. Коли закупувати (виготовляти)?

Відповідь на перше запитання визначає *обсяг замовлення (партії)*, а на друге – *точку замовлення*.

Для визначення обсягу і точки замовлення необхідно мінімізувати сумарні витрати системи керування запасами, які виражаються у вигляді функції, значення якої визначають такими трьома компонентами:

1. *Витрати на організацію і реалізацію (придбання) замовлення* пов'язані з оформленням і постачанням товарів. Вони охоплюють ви-

датки на оформлення замовлення, укладення договорів, вантажно-розвантажувальні операції, транспортні витрати, витрати на менеджмент і маркетинг та ін. Припускають, що витрати, пов'язані з організацією замовлення, залежать не від обсягу партії, а від кількості партій, які були замовлені за певний період (наприклад, рік). Витрати, що пов'язані з реалізацією замовлення (вантажно-розвантажувальні, транспортні, приймально-перевірочні та інші), залежать від обсягу замовленої партії. Якщо позначити  $C$  сумарні витрати на організацію і реалізацію замовлення, а  $q$  – обсяг партії, то витрати, що припадають на одиницю товару, становлять  $C/q$  і зі збільшенням обсягу партії зменшуються.

2. *Витрати на зберігання.* Це витрати, пов'язані з орендою складських приміщень і амортизацією обладнання; опаленням, освітленням і вентиляцією складів; переробкою матеріалів на складах; обліком та інвентаризацією; виплатою відсотків; зміною цін за час зберігання; псуванням та ін. Одна частина цих витрат є постійною, а інша – змінною. Витрати, які належать до другої з цих частин, прямо пропорційні рівню запасів.

3. *Втрати, які пов'язані з дефіцитом,* – це втрати, пов'язані із затримкою у задоволенні попиту на товар чи незадоволеним попитом. Зокрема, штраф за несвоєчасне чи недостатнє постачання товару, видатки, пов'язані з екстремним постачанням, втрати від простою обладнання і працівників, зумовлені браком сировини чи матеріалів тощо. Здебільшого наслідком дефіциту є погіршення репутації постачальника.

**7.2.2. Типи моделей управління запасами.** Незважаючи на вищезазначене, постановка задачі управління запасами є досить простою. Є велика різноманітність моделей цього класу задач, а також методів їх розв'язування. Ці методи ґрунтуються на різноманітному математичному апараті: від простих схем диференціального та інтегрального числення до складних алгоритмів динамічного та інших видів математичного програмування. Причиною цього є характер попиту, який може бути *детермінованим* (достовірно відомим) чи *ймовірнісним* (заданим щільністю ймовірності). Детермінований попит може бути *статичним* чи *динамічним*. У першому випадку інтенсивність споживання залишається незмінною, а в другому змінюється у часі.

Імовірнісний попит може бути *стаціонарним*, коли функція щільності ймовірності попиту незмінна у часі, і *нестаціонарним*, коли функція щільності ймовірності попиту змінюється у часі. Якщо зазначені моделі управління запасами розмістити залежно від типу попиту у порядку статичний детермінований, динамічний детермінований, стаціонарний імовірнісний і нестаціонарний імовірнісний, то ступінь математичної складності цих моделей зростатиме.

Найточніше характер попиту може бути описаний за допомогою імовірнісних нестаціонарних розподілів. Однак з математичного погляду модель значно ускладнюється. Зважаючи на це, на практиці розглядають простіші випадки.

Як зазначали вище, одним із головних чинників під час побудови моделей управління запасами є характер попиту. Однак є і інші чинники, які впливають на вибір типу моделі:

1. *Запізнення поставок чи термінів виконання замовлень*. Якщо товар є у наявності, то він може бути поставлений відразу. Інакше потрібен буде деякий час на його виготовлення. У цьому разі можна будувати моделі, у яких припускати, що величина терміну виконання замовлення є детермінованою чи випадковою.

2. *Поповнення запасу*. Якщо замовлення надходять від зовнішнього джерела, то процес поповнення запасу може відбуватися миттєво. Коли ж потрібну продукцію виробляє сама організація, то цей процес може здійснюватися рівномірно у часі.

3. *Кількість пунктів нагромадження запасів*. До системи управління запасами може належати не один, а декілька пунктів зберігання запасів, які можуть бути з'єднані між собою послідовно, тобто один є постачальником іншого, паралельно чи комбіновано.

4. *Кількість видів продукції*. До системи управління запасами може належати більше, ніж один вид продукції, які можуть бути залежними чи незалежними між собою.

**7.2.3. Модель визначення оптимального обсягу партії у разі миттєвого поповнення запасу.** Як зазначали, запас у розглянутих системах може поповнюватися миттєво (час на постачання замовлення дуже малий і ним можна знехтувати) чи протягом деякого проміжку часу. Розглянемо спочатку перший випадок, коли запас поповнюється миттєво. Найпростіша модель управління запасами, крім цього, характеризується постійним попитом і відсутністю дефіциту.

Тобто розглянемо задачу управління запасами, коли розхід запасу відбувається з постійною інтенсивністю  $\mu$  до тих пір, поки не досягне нуля. У момент часу, коли запас досягне нуля, надходить замовлення, яке рівне  $q$  одиниць, і рівень запасу відновлюється до максимального значення. Припускають, що відомі наступні параметри:  $C_1$  – вартість зберігання одиниці товару на складі за одиницю часу;  $C_2$  – вартість організації замовлення (однієї партії товару).

Потрібно визначити розмір партії  $q$ , яку треба замовити, та інтервал часу між поставками  $\tau$  таким чином, щоб загальні витрати, пов'язані з організацією замовлення і зберіганням товарів на складі, були мінімальними. Графічно умови задачі можна зобразити за допомогою рис.7.1.

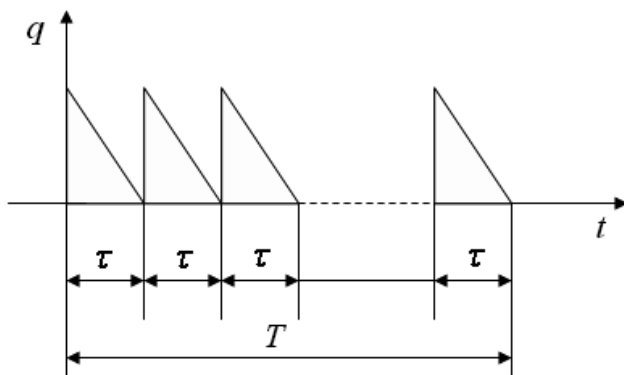


Рис. 7.1

Позначимо через  $n$  кількість партій товару, які поставляють за загальний період  $T$ . Тоді витрати на замовлення  $n$  партій товару визначають добутком  $C_2 n$ . Оскільки запаси витрачаються з постійною інтенсивністю  $\mu$ , то середній рівень запасів за інтервал  $\tau$  дорівнює  $q/2$ , а витрати на зберігання за час  $\tau$  дорівнюють  $C_1 \cdot \frac{q}{2} \cdot \tau$ .

Враховуючи, що  $q = \mu \cdot \tau$ , загальні витрати, які пов'язані зі зберіганням і замовленням  $n$  партій товару, становлять

$$C = \left( C_1 \cdot \frac{q}{2} \cdot \frac{q}{\mu} + C_2 \right) \cdot n. \quad (7.9)$$

Розділивши (7.9) на загальний час всього періоду  $T = \tau \cdot n = \frac{q}{\mu} \cdot n$ ,

отримаємо сумарні витрати на зберігання товару і організацію замовлення за одиницю часу:

$$H = C_1 \cdot \frac{q}{2} + C_2 \cdot \frac{\mu}{q}. \quad (7.10)$$

З правої частини виразу (7.10) видно, що із збільшенням розміру замовленої партії  $q$  витрати на зберігання товару за одиницю часу зростають (перший доданок), а витрати на організацію замовлення спадають (другий доданок). Сумарні витрати спочатку спадають, а потім зростають. Графічно залежність витрат від розміру партії товару зображено на рис. 7.2.

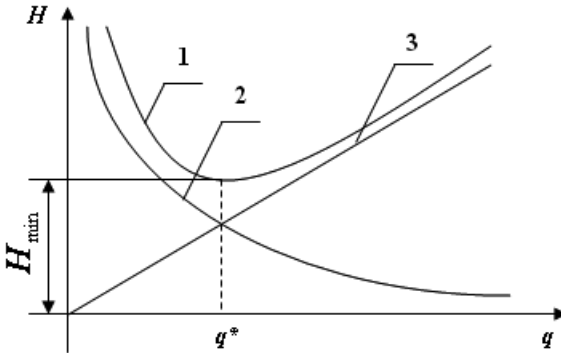


Рис. 7.2

Оптимальний обсяг партії  $q^*$ , який мінімізує загальні витрати, визначимо з рівняння рівності нулю першої похідної:

$$\frac{dH}{dq} = \frac{C_1}{2} - \frac{C_2 \mu}{q^2} = 0. \quad (7.11)$$

З (7.11) знаходимо

$$q^* = \sqrt{\frac{2C_2\mu}{C_1}}. \quad (7.12)$$

Тепер знайдемо оптимальний інтервал часу між поставками і оптимальні загальні витрати за одиницю часу, які можна розрахувати за відповідними формулами:

$$\tau^* = \frac{q^*}{\mu} = \sqrt{\frac{2C_2}{C_1\mu}}, \quad (7.13)$$

$$H^* = \frac{C_1q^*}{2} + \frac{C_2\mu}{q^*} = \sqrt{2C_1C_2\mu}. \quad (7.14)$$

**П р и к л а д 7.1.** Щоденна потреба на деякий товар становить 100 одиниць. Витрати на організацію замовлення (партії) постійні і дорівнюють 100 грн. Щоденні витрати на зберігання одиниці запасу (товару) становлять 2 коп. Визначити економічний розмір партії і оптимальний інтервал часу між поставками.

*Розв'язання.* Використовуючи введені позначення, відповідно до умови, маємо  $\mu = 100$  од./день,  $C_1 = 0,02$  грн,  $C_2 = 100$  грн. За формулою (3) одержимо

$$q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 100 \cdot 100}{0,02}} = 1000 \text{ од.},$$

а за формулою (7.13) –  $\tau^* = \frac{1000}{100} = 10$  днів.

Отже, величина оптимального розміру партії товару 1000 – одиниць, які треба постачати через кожні 10 днів.

**7.2.4. Модель визначення оптимального розміру партії у випадку рівномірного поповнення запасу.** Якщо комплектуючі виготовляють на цьому підприємстві, то вони надходять на склад рівномірно доти, поки там не утвориться їх необхідний запас. Після того, як використовується зі складу весь запас, постачання товару на склад відновлюється. Нехай цей товар надходить на склад партіями розміру  $q$  одиниць з постійною інтенсивністю  $\lambda$  од. за одну одиницю часу, причому  $\lambda > \mu$ . Тобто кожна нова партія товару починає надходити на склад у той момент, коли рівень запасу знизиться до нуля. У кожно-



му циклі склад поповнюється протягом часу  $\tau_1$ , а вся партія товару використовується зі складу протягом часу  $\tau = \tau_1 + \tau_2$  (див. рис. 7.3).

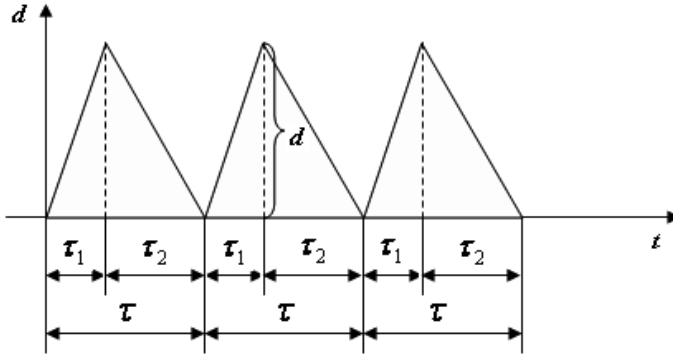


Рис. 7.3

Таким чином протягом першої частини циклу (часу  $\tau_1$ ) запас поповнюється і витрачається одночасно. Абсолютна інтенсивність збільшення складських запасів визначається різницею  $(\lambda - \mu)$ , де  $\mu$  – інтенсивність розходу цих запасів. З оглянутого, рівень запасу за час  $\tau_1$  збільшиться на величину  $d = (\lambda - \mu)\tau_1$ . Беручи до уваги, що  $\tau_1 = \frac{q}{\lambda}$ , величину середнього запасу обчислюють за формулою

$$(\lambda - \mu) \frac{q}{2\lambda}.$$

Знайдемо тепер  $\tau_2$  і, відповідно,  $\tau$ . З попередніх міркувань видно, що  $d = (\lambda - \mu) \frac{q}{\lambda}$ . Але цей запас  $d$  повністю використовується за час  $\tau_2$ , тому  $d = \mu\tau_2$ . Прирівнявши ці вирази, отримаємо

$$\mu\tau_2 = (\lambda - \mu) \frac{q}{\lambda} \text{ або } \tau_2 = (\lambda - \mu) \frac{q}{\lambda\mu}.$$

$$\text{Звідси } \tau = \tau_1 + \tau_2 = \frac{q}{\lambda} + \frac{q}{\lambda\mu}(\lambda - \mu) = \frac{q}{\mu}.$$

Міркуючи аналогічно і вводячи такі ж позначення, як під час виведення формул (7.10)-(7.14), визначимо сумарні витрати, пов'язані з організацією замовлень і витрат на зберігання, які стосуються одного циклу:

$$C = C_1(\lambda - \mu) \frac{q}{2\lambda} \tau + C_2 = C_1(\lambda - \mu) \frac{q^2}{2\lambda\mu} + C_2. \quad (7.15)$$

Для знаходження величини витрат за одиницю часу  $H$  розділимо вираз (7.15) на довжину циклу  $\tau = \frac{q}{\mu}$ . Виконавши цю операцію, отримаємо шукану величину:

$$H = C_1(\lambda - \mu) \frac{q}{2\lambda} + \frac{C_2\mu}{q}. \quad (7.16)$$

Оптимальний обсяг партії  $q^*$ , який мінімізує загальні витрати, знову визначимо з рівняння рівності нулю першої похідної:

$$\frac{dH}{dq} = (\lambda - \mu) \frac{C_1}{2\lambda} - \frac{C_2\mu}{q^2} = 0. \quad (7.17)$$

Його визначають за формулою

$$q^* = \sqrt{\frac{2C_2\mu}{C_1(1 - \mu/\lambda)}}. \quad (7.18)$$

Оптимальний інтервал відновлення замовлення та оптимальні витрати за одиницю часу визначимо після підстановки відповідно у формули  $\tau = \frac{q}{\mu}$  і (7.16) величини  $q^*$ :

$$\tau^* = \sqrt{\frac{2C_2}{C_1\mu(1 - \mu/\lambda)}}, \quad (7.19)$$

$$H^* = \sqrt{2C_1C_2\mu(1 - \mu/\lambda)}. \quad (7.20)$$

**7.2.5. Модель визначення оптимального розміру партії, яка допускає дефіцит.** В розглянутих моделях поповнення запасу на склад відновлюється при зменшенні його рівня до нуля. Тобто дефіцит товару на складі не виникає. Розглянемо тепер моделі, які допускають дефіцит [36]. Тобто проміжок часу  $\tau$  через який постачається нова партія товару складається з двох –  $\tau_1$  і  $\tau_2$ .

Протягом інтервалу часу  $\tau_1$  кожного проміжку  $\tau$  запасу, який є на складі, досить для задоволення попиту, а протягом інтервалу  $\tau_2$  спостерігається дефіцит. Після поступлення наступної партії товарів негайно покривається незадоволений попит (див. рис. 7.4).

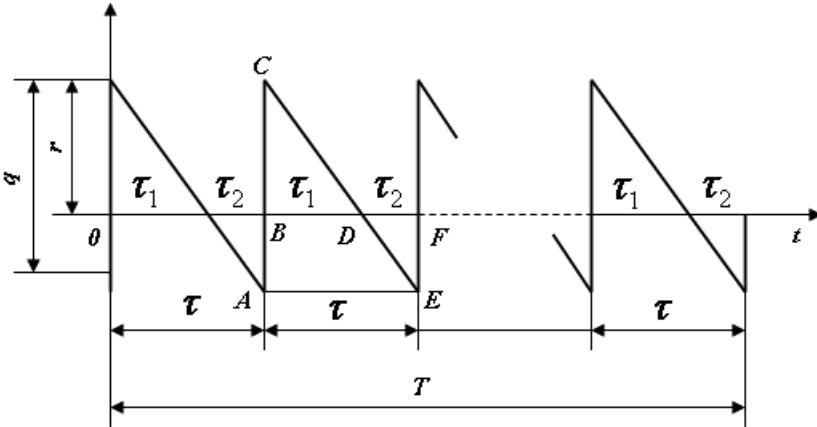


Рис. 7.4

За несвоечасне постачання товару накладається штраф, який залежить від часу затримки поставки. Штраф за недопостачання одиниці товару за одиницю часу (втрати від незадоволеного попиту) позначимо через  $C_3$  ( $C_3 \neq \infty$ ). Потрібно визначити такий об'єм запасу  $r$  і розмір поставленої партії товарів  $q$ , які мінімізували б витрати, що пов'язані з замовленням і зберіганням запасів, а також із втратами від їх дефіциту.

З рис. 7.4 видно, що трикутник  $ACE$  подібний до трикутників  $BCD$  і  $DFE$ . З подібності цих трикутників маємо  $\frac{\tau_1}{\tau} = \frac{r}{q}$  і

$$\frac{\tau_2}{\tau} = \frac{q-r}{q}, \text{ звідки } \tau_1 = \frac{r}{q}\tau \text{ і } \tau_2 = \frac{q-r}{q}\tau.$$

Середній рівень запасу на складі протягом інтервалу часу  $\tau_1$  дорівнює  $\frac{r}{2}$ . Тому витрати на зберігання однієї партії товарів рівні  $C_1 \frac{r}{2} \tau_1$ , а штраф за

незадоволений попит дорівнює  $C_3 \frac{q-r}{2} \tau_2$ . Сумарні витрати за цикл, які пов'язані із замовленням, зберіганням запасів і втратами від дефіциту, становлять:

$$C = C_1 \frac{r}{2} \tau_1 + C_2 + C_3 \frac{q-r}{2} \tau_2 = C_1 \frac{r^2}{2q} \tau + C_2 + C_3 \frac{(q-r)^2}{2q} \tau \quad (7.21)$$

Розрахуємо тепер витрати на замовлення, зберігання запасів і втрати від дефіциту за одиницю часу. Для цього поділимо співвідношення (7.21) на  $\tau = \frac{q}{\mu}$ . В результаті, отримаємо

$$H = C_1 \frac{r^2}{2q} + C_2 \frac{\mu}{q} + C_3 \frac{(q-r)^2}{2q}$$

Для визначення оптимального розміру партії товару та інших невідомих знайдемо частинні похідні по  $q$  і  $r$  від останнього виразу і прирівняємо їх до нуля. Отримаємо систему рівнянь для визначення оптимальних значень  $q^*$  і  $r^*$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{C_1 r^2}{2q^2} - \frac{C_2 \mu}{q^2} + \frac{C_3}{2} - \frac{C_3 r^2}{2q^2} = 0; \\ \frac{\partial H}{\partial r} = \frac{C_1 r}{q} - C_3 + \frac{C_3 r}{q} = 0. \end{cases} \quad (7.22)$$

Розв'язок цієї системи буде таким:

$$q^* = \sqrt{\frac{2C_2 \mu}{C_1} \left(1 + \frac{C_1}{C_3}\right)}; \quad r^* = \sqrt{\frac{2C_2 \mu C_3}{C_1(C_1 + C_3)}}.$$

Враховуючи ці значення, отримаємо

$$\tau^* = \frac{q^*}{\mu} = \sqrt{\frac{2C_2}{C_1 \mu} \left(1 + \frac{C_1}{C_3}\right)}; \quad H^* = \sqrt{2C_1 C_2 \mu \frac{C_3}{C_1 + C_3}}.$$

Якщо порівняти отримане значення  $H^*$  з (7.14), то видно, що у випадку допущення дефіциту, витрати менші, ніж тоді, коли дефіцит не допускається.

**7.2.6. Узагальнена модель визначення оптимального розміру партії.** Розглянемо модель у якій одночасно враховуються декілька попередніх випадків. В ній припускається, що товар

поступає на склад безпосередньо з виробничої лінії з постійною інтенсивністю  $\lambda$  од. за одиницю часу. Після досягнення деякого рівня обсягу запасу виробництво товару зупиняється. Відновлення виробництва товару і постачання його на склад здійснюється в момент, коли незадоволений попит досягне деякого значення. Графічно умови задачі можна зобразити так:

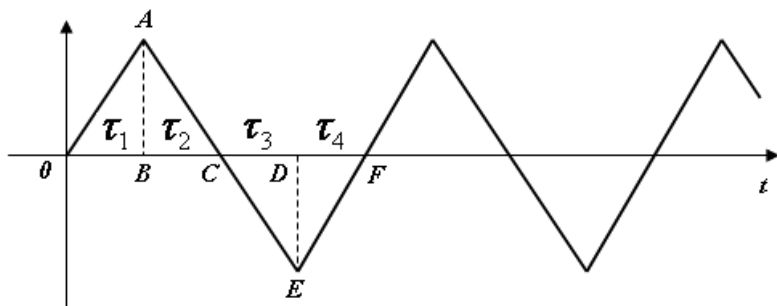


Рис. 7.5

З рис. 7.5 видно, що поповнення і витрачання запасу здійснюється одночасно протягом інтервалу  $\tau_1$  кожного циклу. Нагромаджений запас в інтервалі  $\tau_1$  повністю витрачається протягом інтервалу  $\tau_2$ . В інтервалі  $\tau_3$  попит не задовольняється. Незадоволений попит покривається протягом інтервалу  $\tau_4$ .

Потрібно знайти оптимальний об'єм партії та інтервал часу між точками відновлення поставок, якщо витрачання запасу здійснюється з інтенсивністю  $\mu$  од. за одиницю часу.

Запас товару зберігається на складі протягом інтервалу часу  $\tau_1 + \tau_2$ . Витрати на його зберігання дорівнюють  $C_1 \frac{AB}{2} (\tau_1 + \tau_2)$ , а втрати від дефіциту в інтервалі  $\tau_3 + \tau_4$  складають  $C_3 \frac{ED}{2} (\tau_3 + \tau_4)$  (див. рис. 7.5). Враховуючи те, що вартість організації замовлення (однієї партії товару) дорівнює  $C_2$ , витрат, які стосуються одного циклу будуть розраховуватись за формулою:

$$C = C_1 \frac{AB}{2} (\tau_1 + \tau_2) + C_2 + C_3 \frac{ED}{2} (\tau_3 + \tau_4). \quad (7.23)$$

Оскільки, з одного боку,  $AB = \tau_1(\lambda - \mu)$ , а з іншого –  $AB = \mu\tau_2$ , то  $\tau_1(\lambda - \mu) = \mu\tau_2$ . Дефіцит в інтервалі  $\tau_3$  зростає зі швидкістю, рівною інтенсивності попиту, отже максимальний рівень дефіциту  $ED = \mu\tau_3$ . Цей дефіцит погашається протягом інтервалу  $\tau_4$ , інтенсивність поступлення товару на якому при незмінному попиту дорівнює  $\lambda$ . Тому чиста інтенсивність ліквідації дефіциту рівна  $\lambda - \mu$ . Таким чином,  $ED = (\lambda - \mu)\tau_4$ , звідки  $\tau_3\mu = (\lambda - \mu)\tau_4$ .

Величина циклу  $\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 = \frac{q}{\mu}$ .

Отже, для визначення інтервалів часу  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$  маємо систему рівнянь:

$$\tau_1(\lambda - \mu) = \tau_2\mu; \quad \tau_3\mu = \tau_4(\lambda - \mu); \quad C_1\tau_2 = C_3\tau_3; \quad \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 = \frac{q}{\mu}.$$

Розв'язок цієї системи буде мати вигляд:

$$\tau_1 = \frac{C_3q}{\lambda(C_1 + C_3)}; \quad \tau_2 = \frac{C_3q(\lambda - \mu)}{\lambda\mu(C_1 + C_3)};$$

$$\tau_3 = \frac{C_1q(\lambda - \mu)}{\lambda\mu(C_1 + C_3)}; \quad \tau_4 = \frac{C_1q}{\lambda(C_1 + C_3)}.$$

Підставивши отримані значення інтервалів у формулу (7.23), і розділивши на довжину циклу  $\tau$ , отримаємо витрати на одиницю часу

$$H = \frac{C_2\mu}{q} + \frac{C_1C_3(\lambda - \mu)q}{2\lambda(C_1 + C_3)}. \quad (7.24)$$

Прирівняємо до нуля похідну від  $H$  по  $q$ . З отриманого рівняння знайдемо:

$$q^* = \sqrt{\frac{2\lambda C_2\mu(C_1 + C_3)}{C_1C_3(\lambda - \mu)}} = \sqrt{\frac{2C_2\mu(1 + C_1/C_3)}{C_1(1 - \mu/\lambda)}}. \quad (7.25)$$

Довжина циклу:

$$\tau^* = \sqrt{\frac{2C_2(1 + C_1/C_3)}{C_1\mu(1 - \mu/\lambda)}}. \quad (7.26)$$

Якщо в формулах (7.25) і (7.26) прийнемо  $C_1/C_3 \approx 0$  і  $\mu/\lambda \approx 0$ , то отримаємо відповідно вирази (7.12) і (7.13).

Ми розглянули найпростіші моделі управління запасами. Вони відносяться до детермінованих статичних одно продуктових моделей. Із складнішими моделями управління запасами та методами їх розв'язування можна ознайомитись в книгах [36, 72] та ін.

### 7.3. Елементи теорії ігор

**7.3.1. Проблематика теорії ігор.** Багато задач дослідження операцій зводиться до визначення найкращого розв'язку, який задовольняє деяким обмеженням. Тобто задача зводиться до індивідуального вибору оптимального розв'язку. Рішення приймає окремо взятий суб'єкт, який має єдину мету. Наприклад, потрібно максимізувати випуск продукції у випадку обмежених витрат чи мінімізувати витрати у випадку визначеного випуску. З подібною ситуацією ми стикаємось на конкурентному ринку з великою кількістю покупців і великою кількістю продавців.

Принципово інша ситуація виникає під час вивчення процесів прийняття рішень декількома суб'єктами, інтереси яких можуть не збігатися. Наприклад, у разі двосторонньої монополії, коли наявний тільки один покупець і тільки один продавець, або дуополії чи олігополії, де два чи обмежена кількість продавців торгують з великою кількістю покупців, виникає конфлікт інтересів, який треба розв'язати. Ще складніші подібні ситуації виникають, якщо утворюється об'єднання чи коаліція осіб, що беруть участь у зіткненні інтересів. Такі ситуації в операції називають *конфліктними*. Вирішення такої проблеми не є просто розв'язуванням деякої задачі на максимум чи мінімум.

Приклади операцій, яким притаманні конфліктні ситуації, можна виявити у будь-якій сфері людської діяльності. Зокрема, таких операцій багато на ринку товарів і послуг; конфліктні ситуації є типовими під час проведення військових операцій і спортивних змагань. Якщо, наприклад, на ринку є тільки два продавці  $A$  та  $B$ , то  $A$  повинен планувати свої дії відповідно до реакції на них продавця  $B$  і навпаки.

Конфліктні ситуації вивчає та розробляє математичні методи їх вирішення **теорія ігор**.

Окремі ідеї теорії ігор як математичної дисципліни можна знайти ще у працях учених XVII ст. Зокрема, у листі Б. Паскаля до П. Ферма від 29 червня 1654 р. викладено математичні моделі деяких азартних ігор. Проте початком розвитку цієї теорії вважають 20-ті роки минулого століття, коли побачили світ праці математиків Е. Бореля і Дж. Фон Неймана. У 40-х роках Дж. Фон Нейман і економіст О. Моргенштерн опублікували книгу “Теорія ігор і економічна поведінка”, в якій підсумовано початкове двадцятиріччя періоду розвитку цього наукового напрямку. Вважаючи, що ринкова економіка – це насамперед економіка конфліктів, Дж. фон Нейман розглядав математичну теорію конфліктів як адекватний апарат для аналізу, опису і дослідження економічних явищ чи процесів. Після виходу цієї книги методи теорії ігор широко застосовують в економіці, вони поступово проникають у деякі інші науки. У 1994 р. за внесок у розвиток економічної теорії спеціалісти з теорії ігор Дж. С. Харсаньї, Дж. Неш і Р. Зельтен були відзначені Нобелівською премією.

Нині теорію ігор застосовують у математичному моделюванні таких явищ ринкової економіки, як боротьба фірм за ринки, планування рекламних компаній, формування цін на конкурентних ринках, централізація та децентралізація керування виробництвом, планування за множиною показників, планування за умов невизначеності тощо.

Однак, зауважимо, що є спроби розробити інші підходи до побудови загальної математичної теорії конфліктів, які не пов’язані з теорією ігор.

**7.3.2. Основні поняття теорії ігор.** У повсякденному житті термін “гра” використовують у багатьох випадках. Ця назва охоплює ігри в карти, шахи, шашки, футбол, баскетбол, волейбол, хокей, теніс, на комп’ютері тощо. Кожна гра характеризується системою правил, що визначають кількість гравців, їхні можливі дії і розподіл вирашів залежно від їхньої поведінки і результатів.

*Гравцем* у грі вважають окремого учасника чи групу учасників гри, що мають спільні інтереси, котрі не збігаються з інтересами інших груп. Наприклад, під час гри у волейбол є дванадцять учасників, які об’єднані по шість осіб у дві команди (гравці). Тобто не кожний учасник є гравцем.

Залежно від виду гри гравців може бути два чи декілька. У наведеному прикладі гри у волейбол є два гравці. Якщо розглянути,



наприклад, три підприємства, які конкурують у сфері виробництва (їх можна вважати гравцями), то гравців буде три. У разі іншої кількості цих підприємств буде інша кількість гравців.

Кілька гравців можуть утворити сталу або тимчасову *коаліцію* (ці гравці приймають певну угоду щодо правила прийняття ними індивідуальних рішень). Формально створення коаліції еквівалентне заміні всіх її учасників одним «узагальненим» гравцем.

Можливі дії, ходи чи вибори гравців на будь-якому етапі розвитку гри називають її *правилами*, чи *умовами*. Дотримання правил обов'язкове для гравців, а недотримання їх веде до покарання гравця аж до вилучення з гри.

Кожен гравець може вибрати у грі певну лінію поведінки, яку називають стратегією. *Стратегія* – це своєрідний план дій гравця, яким він керується під час вибору своїх ходів у всіх можливих випадках розвитку гри. Іноді стратегією ще називають саме рішення гравця.

Правилами гри для кожного гравця визначається цільова функція, яку називають *функцією виграшу* (*виграшем* чи *функцією платежу*). Значення її залежить від стратегій, які приймає гравець, і наслідків (результатів) гри. Виграш – це міра ефекту для гравця. Його мета – оптимізувати в ході гри значення свого виграшу. Наприклад, під час гри у футбол результат гри вимірюється очками: виграш – два очки, нічия – одне, а програш – нуль очок. Хоча може бути й інше оцінювання: виграш на чужому полі – три очки, виграш на своєму полі – два очки, нічия – одне, а програш – нуль очок. У грі в шахи виграш оцінюють одним очком, нічию – половиною очка, і програш – нуль очок. В іграх, що відображають економічні ситуації, виграш і програш майже завжди вимірюють у вартісному виразі. Зокрема, якщо гравцем є підприємство, то мета його – максимізувати прибуток (виграш) чи мінімізувати витрати (програш).

**7.3.3. Класифікація ігор.** Зауважимо, що сьогодні немає чіткої визначеної класифікації ігор. Ця теорія порівняно молода і продовжує розвиватися. Серед можливих підходів до класифікації ігор вирізняємо ігри за такими ознаками [38, с. 10]: кількістю гравців, особливостями їх взаємодії упродовж гри, кількістю стратегій, характером виграшів, видом функцій виграшу, кількістю ходів, станом інформації.

Залежно від кількості гравців вирізняють ігри з двома (*парні* ігри), трьома і більше (*множинні* ігри) гравцями. Парні ігри – найбільш поширені й найбільш досліджені. Вони значно простіші для вивчення, ніж множинні. Ігри трьох і більше гравців менше досліджені, зважаючи на складність знаходження їхнього розв'язку. Із збільшенням кількості гравців розв'язування гри ускладнюється.

У деяких іграх їхнім гравцям дозволяється вести переговори й утворювати коаліції для координації своїх дій під час гри. Такі ігри називають *коаліційними*. Якщо коаліції заздалегідь визначені, то гру називають *кооперативною*. Прикладом кооперативної гри може бути створення коаліцій серед учасників переговорів для досягнення бажаної мети. Гру, в якій гравці не можуть координувати своїх дій, тобто не мають права домовлятися і утворювати коаліції, називають *некоаліційною*. Приклад некоаліційної гри – військова ситуація, у якій битва ведеться без компромісів, до перемоги.

Розв'язування гри ускладнюється не тільки із збільшенням гравців, а й переважно із збільшенням їхніх стратегій. Залежно від кількості стратегій вирізняють скінченні та нескінченні ігри. *Скінченною* називають гру, в якій кожний з гравців має скінченну кількість стратегій. Якщо хоча б один із гравців має нескінченну кількість можливих стратегій, то таку гру називають *нескінченною*. Отже, поняття нескінченної гри пов'язують не з тривалістю проведення гри, а з необмеженою кількістю стратегій. Прикладом нескінченної гри може бути гра, в якій стратегією одного з гравців є число з відрізка  $[0, 1]$ .

За характером вирашів вирізняють ігри з нульовою і ненульовою сумами. У грі з *нульовою сумою* сума вирашів усіх гравців дорівнює нулю, тобто загальний капітал учасників гри не змінюється, а перерозподіляється між гравцями залежно від результатів гри. Якщо гра з нульовою сумою парна, то її називають *антагоністичною*. У такій грі інтереси гравців цілком протилежні, оскільки один з них завжди виграє стільки, скільки програє інший.

Грою з *ненульовою сумою* називають таку гру, для якої сума вирашів її учасників не дорівнює нулю. Знайти розв'язок такої гри складніше, порівняно з попередньою, оскільки вона містить усі труднощі, притаманні грі з нульовою сумою і ще додаткові, які пов'язані з можливістю отримання додаткового вирашу. Прикладом

гри з ненульовою сумою може бути лотерея. Тут гравці (особи, що купили лотерейні квитки) в сумі отримують менший виграш, ніж вони витратили на купівлю лотерейних квитків, оскільки частину цих коштів забирає організатор лотереї. Іншим прикладом такої гри є торгові відносини між країнами. Під час координації своїх дій у виграші можуть бути всі країни.

За видом функцій виграшів ігри поділяють на матричні, біматричні, неперервні, випуклі, сепарабельні, типу дуелей та ін.

*Матричною* називають парну скінченну гру з нульовою сумою, в якій виграші одного з гравців задають у вигляді матриці  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ . Для однозначності вважають, що ця матриця, яку називають *матрицею виграшів*, *платіжною матрицею*, чи *матрицею гри*, стосується першого гравця. Вважають, що перший гравець виграв суму  $a_{ij}$ , якщо він вибрав свою  $i$ -ту стратегію ( $i = \overline{1, m}$ ), а другий – свою  $j$ -ту стратегію ( $j = \overline{1, n}$ ). Зрозуміло, що ця гра є антагоністичною, тому виграш другого гравця дорівнює програшу першого.

**П р и к л а д 7.2.** Дві особи підкидають догори по одній монеті. Після падіння на підлогу монети лежать догори цифрою чи гербом. Вважають, що впасти на ребро монета не може. Якщо обидві монети впали догори однаковим боком, то їх забирає перший гравець, а якщо різними – то другий.

*Розв'язання.* Очевидно, що в цій грі кожна особа отримує виграш завдяки іншій особі. Тому кожна з них є окремим гравцем, а розглянута задача – антагоністичною грою двох гравців з нульовою сумою. Побудуємо матрицю виграшів першого гравця. Нехай першою стратегією кожного гравця ( $i, j = 1$ ) є ситуація, коли на верхній поверхні монети, яку він підкидав, випав герб, і другою ( $i, j = 2$ ) – якщо на верхній поверхні цифра. Тоді перший гравець забере свою монету і монету противника (виграє одну монету), якщо  $i = 1$  і  $j = 1$ , або  $i = 2$  і  $j = 2$ . Тобто,  $a_{11} = a_{22} = 1$ . Якщо ж  $i = 1$  і  $j = 2$ , або  $i = 2$  і  $j = 1$ , то обидві монети забирає другий гравець, тобто перший програє одну монету ( $a_{12} = a_{21} = -1$ ). Матриця виграшів першого гравця має такий вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матричні ігри є найбільш дослідженими. Доведено, що будь-яка з таких ігор має розв'язок. Кожну з таких ігор можна звести до задачі лінійного програмування, методи розв'язування яких нам вже відомі.

Якщо у скінченній грі двох гравців з ненульовою сумою виграші кожного гравця задають окремими матрицями для відповідного гравця, то її називають *біматричною* грою. Аналогічно, як для матричних ігор, у кожній з описаних матриць рядок відповідає стратегії першого гравця, а стовпець – стратегії другого гравця. На перетині рядка і стовпця в першій матриці міститься виграш першого гравця, а другій матриці – виграш другого гравця. Зокрема, якщо перший гравець має  $m$  стратегій, а другий –  $n$  стратегій, і виграші першого та другого гравців задаються відповідно матрицями  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  та  $B = (b_{ij})_{m \times n}$ , то під час вибору першим гравцем своєї  $i$ -ї стратегії, а другим –  $j$ -ї виграш першого та другого гравців відповідно дорівнюватимуть  $a_{ij}$  та  $b_{ij}$ .

**П р и к л а д 7.3.** На ринку певного товару є дві фірми, які намагаються максимізувати свій прибуток. Кожна фірма може продавати свій товар за старою ціною чи підвищити її. Проаналізувати можливу поведінку фірм як гру за таких умов. Якщо обидві фірми продаватимуть свій товар за старою ціною, то прибуток кожної фірми збільшиться на тисячу одиниць вартості, а у разі збільшення обома фірмами ціни прибуток кожної фірми збільшиться на дві тисячі одиниць. Якщо ж тільки одна збільшить ціну, а інша продаватиме товар за старою ціною, то прибуток фірми, яка підвищила ціну, внаслідок втрати клієнтів зменшиться на чотириста одиниць вартості, а іншої – збільшиться на три тисячі одиниць вартості.

*Розв'язання.* З умови задачі зрозуміло, що нам задана парна гра з ненульовою сумою виграшів, кожний гравець якої робить по одному ходові. Гравцями тут є фірми. Якщо вважати першою стратегією кожного гравця продаж товару за старою ціною, а другою – продаж товару за збільшеною ціною, то матриці виграшів (прибуток фірми) першого та другого гравців будуть відповідно такими:

$$A = \begin{pmatrix} 1000 & 3000 \\ -400 & 2000 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1000 & -400 \\ 3000 & 2000 \end{pmatrix}.$$

У цьому прикладі розглянута біматрична гра. Для цих ігор також розроблена теорія оптимальної поведінки гравців, але знайти їх розв'язок складніше, ніж звичайних матричних.

Є ігри, у яких стратегії гравців виражаються числами з визначеного проміжку. Якщо в такій грі функція вигравів кожного гравця є неперервною залежно від стратегії, то цю гру називають *неперервною*. Доведена теорема існування розв'язків для ігор такого класу, але не розроблено практичних методів їх знаходження.

**П р и к л а д 7.4.** Є два гравці. Кожний з них вибирає з проміжку  $[0, 1]$  якесь число. Якщо позначити  $x$  та  $y$  числа, які вибрали відповідно перший та другий гравці, то виграш першого з них обчислюють за формулою  $3x^2 - 2y^3$ . Гру вважають антагоністичною. Тому програш другого гравця дорівнює виграшу першого.

*Розв'язання.* Оскільки функція  $3x^2 - 2y^3$  є неперервною, то розглянута гра є неперервною грою двох гравців з нульовою сумою. Згідно з теоремою існування розв'язку така гра має розв'язок.

У випадку опуклості цієї функції вигравів гру називають *опуклою*, а коли її можна подати у вигляді добутку функцій від одного аргументу – *сепарабельною*. Ігри типу *дуелей* характеризуються моментом вибору ходу і ймовірностями отримання вигравів залежно від часу, який минув від початку гри до моменту вибору.

За кількістю ходів ігри поділяють на одно- та багатокрокові. В *однокрокових* іграх кожний гравець робить один хід і гра закінчується. Далі гравці розподіляють виграші. У *багатокрокових* іграх кожен гравець може робити декілька чи нескінченну кількість кроків. Серед багатокрокових виділяють *диференціальні* ігри. До них належать ігри, в яких ходи допускається робити неперервно, а поведінка гравців відповідає деяким умовам, які описують диференціальними рівняннями.

Залежно від відомостей про попередній розвиток гри, які відомі гравцям, вирізняють ігри з повною і з неповною інформацією. До ігор з *повною інформацією* належать такі ігри, в яких на кожному їхньому ході кожному гравцеві відомо, які вибори були зроблені гравцями раніше. Якщо у грі не все відомо про попередні вибори гравців, то це гра з *неповною інформацією*.

**7.3.4. Матричні ігри в чистих стратегіях.** Детальніше розглянемо матричні ігри. Нехай перший гравець має  $m$  стратегій ( $i = \overline{1, m}$ ), а другий –  $n$  стратегій ( $j = \overline{1, n}$ ). Їх називають чистими стратегіями гравців. Якщо перший гравець застосує свою  $i$ -ту чисту стратегію, а другий – свою  $j$ -ту чисту стратегію, то виграш першого гравця ( $i$  відповідно програш другого гравця) буде дорівнювати числу  $a_{ij}$ , які в сукупності утворюють матрицю виграшів

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (7.27)$$

Кожний гравець робить один хід, і гра на цьому закінчується.

Для вирішення реальної конфліктної ситуації за допомогою теорії ігор спочатку треба виділити і перенумерувати чисті стратегії кожного гравця і скласти матрицю виграшів. Далі потрібно визначити, як чинити кожному гравцеві, тобто яку стратегію кожному з них вибирати, щоб за будь-яких дій партнера забезпечити собі найбільший гарантований виграш. Такі стратегії називають *оптимальними*. Припускають, що в жодного гравця немає інформації про стратегію, яку обрав суперник.

Розглянемо міркування, якими керується перший гравець для визначення своєї оптимальної стратегії. Якщо він обере свою  $i$ -ту чисту стратегію, то залежно від ходу другого гравця може сподіватися на один з  $n$  виграшів

$$a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}. \quad (7.28)$$

Найменший його виграш у цьому випадку буде

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}. \quad (7.29)$$

Тобто у разі  $i$ -ї стратегії його гарантований виграш дорівнюватиме  $\alpha_i$ . Знаючи наведені величини для всіх можливих стратегій  $i$  ( $i = \overline{1, m}$ ), він вибирає серед них найбільшу

$$\max_i \min_j a_{ij} = a_{ik} = \max_i \alpha_i = \alpha. \quad (7.30)$$

Стратегію  $l$ , відповідно до формули (7.30), називають *максимінною*. Вона забезпечує першому гравцеві отримання гарантованого виграшу, не меншого ніж  $\alpha$ , у випадку будь-яких дій другого гравця. Число  $\alpha$ , яке визначене за формулою (7.30), називають *нижньою чистою ціною гри*. Воно розташоване в  $l$ -му рядку матриці  $A$ .

Аналогічно міркує другий гравець. Він прагне мінімізувати виграш свого суперника, тобто максимально зменшити свій програш. Тому для кожної чистої стратегії  $j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) він визначає найбільший свій програш за будь-яких дій першого гравця, тобто знаходить величини

$$\beta_j = \max_i a_{ij}, \quad (j = \overline{1, n}). \quad (7.31)$$

Далі шукає цю свою стратегію, для якої цей програш буде найменшим

$$\min_j \max_i a_{ij} = a_{sp} = \min_j \beta_j = \beta_p = \beta. \quad (7.32)$$

З огляду на формулу (7.32)  $p$ -ту стратегію другого гравця називають *мінімаксною*. Вона гарантує другому гравцеві програш не більший ніж  $\beta$ , як би не діяв його суперник. Це число  $\beta$  називають *верхньою чистою ціною гри*.

**П р и к л а д 7.5.** Для матричної гри, яка задана такою платіжною матрицею виграшів першого гравця

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

знайти нижню та верхню чисті ціни гри.

*Розв'язання.* Оскільки

$$\alpha_1 = \min(4; 0; -1; 3) = -1, \quad \alpha_2 = \min(2; 5; 0; 1) = 0, \quad \alpha_3 = \min(1; 3; 4; 2) = 1,$$

$$\text{і } \beta_1 = \max(4; 2; 1) = 4, \quad \beta_2 = \max(0; 5; 3) = 5,$$

$$\beta_3 = \max(-1; 0; 4) = 4, \quad \beta_4 = \max(3; 1; 2) = 3,$$

$$\text{то } \alpha = \max(-1; 0; 1) = 1, \quad \text{а } \beta = \min(4; 5; 4; 3) = 3.$$

Звідси видно, що для першого гравця найкращою є третя стратегія, а для другого – четверта. Причому верхня і нижня чисті ціни гри не дорівнюють одна одній.

Можна довести [38, с. 23], що в матричній грі нижня чиста ціна гри  $\alpha$  не перевищує верхньої чистої ціни гри  $\beta$ , тобто  $\alpha \leq \beta$ . У попередньому прикладі  $\alpha < \beta$ . Однак є ігри, для яких  $\alpha = \beta$ .

Якщо в матричній грі

$$\alpha = \beta, \quad (7.33)$$

то кажуть, що ця гра має *сідлову точку* в чистих стратегіях і *чисту ціну* гри ( $v$ ), яка дорівнює нижній і верхній чистим цінам гри:

$$v = \alpha = \beta.$$

Пару чистих стратегій  $(i^*, j^*)$  тоді називають *сідловою точкою* матричної гри в чистих стратегіях, а елемент  $a_{i^*, j^*}$  – *сідловим елементом* платіжної матриці  $A$  цієї гри, де  $i^*$  та  $j^*$  – номери чистих стратегій відповідно першого та другого гравців, для яких виконується рівність (7.33).

Чиста ціна гри  $v$  у грі з сідловою точкою є тим значенням виграшу, що у грі проти розумного супротивника перший гравець не в змозі збільшити, а другий гравець – зменшити.

Для знаходження сідлових елементів певної матриці можна скористатись таким алгоритмом. У кожному рядку цієї матриці шукають мінімальний елемент і перевіряють, чи він є максимальний у своєму стовпці. Якщо для якогось елемента це справджується, то він є сідловим.

**Зауваження.** У матричній грі може бути декілька сідлових точок.

Виявляється, що за наявності в матриці гри кількох сідлових точок усі вони визначають одну чисту ціну гри (дають одне і те саме значення виграшу).

П р и к л а д 7.6. Перевірити, чи матрична гра у чистих стратегіях, яка задана платіжною матрицею виграшів першого гравця

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & -1 & -3 \\ 9 & -2 & -5 & 1 \end{pmatrix},$$

має сідлову точку.

*Розв'язання.* Знайдемо нижню та верхню чисті ціни гри. Скориставшись матрицею  $A$ , отримаємо  $\alpha_1 = 2$ ,  $\alpha_2 = -3$ ,  $\alpha_3 = -5$ ,  $\beta_1 = 9$ ,



$\beta_2 = 2$ ,  $\beta_3 = 3$ ,  $\beta_4 = 2$ ,  $\alpha = \max(2; -3; -5) = 2$ ,  $\beta = \min(9; 2; 3; 2) = 2$ .  
Оскільки  $\alpha = \beta = 2$ , то задана матрична гра має сідлову точку. З матриці  $A$  видно, що розглянута гра має дві сідлові точки:  $(1; 2)$  і  $(1; 4)$ .

Чисті стратегії  $i^*$  та  $j^*$ , що утворюють сідлову точку, називають *оптимальними чистими стратегіями* відповідно першого та другого гравців, а набір  $(i^*, j^*, v)$  – *розв'язком матричної гри в чистих стратегіях*. Зокрема, матрична гра, яку розглядають у прикладі 7.6, має два розв'язки:  $(1; 2; 2)$  і  $(1; 4; 2)$ .

Під час вибору стратегій гравцям треба пам'ятати таку властивість матричних ігор: якщо певний гравець відхилиться від свого оптимального рішення, то його виграш (програш) або залишиться незмінним, або погіршиться. Тому у разі дотримання одним з гравців свого оптимального рішення іншому не вигідно відхилитися від свого оптимального рішення.

Зважаючи на це, для ігор із сідловими точками в чистих стратегіях мінімаксні рішення є стійкими. Відповідні стратегії гравців визначають певний стан рівноваги гри: відхилення від оптимального рішення спричиняє таку не вигідну зміну виграшу для гравця, котрий зумовив це відхилення, що це змушує його повернутися до оптимального рішення.

Отже, можна зробити загальний висновок, що, якщо в матричній грі у чистих стратегіях виконується умова (7.33), то ця гра має розв'язок, і знайти його – означає знайти сідлову точку цієї гри і її сідловий елемент.

**7.3.5. Основна теорема матричних ігор.** Матричні ігри двох гравців з нульовою сумою, для яких виконується умова  $\alpha = \beta$  (мають сідлову точку), трапляються досить рідко. Тому треба вміти знаходити розв'язок таких ігор за умови  $\alpha < \beta$ . З попередніх міркувань можна зробити висновок, що у разі вмілого вибору стратегій обома гравцями виграш першого з них буде не меншим від  $\alpha$  і не більшим від  $\beta$ . Виникає запитання, що робити першому гравцеві, щоб гарантовано отримати якомога більший виграш. Відповідь на це запитання можна дати лише у випадку багаторазового повторення ігор у вигляді партій цих ігор із збереженням секретності щодо чистих стратегій, які доцільно застосовувати у відповідній партії. У кожній з цих партій

гравці вибирають свої чисті стратегії випадково, з визначеною ймовірністю.

Стратегію гравця, що полягає у випадковому чергуванні кількох його індивідуальних рішень, у теорії ігор називають *мішаною стратегією*. Тобто *мішаною стратегією* гравця називають розподіл ймовірностей на множині його чистих стратегій. Якщо перший гравець має  $m$  стратегій  $1, 2, \dots, i, \dots, m$ , то його мішана стратегія  $X$  – це вектор  $X = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_m)$ , елементи якого задовольняють співвідношенням

$$x_i \geq 0, (i = \overline{1, m}), \quad \sum_{i=1}^m x_i = 1. \quad (7.34)$$

Тут  $x_i$  – ймовірність, з якою цей гравець вибирає свою чисту стратегію  $i$  ( $i = \overline{1, m}$ ).

Для другого гравця мішаною стратегією називають вектор  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_j, \dots, y_n)$ , елементи якого задовольняють співвідношенням

$$y_j \geq 0, (j = \overline{1, n}), \quad \sum_{j=1}^n y_j = 1, \quad (7.35)$$

де  $y_j$  – ймовірність, з якою цей гравець вибирає свою чисту стратегію  $j$  ( $j = \overline{1, n}$ ). З розглянутих визначень очевидно, що кожна чиста стратегія певного гравця є частковим випадком його мішаної стратегії, коли відповідний вектор ймовірностей є одиничним. Мішані стратегії є математичною моделлю мінливої та гнучкої тактики, дотримання якої не дає змоги супротивникові дізнатися про прийняття рішення. Адже навіть сам гравець заздалегідь не знає про свій черговий хід, тобто про чисту стратегію, яку він застосує у черговій партії, оскільки ці стратегії вибирають випадково з певною ймовірністю.

Щоб оцінити результати багаторазового проведення гри, зручно ввести поняття середнього виграшу. Метою гравця є максимізація свого середнього виграшу у всій сукупності цих партій.

Оскільки гравці вибирають свої мішані стратегії  $X$  та  $Y$  випадково і незалежно один від одного, то ймовірність вибору першим гравцем своєї  $i$ -ї чистої стратегії, а другим – своєї  $j$ -ї чистої

стратегії за теоремою множення ймовірностей для незалежних подій дорівнює  $x_i y_j$ . Тож вигрaшем першого гравця є випадкова величина, яка набуває значень  $a_{ij}$  з ймовірностями  $x_i y_j$ , тому результат гри для нього можна оцінити математичним сподіванням його вигрaшу

$$M(A, X, Y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j = XAY^T, \quad (7.36)$$

де  $A$  – матриця вигрaшів, що задається формулою (7.27);  $Y^T$  – вектор, який є транспонований до вектора  $Y$ .

Величину  $M(A, X, Y)$  називають *середнім вигрaшем першого гравця* чи, відповідно, *середнім програшем другого гравця*. Очевидно, що ця величина є функцією  $X$  та  $Y$ . Тому її ще називають *платіжною функцією* гри з матрицею  $A$ .

Для ігор з мішаними стратегіями за аналогією з іграми з чистими стратегіями вводять *нижню*  $\alpha$  та *верхню*  $\beta$  ціни гри, де

$$\alpha = \max_x \min_y M(A, X, Y), \quad (7.37)$$

$$\beta = \min_y \max_x M(A, X, Y). \quad (7.38)$$

*Оптимальними мішаними стратегіями* першого та другого гравців називають такі вектори  $X^*$ ,  $Y^*$  відповідно для першого та другого гравців, які задовольняють рівності

$$\min_y \max_x M(A, X, Y) = \max_x \min_y M(A, X, Y) = M(A, X^*, Y^*) = v. \quad (7.39)$$

Величину  $v$  називають *ціною гри*. Оптимальні мішані стратегії і ціну гри називають *розв'язком матричної гри у мішаних стратегіях*.

**Зауваження.** Можна довести [38, с. 23–25], що еквівалентним цьому визначенню оптимальних мішаних стратегій є інше: вектори  $X^*$ ,  $Y^*$  називаються *оптимальними мішаними стратегіями* відповідно першого і другого гравців, якщо вони утворюють сідлову точку для функції  $M(A, X, Y)$ , тобто задовольняють нерівностям

$$M(A, X, Y^*) \leq M(A, X^*, Y^*) \leq M(A, X^*, Y). \quad (7.40)$$

Виявляється, що *будь-яка матрична гра має розв'язок (сідлову точку) у мішаних стратегіях*. Це твердження називають *основною теоремою теорії матричних ігор*. Її вперше довів Нейман. Її доведення наведено у спеціальній літературі, зокрема [38, С. 30-31].

### 7.3.6. Розв'язування матричних ігор у мішаних стратегіях.

Теорема Неймана доводить існування розв'язку матричної гри у мішаних стратегіях. Однак для розв'язування цієї гри теореми Неймана недостатньо. Потрібний алгоритм, згідно з яким цей розв'язок можна було б знайти. Вчені розробили кілька таких алгоритмів. Розглянемо один із них, який ґрунтується на зведенні заданої гри до задачі лінійного програмування.

Цей метод передбачає, що ціна гри додатна. Це припущення не зменшує загальності, оскільки до всіх елементів платіжної матриці гри можна додати достатньо велике число  $C$ , щоб вони всі стали додатні й ціна гри тоді також буде додатна. У цьому разі оптимальні мішані стратегії гравців не зміняться.

**Зауваження.** Перш ніж зводити матричну гру до задачі лінійного програмування її у разі необхідності спрощують. Спрощення гри полягає у викреслюванні певних зайвих рядків і стовпців її матриці – ігноруванні певних індивідуальних рішень гравців. Такі зайві рішення бувають двох типів: дублюючі та явно не вигідні. Два рядки чи стовпці будуть *дублюючими*, якщо їхні відповідні елементи збігаються. Для першого гравця  $i$ -та чиста стратегія є *явно не вигідною*, якщо в його платіжній матриці  $A$  міститься  $k$ -й рядок, для всіх елементів якого виконується умова  $a_{ij} \leq a_{kj}$ ,  $j = \overline{1, n}$ . Аналогічно для другого гравця  $j$ -та чиста стратегія є *явно не вигідною*, якщо в платіжній матриці гри  $A$  міститься  $l$ -й стовпець, для всіх елементів якого виконується умова  $a_{ij} \geq a_{il}$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

Розглянемо парну матричну гру  $m \times n$  з нульовою сумою, яка задана платіжною матрицею  $A$ . Нехай вектор  $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*)$  є оптимальною мішаною стратегією першого гравця, а  $Y^j$  – чистою  $j$ -ю стратегією ( $j = \overline{1, n}$ ) другого гравця, тобто  $Y^j = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ , де єдина одиниця у цьому векторі є на  $j$ -му місці. Мішану стратегію  $X^*$ , яка є невідомою, знайдемо з таких міркувань. Якщо обидва гравці застосовують зазначені стратегії, то з нерівності (7.40) маємо

$$M(A, X^*, Y^j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i^* \geq v, \quad (j = \overline{1, n}). \quad (7.41)$$

Поділивши (7.34), (7.41) на  $v > 0$  та ввівши нові позначення

$$\frac{x_i^*}{v} = p_i \quad (i = \overline{1, m}), \quad (7.42)$$

отримаємо

$$\sum_{i=1}^m p_i = \frac{1}{v}, \quad (7.43)$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} p_i \geq 1; \quad (j = \overline{1, n}), \quad (7.44)$$

$$p_i \geq 0; \quad (i = \overline{1, m}). \quad (7.45)$$

Оскільки метою гри для першого гравця є досягнення найбільшого значення для  $v$ , або, що те саме, найменшого для  $\frac{1}{v}$ , отримуємо таку задачу: знайти найменше значення лінійної функції

$$L = \sum_{i=1}^m p_i \rightarrow \min \quad (7.46)$$

за умов (7.44), (7.45).

Розв'язуючи отриману задачу лінійного програмування, знаходимо її оптимальний план  $P^* = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_m^*)$ , оптимальне значення цільової функції  $L^* = \sum_{i=1}^m p_i^*$ , ціну гри  $v = \frac{1}{L^*}$  і оптимальну мішану стратегію першого гравця

$$x_i^* = v p_i^* = \frac{p_i^*}{L^*}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (7.47)$$

Для знаходження оптимальної мішаної стратегії  $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*)$  другого гравця міркуватимемо аналогічно. Якщо він застосовує її проти  $i$ -ї ( $i = \overline{1, m}$ ) чистої стратегії  $X^i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  першого гравця (єдина одиничка стоїть на  $i$ -му місці), то, беручи до уваги нерівність (7.40), отримаємо

$$M(A, X^i, Y^*) = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j^* \leq v, \quad (i = \overline{1, m}). \quad (7.48)$$

Поділимо (7.35) і (7.48) на  $v > 0$  та зробимо заміну

$$\frac{y_j^*}{v} = q_j \quad (j = \overline{1, n}). \quad (7.49)$$

Після всіх цих перетворень отримаємо

$$\sum_{j=1}^n q_j = \frac{1}{v}, \quad (7.50)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} q_j \leq 1; \quad (i = \overline{1, m}), \quad (7.51)$$

$$q_j \geq 0; \quad (j = \overline{1, n}). \quad (7.52)$$

Другий гравець прагне мінімізувати свій програш  $v$ . Його влаштовують такі  $q_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ), коли

$$S = \sum_{j=1}^n q_j \rightarrow \max. \quad (7.53)$$

Отже, отримали нову задачу лінійного програмування (7.53), (7.51), (7.52). Розв'язавши її, знайдемо оптимальну мішану стратегію другого гравця

$$y_j^* = v q_j^* = \frac{q_j^*}{S^*}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (7.54)$$

де  $Q^* = (q_1^*, q_2^*, \dots, q_n^*)$  – оптимальний план цієї задачі;

$S^* = \sum_{j=1}^n q_j^*$  – оптимальне значення її цільової функції.

Легко довести, що відповідно до зроблених припущень щодо платіжної матриці гри розв'язки обох задач (7.46), (7.44), (7.45) і (7.53), (7.51), (7.52) існують.

**Зауваження.** Деякі матричні ігри перед розв'язуванням можна спростити. Якщо гра має таку особливість, то її перед зведенням до задачі лінійного програмування спрощують.

**П р и к л а д 7.7** [5, с. 404]. Підприємство випускає взуття трьох видів ( $i = \overline{1, 3}$ ): широкого вжитку “на щодень” ( $i = 1$ ), спортивне ( $i = 2$ ) і спеціальне ( $i = 3$ ). Прибуток, який може отримати підприємство від випущеної продукції, залежить від чотирьох чинників попиту ( $j = \overline{1, 4}$ ): купівельної спроможності населення ( $j = 1$ ), категорії потенційних покупців ( $j = 2$ ), насичення ринку товаром ( $j = 3$ ) і кількості конкурентів на ринку ( $j = 4$ ). Величина прибутку, який отримає підприємство, якщо випускатиме продукцію  $i$ -го виду за умов  $j$ -го стану попиту на неї, дорівнює  $a_{ij}$  і задається елементами матриці

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 7 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}. \quad (7.55)$$

Визначити оптимальні пропорції продукції кожного виду, що забезпечить найбільшу величину середнього прибутку за будь-якого стану попиту.

*Розв'язування.* Тракуємо умови прикладу як гру, в якій перший гравець – підприємство, що має три стратегії ( $i = \overline{1, 3}$ ), а другий гравець – ринок, що має чотири стратегії ( $j = \overline{1, 4}$ ). Із матриці  $A$  (формула (7.55)) видно, що третя стратегія другого гравця є явно невідною для нього, оскільки елементи третього стовпця не менші від відповідних елементів другого стовпця. Тому йому доцільно обмежитись трьома стратегіями. Виходячи з цих міркувань, викреслимо з матриці  $A$  третій стовпець. Отримаємо матрицю

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 1 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}, \quad (7.56)$$

де  $b_{ij} = a_{ij}$  для  $i = \overline{1, 3}$ ,  $j = 1, 2$  і  $b_{i3} = a_{i4}$   $i = \overline{1, 3}$ .

Надалі розглядаємо гру, задану за допомогою платіжної матриці  $B$ .

Для матричної гри в чистих стратегіях, яка задана платіжною матрицею  $B$ , нижня та верхня ціни гри відповідно дорівнюють  $\alpha = 2$  і  $\beta = 5$ . Оскільки  $\alpha < \beta$ , шукаємо розв'язок гри у мішаних стратегіях. Для знаходження оптимальних мішаних стратегій першого та другого гравців запишемо відповідні задачі лінійного програмування.

Беручи до уваги позначення (7.42), (7.49), задачі (7.46), (7.44), (7.45) і (7.53), (7.51), (7.52) матимуть такий вигляд:

$$L = p_1 + p_2 + p_3 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} 4p_1 + 5p_2 + p_3 \geq 1, \\ 2p_1 + 7p_2 + 3p_3 \geq 1, \\ 4p_1 + p_2 + 8p_3 \geq 1, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 p_i &\geq 0, i=1,2,3. \\
 S &= q_1 + q_2 + q_3 \rightarrow \max, \\
 &\begin{cases} 4q_1 + 2q_2 + 4q_3 \leq 1, \\ 5q_1 + 7q_2 + q_3 \leq 1, \\ q_1 + 3q_2 + 8q_3 \leq 1, \\ q_j \geq 0, j=1,2,3. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Оптимальні розв'язки і оптимальні значення цільових функцій цих задач є такими [5, с. 407]:

$$P^* = \left( \frac{11}{83}; \frac{7}{83}; \frac{4}{83} \right), Q^* = \left( \frac{16}{166}; \frac{5}{166}; \frac{23}{166} \right), L^* = S^* = \frac{22}{83}.$$

Знаходимо ціну гри  $v = \frac{1}{L^*} = \frac{83}{22}$ . Скориставшись формулами (7.47), (7.54), розрахуємо оптимальні мішані стратегії першого та другого гравців  $X^* = \left( \frac{11}{22}, \frac{7}{22}, \frac{4}{22} \right)$  та  $Y^* = \left( \frac{16}{44}; \frac{5}{44}; 0; \frac{23}{44} \right)$ . Тут взято до уваги, що третя чиста стратегія для другого гравця є не вигідною.

Отримані результати свідчать про те, що підприємству бажано випускати  $\frac{11}{22} \cdot 100\% = 50\%$  взуття широкого вжитку “на щодень”,  $\frac{7}{22} \cdot 100\% = 31,8\%$  спортивного і  $\frac{4}{22} \cdot 100\% = 18,2\%$  спеціального. Середній прибуток підприємства за таких пропорцій випуску становитиме  $\frac{83}{22} = 3,8$  од., тоді як найкраща його перша чиста стратегія може забезпечити йому прибуток лише 2 од. Ринковий попит на продукцію на  $\frac{16}{44} \cdot 100\% = 36,4\%$  залежить від купівельної спроможності покупців, на  $\frac{5}{44} \cdot 100\% = 11,4\%$  – від категорії потенційних покупців, на  $\frac{23}{44} \cdot 100\% = 52,2\%$  – від кількості конкурентів на ринку, а насичення ринку товаром на попит майже не впливає.



## 8. АНАЛІЗ ГОСПОДАРСЬКОЇ ДІЯЛЬНОСТІ ЗА УМОВ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

### 8.1. Поняття лінгвістичної змінної, нечіткої множини і її функції належності

У сучасних умовах досить часто доводиться виконувати економічний аналіз у разі недостатніх обсягів інформації про об'єкт дослідження. Необхідно залучати експертну інформацію та використовувати теорію нечітких множин.

Головним поняттям цієї теорії є *лінгвістична змінна*. Його вперше ввів у науковий обіг Лотфі Заде. Значенням цієї змінної є слова або вирази природної мови. Їх називають *лінгвістичними значеннями*, чи *лінгвістичними термами*. Прикладом лінгвістичної змінної може бути рівень безробіття, зокрема, коли він визначається не числовими, а лінгвістичними характеристиками (лінгвістичними термами), такими як, скажімо, дуже низький, низький, середній, високий, критичний. Отже, для оцінення лінгвістичних змінних використовують якісні терми. Наприклад, для лінгвістичної змінної “Зміна курсу цінного паперу” термом може бути якісна оцінка “Помірне зростання”.

Лінгвістична змінна – це змінна, значення якої визначають через набір вербальних (словесних) характеристик деякої властивості. Її значення нечітко характеризують стан об'єкта дослідження. Наприклад, двадцятивідсотковий рівень безробіття є критичним. Але не завжди із стовідсотковою впевненістю можна стверджувати, яке значення (терм) набуває певна лінгвістична змінна. Зокрема, восьмивідсотковий рівень безробіття можна розглядати і деякою мірою як середній, і в певному сенсі як високий [44].

Там, де уявлення людини про процеси та явища виражаються через недостатньо визначені якісні оцінки, виникають нечіткі категорії. В основі вивчення цих категорій є поняття нечіткої множини. Лінгвістичні терми визначають через нечіткі множини. Дехто їх ще називає розмитими, розпливчастими чи туманними множинами.

На противагу класичній (чіткій) теорії множин, в якій використовують закон Архімеда про виключення третього, згідно з

яким будь-який елемент належить або не належить множині, в теорії нечітких множин елемент може належати множині на половину, на чверть, на шістнадцять відсотків тощо. Тобто, на деякій множині (у класичному розумінні) елементів  $X$  вводять функцію належності  $\mu(x)$ , яка для чіткої множини може набувати тільки два значення (нуль чи один), а для нечіткої – довільне значення із відрізка  $[0, 1]$ . *Нечітку множину*  $A$  в  $X$  визначають як сукупність пар вигляду

$$A = \{(x, \mu_A(x)), x \in X\}, \quad (8.1)$$

де  $X$  – універсальна множина (базова шкала),  $\mu_A(x)$  – *функція належності* нечіткої множини  $A$ , яка відображає  $X \rightarrow [0, 1]$ .

З цього означення випливає, що звичайні (класичні) множини становлять підклас класу нечітких множин. Адже звичайну множину  $B$  можна також визначити як сукупність пар вигляду  $(x, \mu_B(x))$ , де характеристична функція  $\mu(x)$  може набувати тільки значення (нуль чи одиницю), тобто

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in B \\ 0, & \text{якщо } x \notin B \end{cases}$$

Отже, поняття нечіткої множини ширше, ніж поняття звичайної множини, оскільки функція належності першої з них може бути, взагалі кажучи, довільною функцією або навіть довільним відображенням.

Значення  $\mu_A(x)$  функції належності для конкретного значення  $x$  називають *мірою належності* цього елемента нечіткій множині  $A$ . Ця функція визначає суб'єктивну міру впевненості експерта про те, що задане конкретне значення базової шкали  $x$  відповідає нечіткій множині  $A$ . Міру належності не можна ототожнювати з ймовірністю, тому що невідома функція розподілу, немає повторюваності експериментів. Значення цієї функції можуть бути знайдені тільки за допомогою опитування експертів, їхнього досвіду та інтуїції. Оскільки нечітка множина цілком описується своєю функцією належності, то іноді використовуватимемо цю функцію для позначення нечіткої множини.

Функція належності може бути дискретною чи неперервною. Наприклад, якщо універсальна множина  $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$  і функція належності нечіткої множини  $A$  в  $X$  задані таблицею 8.1, то ця нечітка множина є дискретною, а якщо  $X = \{x \mid 0 \leq x \leq 6\}$  і  $\mu_A(x)$ ,  $\mu_B(x)$  для  $x \in X$  зображені на рис. 8.1, то нечіткі множини  $A$  і  $B$  є неперервними.

Таблиця 8.1

$x$	1	2	3	4	5
$\mu_A(x)$	1	0,4	0,5	1	0

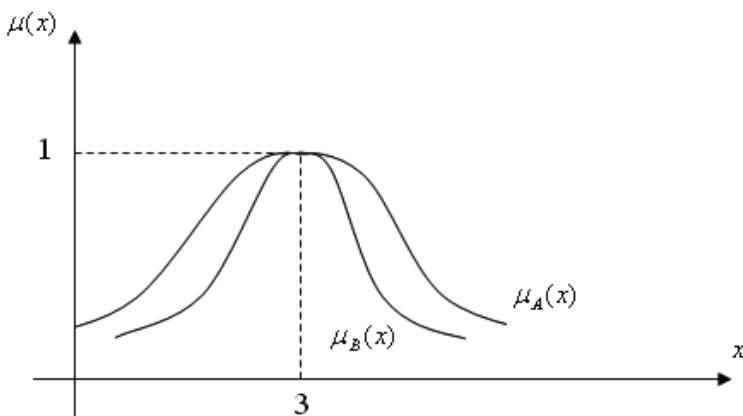


Рис. 8.1

Очевидно, що дві останні неперервні нечіткі множини ( $A$  та  $B$ ) мають відповідно такі смислові навантаження: значення  $x$  близьке до 3 і значення  $x$  дуже близьке до 3.

Носієм нечіткої множини  $A$  (позначають  $\text{sup } A$ ) з функцією належності  $\mu_A(x)$  є така чітка множина, для кожного елемента якої значення цієї функції належності додатне, тобто

$$\text{sup } A = \{x \mid x \in X, \mu_A(x) > 0\}.$$

У випадку, коли універсальна множина  $X$  є множиною дійсних чисел  $R$ , а функція належності нормальна (існує елемент множини, для якого ця функція дорівнює одиниці) і випукла, то нечітку множину  $A$  називають *нечітким числом*.

Нечіткі числа часто подають у  $LR$ -формі, що відповідає опису лівої (left) і правої (right) частин функції. Нечітке число  $A$  записане в  $LR$ -формі, якщо його функція належності має вигляд

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{\alpha}\right), \alpha > 0, \forall x \leq m, \\ R\left(\frac{x-m}{\beta}\right), \beta > 0, \forall x > m, \end{cases}$$

де  $L$  і  $R$  – функції (їх називають *референт-функціями*), які мають такі властивості:

а)  $L(0) = 1$ ,

б)  $L(u)$  монотонно спадає на проміжку  $[0, +\infty)$ .

Однозначно визначене число  $m$  є вершиною нечіткого  $L-R$  числа ( $\mu_A(m) = L(0) = 1$ ). Величини  $\alpha$  і  $\beta$  називають, відповідно, лівим і правим значенням ширини проміжку нечіткого числа  $A$ . Якщо  $\alpha = \beta = 0$ , то нечітке число  $A$  перетворюється у чітке число  $m$ . Навпаки, із зростання значень  $\alpha$  і  $\beta$  число  $A$  стає щораз нечіткішим. На практиці зображення  $L-R$  чисел спрощують унаслідок застосування лінійних функцій.

Нечітке число  $A$  у  $LR$ -формі зображають у вигляді трійки  $A = (m_A, \alpha_A, \beta_A)$ .

Якщо базова шкала дискретна і скінченна, тобто  $X = \{x_i\}_{i=1}^n$ , то нечітку множину  $A$  іноді записують так:

$$A = \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i) / x_i, \quad (8.2)$$

де  $x_i$  –  $i$ -те значення базової шкали.

Наприклад, розглянемо нечітку множину  $A$ , базова шкала якої є множиною натуральних чисел  $N$

$$A = 1/1 + 0,8/2 + 0,5/3 + 0,2/4 + 0/5 + 0/6 + \dots + 0/n + \dots \quad (8.3)$$

Її можна назвати нечіткою множиною “невеликих” натуральних чисел.

Нечітку множину називають *порожньою* (позначають  $\emptyset$ ), якщо її функція належності дорівнює нулю на всій множині  $X$ .

Важливою властивістю теорії нечіткої логіки є використання нечітких правил, які пов'язують між собою значення різних лінгвістичних змінних. Наприклад, зв'язок між зменшенням виробництва в регіоні і станом регіонального ринку праці відображає таке нечітке правило: ЯКЩО (падиння виробництва в регіоні – катастрофічне), ТОДІ (стан регіонального ринку праці суттєво погіршиться).

Під час проведення економічного аналізу із застосуванням теорії нечітких множин найбільш поширеними в практичному використанні є два способи формування функції належності: трапецієподібний та трикутний. Форми нечітких чисел, які використовують у цих випадках для опису невизначених параметрів, називають трапецієподібною та трикутною [68, С. 102]. Ми зазначали про трикутні нечіткі числа. Це такі числа, референт-функції яких є лінійними.

Під час задання нечітких чисел використовують експертну інформацію про параметр. До неї належать назва параметра  $q$  і діапазон  $[q, \bar{q}]$  зміни його значень, кількість лінгвістичних термів, з допомогою яких оцінюють цей параметр і назва кожного з цих термів.

Наприклад, у праці [58, с. 86-91] виконано кластерний аналіз регіонів України за станом їхніх ринків праці. Під час поділу регіонів на п'ять груп (стан регіонального ринку праці критичний, поганий, середній, добрий, найкращий) використано значення абсолютного інтегрального показника, які розраховані на підставі часткових статистичних показників. Однак поділ регіональних ринків праці на п'ять груп, залежно від ситуації, що склалася на них, можна виконати і за допомогою експертного оцінювання (нечіткої класифікації). У цьому разі спочатку потрібно вирішити, за допомогою якого параметра оцінювати стан ринку праці, тобто ввести його назву і назви відповідних йому лінгвістичних термів, а також діапазони змін параметра і цих термів. Для цього можна скористатись функціями належності трапецієподібного чи трикутного виду. Розглянемо їх детальніше.

*Трапецієподібною формою нечіткого числа  $\tilde{x}$  (невизначеного параметра  $x$ ) називають таку четвірку чисел:*

$$\tilde{x} = \langle \underline{x}', \underline{x}, \bar{x}, \bar{x}' \rangle, \quad (8.4)$$

де  $\underline{x}', \underline{x}, \bar{x}, \bar{x}'$  визначені згідно з рис. 8.2.

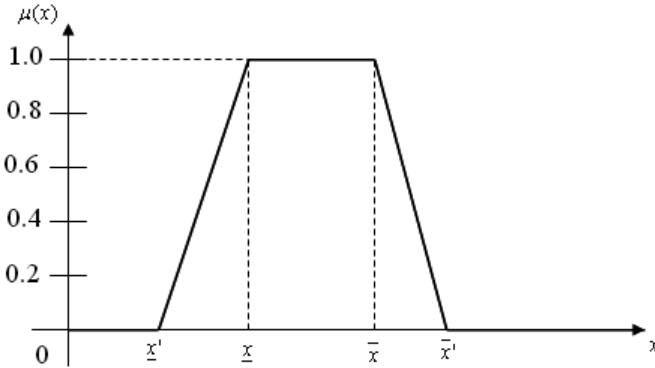


Рис. 8.2. Модель трапецієподібної функції належності

Якщо йдеться про певний нечіткий терм, то відповідну йому функцію належності змінної  $x$  в цьому випадку називають *трапецієподібною*.

В аналітичній формі цю функцію належності можна подати так:

$$\mu_{\tilde{x}}(x) = \begin{cases} 0, & x < \underline{x}', \\ \frac{x - \underline{x}'}{\underline{x} - \underline{x}'}, & \underline{x}' \leq x < \underline{x}, \\ 1, & \underline{x} \leq x < \bar{x}, \\ \frac{\bar{x}' - x}{\bar{x}' - \bar{x}}, & \bar{x} \leq x \leq \bar{x}', \\ 0, & x > \bar{x}'. \end{cases} \quad (8.5)$$

Інтервал  $[\underline{x}', \bar{x}']$  (нижня основа трапеції), який виражає всю припустиму множину значень нечіткого параметра  $x$ , називають *песимістичною оцінкою* цього параметра. Верхня основа трапеції  $[\underline{x}, \bar{x}]$ , тобто інтервал тих значень, для яких експерт визначає гарантовану відповідь обраному значенню лінгвістичної змінної, називають *оптимістичною оцінкою* цього параметра. Перший із

зазначених інтервалів є *носієм* нечіткого числа  $\tilde{x}$ , а другий – його *ядром*. Бічні ребра трапеції відображають зміну ступеня впевненості експерта в його оцінці від 1 до 0. Всі інші значення чинника  $x$ , що виходять за межі основи трапеції, однозначно не відповідатимуть обраній лінгвістичній змінній.

Для експерта трапецієподібна функція належності зручна у використанні тим, що він апіорно може задати межі, належність до яких буде однозначно визначати відповідність змінної заданому терму. Під час використання цих функцій в нечітких оптимізаційних задачах ми можемо визначити незмінність параметрів  $\underline{x}$  та  $\bar{x}$ , задавши можливість її налагодження лише за параметрами  $\underline{x}'$  та  $\bar{x}'$ , або навпаки.

Трикутні функції належності зручно використовувати, наприклад у випадку, коли під час оцінювання деякого параметра необхідно визначити ступінь  $\Delta > 0$  його близькості до певного заданого числа  $a$  ( $a \pm \Delta \cong a$ ). Тоді із зменшенням  $\Delta$  до нуля ступінь впевненості експерта в оцінюванні зростатиме до одиниці.

*Трикутною формою нечіткого числа  $\tilde{x}$*  (невизначеного параметра  $x$ ) називають таку трійку чисел:

$$\tilde{x} = \langle \underline{x}, \hat{x}, \bar{x} \rangle, \tag{8.6}$$

де  $\underline{x}, \hat{x}, \bar{x}$  визначені згідно з рис. 8.3.

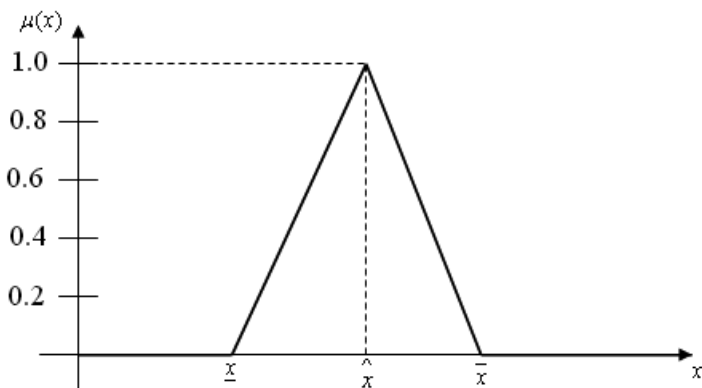


Рис. 8.3. Модель трикутної функції належності

Якщо йдеться про певний нечіткий терм, то відповідну йому функцію належності змінної  $x$  у цьому випадку називають *трикутною*.

Цю функція належності в аналітичній формі можна виразити так:

$$\mu_{\tilde{x}}(x) = \begin{cases} 0, & x < \underline{x}, \\ \frac{x - \underline{x}}{\hat{x} - \underline{x}}, & \underline{x} \leq x < \hat{x}, \\ \frac{\bar{x} - x}{\bar{x} - \hat{x}}, & \hat{x} \leq x \leq \bar{x}, \\ 0, & x > \bar{x}. \end{cases} \quad (8.7)$$

Носієм нечіткого числа  $\tilde{x}$  є інтервал  $[\underline{x}, \bar{x}]$ , який називають *песимістичною оцінкою* параметра  $x$ , а *ядром* – число  $\hat{x}$  – *оптимістична оцінка* цього параметра.

Трапецієподібні та трикутні функції належності використовують для побудови моделей нечітких чисел чи нечітких значень (термів) лінгвістичних змінних. Хоча трапецієподібні та трикутні функції належності досить прості, зрозумілі й легкі у використанні, однак вони не мають простих похідних, а тому наявні певні обмеження під час налагодження моделей, побудованих на їхній основі. На практиці використовують деякі інші функції належності, які (на відміну від розглянутих раніше) є гладкими. До них, зокрема, належить *дзвоноподібна (гаусова) функція належності* змінної  $x$  довільного нечіткого терму  $T$  [63, с. 62], аналітична модель якої має такий вигляд:

$$\mu_T(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x - b}{c}\right)^2}, \quad (8.8)$$

де  $c$  – коефіцієнт концентрації-розтягування функції (зі зменшенням його графік цієї функції щораз ближче “прилягатиме” до прямої  $x = b$ );

$b$  – координата максимуму функції належності ( $\mu_{\tilde{x}}(x)$ ).

Графік цієї функції зображено на рис. 8.4.



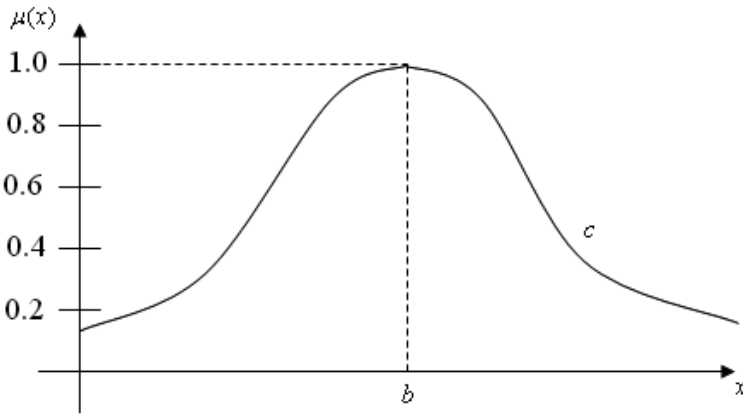


Рис. 8.4. Модель дзвоноподібної функції належності

Число  $b$  є найбільш прагматичним значенням змінної  $x$  для заданого нечіткого терму. Головними перевагами цієї функції належності є її простота та зручність налагодження.

Над нечіткими множинами можна виконувати теоретико-множинні та деякі інші операції. Розглянемо основні з них.

*Об'єднанням* (додаванням) нечітких множин  $A$  і  $B$  на універсальній множині  $X$  називають нечітку множину  $A \cup B$  ( $A + B$ ), функція належності якої має такий вигляд:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \forall x \in X. \quad (8.9)$$

*Перетином* (добутком) нечітких множин  $A$  і  $B$  на універсальній множині  $X$  називають нечітку множину  $A \cap B$  ( $A \cdot B$ ), функція належності якої має такий вигляд:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \forall x \in X. \quad (8.10)$$

**П р и к л а д 8.1.** Нехай задані дискретні множини

$$A = \frac{1}{1} + \frac{0}{2} + \frac{0,5}{3} + \frac{0,1}{4} + \frac{0}{5} + \frac{0}{6}, \quad (8.11)$$

$$A = \frac{0,2}{1} + \frac{0}{2} + \frac{0,3}{3} + \frac{0,2}{4} + \frac{1}{5} + \frac{0,4}{6}. \quad (8.12)$$

Тоді, відповідно, об'єднання і перетин цих множин запишемо так:

$$A \cup B = \frac{1}{1} + \frac{0}{2} + \frac{0,5}{3} + \frac{0,2}{4} + \frac{1}{5} + \frac{0,4}{6},$$

$$A \cap B = \frac{0,2}{1} + \frac{0}{2} + \frac{0,3}{3} + \frac{0,1}{4} + \frac{0}{5} + \frac{0}{6}.$$

Розглянемо тепер неперервні множини  $A$  і  $B$ , функції належності яких зображені на рис. 8.1. Оскільки для кожного  $x$  значення  $\mu_A(x)$  більше за величину  $\mu_B(x)$ , то для цих множин  $\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x)$ ,  $\mu_{A \cap B}(x) = \mu_B(x)$ .

## 8.2. Побудова нечіткої моделі об'єкта економічного аналізу

**8.2.1. Постановка задачі.** У 2.3 розглянуто алгоритми побудови інтегральних показників на підставі значень частинних показників. Як первинні дані використано статистичну інформацію. Якщо ж частинні показники не кількісні, а якісні, то застосовувати зазначену методику для узагальненого оцінювання певного явища чи процесу неможливо. Тим більше неможливо її використати у випадку невпевненості експерта у деяких своїх висновках. У цьому випадку для комплексного аналізу економічних об'єктів необхідно використовувати нечітку логіку.

Розглянемо методику формалізації причинно-наслідкових зв'язків між змінними “входи-виходи” у випадку нечітких вхідних даних. Вона полягає у описі цих зв'язків природною мовою з використанням теорії нечітких множин і лінгвістичних змінних. Окрім інших, вона охоплює алгоритми побудови нечіткої бази знань, яка є носієм експертної інформації [63].

Нехай нам задано об'єкт з  $n$  входами і одним виходом типу

$$y = f_y(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (8.13)$$

де  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – вхідні змінні;

$y$  – вихідна змінна.

Змінні  $x_1, x_2, \dots, x_n$  і  $y$  можуть бути як кількісними, так і якісними.

Приклади кількісних змінних: рівень зайнятості, кількість безробітних, урожайність сільськогосподарської культури тощо, які легко виміряти згідно з прийнятими для них кількісними шкалами. Прикладом змінної, для яких не має природної кількісної шкали, є

рівень розвитку людського потенціалу, який можна виміряти якісними термами (низький, середній, високий), або виміряти у штучних шкалах, наприклад за 5-бальною, 10-бальною, ..., 100-бальною системами.

Для кількісних змінних вважатимемо відомими області зміни:

$$U_i = [\underline{x}_i, \bar{x}_i], i = \overline{1, n}, Y = [\underline{y}, \bar{y}], \quad (8.14)$$

де  $\underline{x}_i$  ( $\bar{x}_i$ ) і  $\underline{y}$  ( $\bar{y}$ ), відповідно, нижнє (верхнє) значення вхідної ( $i = \overline{1, n}$ ) і вихідної змінних.

Якщо змінні  $x_i$  і  $y$  якісні, то припустимо, що відомі множини всіх можливих їхніх значень:

$$U_i = \{v_i^1, v_i^2, \dots, v_i^{q_i}\}, i = \overline{1, n}, \quad (8.15)$$

$$Y = \{y^1, y^2, \dots, y^{q_m}\}, \quad (8.16)$$

де  $v_i^1$  ( $v_i^{q_i}$ ) – бальна оцінка, що відповідає найменшому (найбільшому) значенню вхідної змінної  $x_i$  ( $i = \overline{1, n}$ );

$y^1$  ( $y^{q_m}$ ) – бальна оцінка, що відповідає найменшому (найбільшому) значенню вхідної змінної  $y$ .

Зауважимо, що для розв'язання задачі ідентифікації об'єкта кількісні змінні також переводять у терми лінгвістичної форми за допомогою операції фазифікації (розглянемо нижче) і надалі оперують з ними як з якісними.

Якщо  $X^* = \langle x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^* \rangle$  – вектор фіксованих значень вхідних змінних розглядуваного об'єкта, де  $x_i^*$  ( $i = \overline{1, n}$ ) належить до (8.14) або визначається через (8.15), то задача прийняття рішень полягає у тому, щоби за її допомогою цьому вектору однозначно ставився б у відповідність розв'язок  $y^*$ , який належить визначеній за формулою (8.14) чи (8.16) множині  $Y$ . Причому як вхідні, так і вихідна змінна є нечіткими.

**8.2.2. Фазифікація змінних величин.** *Фазифікація* – це операція, яка ставить у відповідність кожному значенню  $x$  певної множини його функцію належності  $\mu(x)$ , тобто переведення значень  $x$  у нечіткий формат. *Дефазифікація* – процес, зворотний

фазифікації. Усі системи з нечіткою логікою функціонують за одним принципом: показання вимірювальних приладів (первинні статистичні чи експертні дані) фазифікуються (перетворюються у нечіткий формат), опрацьовуються, дефазифікуються і у вигляді звичних сигналів подаються на виконавчі пристрої (доводяться до особи, яка приймає рішення).

Необхідною умовою формального розв'язування розглянутої вище задачі є наявність залежності (8.13). Для визначення такої залежності розглянемо вхідні  $x_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) та вихідний  $y$  параметри як лінгвістичні змінні, задані на універсальних множинах (8.14)–(8.16).

Щоб оцінити лінгвістичні змінні  $x_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) і  $y$ , використовуватимемо якісні терми з таких терм-множин:

$A_i = \{a_i^1, a_i^2, \dots, a_i^{l_i}\}$  – терм-множина вхідної змінної  $x_i$  ( $i = \overline{1, n}$ );

$D = \{d_1, d_2, \dots, d_m\}$  – терм-множина вихідної змінної  $y$ ,

де  $a_i^p$  –  $p$ -й лінгвістичний терм змінної  $x_i$ ,  $p = \overline{1, l_i}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ;

$d_j$  –  $j$ -й лінгвістичний терм змінної  $y$ ,  $j = \overline{1, m}$ ,

$m$  – кількість різноманітних рішень у розглядуваній області.

Потужності  $l_i$  терм-множин  $A_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) можуть не збігатися. Аналогічно для різних лінгвістичних змінних  $x_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) можуть відрізнятися назви окремих термів  $a_i^1, a_i^2, \dots, a_i^{l_i}$ . Наприклад, *рівень безробіття* – {дуже низький, невисокий, середній, високий, критичний}, *зменшення виробництва* – {незначне, помітне, суттєве, катастрофічне}, *частота пульсу* – {сповільнена, нормальна, прискорена}.

Лінгвістичні терми  $a_i^p \in A_i$  та  $d_j \in D$ ,  $p = \overline{1, l_i}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, m}$  розглядатимемо як нечіткі множини, що задані на універсальних множинах (8.14) – (8.16).

Для випадку кількісних змінних  $x_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) та  $y$  нечіткі множини  $a_i^p$  та  $d_j$  визначають так:

$$a_i^p = \int_{\underline{x}_i}^{\bar{x}_i} \mu^{a_i^p}(x_i) | x_i, \quad (8.17)$$

$$d_j = \int_{\underline{y}}^{\bar{y}} \mu^{d_j}(y) | y, \quad (8.18)$$

де  $\mu^{a_i^p}(x_i)$  – функція належності значення вхідної змінної  $x_i \in [\underline{x}_i, \bar{x}_i]$  терму  $a_i^p \in A_i$ ,  $p = \overline{1, l_i}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ;  
 $\mu^{d_j}(y)$  – функція належності значення вихідної змінної  $y \in [\underline{y}, \bar{y}]$  терму-рішенню  $d_j \in D$ ,  $j = \overline{1, m}$ .

Для випадку кількісних змінних  $x_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) та  $y$  нечіткі множини  $a_i^p$  та  $d_j$  визначають так:

$$a_i^p = \sum_{k=1}^{q_i} \mu^{a_i^p}(v_i^k) | v_i^k, \quad (8.19)$$

$$d_j = \sum_{r=1}^{q_m} \mu^{d_j}(y^r) | y^r, \quad (8.20)$$

де  $\mu^{a_i^p}(v_i^k)$  – міра належності елемента  $v_i^p \in U_i$  терму  $a_i^p \in A_i$ ,  $p = \overline{1, l_i}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $k = \overline{1, q_i}$ ;  
 $\mu^{d_j}(y^r)$  – міра належності елемента  $y^r \in Y$  терму-розв'язку  $d_j \in D$ ,  $j = \overline{1, m}$ ;

$U_i$  і  $Y$  визначаються співвідношеннями (8.15)–(8.16).

Зауважимо, що у співвідношеннях (8.17)–(8.20) знаки інтеграла і суми означають об'єднання пар  $\mu(u) | u$ .

Визначення лінгвістичних оцінок змінних і необхідних для їх формалізації функцій належності є першим етапом побудови нечіткої моделі досліджуваного об'єкта. У теорії нечіткої логіки цей етап називають *фазифікацією змінних*.

**8.2.3. Побудова нечіткої бази знань.** Наступним етапом побудови нечіткої моделі об'єкта є побудова нечіткої бази знань. Нехай для об'єкта, який розглядають, відомо  $N$  експеримент-

тальних даних, які пов'язують його входи і вихід. Розподілимо їх за принципом відповідності вихідним рішенням так:

$$N = k_1 + k_2 + \dots + k_m, \quad (8.21)$$

де  $m$  – загальна кількість значень вихідної змінної;

$k_j$  – кількість експериментальних даних (правил у базі знань), що відповідають однаковому значенню  $d_j$  ( $j = \overline{1, m}$ ) вихідної змінної  $y$ , причому в загальному випадку  $k_1 \neq k_2 \neq \dots \neq k_m$ .

Вважатимемо, що  $N < l_1 \cdot l_2 \cdot \dots \cdot l_n$ , тобто кількість наявних експериментальних даних менше від повного перебору різних комбінацій можливих значень вхідних змінних досліджуваного об'єкта  $l_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ).

Перенумеруємо  $N$  експериментальних даних:

11, 12, ..., 1 $k_1$  – номери комбінацій вхідних змінних для рішення  $d_1$ ;

21, 22, ..., 2 $k_2$  – номери комбінацій вхідних змінних для рішення  $d_2$ ;

.....

$j1, j2, \dots, jk_j$  – номери комбінацій вхідних змінних для рішення  $d_j$ ;

.....

$m1, m2, \dots, mk_m$  – номери комбінацій вхідних змінних для рішення  $d_m$ .

*Матрицею знань* [63] називають таблицю, сформовану за такими правилами (див. табл. 8.2):

1. Розмірність таблиці дорівнює  $(n+1) \cdot N$ , де  $(n+1)$  – кількість стовпчиків, а  $N$  – кількість рядків (8.21);

2. Перші  $n$  стовпців матриці відповідають вхідним змінним  $x_i$ , ( $i = \overline{1, n}$ ), а  $(n+1)$ -й стовпець відповідає значенням  $d_j$  ( $j = \overline{1, m}$ ) вихідної змінної  $y$ ;

3. Кожен рядок матриці – це певна комбінація значень вхідних змінних, що віднесена експертом до одного з можливих значень вихідної змінної  $y$ . Перші  $k_1$  рядків відповідають значенню вихідної змінної  $y = d_1$ , другі  $k_2$  рядків відповідають значенню вихідної змінної  $y = d_2$ , ..., останні  $k_m$  рядків – значенню  $y = d_m$ ;

4. Елемент  $a_i^{jp}$ , що розміщений на перетині  $i$ -го стовпця та  $jp$ -го рядка, відповідає лінгвістичній оцінці параметра  $x_i$  у рядку бази нечітких знань (розглянемо нижче) з номером  $jp$ . Лінгвістичну оцінку  $a_i^{jp}$  вибирають із терм-множини, що відповідає змінній  $x_i$ , тобто

$$a_i^{jp} \in A_i, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}, p = \overline{1, k_j}.$$

Таблиця 8.2

Матриця знань

Номер вхідної комбінації значень	Вхідні змінні						Вихідна змінна
	$x_1$	$x_2$	...	$x_i$	...	$x_n$	$y$
11	$a_1^{11}$	$a_2^{11}$	...	$a_i^{11}$	...	$a_n^{11}$	$d_1$
12	$a_1^{12}$	$a_2^{12}$	...	$a_i^{12}$	...	$a_n^{12}$	
...	...	...	...	...	...	...	
$1k_1$	$a_1^{1k_1}$	$a_2^{1k_1}$	...	$a_i^{1k_1}$	...	$a_n^{1k_1}$	
...	...	...	...	...	...	...	...
$j1$	$a_1^{j1}$	$a_2^{j1}$	...	$a_i^{j1}$	...	$a_n^{j1}$	$d_j$
$j2$	$a_1^{j2}$	$a_2^{j2}$	...	$a_i^{j2}$	...	$a_n^{j2}$	
...	...	...	...	...	...	...	
$jk_j$	$a_1^{jk_j}$	$a_2^{jk_j}$	...	$a_i^{jk_j}$	...	$a_n^{jk_j}$	
...	...	...	...	...	...	...	...
$m1$	$a_1^{m1}$	$a_2^{m1}$	...	$a_i^{m1}$	...	$a_n^{m1}$	$d_m$
$m2$	$a_1^{m2}$	$a_2^{m2}$	...	$a_i^{m2}$	...	$a_n^{m2}$	
...	...	...	...	...	...	...	
$mk_m$	$a_1^{mk_m}$	$a_2^{mk_m}$	...	$a_i^{mk_m}$	...	$a_n^{mk_m}$	

Після побудови бази знань необхідно її перевірити на наявність протилежних за змістом рядків, тобто правил, що у випадку однакових вхідних змінних мають різні вихідні значення. Введена матриця знань визначає систему логічних висловлювань на зразок «ЯКЩО – ТОДІ, ІНАКШЕ», які пов'язують значення вхідних змінних  $x_1, x_2, \dots, x_n$  з одним із можливих значень  $d_j, (j = \overline{1, m})$ :

$$\begin{aligned}
 &\text{ЯКЩО } (x_1 = a_1^{11}) \text{ ТА } (x_2 = a_2^{11}) \text{ ТА } \dots \text{ ТА } (x_n = a_n^{11}) \\
 &\text{АБО } (x_1 = a_1^{12}) \text{ ТА } (x_2 = a_2^{12}) \text{ ТА } \dots \text{ ТА } (x_n = a_n^{12}), \\
 &\text{АБО } \dots \\
 &\text{АБО } (x_1 = a_1^{1k_1}) \text{ ТА } (x_2 = a_2^{1k_1}) \text{ ТА } \dots \text{ ТА } (x_n = a_n^{1k_1}), \\
 &\text{ТОДІ } y = d_1, \text{ ІНАКШЕ} \\
 &\text{ЯКЩО } (x_1 = a_1^{21}) \text{ ТА } (x_2 = a_2^{21}) \text{ ТА } \dots \text{ ТА } (x_n = a_n^{21}) \\
 &\text{АБО } (x_1 = a_1^{22}) \text{ ТА } (x_2 = a_2^{22}) \text{ ТА } \dots \text{ ТА } (x_n = a_n^{22}), \\
 &\text{АБО } \dots \\
 &\text{АБО } (x_1 = a_1^{2k_2}) \text{ ТА } (x_2 = a_2^{2k_2}) \text{ ТА } \dots \text{ ТА } (x_n = a_n^{2k_2}), \\
 &\text{ТОДІ } y = d_2, \text{ ІНАКШЕ } \dots \\
 &\text{ЯКЩО } (x_1 = a_1^{m1}) \text{ ТА } (x_2 = a_2^{m1}) \text{ ТА } \dots \text{ ТА } (x_n = a_n^{m1}) \\
 &\text{АБО } (x_1 = a_1^{m2}) \text{ ТА } (x_2 = a_2^{m2}) \text{ ТА } \dots \text{ ТА } (x_n = a_n^{m2}), \\
 &\text{АБО } \dots \\
 &\text{АБО } (x_1 = a_1^{mk_m}) \text{ ТА } (x_2 = a_2^{mk_m}) \text{ ТА } \dots \text{ ТА } (x_n = a_n^{mk_m}), \\
 &\text{ТОДІ } y = d_m.
 \end{aligned} \tag{8.22}$$

Систему логічних висловлювань (8.22) називають *нечіткою базою знань*. Із використанням логічних операцій  $\cup$  (АБО) й  $\cap$  (ТА) ця система може бути переписана в більш компактному вигляді:

$$\bigcup_{p=1}^{k_j} \left[ \bigcap_{i=1}^n (x_i = a_i^{ip}) \right] \rightarrow y = d_j, j = \overline{1, m}. \tag{8.23}$$

Отже, вихідне співвідношення (8.13), що визначає зв'язок між вхідними параметрами  $x_i, (i = \overline{1, n})$  та вихідною змінною  $y$ , формалізовано у вигляді системи нечітких логічних висловлювань



(8.23), що ґрунтуються на створеній матриці знань, загальний вигляд якої наведено в табл. 8.2.

Під час формулювання лінгвістичних правил типу «ЯКЩО – ТОДІ», які утворюють базу нечітких знань про певний об'єкт, експерт може не бути стовідсотково впевненим у кожному правилі. Тобто впевненість експерта у одному правилі може бути одною, а у другому – іншою. З метою відображення цих різних ступенів впевненості в базу нечітких знань вводять ваги правил – числа з інтервалу  $[0, 1]$ , які характеризують упевненість експерта у кожному вибраному ним для прийняття рішення конкретному правилі. Тоді табл. 8.2 міститиме додатковий стовпчик, у якому будуть розміщені ваги кожного з її рядків, а в нечіткій базі знань (8.22) кожному логічному висловлюванню (рядку  $jp$  розглянутої системи висловлювань) буде присвоєно його вагу  $w_{jp}$  ( $j = \overline{1, m}, p = \overline{1, k_j}$ ) [48].

**8.2.4. Побудова системи нечітких логічних рівнянь.** Спочатку розглянемо апроксимацію об'єкта з дискретним виходом [63]. Припустимо, що відомі:

- множина розв'язків  $D = \{d_1, d_2, \dots, d_m\}$ , які відповідають вихідній змінній  $y$ ;
- для якісних вхідних змінних  $x_i$  множини всіх їхніх можливих значень  $U_i = \{v_i^1, v_i^2, \dots, v_i^{q_i}\}$ , а для кількісних змінних – діапазони їхніх змін  $U_i = [\underline{x}_i, \bar{x}_i]$ . Причому якимось одним із зазначених способів має бути задана інформація про кожен вхідну змінну  $x_i$  ( $i = \overline{1, n}$ );
- функції належності, які дають змогу подати змінні  $x_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) у вигляді нечітких множин (8.17) чи (8.19);
- матриця знань, яка задана у табл. 8.2, чи ізоморфна їй нечітка база знань (8.23). Вважатимемо, що в кожному рядку  $jp$  ( $j = \overline{1, m}, p = \overline{1, k_j}$ ) цієї матриці (і відповідному логічному правилі нечіткої бази знань) міститься вага  $w_{jp}$  [48].

Потрібно розробити алгоритм прийняття рішення, який би дав змогу фіксованому вектору вхідних змінних  $X^* = \langle x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^* \rangle$  поставити у відповідність розв'язок  $y \in D$ .

Лінгвістичні оцінки  $a_i^{jp}$  змінних  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , що належать до логічних висловлювань (8.23), розглядатимемо як нечіткі множини, визначені на заданих формулою (8.14) чи (8.15) універсальних множинах  $U_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ). Введемо такі позначення:

$\mu^{ajp}(x_i)$  – функція належності параметра  $x_i$  до нечіткого терму  $a_i^{jp}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, m}$ ,  $p = \overline{1, k_j}$ ;

$\mu^{d_j}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  – залежна від  $n$  змінних функція належності вектора вхідних змінних  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  значенню вихідної змінної  $y = d_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ .

Отже, у нас наявні два типи функцій, зв'язок між якими визначається базою нечітких знань згідно з (8.22), на підставі чого можна вивести систему логічних рівнянь:

$$\begin{aligned} \mu^{d_j}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= w_{11} \left[ \mu^{a_1^{11}}(x_1) \wedge \mu^{a_2^{11}}(x_2) \wedge \dots \wedge \mu^{a_n^{11}}(x_n) \right] \vee \\ &\quad \vee w_{12} \left[ \mu^{a_1^{12}}(x_1) \wedge \mu^{a_2^{12}}(x_2) \wedge \dots \wedge \mu^{a_n^{12}}(x_n) \right] \vee \dots \\ &\quad \dots \vee w_{1k_1} \left[ \mu^{a_1^{1k_1}}(x_1) \wedge \mu^{a_2^{1k_1}}(x_2) \wedge \dots \wedge \mu^{a_n^{1k_1}}(x_n) \right], \\ \mu^{d_2}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= w_{21} \left[ \mu^{a_1^{21}}(x_1) \wedge \mu^{a_2^{21}}(x_2) \wedge \dots \wedge \mu^{a_n^{21}}(x_n) \right] \vee \\ &\quad \vee w_{22} \left[ \mu^{a_1^{22}}(x_1) \wedge \mu^{a_2^{22}}(x_2) \wedge \dots \wedge \mu^{a_n^{22}}(x_n) \right] \vee \dots \\ &\quad \dots \vee w_{2k_2} \left[ \mu^{a_1^{2k_2}}(x_1) \wedge \mu^{a_2^{2k_2}}(x_2) \wedge \dots \wedge \mu^{a_n^{2k_2}}(x_n) \right], \\ &\quad \dots \\ \mu^{d_m}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= w_{m1} \left[ \mu^{a_1^{m1}}(x_1) \wedge \mu^{a_2^{m1}}(x_2) \wedge \dots \wedge \mu^{a_n^{m1}}(x_n) \right] \vee \\ &\quad \vee w_{m2} \left[ \mu^{a_1^{m2}}(x_1) \wedge \mu^{a_2^{m2}}(x_2) \wedge \dots \wedge \mu^{a_n^{m2}}(x_n) \right] \vee \dots \\ &\quad \dots \vee w_{mk_m} \left[ \mu^{a_1^{mk_m}}(x_1) \wedge \mu^{a_2^{mk_m}}(x_2) \wedge \dots \wedge \mu^{a_n^{mk_m}}(x_n) \right], \end{aligned} \quad (8.24)$$

де  $\vee$  – логічне «АБО»;

$\wedge$  – логічне «ТА».

За аналогією з (8.23) цю систему нечітких логічних рівнянь (8.24) можна подати у компактнішому вигляді:

$$\mu^{d_j}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{p=1}^{k_j} \left[ w_{jp} \left( \bigwedge_{i=1}^n \mu^{a_i^{jp}}(x_i) \right) \right], \quad j = \overline{1, m}. \quad (8.25)$$

**8.2.5. Алгоритм апроксимації.** Рішення  $d^* \in D = \{d_1, d_2, \dots, d_m\}$ , яке відповідає фіксованому вектору значень вхідних змінних  $X^* = \langle x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^* \rangle$ , можна приймати відповідно до такого алгоритму [63]:

1. Визначають можливий діапазон змінювання контрольованих параметрів, формують базу знань з використанням експертних даних та виводять систему нечітких логічних рівнянь (8.25).

2. Фіксують вектор значень вхідних змінних

$$X^* = \langle x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^* \rangle.$$

3. Задають вигляд функцій належності нечітких термів, які використовують у нечіткій базі знань (8.23), і визначають значення цих функцій для заданих значень вхідних змінних  $x_1^* \div x_n^*$ .

4. Використовуючи логічні рівняння (8.25), обчислюють значення багатопараметричних функцій належності  $\mu^{d_j}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  вектора  $X^*$  для всіх значень  $d_j$ ,  $j = \overline{1, m}$  вихідної змінної  $y$ . У цьому разі логічні операції  $\vee$  (АБО) й  $\wedge$  (ТА) над функціями належності замінюються на операції  $\max$  та  $\min$ :

$$\mu(a) \vee \mu(b) = \max[\mu(a), \mu(b)], \quad (8.26)$$

$$\mu(a) \wedge \mu(b) = \min[\mu(a), \mu(b)]. \quad (8.27)$$

Враховуючи структуру нечітких логічних рівнянь системи (8.25), спочатку знаходять мінімальні значення функції належності в кожному правилі, а потім з них обирають найбільше серед усіх правил для кожного значення  $d_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ , яке ставлять у відповідність вихідній змінній  $y$ .

5. Вихідній змінній присвоюють значення того терму  $d_j^*$ , функція належності якого максимальна:

$$y = \arg \max_{\{d_1, d_2, \dots, d_m\}} \left[ \mu^{d_j} (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \right]. \quad (8.28)$$

Розглянутий алгоритм використовує ідею ідентифікації лінгвістичного терму за максимумом функції належності та узагальнює цей підхід на всю матрицю знань. Він визначає дискретне значення  $d_j$ ,  $j = \overline{1, m}$  вихідної змінної  $y$  за заданим вектором фіксованих значень вхідних змінних  $X^* = \langle x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^* \rangle$  й матриці знань та дає змогу апроксимувати об'єкт  $y = f_y(x_1, x_2, \dots, x_n)$  із дискретним виходом.

У випадку неперервного виходу задача ускладнюється необхідністю застосування операції дефазифікації, тобто операції перетворення нечіткої інформації в чітку форму. У цьому разі використовують алгоритм нечіткого логічного виведення, описаний вище [63]. Отже, цей алгоритм цілком відповідає визначеним вимогам, його можна застосовувати для розв'язування розглянутих задач.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Артеменко В. М.* Моделювання і прогнозування економічних рядів динаміки. – Львів: Видавництво Львівської комерційної академії, 2003. – 228 с.
2. *Бакаєв О.О., Гриценко В. І., Бажан Л. І.* та ін. Економіко-математичні моделі економічного зростання. – К.: Наук. думка, 2005. – 190 с.
3. *Баканов М. И., Шерамет А. Д.* Теория экономического анализа. – М.: Финансы и статистика, 2000. – 410 с.
4. *Барабаш Н. С.* Аналіз господарської діяльності / За заг. ред. Є. В. Мниха. – К.: Київськ. нац. торг.-екон. ун-т, 2005. – 395 с.
5. *Барвінський А.Ф., Олексів І. Я., Крупка З. І.* та ін. Математичне програмування. – Львів: «Інтелект-Захід», 2004. – 448 с.
6. *Барковський В. В., Барковська Н. В., Лопатін О. К.* Теорія ймовірностей та математична статистика. – К.: ЦУЛ, 2002. – 448 с.
7. *Бугір М. К.* Математика для економістів. – Тернопіль: Підручники і посібники, 1998. – 192 с.
8. *Бутинець Ф. Ф., Давидюк Т. В., Малуго Н. М.* та ін. Моделі і методи прийняття рішень в аналізі і аудиті / За ред. Ф. Ф. Бутинця і М. М. Шигун. – Житомир: ЖДТУ, 200. – 352 с.
9. *Василенко В. А.* Теорія і практика розробки управлінських рішень. – К.: ЦУЛ, 2002. – 420 с.
10. *Вентцель Е. С.* Исследование операций: задачи, принципы, методология. – М.: Наука, 1980. – 208 с.
11. *Вітлінський В. В., Верчено П. І., Сігал А. В., Наконечний Я. С.* Економічний ризик: ігрові моделі / За ред. В.В. Вітлінського. – К.: КНЕУ, 2002. – 446 с.
12. *Вітлінський В. В.* Моделювання економіки. – К.: КНЕУ, 2003. – 408 с.
13. *Вовк В. Д.,* Математичні методи дослідження операцій в економіко-виробничих системах. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2007. – 584 с.
14. *Воробьев Н. Н.* Основы теории игр. Бескоалиционные игры. – М.: Наука, 1984. – 496 с.

15. *Гесць В. М., Клебанова Т. С., Черняк О. І.* та ін. Моделі і методи соціально-економічного прогнозування. – Х.: ВД «ИНЖЕК», 2005. – 396 с.
16. *Гмурман В. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высш. шк., 1977. – 479 с.
17. *Грабовецький Б. Є.* Економічне прогнозування і планування. – К.: Центр навчальної літератури, 2003. – 188 с.
18. *Гранберг А. Г.* Моделирование социалистической экономики. – М.: Экономика, 1988. – 487 с.
19. *Деордица Ю. С., Нефедов Ю. М.* Исследование операций в планировании и управлении. – К.: Вища шк., 1991. – 270 с.
20. *Дехтярев Ю. И.* Исследование операций. – М.: Высш. шк., 1986. – 320 с.
21. *Дубров А. М., Мхитарян В. С., Трошин Л. И.* Многомерные статистические методы. – М.: Финансы и статистика, 1998. – 352 с.
22. *Дуброва Т. А.* Статистические методы прогнозирования. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003. – 206 с.
23. *Экономико-математические модели / Под ред. Н.Федоренко.* – М.: Мысль, 1969. – 512 с.
24. *Слейко В. І.* Економіко-статистичні методи моделювання і прогнозування. – К.: УМК ВО при Мінвузі УРСР, 1988. – 88 с.
25. *Слейко В. І.* Основи економетрії: У 2 ч. – Львів: ТзОВ «МАРКА Лтд», 1995. – Ч. 1, – 192 с.
26. *Єріна А. М.* Статистичне моделювання і прогнозування. – К.: КНЕУ, 2001. – 170 с.
27. *Житна І. П., Тацій І. В., Житний Є. П.* Теорія економічного аналізу. – Луганськ: Вид-во СНУ ім. В. Даля, 2004. – 336 с.
28. *Иваниченко В. В.* Модели и методы принятия решений в анализе и аудите. – Х.: ИД «ИНЖЕК», 2004. – 296 с.
29. *Иващенко П. О., Семеняк І. В., Іванов В. В.* Багатовимірний статистичний аналіз. – Х.: Вид-во «Основа» при Харк. ун-ті, 1992. – 144 с.
30. *Кігель В. Р.* Методи і моделі підтримки прийняття рішень у ринковій економіці. – К.: ЦУЛ, 2003. – 202 с.
31. *Клебанова Т. С., Дубровина Н. А., Полякова О. Ю.* и др. Моделирование экономической динамики. – Х.: Издательский дом «ИНЖЕК», 2005. – 244 с.

32. *Кобелев Н. Б.* Практика применения экономико-математических методов и моделей. – М.: ЗАО «Финстатинформ», 2000. – 246 с.
33. *Кобринский Н. Е., Майминас Е. З., Смирнов А. Д.* Экономическая кибернетика. – М.: Экономика, 1982. – 408 с.
34. *Ковальчук Б. В., Триц Б. М.* Основи аналітичної геометрії та лінійної алгебри. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2002. – 280 с.
35. *Колпаков В. М.* Теория и практика принятия управленческих решений. – К.: МАУП, 2000. – 256 с.
36. *Костевич Л. С., Лапко А. А.* Теория игр. Исследование операций. – Минск: Высшая школа, 1982. – 231 с.
37. *Кочура С. В., Косарев В. М.* Моделювання макроекономічної динаміки. – К.: Центр навчальної літератури, 2003. – 236 с.
38. *Крушевский А. В.* Теория игр. – К.: Вища шк., 1977. – 216 с.
39. *Крушевский А. В., Швецов К. И.* Математическое программирование и моделирование в экономике. – К.: Вища шк., 1979. – 456 с.
40. *Кузнецов Ю. Н., Кузубов В. И., Волощенко А. Б.* Математическое программирование. – М.: Высш. шк., 1980 – 300 с.
41. *Кутковецький В. Я.* Дослідження операцій. – К.: Видавничий дім «Професіонал», 2004. – 350 с.
42. *Лавренюк С. П.* Математичні основи мікроекономіки. Теорія виробництва. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2000. – 70 с.
43. *Лавренюк С. П.* Математичні основи мікроекономіки. Теорія споживання. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2000. – 80 с.
44. *Лібанова Е. М.* Ринок праці. – К.: Центр навчальної літератури, 2003. – 224 с.
45. *Линейное и нелинейное программирование / И. Н. Ляшенко, Е. А. Карагодова, Н. В. Черникова, Н. З. Шор / Под общей ред. И. Н. Ляшенко, 1975. – 372 с.*
46. *Лук'яненко І. Г., Краснікова Л. І.* Економетрика. – К.: Товариство «Знання», КОО, 1998. – 494 с.
47. *Лук'яненко І. Г., Краснікова Л. І.* Економетрика: Практикум з використанням комп'ютера. – К.: Товариство «Знання», КОО, 1998. – 220 с.

48. *Матвійчук А. В.* Моделювання економічних процесів із застосуванням методів нечіткої логіки. – К.: КНЕУ, 2007. – 264 с.
49. *Матряхин Н. П., Макеєва В. К.* Математическое программирование. – Х.: Вища шк. 1978. – 160 с.
50. *Меу В. О.* Економічний аналіз фінансових результатів та фінансового стану підприємства. – К.: Вища шк., 2003. – 278 с.
51. *Мних Є. В.* Економічний аналіз. – К.: Центр навчальної літератури, 2003. – 412 с.
52. *Назаренко О. М.* Основи економетрики. – К.: Центр навчальної літератури, 2004. – 392 с.
53. *Наконечний С. І., Терещенко Т. О., Романюк Т. П.* Економетрія. – К.: КНЕУ, 2004. – 520 с.
54. *Общая теория статистики / А. Я. Боярский, Л. Л. Викторова, А. М. Гольдберг и др.; Под ред. А. М. Гольдберга, В. С. Козлова.* – М.: Финансы и статистика, 1985. – 367 с.
55. *Олексюк О. С., Мельничук В. Г., Штабалуєк П. І., Олейко В. М., Дем'янюк О. Б.* Методи і системи прийняття фінансових рішень. – Тернопіль: ДП ТВПК «Збруч», 2001. – 360 с.
56. *Плюта В.* Сравнительный многомерный анализ в эконометриическом моделировании / Пер. с пол. – М.: Финансы и статистика, 1989. – 175 с.
57. *Пономаренко О. І., Пономаренко В. О.* Системні методи в економіці, менеджменті та бізнесі. – К.: Либідь, 1995. – 240 с.
58. *Приймак В. І.* Регіональні ринки праці України: Трансформація та механізми регулювання. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2003. – 256 с.
59. *Приймак В. І.* Тестові завдання з теорії ймовірностей та математичної статистики. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2006. – 268 с.
60. *Приймак В. І.* Трудовий потенціал і механізми його реалізації в регіоні. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2002. – 383 с.
61. *Прокопенко І. Ф., Ганін В. І., Петряєва З. Ф.* Курс економічного аналізу / За ред. І. Ф. Прокопенка. – Х.: Легас, 2004. – 384 с.
62. *Ржевський С. В., Александрова В. М.* Дослідження операцій. – К.: «Академвидав», 2006. – 560 с.



63. *Ротштейн О. П.* Интеллектуальные технологии идентификации: нечеткие множества, генетические алгоритмы, нейронные сети. – Винница: «УНИВЕРСУМ-Винница», 1999. – 320 с.
64. *Ситник В. Ф., Орленко Н. С.* Имитационное моделирование. – К.: КНЕУ, 1998. – 232 с.
65. *Сытник В. Ф., Карагодова Е. А.* Математические модели в планировании и управлении предприятиями. – К.: Вища шк., 1985. – 214 с.
66. Статистика / *С. С. Герасименко, Головач А. В., Єрина А. М.* та ін. – К.: КНЕУ, 1998. – 468 с.
67. Статистическое моделирование и прогнозирование / Под ред. А. Г. Гранберга. – М.: Финансы и статистика, 1990. – 383 с.
68. *Сявакко М. С., Рибницька О. М.* Математичне моделювання за умов невизначеності. – Львів: НВФ «Українські технології», 2000. – 320 с.
69. *Тарасенко Н. В.* Економічний аналіз. – Львів: «Новий Світ-2000», 2006. – 344 с.
70. *Таха Х.* Введение в исследование операций / Пер. с англ: В 2 кн. – Кн. 1 – М.: Мир, 1985. – 479 с.
71. *Таха Х.* Введение в исследование операций / Пер. с англ: В 2 кн. – Кн. 1 – М.: Мир, 1985. – 496 с.
72. *Терехов Л. Л., Куценко В. А., Сиднев С. П.* Экономико-математические методы и модели в планировании и управлении. – К.: Вища школа, 1984. – 231 с.
73. *Тринько Р. І., Тарасова В. В.* Математична статистика. – Львів: Світ, 1992. – 264 с.
74. *Трищ Б. М.* Математичний аналіз. Ч. 2: Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Ряди. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2004. – 223 с.
75. *Ульянченко О. В.* Дослідження операцій в економіці. – Х.: ВД «ІНЖЕК», 2003. – 508 с.
76. Факторный, дискриминантный и кластерный анализ / Пер. с англ. Дж.-О. Ким, Ч.У.Мьюллер, У.Р.Клекка и др.; Под ред. И.С.Енюкова. – М.: Финансы и статистика, 1989. – 214 с.
77. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. – М.: Наука, 1969. – Т. 1. – 608 с.

78. *Цегелик Г. Г.* Лінійне програмування. – Львів: Світ, 1995, – 216 с.
79. *Цегелик Г. Г.* Чисельні методи. Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2004. – 408 с.
80. *Черняк О. І., Ставицький А. В.* Динамічна економетрика. – К.: В-во КВІЦ, 2000. – 120 с.
81. *Шаблій О. І.* Математичні методи в соціально-економічній географії. – Львів: Світ, 1994. – 304 с.
82. *Шарапов О. Д., Терехов Л. Л., Сіднев С. П.* Системний аналіз. – К.: Вища шк., 1993. – 303 с.
83. *Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г.* Линейное программирование. Теория и конечные методы. – М.: Физматгиз, 1963. – 776 с.

## Додаток А

### Вектори, матриці, квадратичні форми та опуклі множини

**А. 1. Вектори.** Упорядкований набір  $n$  дійсних чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$  називають  $n$ -вимірним вектором і позначають  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Числа  $x_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) називають компонентами вектора  $X$ , а число  $n$  – розміром. Вектори зазвичай позначають великими буквами, а їхні компоненти – відповідно малими буквами з індексами. Індекс при компоненті визначає її порядковий номер.

Вектори  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  та  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  вважають рівними, якщо для  $\forall i = \overline{1, n}$  виконується  $x_i = y_i$ .

Сумою (різницею) векторів  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  та  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  називають вектор  $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ , компоненти якого рівні  $z_i = x_i \pm y_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ).

Додавання векторів має властивість комутативності й асоціативності:

$$X + Y = Y + X, \quad (X + Y) + Z = X + (Y + Z). \quad (\text{A.1})$$

Вектор, усі компоненти якого нулі, називають нульовим вектором  $0 = (0, 0, \dots, 0)$ .

Добутком вектора  $X$  на число (скаляр)  $k$  називають вектор  $kX = Xk = (kx_1, kx_2, \dots, kx_n)$ .

З вищенаведених означень випливають такі властивості розглянутих операцій:

$$\begin{aligned} k(lX) &= (kl)X, \\ k(X \pm Y) &= kX \pm kY, \\ (k \pm l)X &= kX \pm lX, \quad 0 \cdot X = k \cdot 0 = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Сукупність усіх  $n$ -вимірних векторів із введеними поняттями додавання, віднімання і множення вектора на скаляр називають  $n$ -вимірним векторним простором.

Кожній парі векторів  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  та  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  можна поставити у відповідність число  $XY = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$ , яке називають скалярним добутком цих векторів.

Відстанню між елементами (векторами)  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  та  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  цього простору називають число

$$\rho(X, Y) = |X - Y| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}. \quad (\text{A.4})$$

Якщо в  $n$ -вимірному векторному просторі визначена відстань між його елементами, то кажуть, що в просторі введена метрика. Значимо, що  $n$ -вимірний векторний простір, у якому за попередньою формулою введена метрика, називають  $n$ -вимірним евклідовим простором. Надалі  $n$ -вимірний евклідовий простір позначатимемо  $R^n$ .

Вектор  $X$  пропорційний до вектора  $Y$ , якщо існує таке число  $k$ , коли  $X = kY$ . Вектор  $X$  є лінійною комбінацією векторів  $X_1, X_2, \dots, X_s$ , якщо існують такі числа  $l_1, l_2, \dots, l_s$ , що

$$X = l_1 X_1 + l_2 X_2 + \dots + l_s X_s. \quad (\text{A.5})$$

Систему векторів  $X_1, X_2, \dots, X_k$  ( $k \geq 2$ ) називають *лінійно залежною*, якщо є такі числа  $l_1, l_2, \dots, l_k$ , серед яких є хоча б одне відмінне від нуля, для яких виконується така рівність:

$$l_1 X_1 + l_2 X_2 + \dots + l_k X_k = 0. \quad (\text{A.6})$$

Систему векторів  $X_1, X_2, \dots, X_k$  називають *лінійно незалежною*, якщо рівність

$$d_1 X_1 + d_2 X_2 + \dots + d_k X_k = 0 \quad (\text{A.7})$$

можлива лише тоді, коли всі  $d_i = 0$  ( $i = \overline{1, k}$ ).

Отже, систему векторів  $X_1, X_2, \dots, X_k$  називають лінійно незалежною, якщо хоча б один з векторів системи є лінійною комбінацією всіх інших векторів системи. Якщо жоден вектор системи не є лінійною комбінацією всіх інших векторів системи, то таку систему векторів називають лінійно незалежною. Система векторів, складена з одного вектора, за винятком вектора з нульовими компонентами, завжди лінійно незалежна.

Наприклад, система векторів  $X_1 = (1, 0, 2)$ ,  $X_2 = (3, 1, -1)$ ,  $X_3 = (5, 1, 3)$ ,  $X_4 = (-2, 4, -5)$  лінійно залежна, адже

$$2X_1 + X_2 - X_3 + 0 \cdot X_4 = 0.$$

Система векторів  $X_1 = (3, -1)$ ,  $X_2 = (0, 1)$  лінійно незалежна, бо рівність  $l_1 X_1 + l_2 X_2 = 0$  виконується лише якщо  $l_1 = l_2 = 0$ .

**Справедливе твердження 1:** *Якщо деяка підсистема  $X_1, X_2, \dots, X_s$  системи векторів  $X_1, X_2, \dots, X_s, \dots, X_k$  лінійно залежна, то вся система векторів лінійно залежна.* Тобто будь-яка система векторів, яка вміщує нульовий або два рівні чи пропорційні вектори, є лінійно залежною.

Це твердження ще можна сформулювати так: якщо система векторів  $X_1, X_2, \dots, X_k$  лінійно незалежна, то і будь-яка її підсистема лінійно незалежна.

Зокрема, лінійно незалежною системою є система  $n$  різних  $n$ -вимірних одиничних векторів

$$\varepsilon_1 = (1, 0, \dots, 0),$$

$$\varepsilon_2 = (0, 1, \dots, 0),$$

.....

$$\varepsilon_n = (0, 0, \dots, 1). \quad (\text{A.8})$$

Крім цієї системи, в  $n$ -вимірному векторному просторі є безліч лінійно незалежних систем векторів.

**Справедлива теорема 1.** *Будь-яка система з  $k$  векторів  $n$ -вимірного векторного простору, якщо  $k > n$ , є лінійно залежною.*

З попереднього прикладу і теореми 1 випливає, що лінійно незалежна система  $n$ -вимірного векторного простору може містити найбільше  $n$  векторів.

*Базисом  $n$ -вимірного векторного простору називають будь-яку систему з  $n$  лінійно незалежних векторів цього простору.*

**Теорема 2.** *Будь-який вектор  $n$ -вимірного векторного простору можна єдиним чином зобразити у вигляді лінійної комбінації векторів базису цього простору.*

## **А. 2. Матриці і визначники.** Таблицю чисел

$$A_{n \times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{n \times m}, \quad (\text{A.9})$$

яка має  $n$  рядків і  $m$  стовпців, називають  $n \times m$  матрицею чи просто матрицею. Числа, з яких складається матриця, є її елементами. Елемент  $a_{ij}$  цієї матриці розміщений на перетині  $i$ -го рядка і  $j$ -го стовпця таблиці. У випадку, коли матриця  $A$  містить  $n$  рядків і  $m$  стовпців, кажуть, що порядок (розмірність) матриці дорівнює  $m \times n$ .

Матрицю, у якій  $n = m$ , називають квадратною, а елементи  $a_{ii}, i = \overline{1, n}$  – діагональними. У діагональні елементи квадратної матриці  $A$  утворюють головну діагональ, а елементи  $a_{n1}, a_{(n-1)2}, \dots, a_{1n}$  – другорядну діагональ. Відповідно  $\text{tr}A$  матриці  $A$  називають суму всіх її діагональних елементів.

Якщо усі елементи матриці  $A$ , крім діагональних, дорівнюють нулю, то її називають діагональною. Діагональну матрицю, у якій  $a_{ii} = 1, i = \overline{1, n}$ , називають одиничною і позначають великою буквою  $I$ . Матрицю з усіма нульовими елементами називають нульовою.

Матрицю, що складається з одного стовпця і  $n$  рядків, називають вектор-стовпцем, а з одного рядка і  $m$  стовпців – вектор-рядком.

Якщо у матриці  $A$  замінити її рядки стовпцями, то отримаємо транспоновану матрицю  $A^T$ :

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

Квадратну матрицю  $A$  називають симетричною, якщо  $A^T = A$ .

Дві матриці  $A = (a_{ij})$  і  $B = (b_{ij})$  називають *рівними* тоді і тільки тоді, коли вони мають однакові розміри і  $a_{ij} = b_{ij}$  для всіх  $i$  та  $j$ .

Для матриць визначені тільки операції множення матриці на число, додавання (віднімання) і множення матриць. Додавати і віднімати можна лише матриці однакового розміру, а під час множення двох матриць треба, щоб кількість стовпців першої з них дорівнювала кількості рядків другої з цих матриць.

*Добутком матриці  $A_{n \times m}$  на число  $\alpha$*  називають матрицю  $B_{n \times m} = \alpha \cdot A_{n \times m}$ , елементи якої обчислюють за формулою  $b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$ , для всіх  $i = \overline{1, n}$  та  $j = \overline{1, m}$ .

*Сумою (різницею) двох матриць  $A = (a_{ij})$  і  $B = (b_{ij})$  однакового розміру ( $n \times m$ )* називають матрицю  $C = A \pm B$ , елементи якої  $c_{ij}$  розраховують за формулою  $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ;  $j = \overline{1, m}$ .

Нехай тепер ми маємо матриці  $A_{n \times m}$  та  $B_{m \times k}$ . *Добутком цих матриць* називають матрицю  $C_{n \times k}$ , елементи якої  $c_{ij}$  дорівнюють сумам попарних добутків елементів  $i$ -го рядка матриці  $A$  на відповідні елементи  $j$ -го стовпця матриці  $B$ , тобто

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{im}b_{mj} = \sum_{l=1}^m a_{il}b_{lj}. \quad (\text{A.11})$$

Головні властивості дій над матрицями  $A, B, C$  такі:

$$\begin{aligned} A \pm B &= B \pm A, & A \pm (B \pm C) &= (A \pm B) \pm C, \\ (A \pm B)^T &= A^T \pm B^T, & \alpha \cdot (A + B) &= \alpha \cdot A + \alpha \cdot B, \\ \alpha \cdot (A \cdot B) &= (\alpha \cdot A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B), & (\alpha \cdot A)^T &= \alpha \cdot A^T, \\ A \cdot (B + C) &= A \cdot B + A \cdot C, & (A + B) \cdot C &= A \cdot C + B \cdot C, \\ A \cdot (B \cdot C) &= (A \cdot B) \cdot C, & A \cdot I &= I \cdot A = A, \\ (A \cdot B)^T &= B^T \cdot A^T, & (A^T)^T &= A. \end{aligned}$$

**Зауваження.** Добуток двох ненульових матриць може дорівнювати нульовій матриці (*нуль-матриці*), тобто матриці, всі елементи якої дорівнюють нулю, а добуток будь-якої матриці зліва чи справа на нульову матрицю завжди дорівнює нуль-матриці.

Розглянемо  $n$  перших натуральних чисел  $1, 2, 3, \dots, n$ . Будемо розглядати різні послідовності цих чисел, кожна з яких відрізняється від інших порядком розміщення у ній цих  $n$  чисел. Такі послідовності називають *перестановками цих чисел*. Кількість усіх перестановок із  $n$  чисел дорівнює  $(n!)$ . Два числа в перестановці утворюють інверсію, якщо спочатку стоїть більше число, а потім менше (номер більшого числа менший від номера меншого числа). Наприклад, у перестановці  $(3, 4, 2, 1)$  є п'ять інверсій:  $(3, 2)$ ,  $(3, 1)$ ,  $(4, 2)$ ,  $(4, 1)$ ,  $(2, 1)$ . Позначимо  $S(i_1, i_2, \dots, i_n)$  кількість інверсій, утворених з чисел  $i_1, i_2, \dots, i_n$ .

Нехай задана квадратна матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (\text{A.12})$$

порядку  $n$ . Розглянемо добуток

$$P_{i_1 i_2 \dots i_n} = a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n}, \quad (\text{A.13})$$

множники якого вибирають таким чином, що кожний рядок і кожний стовпець матриці  $A$  поданий у  $P_{i_1 i_2 \dots i_n}$  точно одним елементом.

*Визначником матриці  $A$  ( $\Delta = \det A$ ), або визначником  $n$ -го порядку, називають число, яке дорівнює сумі  $n!$  доданків  $P_{i_1 i_2 \dots i_n}$  (див. формулу (A.13), кожен з яких беруть із знаком  $(+)$ , якщо кількість інверсій  $S(i_1, i_2, \dots, i_n)$  у перестановці  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  парна, і знаком «мінус» – якщо непарна. Тобто*

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} (-1)^S a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n}, \quad (\text{A.14})$$

де додавання виконують за всіма можливими перестановками  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  чисел  $1, 2, \dots, n$ .

Наприклад, визначником третього порядку буде число



$$\Delta_3 = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}. \quad (\text{A.15})$$

Головні властивості визначників:

1. Якщо всі елементи деякого рядка чи стовпця визначника дорівнюють нулю, то визначник також дорівнює нулю;

2. Якщо елементи двох рядків чи стовпців визначника пропорційні, то визначник дорівнює нулю;

3. Значення визначника не зміниться, якщо поміняти місцями рядки і стовпці;

4. Внаслідок перестановки двох сусідніх рядків чи стовпців визначник змінить знак на протилежний;

5. Якщо всі елементи деякого рядка чи стовпця визначника помножити на одне і те ж число  $\alpha$ , то значення визначника зміниться в  $\alpha$  разів;

6. Значення визначника не зміниться, якщо до елементів деякого рядка (стовпця) додати елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне і те ж число, яке не дорівнює нулю;

7. Якщо  $A$  і  $B$  – дві квадратні матриці однакового порядку, то

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B. \quad (\text{A.16})$$

Нехай задана квадратна матриця  $A$  порядку  $n$ . Мінором  $M_{ij}$  елемента  $a_{ij}$  визначника  $|A|$ , утвореного з елементів матриці  $A$ , називають визначник  $(n-1)$ -го порядку, який отримують із початкового визначника викреслюванням  $i$ -го рядка та  $j$ -го стовпця. Алгебраїчним доповненням  $A_{ij}$  елемента  $a_{ij}$  визначника  $|A|$  порядку  $n$  називають мінор цього елемента, узятий із знаком  $(-1)^{i+j}$ , тобто

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \quad (\text{A.17})$$

Наприклад, для матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}, \quad M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix},$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}.$$

Підматрицею матриці  $A$  називають матрицю  $B$ , отриману внаслідок викреслювання з першої матриці деяких рядків і стовпців. Матриця  $A$  буде мати ранг  $r$ , якщо найбільший порядок її квадратної підматриці, визначник якої не перетворюється в нуль, дорівнює  $r$ .

Матрицю  $A$  називають *невиродженою* (*виродженою*), якщо  $\det A \neq 0$  ( $\det A = 0$ ). Для невірдженої квадратної матриці вводять операцію обертання. Квадратну  $n \times n$  матрицю  $A^{-1}$  називають *оберненою до квадратної матриці* ( $A$ ) $_{n \times n}$ , якщо  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ .

Для невірдженої матриці  $A$  порядку  $n$  справедлива формула

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A_{ij})^T = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.18})$$

де  $A_{ij}$  – алгебраїчні доповнення елементів  $a_{ij}$  квадратної матриці  $A$ .

#### Властивості обернених матриць:

$$\begin{aligned} (\alpha \cdot A)^{-1} &= \alpha^{-1} \cdot A^{-1} & (A \cdot B)^{-1} &= B^{-1} \cdot A^{-1} & (A + B)^{-1} &= A^{-1} + B^{-1} \\ \det A^{-1} &= (\det A)^{-1} & (A^{-1})^{-1} &= A & (A^T)^{-1} &= (A^{-1})^T \end{aligned}$$

Матрицю  $A$  називають *ортогональною*, якщо обернена до неї матриця  $A^{-1}$  дорівнює транспонованій матриці  $A^T$ .

Для розв'язування системи  $n$  лінійних рівнянь з  $n$  невідомими

$$AX = B, \quad (\text{A.19})$$

де матриця  $A$  має вигляд (A.12), а  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  і  $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ , можна застосовувати кілька методів. Зокрема,

якщо матриця  $A$  є невідродженою, то, згідно з *методом оберненої матриці*, розв'язок системи (A.19) знаходиться за формулою

$$X = A^{-1}B, \quad (\text{A.20})$$

А згідно з *методом Крамера* – за формулами

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\det A}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (\text{A.21})$$

де  $\Delta_i$  отримують із визначника матриці  $A$  (*головного визначника системи*) заміною  $i$ -го стовпця стовпцем вільних членів.

Досить поширеним методом розв'язування системи лінійних рівнянь є метод Жордано-Гауса, розрахункові формули якого можна знайти у кожному підручнику з лінійної алгебри.

### А. 3. Квадратичні форми. Квадратичною формою

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

від  $n$  змінних  $x_1, x_2, \dots, x_n$  називають функцію

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j, \quad (\text{A.22})$$

де  $a_{ij}$  – дійсні числа, причому  $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $i, j = \overline{1, \dots, n}$ .

У матричному записі квадратична форма має такий вигляд:

$$Q = X^T A X, \quad (\text{A.23})$$

де

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.24})$$

Симетричну матрицю  $A$  у цьому випадку називають *матрицею квадратичної форми*.

Квадратичну форму  $Q$  називають *виродженою*, якщо виродженою є її матриця  $A$ , тобто  $\det A = 0$ . Інакше – квадратичну форму називають *невиродженою* ( $\det A \neq 0$ ).

Кажуть, що квадратична форма  $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$  має *канонічний вигляд*, якщо  $a_{ij} = 0$ ,  $i \neq j$ , тобто

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2. \quad (\text{A.25})$$

У випадку, коли  $|a_{ij}| = 1$ , квадратична форма має *нормальний* вигляд. Тоді матриця квадратичної форми є діагональною.

Кожну квадратичну форму за допомогою невиврожденного лінійного перетворення можна звести до канонічного вигляду. Це можна зробити, зокрема, методом Лагранжа, виділенням повних квадратів чи методом власних векторів [74, с. 213].

Квадратичну форму  $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$  (а також відповідну їй дійсну симетричну матрицю  $A$ ) називають *додатно (від'ємно) визначеною*, якщо за наявності будь-яких значень змінних, з яких хоча б одне не дорівнює нулю,  $Q(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$  ( $Q(x_1, x_2, \dots, x_n) < 0$ ).

Справджуються такі **твердження**:

- квадратична форма додатно (від'ємно) визначена тоді і тільки тоді, коли всі власні значення матриці цієї квадратичної форми додатні (від'ємні);

- *критерій Сільвестра*: квадратична форма додатно визначена тоді і тільки тоді, коли всі головні мінори матриці цієї квадратичної форми додатні, тобто  $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$ , де

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}; \quad (\text{A.26})$$

квадратична форма від'ємно визначена тоді і тільки тоді, коли знаки головних мінорів  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$  матриці цієї квадратичної форми чергуються, причому  $\Delta_1 < 0$ .

## Додаток Б

### Функції багатьох змінних

#### Б. 1. Диференціальне числення функції багатьох змінних.

Якщо кожній точці  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in C \subset R^n$  за певним законом ставлять у відповідність єдине число  $y \in R$ , то кажуть, що на множині  $C$  задано числову функцію  $n$  змінних  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Множину точок  $C \subset R^n$ , на якій визначена функція  $u = f(X)$ , називають *областю визначення функції*  $f$  і позначають  $D(f)$ , а множину значень функції позначають  $E(f)$ .

Число  $a$  називають *границею функції*  $f(X)$  в точці  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$  (пишуть  $\lim_{X \rightarrow A} f(X) = a$ ), якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall X \in C: 0 < \rho(X, A) < \delta \Rightarrow |f(X) - a| < \varepsilon, \quad (\text{Б.1})$$

де  $\rho(X, A) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2}$  – відстань між точками  $X$  і  $A$ .

Функцію  $f(X)$ ,  $X \in D(f)$  називають *неперервною в точці*  $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^T$ , яка є граничною точкою її області визначення (в будь-якому  $\delta$ -околі точки  $X_0 \in D(f)$ ), якщо

$$\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = f(X_0). \quad (\text{Б.2})$$

Функцію  $f(X)$ , яка визначена на множині  $C$ , називають *неперервною на цій множині*, якщо вона неперервна у кожній точці цієї множини.

*Частинною похідною функції*  $u = f(X)$  в точці  $X_0$  за змінною  $x_i$  називають границю відношення частинного приросту цієї функції за змінною  $x_i$  до приросту змінної  $x_i$ , коли цей приріст прямує до нуля, тобто

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f(X_0)}{\partial x_i} = \\ & = \lim_{x_i \rightarrow x_i^0} \frac{f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i^0, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0)}{x_i - x_i^0}. \quad (\text{Б.3}) \end{aligned}$$

Приростом функції  $u = f(X)$  у точці  $X_0$ , який відповідає приростам аргументів  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ , називають вираз

$$\Delta u = \Delta f(X_0) = f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0), \quad (\text{Б.4})$$

де  $\Delta x_i = x_i - x_i^0$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Функцію  $u = f(X)$  називають диференційованою в точці  $X_0$ , якщо її приріст у цій точці можна записати у вигляді

$$\Delta u = \Delta f(X_0) = A_1 \cdot \Delta x_1 + A_2 \cdot \Delta x_2 + \dots + A_n \cdot \Delta x_n + o(\rho), \quad (\text{Б.5})$$

де  $A_1, A_2, \dots, A_n$  – числа, які не залежать від  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ ;

$$\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^n \Delta x_i^2}, \text{ причому } o(\rho) = 0, \text{ якщо } \rho = 0.$$

Справедливі такі теореми.

**Теорема 1.** Якщо функція  $u = f(X)$  диференційована в точці  $X_0$ , то в цій точці існують частинні похідні функції за усіма аргументами, причому

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = A_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (\text{Б.6})$$

де  $A_1, A_2, \dots, A_n$  визначаються з умов (Б.5) диференційованості функції.

**Теорема 2.** Якщо функція  $u = f(X)$  диференційована в точці  $X_0$ , то вона неперервна в цій точці.

**Теорема 3.** Якщо функція  $u = f(X)$  має частинні похідні за всіма аргументами в деякому околі точки  $X_0$ , причому всі ці похідні неперервні в самій точці  $X_0$ , то функція диференційована в цій точці.

**Теорема 4.** Якщо функції  $x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \dots, t_m)$   $i = \overline{1, n}$  диференційовані в деякій точці  $T_0 = (t_1^0, t_2^0, \dots, t_m^0)$ , а функція  $u = f(X)$  диференційована в точці  $X_0$ , де  $x_i^0 = \varphi_i(t_1^0, t_2^0, \dots, t_m^0)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , то складена функція

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(\varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_m), \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_m), \dots, \varphi_n(t_1, t_2, \dots, t_m))$$

диференційована в точці  $T_0$ , а частинні похідні цієї функції обчислюють за формулами

$$\frac{\partial u}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (\text{Б.7})$$

де частинні похідні  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ ,  $i = \overline{1, n}$  беруть у точці  $X_0$ , всі частинні

похідні  $\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, m}$  – у точці  $T_0$ .

Диференціалом  $du$  диференційованої в точці  $X_0$  функції  $u = f(X)$  називають головну, лінійну щодо приростів аргументів частину приросту цієї функції в цій точці:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \Delta x_n. \quad (\text{Б.8})$$

Якщо аргументи  $x_1, x_2, \dots, x_n$  є незалежними змінними, то диференціалом  $dx_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  змінної  $x_i$  називають її приріст  $\Delta x_i$ . Тоді формула (Б.7) матиме такий вигляд:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot dx_n. \quad (\text{Б.9})$$

Градiєнтом функції  $u = f(X)$  називають вектор

$$\nabla u = \overrightarrow{\text{grad } u} = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right). \quad (\text{Б.10})$$

Якщо функція  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  в точці  $X$  має частинну похідну за аргументом  $x_k$ , то цю похідну називають *частинною похідною другого порядку* функції  $u = f(X)$  в точці  $X$  спочатку за аргументом  $x_i$ , а потім за аргументом  $x_k$  і позначають

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}. \quad (\text{Б.11})$$

Так само визначають частинні похідні третього, четвертого і вищих порядків.

Якщо для заданої функції в певній точці наявні неперервні похідні деякого порядку, то вони рівні, незалежно від порядку диференціювання. Наприклад,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i}$ .

Для функції  $u = f(X)$  від  $n$  змінних  $x_1, x_2, \dots, x_n$  будують *матрицю Гессе (гесіан)*, яка має такий вигляд:

$$H = \nabla^2 f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}. \quad (\text{Б.12})$$

**Б. 2. Опуклі множини.** Опуклою комбінацією точок  $X_1, X_2, \dots, X_k$  простору  $R^n$  називають точку

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_k X_k, \quad (\text{Б.13})$$

де  $\alpha_i \geq 0$  ( $i = \overline{1, k}$ ),  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = 1$ .

Множину  $C \subset R^n$  називають *опуклою*, якщо для будь-яких двох точок  $X_1$  і  $X_2$ , що належать до  $C$ , до  $C$  належить і будь-яка опукла комбінація цих точок, тобто  $X_1 \in C$  і  $X_2 \in C \Rightarrow X = \alpha X_1 + (1 - \alpha) X_2 \in C$ , де  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

Геометричний зміст цього означення полягає в тому, що опукла множина разом із своїми будь-якими двома точками завжди містить усі точки прямолінійного відрізка, який їх сполучає.

Точку  $X$  опуклої множини  $C$  називають *крайньою*, якщо не існує таких двох точок множини  $C$ , відмінних від  $X$ , що точка  $X$  є їх опуклою комбінацією. Наприклад, крайні точки трикутника – це точки його вершин, крайні точки прямолінійного відрізка – це точки його кінців.

*Опуклою оболонкою*  $C(S)$  будь-якої множини точок  $S$  називають сукупність усіх можливих опуклих комбінацій, складених з точок множини  $S$ . Наприклад, якщо  $S$  – три точки, то  $C(S)$  – геометричне місце точок, що містяться всередині і на сторонах трикутника, вершинами якого є задані точки.



Якщо множина  $S$  складається із скінченної кількості точок, то її опуклу оболонку  $C(S)$  називають *опуклим многогранником*. Кількість крайніх точок опуклого многогранника скінченна.

**Б. 3. Опуклі функції.** Нехай  $C$  – опукла множина в  $R^n$ . Визначену на цій множині функцію  $f: C \rightarrow R$  називають *опуклою* (опуклою вниз), якщо для будь-яких точок  $X_1$  і  $X_2$ , що належать  $C$  і дійсному числі  $\lambda \in [0, 1]$  ( $0 \leq \lambda \leq 1$ ), виконується нерівність

$$f(X) \leq \lambda \cdot f(X_1) + (1 - \lambda) \cdot f(X_2). \quad (\text{Б.14})$$

І *вгнутою* (опуклою вгору), якщо за тих же умов

$$f(X) \geq \lambda \cdot f(X_1) + (1 - \lambda) \cdot f(X_2) \quad (\text{Б.15})$$

де  $X = \lambda X_1 + (1 - \lambda) X_2$ . Отже, функція  $f(X)$  буде вгнутою, якщо протилежна їй функція  $(-f(X))$  опукла.

Якщо нерівності (А.10) і (А.11) будуть строгими, то функцію  $f(X)$  називають, відповідно, *строго опуклою* і *строго вгнутою*.

Геометрично опуклість (опуклість вниз) означає, що будь-яка точка довільної хорди графіка функції  $f(X)$  розташована не нижче від відповідної точки самого графіка. Для вгнутої (опуклої вгору) функції взаємне розташування хорди і графіка цієї функції протилежне.

Наприклад, функції  $y = 5 \cdot 3^x - 2$  і  $y = 2(x - 3)^2 + 4$  опуклі на  $R$ , функція  $y = \log_2 x$  вгнута на множині додатних чисел, а функція

$y = \frac{1}{x+2}$  вгнута на  $(-\infty, -2)$  і опукла на  $(-2, +\infty)$ . Одночасно

опуклою і вгнутою функцією на  $R^n$  є тільки лінійна функція

$$f(X) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n + b, \quad (\text{Б.16})$$

де  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  і  $a_j, b \in R, j = \overline{1, n}$ .

Спеціальний клас опуклих (вгнутих) функцій утворюють квадратичні форми (точніше суми квадратичної і лінійної форм) вигляду

$$f(X) = X^T A X + B X,$$

де  $A, B, X$  – відповідно симетрична матриця, сталий вектор і вектор-аргумент. Така функція  $f(X)$  буде строго опуклою, якщо матриця  $A$  є додатно визначена, і строго вгнутою, якщо  $A$  – від'ємно визначена.

## Додаток В

### Елементи теорії ймовірностей

**В.1. Одновимірні випадкові величини та їхні числові характеристики.** Одним з основних понять теорії ймовірностей є випадкова величина. *Випадковою* називають таку величину, яка в результаті випробування набуває лише одне числове значення, заздалегідь невідоме і зумовлене випадковими причинами.

Випадкові величини бувають дискретними та неперервними. *Дискретною випадковою величиною* називають таку величину, яка набуває скінченну чи зліченну кількість значень з певними ймовірностями.

*Законом розподілу* дискретної випадкової величини  $X$  називають таке співвідношення, яке визначає відповідність між кожним можливим значенням  $x_i$  випадкової величини  $X$  і його ймовірністю  $p_i = P(X = x_i)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ). Причому  $p_1 + p_2 + \dots = 1$ .

Для повнішої характеристики випадкової величини використовують функцію розподілу. Функцію дійсної змінної  $x$ , яку визначають ймовірністю того, що випадкова величина  $X$  у результаті випробування набуде значення, менше за  $x$ , тобто

$$F_x(x) = P(X < x), \quad (\text{В.1})$$

називають *функцією розподілу* цієї випадкової величини. Якщо зрозуміло, про яку випадкову величину йдеться, то індекс  $X$  у позначенні функції розподілу опускають.

Цю функцію вводять як для дискретних, так і неперервних випадкових величин. На підставі формули (В.1) функцію розподілу дискретної випадкової величини визначають рівністю

$$F_x(x) = P(X < x) = \sum_{i, x_i < x} p_i, \quad (\text{В.2})$$

де  $p_i = P(X = x_i)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ).

Поняття неперервної випадкової величини можна вводити порізному. Зокрема, випадкову величину  $X$  називають *неперервною (абсолютно)*, якщо існує невід'ємна функція  $p(t)$  така, що для всіх  $x \in R$  її функцію розподілу можна зобразити у вигляді

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt. \quad (\text{В.3})$$

Функцію  $p(t)$  називають *щільністю розподілу*. Графік функції  $p(t)$  називають *кривою розподілу*.

Математичне сподівання  $MX$  дискретної випадкової величини  $X$  називають число, яке дорівнює сумі добутків усіх можливих значень  $x_k$  величини  $X$  на відповідні їм ймовірності  $p_k$ , тобто

$$MX = \sum_k x_k p_k, \quad (\text{B.4})$$

за умови, що ряд для зліченної випадкової величини абсолютно збігається.

Математичним сподіванням  $M(X)$  неперервної випадкової величини  $X$  із щільністю  $p(x)$  визначають за формулою

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx \quad (\text{B.5})$$

за умови, що інтеграл збіжний абсолютно.

Дві випадкові величини називають *незалежними*, якщо закон розподілу однієї з них не залежить від того, які можливі значення набувала інша величина, інакше – *залежними*.

Середнє геометричне значення  $G(X)$  випадкової величини  $X$  ( $X > 0$ ) обчислюють за формулою

$$G(X) = e^{M(\ln X)}. \quad (\text{B.6})$$

Середнє гармонічне  $H(X)$  випадкової величини  $X$  ( $X > 0$ ) обчислюють за формулою

$$H(X) = \frac{1}{M(1/X)}. \quad (\text{B.7})$$

Дисперсією (розсіюванням) випадкової величини  $X$  називають число  $DX$ , яке дорівнює математичному сподіванню квадрата відхилення випадкової величини від свого математичного сподівання:

$$DX = M(X - MX)^2. \quad (\text{B.8})$$

Конкретизуючи цю формулу окремо для дискретних і неперервних величин, матимемо

$$DX = \sum_k (x_k - MX)^2 p_k, \quad (\text{B.9})$$

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} (x - MX)^2 p(x) dx. \quad (\text{B.10})$$

Для обчислення дисперсії замість формули (B.8) можна використовувати формулу

$$DX = M(X^2) - (MX)^2, \quad (\text{B.11})$$

за якою ці обчислення часто можна виконати швидше, ніж за першою з них. У цьому разі для дискретної випадкової величини

$$M(X^2) = \sum_k x_k^2 p_k, \quad (\text{B.12})$$

а для неперервної

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx. \quad (\text{B.13})$$

Середнє квадратичне відхилення  $\sigma X$  ( $\sigma_x$ ) дорівнює квадратному кореню з дисперсії випадкової величини:

$$\sigma X = \sigma_x = \sqrt{DX}. \quad (\text{B.14})$$

Коефіцієнт варіації  $V_x$  обчислюють за формулою

$$V_x = \frac{\sigma_x}{MX} \cdot 100\%. \quad (\text{B.15})$$

Розмірність дисперсії дорівнює квадрату розмірності випадкової величини, середнє квадратичне відхилення вимірюють у тих же одиницях, в яких виражені значення випадкової величини, а коефіцієнт варіації є її безрозмірною числовою характеристикою.

Початковий  $\alpha_k = \alpha_k(X)$  та центральний  $\mu_k = \mu_k(X)$  моменти  $k$ -го порядку випадкової величини обчислюють за такими формулами:

$$\alpha_k = M(X^k), \quad (\text{B.16})$$

$$\mu_k = M(X - MX)^k. \quad (\text{B.17})$$

Для дискретної випадкової величини ці формули матимуть відповідно такий вигляд:

$$\alpha_k = \sum_i x_i^k p_i \quad \text{і} \quad \mu_k = \sum_i (x_i - MX)^k p_i, \quad (\text{B.18})$$

а для неперервної

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x) dx \quad \text{і} \quad \mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - MX)^k p(x) dx. \quad (\text{В.19})$$

У часткових випадках  $\alpha_1 = MX$ ,  $\mu_1 = 0$ ,  $\mu_2 = DX$ .

Коефіцієнт асиметрії  $\beta = \beta(X)$  та ексцес  $\gamma = \gamma(X)$  випадкової величини розраховують за формулами

$$\beta = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3} \quad (\text{В.20})$$

$$\text{і} \quad \gamma = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3. \quad (\text{В.21})$$

## В.2. Закони розподілу дискретних випадкових величин.

**Рівномірний розподіл на множині  $\{1, 2, \dots, n\}$ .** Випадкова величина  $X$  має *рівномірний* розподіл, якщо вона набуває значення  $1, 2, \dots, k, \dots, n$  з такими ймовірностями:

$$P(X = k) = \frac{1}{n}, \quad k = \overline{1, n}. \quad (\text{В.22})$$

Така випадкова величина має многокутник розподілу, який складається з відрізка прямої, що паралельна до осі абсцис. Кінці цього відрізка мають координати  $(1, 1/n)$  і  $(n, 1/n)$ .

**Біноміальний закон розподілу.** Випадкову величину  $X$ , яка набуває значення  $0, 1, 2, \dots, k, \dots, n$ , з ймовірностями

$$P(X = k) = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

$$k = \overline{0, n}, \quad 0 < p < 1, \quad q = 1 - p \quad (\text{В.23})$$

називають розподіленою за законом *Бернуллі* (біноміальним законом).

Ряд розподілу біноміальної випадкової величини  $X$  (табл. В.1)

Таблиця В.1

$k$	0	1	...	$k$	...	$n$
$P_n(k)$	$q^n$	$C_n^1 p q^{n-1}$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	$p^n$

Цей закон застосовують у схемі Бернуллі, тобто у випадку  $n$  незалежних випробувань, у кожному з яких деяка подія виникає з однаковою ймовірністю  $p$ . Сталі  $n$  і  $p$ , за допомогою яких

виконують розрахунки в табл. В.1, називають *параметрами* біноміального розподілу.

Головні числові характеристики для випадкової величини  $X$ , яка має біноміальний розподіл, обчислюють за такими формулами:

$$MX = np, \quad DX = npq, \quad \sigma_x = \sqrt{npq}, \quad (\text{В.24})$$

$$\beta = \frac{q-p}{\sqrt{npq}}, \quad \gamma = \frac{1-6pq}{npq}. \quad (\text{В.25})$$

**Закон розподілу Пуассона.** Випадкову величину  $X$ , яка набуває значення  $0, 1, 2, \dots$  з ймовірностями

$$P(X = m) = P_m(\lambda) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad \lambda > 0, \quad (\text{В.26})$$

називають розподіленою за законом *Пуассона з параметром  $\lambda$* .

Ряд розподілу випадкової величини  $X$ , розподіленої за законом Пуассона з параметром  $\lambda$  (табл. В.2).

Таблиця В.2

$m$	0	1	2	...	$m$	...
$P_m(\lambda)$	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$	...	$\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$	...

Для випадкової величини  $X$ , розподіленої за законом Пуассона з параметром  $\lambda$ , головні числові характеристики обчислюють за такими формулами:

$$MX = \lambda, \quad DX = \lambda, \quad \sigma_x = \sqrt{\lambda}, \quad (\text{В.27})$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}. \quad (\text{В.28})$$

**Геометричний розподіл.** Випадкова величина  $X$  має *геометричний* розподіл, якщо

$$P_k = P(X = k) = pq^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad 0 < p < 1, \quad q = 1 - p. \quad (\text{В.29})$$

Ряд ймовірностей цього розподілу – нескінченно спадна геометрична прогресія із знаменником  $q$ , сума якої дорівнює одиниці.

Для випадкової величини  $X$ , розподіленої за геометричним законом,

$$MX = \frac{1}{p}, \quad DX = \frac{1-p}{p^2}. \quad (\text{B.30})$$

**Гіпергеометричний розподіл.** Випадкова величина  $X$  має гіпергеометричний розподіл, якщо

$$P_k = P(X = k) = \frac{C_m^k C_{N-m}^{n-k}}{C_N^n}, \quad k = 1, 2, \dots, \min(n, m). \quad (\text{B.31})$$

**В.3. Закони розподілу неперервних випадкових величин. Рівномірний розподіл на відрізку.** Неперервна випадкова величина  $X$ , яка набуває значення на відрізку  $[a, b]$ , має *рівномірний* розподіл, якщо щільність розподілу  $p(x)$  має такий вигляд:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a, b], \\ \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b]. \end{cases} \quad (\text{B.32})$$

Функція розподілу цієї випадкової величини має такий вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b, \\ 1, & x > b. \end{cases} \quad (\text{B.33})$$

Для неперервної випадкової величини  $X$ , яка має рівномірний розподіл на відрізку  $[a, b]$ ,

$$MX = \frac{a+b}{2}, \quad DX = \frac{(b-a)^2}{12}, \quad \sigma_x = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}, \quad MeX = \frac{b-a}{2}. \quad (\text{B.34})$$

**Показниковий закон розподілу.** Неперервна випадкова величина  $X$ , яка набуває невід'ємних значень, має *показниковий (експоненціальний)* розподіл з параметром  $\lambda$ , якщо щільність її розподілу  $p(x)$  має такий вигляд:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases} \quad (\text{B.35})$$

Функція розподілу неперервної випадкової величини  $X$ , яка має показниковий розподіл,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases} \quad (\text{B.36})$$

Для випадкової величини  $X$ , розподіленої за показниковим законом з параметром  $\lambda$ , головні числові характеристики є такими:

$$MX = \frac{1}{\lambda}, \quad DX = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma_x = \frac{1}{\lambda}, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 6. \quad (\text{B.37})$$

**Нормальний розподіл.** Вважають, що неперервна випадкова величина  $X$  розподілена *нормально*, якщо її щільність розподілу має такий вигляд:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{B.38})$$

для будь-якого  $x \in (-\infty, \infty)$  і довільних чисел  $a$  і  $\sigma > 0$ .

Якщо  $a=0$  та  $\sigma=1$ , то нормальну криву називають *нормованою*. Якщо випадкова величина  $X$  розподілена за нормальним законом з параметрами  $a$  і  $\sigma > 0$ , то випадкова величина  $Z = \frac{X-a}{\sigma}$  буде розподілена за нормованим нормальним законом.

Функція розподілу нормально розподіленої випадкової величини  $X$  з параметрами  $a$  і  $\sigma > 0$  має такий вигляд:

$$F(x) = 0,5 + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right), \quad (\text{B.39})$$

де  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  – функція Лапласа. Іноді замість  $\Phi(x)$

використовують функцію  $\Phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0,5 + \Phi(x)$ . Тоді

$$F(x) = \Phi^*\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

*Правило “трьох сигм”:* ймовірність того, що нормально розподілена випадкова величина  $X$  набуває своїх значень у проміжку  $(a-3\sigma, a+3\sigma)$ , дорівнює 0, 9973. Це означає, що  $|X-a| < 3\sigma$  – практично достовірна подія.

Для випадкової величини  $X$ , яка має нормальний розподіл з параметрами  $a$  і  $\sigma > 0$ ,



$$MX = MoX = MeX = a, \quad DX = \sigma^2, \quad \sigma_x = \sigma, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0. \quad (B.40)$$

**Логарифмічно нормальний розподіл.** Неперервна невід’ємна випадкова величина  $Y$  має *логарифмічно нормальний (логнормальний)* розподіл, якщо величина  $X = \ln Y$  має нормальний розподіл.

На підставі визначення випадкової величини  $Y = e^X$ , де  $X$  – нормально розподілена випадкова величина з параметрами  $a$  і  $\sigma > 0$ , щільність розподілу  $Y$  така:

$$p_Y(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - a}{\sigma}\right)^2}. \quad (B.41)$$

**Розподіл Вейбула.** Неперервна випадкова величина  $X$ , яка набуває невід’ємних значень, має розподіл *Вейбула* з параметрами  $\alpha > 0$  і  $\lambda > 0$ , якщо щільність її розподілу  $p(x)$  має такий вигляд:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \alpha\lambda x^{\alpha-1} e^{-\lambda x^\alpha}, & x \geq 0. \end{cases} \quad (B.42)$$

Вищерозглянутий показниковий розподіл з параметром  $\lambda$  є частковим випадком розподілу Вейбула, якщо  $\alpha = 1, \lambda > 0$ .

**Гамма-розподіл.** Випадкова величина  $X$  має *гамма-розподіл* з параметрами  $\alpha > 0$  і  $\lambda > 0$ , якщо щільність її розподілу  $p(x)$  має такий вигляд:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \end{cases} \quad (B.43)$$

де  $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$  – гамма-функція Ейлера.

Вищерозглянутий показниковий розподіл з параметром  $\lambda$  є частковим випадком гамма-розподілу, якщо  $\alpha = 1, \lambda > 0$ .

Для гамма-розподілу

$$MX = \frac{\alpha}{\lambda}, \quad DX = \frac{\alpha}{\lambda^2}, \quad \sigma_x = \frac{\sqrt{\alpha}}{\lambda}, \quad \beta = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}, \quad \gamma = \frac{6}{\alpha}. \quad (B.44)$$

Якщо  $\alpha = \frac{n}{2}$ ,  $\lambda = 0,5$ , то отримаємо розподіл  $\chi^2$  з  $n$  ступенями вільності.

**Розподіл “хі-квадрат” ( $\chi^2$ -розподіл).** Нехай  $X_1, X_2, \dots, X_n$  – нормальні, нормовані незалежні випадкові величини, тобто кожна з них розподілена за нормальним законом, має математичне сподівання, що дорівнює нулю, і середнє квадратичне відхилення, що дорівнює одиниці. Тоді випадкова величина

$$\chi^2(n) = \sum_{i=1}^n X_i^2 \quad (\text{B.45})$$

має розподіл “хі-квадрат” ( $\chi^2$ -розподіл) з  $n$  ступенями вільності.

Щільність розподілу цієї випадкової величини є такою:

$$P_{\chi^2(n)}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0, \end{cases} \quad (\text{B.46})$$

де  $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$  – гамма-функція Ейлера.

Для випадкової величини, яка має розподіл “хі-квадрат” з  $n$  ступенями вільності, числові характеристики є такими:

$$M(\chi^2(n)) = n, \quad D(\chi^2(n)) = 2n, \quad \beta = 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{n}}, \quad \gamma = \frac{12}{n}. \quad (\text{B.47})$$

Розподіл  $\chi^2$  із збільшенням  $n$  дуже повільно прямує до нормального розподілу. Тому цей розподіл, при великих значення  $n$  ( $n > 30$ ), з достатньою для практичних розрахунків точністю можна апроксимувати (замінити) нормальним розподілом.

Розподіл  $\chi^2$  табульований. У додатку Д наведені  $100\alpha$ -процентні точки розподілу  $\chi^2(\alpha, n)$  (для  $n \leq 30$ ), які задовольняють співвідношення  $P(\chi^2(n) > \chi^2(\alpha, n)) = \alpha$ . Для  $n > 30$  значення  $\chi^2(\alpha, n)$ , беручи до уваги попередні міркування, визначають за допомогою таблиць нормального закону розподілу.

**Розподіл Стьюдента ( $t$ -розподіл).** Нехай  $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n$  – незалежні нормально розподілені випадкові величини, кожна з яких має математичне сподівання, що дорівнює нулю. Тоді випадкова величина

$$t(n) = \frac{X_0}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2}} \quad (\text{B.48})$$

має розподіл *Стьюдента* з  $n$  ступенями вільності.

Цей розподіл не залежить від параметра  $\sigma$ . Для нього

$$\begin{aligned} M(t(n)) &= 0, \quad D(t(n)) = \frac{n}{n-2}, \quad n > 2; \\ \beta &= 0, \quad n > 3; \quad \gamma = \frac{6}{n-4}, \quad n > 4. \end{aligned} \quad (\text{B.49})$$

Щільність розподілу випадкової величини, яка має  $t$ -розподіл з  $n$  ступенями вільності, обчислюють за формулою

$$p_{t(n)}(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{n\pi}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad x \in R; \quad (\text{B.50})$$

де  $\Gamma(\alpha)$  – гамма-функція Ейлера.

Із збільшенням числа ступенів вільності  $t$ -розподіл наближується до нормованого нормального розподілу.

**Розподіл Фішера ( $F$ -розподіл).** Нехай  $X_1, X_2, \dots, X_m, X_{m+1}, \dots, X_{m+n_2}$  – незалежні нормально розподілені випадкові величини, кожна з яких має математичне сподівання, що дорівнює нулю. Тоді випадкова величина

$$F(n_1, n_2) = \frac{\frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^m X_i^2}{\frac{1}{n_2} \sum_{j=m+1}^{m+n_2} X_j^2} \quad (\text{B.51})$$

має розподіл *Фішера* з  $n_1$  та  $n_2$  ступенями вільності.

Цей розподіл не залежить від параметра  $\sigma$  і має щільність

$$p_{F(n_1, n_2)} = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{\Gamma\left(\frac{n_1 + n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} \frac{x^{\frac{n_1}{2}-1}}{\left(1 + \frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}, & x > 0. \end{cases} \quad (\text{B.52})$$

Для  $n_2 > 2$  математичне сподівання цього розподілу

$$M(F) = \frac{n_1}{n_2 - 2}.$$

Якщо великі  $n_1$  та  $n_2$ , розподіл Фішера замінюють нормальним розподілом.

#### **В. 4. Багатовимірні випадкові величини.**

Нехай  $X_1, X_2, \dots, X_n$  – випадкові величини, які визначені на множині елементарних подій  $\Omega$ . Під  $n$ -вимірною випадковою величиною, чи випадковим вектором, розуміють упорядкований набір  $n$  випадкових величин  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ . Якщо  $n = 2$ , випадкову величину називають двовимірною, якщо  $n = 3$  – тривимірною і т.д.

Функцією розподілу  $n$ -вимірного випадкового вектора  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  називають функцію  $F_X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , яка є ймовірністю того, що одночасно виконуються  $n$  нерівностей  $X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n$ :

$$F_X(x) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n). \quad (\text{B.53})$$

Аналогічно, як одновимірна, багатовимірна випадкова величина може бути дискретною і неперервною.

Багатовимірну випадкову величину  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  називається дискретною, якщо множина її можливих значень  $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$  є скінченною чи зліченною. Закон розподілу цієї величини можна подати у вигляді  $n$ -вимірної таблиці, сума всіх ймовірностей якої дорівнює одиниці. Для двовимірної дискретної випадкової величини  $(X, Y)$  у цій таблиці будуть перелічені можливі значення цієї величини  $(x_i, y_j) \in G, X = x_i (i = 1, 2, \dots), Y =$

$= y_j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) і відповідні їм ймовірності  $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$ , що задовольняють умову

$$\sum_i \sum_j p_{ij} = 1. \quad (\text{B.54})$$

На підставі відомого закону розподілу багатовимірної дискретної випадкової величини будують **закони розподілу її складових**. Зокрема, розподіл ймовірностей координат  $X$  та  $Y$  двовимірної дискретної випадкової величини  $(X, Y)$  обчислюють, відповідно, за такими формулами:

$$p_i = P(X = x_i) = \sum_j p_{ij}, \quad p_j = P(Y = y_j) = \sum_i p_{ij}. \quad (\text{B.55})$$

Якщо  $(X, Y)$  – дискретна випадкова величина, для якої  $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots$ , то умовні ймовірності визначають за рівностями

$$\begin{aligned} P_x(x_i / y_j) &= P(X = x_i / Y = y_j) = \\ &= \frac{P((X = x_i) \cap (Y = y_j))}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_j}, \quad i = 1, 2, \dots; \end{aligned} \quad (\text{B.56})$$

$$\begin{aligned} P_y(y_j / x_i) &= P(Y = y_j / X = x_i) = \\ &= \frac{P((X = x_i) \cap (Y = y_j))}{P(X = x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_i}, \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (\text{B.57})$$

*Умовним законом розподілу складової  $X$  двовимірної дискретної випадкової величини  $(X, Y)$  за умови, що складова  $Y$  набула певного значення  $y_j$ , називають сукупність усіх можливих значень  $X$  і відповідних цим значенням умовних ймовірностей, що обчислюють за формулою (B.54).*

Аналогічно визначають умовний закон розподілу складової  $Y$ .

*Умовним математичним сподіванням дискретної випадкової величини  $X$  за умови, що  $Y$  набула певного значення  $y_j$ , називають число*

$$M(X / Y = y_j) = \frac{1}{p_j} \sum_i x_i p_{ij}. \quad (\text{B.58})$$

Аналогічно

$$M(Y/X = x_i) = \frac{1}{p_i} \sum_j y_j p_{ij}. \quad (\text{B.59})$$

Багатовимірну випадкову величину  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  називають *неперервною*, якщо існує невід'ємна функція  $p_x(x_1, \dots, x_n)$  така, що для будь-яких  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$  функцію розподілу  $F_x(\bar{x})$  можна подати у вигляді  $n$ -вимірного інтеграла:

$$F_x(\bar{x}) = \int_{-\infty}^{x_1} dt_1 \int_{-\infty}^{x_2} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{x_n} p_x(t_1, \dots, t_n) dt_n. \quad (\text{B.60})$$

У цьому разі функцію  $p_x(t_1, \dots, t_n)$  називають *щільністю розподілу ймовірностей* випадкової величини  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ .

Якщо відома щільність  $p_z(x, y)$  розподілу ймовірностей двовимірного випадкового вектора  $Z = (X, Y)$ , то можна знайти щільність розподілу його складових  $X$  та  $Y$ .

Функція розподілу випадкової величини  $X$  дорівнює

$$F_x(x_1) = F_z(x, \infty) = \int_{-\infty}^{x_1} p_x(x) dx, \quad (\text{B.61})$$

де величина  $p_x(x)$ , яку обчислюють за формулою

$$p_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_z(x, y) dy, \quad (\text{B.62})$$

є *щільністю розподілу ймовірностей* випадкової величини  $X$ .

Аналогічно обчислюють *щільність розподілу* випадкової величини  $Y$  на підставі щільності розподілу ймовірностей випадкового вектора  $Z = (X, Y)$ :

$$p_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_z(x, y) dx. \quad (\text{B.63})$$

Нехай  $p_z(x, y)$  і  $p_y(y)$  – щільності, відповідно, випадкових величин  $Z$  і  $Y$ . *Умовна щільність* розподілу ймовірностей випадкової компоненти  $X$  за умови, що компонента  $Y$  набула певного значення  $y_0$ , для якого  $p_y(y_0) > 0$ , визначають за формулою

$$p_x(x/y_0) = \frac{p_z(x, y_0)}{p_y(y_0)}. \quad (\text{B.64})$$

Умовна щільність розподілу ймовірностей випадкової компоненти  $Y$  за умови  $X = x_0$  дорівнює

$$p_Y(y/x_0) = \frac{p_Z(x_0, y)}{p_X(x_0)}. \quad (\text{B.65})$$

Математичне сподівання неперервної випадкової величини  $X$ , обчислене за умовним розподілом (B.62), називають *умовним математичним сподіванням*  $M(X/Y = y_0)$  випадкової компоненти  $X$  за умови, що  $Y$  набула певного значення  $y_0$ . Тобто,

$$M(X/Y = y_0) = \int_{-\infty}^{\infty} xp_X(x/y_0)dx = \frac{1}{p_Y(y_0)} \int_{-\infty}^{\infty} xp_Z(x, y_0)dx. \quad (\text{B.66})$$

Аналогічно

$$M(Y/X = x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} yp_Y(y/x_0)dy = \frac{1}{p_X(x_0)} \int_{-\infty}^{\infty} yp_Z(x_0, y)dy. \quad (\text{B.67})$$

Умовне математичне сподівання  $M(X/Y = y)$  можна розглядати як функцію  $f_X(y) = M(X/Y = y)$ . Ця функція відображає залежність від  $y$  умовного середнього  $X$ . Її називають *функцією регресії  $X$  на  $Y$* . Аналогічно функцію  $f_Y(x) = M(Y/X = x)$  – функцією регресії  $Y$  на  $X$ .

Неперервні випадкові величини  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , які утворюють вектор  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ , будуть *незалежними* тоді і тільки тоді, коли у кожній точці  $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$p_X(\bar{x}) = p_X(x_1, x_2, \dots, x_n) = p_{X_1}(x_1) \cdot p_{X_2}(x_2) \cdot \dots \cdot p_{X_n}(x_n). \quad (\text{B.68})$$

Якщо  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  – дискретний випадковий вектор, то його компоненти будуть *незалежними* тоді і тільки тоді, коли у кожній точці  $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$\begin{aligned} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) &= \\ &= P(X_1 = x_1) \cdot P(X_2 = x_2) \cdot \dots \cdot P(X_n = x_n). \end{aligned} \quad (\text{B.69})$$

Можна також стверджувати, що випадкові величини  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , які утворюють вектор  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ , будуть *незалежними* тоді і тільки тоді, коли у кожній точці  $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$F_X(\bar{x}) = F_X(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{x_1}(x_1) \cdot F_{x_2}(x_2) \cdot \dots \cdot F_{x_n}(x_n). \quad (\text{B.68})$$

Початковим моментом порядку  $m+n$  двовимірного випадкового вектора  $Z = (X, Y)$  називають дійсне число

$$\alpha_{m,n} = M(X^m Y^n) = \begin{cases} \sum_i \sum_j x_i^m y_j^n p_{ij}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^m y^n p(x, y) dx dy. \end{cases} \quad (\text{B.69})$$

Підставивши в формулі (B.69) замість  $m$  чи  $n$  нуль, одержимо початкові моменти складових  $X$  та  $Y$ :  $\alpha_{m,0} = M(X^m)$  і  $\alpha_{0,n} = M(Y^n)$ .

Центральним моментом порядку  $m+n$  двовимірного випадкового вектора  $Z = (X, Y)$  називають дійсне число

$$\begin{aligned} \mu_{m,n} &= M((X - MX)^m (Y - MY)^n) = \\ &= \begin{cases} \sum_i \sum_j (x_i - MX)^m (y_j - MY)^n p_{ij}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - MX)^m (y - MY)^n p(x, y) dx dy. \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{B.70})$$

З цієї формули  $\mu_{2,0} = DX$ ,  $\mu_{0,2} = DY$ .

Центральний момент порядку  $1+1$  має окрему назву. Його називають *коваріацією*, чи *кореляційним моментом*, і позначають

$$\begin{aligned} \mu_{1,1} &= \sigma_{XY} = \text{cov}(X, Y) = M((X - MX)(Y - MY)) = \\ &= M(X \cdot Y) - (MX)(MY). \end{aligned} \quad (\text{B.71})$$

Якщо розглянути  $n$ -вимірний випадковий вектор  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ , то можна познаходити кореляційні моменти для будь-якої пари його складових  $X_i, X_j$  ( $i, j = \overline{1, n}$ ). У результаті отримаємо  $n^2$  випадкових величин, які можна подати у вигляді, так званої, коваріаційної матриці. Отже, *коваріаційною матрицею* випадкового вектора  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  називають матрицю  $\Sigma$ , елементи якої є коваріації  $\sigma_{ij} = \text{cov}(X_i, X_j)$ :



$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.72})$$

де  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ,  $\sigma_{ii} = DX_i$ .

Коефіцієнтом кореляції  $\rho_{XY}$  випадкових величин  $X$  та  $Y$  називають відношення коваріації до добутку середніх квадратичних відхилень цих величин

$$\rho_{XY} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}. \quad (\text{B.73})$$

Коефіцієнт кореляції  $\rho_{XY}$  є коваріацією нормованих випадкових величин  $\frac{X - MX}{\sigma_X}$  і  $\frac{Y - MY}{\sigma_Y}$ .

Дві випадкові величини  $X$  та  $Y$  називають *некорельованими*, якщо їхній коефіцієнт кореляції дорівнює нулю, інакше – *корельованими*.

Кореляційною матрицею  $n$ -вимірного випадкового вектора  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  називають матрицю  $R$ , елементами якої є коефіцієнти кореляції  $\rho_{ij} = \rho_{X_i X_j}$ :

$$R = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \dots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \dots & \rho_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \dots & \rho_{nn} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.74})$$

де  $\rho_{ij} = \rho_{ji}$ ,  $\sigma_{ii} = 1$ .

Додаток Д

Таблиця значень  $t_\gamma = t(\gamma, n)$

$n$	$\gamma$			$n$	$\gamma$		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,717	3,374
18	2,11	2,90	3,97	$\infty$	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

**Критичні точки розподілу  $\chi^2$ , де  $\alpha$  – рівень значущості,  
а  $K$  – кількість ступенів вільності**

$K \backslash \alpha$	0,99	0,95	0,9	0,1	0,05	0,025	0,01	0,001
1	0,0002	0,004	0,02	2,71	3,84	5,02	6,63	10,8
2	0,02	0,1	0,21	4,61	5,99	7,38	9,21	13,6
3	0,12	0,35	0,58	6,25	7,81	9,35	11,3	16,3
4	0,3	0,71	1,06	7,78	9,49	11,1	13,3	18,5
5	0,55	1,15	1,61	9,24	11,1	12,8	15,1	20,5
6	0,87	1,64	2,20	10,6	12,6	14,4	16,8	22,5
7	1,24	2,17	2,83	12,0	14,1	16,0	18,5	24,3
8	1,65	2,73	3,49	13,4	15,5	17,5	20,1	26,1
9	2,09	3,33	4,17	14,7	16,9	19,0	21,7	27,9
10	2,56	3,94	4,87	16,0	18,3	20,5	23,2	29,6
11	3,05	4,57	5,58	17,3	19,7	21,9	24,7	31,3
12	3,57	5,23	6,30	18,5	21,0	23,3	26,2	32,9
13	4,11	5,89	7,04	19,8	22,4	24,7	27,7	34,5
14	4,66	6,57	7,79	21,1	23,7	26,1	29,1	36,1
15	5,23	7,26	8,55	22,3	25,0	27,5	30,6	37,7
16	5,81	7,96	9,31	23,5	26,3	28,8	32,0	39,3
17	6,41	8,67	10,1	24,8	27,6	30,2	33,4	40,8
18	7,01	9,39	10,9	26,0	28,9	31,5	34,8	42,3
19	7,63	10,1	11,7	27,2	30,1	32,9	36,2	43,8
20	8,26	10,9	12,4	28,4	31,4	34,2	37,6	45,3
21	8,90	11,6	13,2	29,6	32,7	35,5	38,9	46,8
22	9,54	12,3	14,0	30,8	33,9	36,8	40,3	48,3
23	10,2	13,1	14,8	32,0	35,2	38,1	41,6	49,7
24	10,9	13,8	15,7	33,2	36,4	39,4	43,0	51,2
25	11,5	14,6	16,5	34,4	37,7	40,6	44,3	52,6
26	12,2	15,4	17,3	35,6	38,9	41,9	45,6	54,1
27	12,9	16,2	18,1	36,7	40,1	43,2	47,0	55,5
28	13,6	16,9	18,9	37,9	41,3	44,5	48,3	56,9
29	14,3	17,7	19,8	39,1	42,6	45,7	49,6	58,3
30	15,0	18,5	20,6	40,3	43,8	47,0	50,9	59,7

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Василь Іванович ПРИЙМАК

# МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ЕКОНОМІЧНОГО АНАЛІЗУ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Керівник видавничих проектів – *Б. А. Сладкевич*

Дизайн обкладинки – *Б. В. Борисов*

Редактор – *М. Ріней*

Технічний редактор – *С. Сенік*

Підписано до друку 21.10.2008. Формат 60x84 1/16.

Друк офсетний. Гарнітура PetersburgC.

Умовн. друк. арк. 16,65.

Наклад 1000 прим.

Видавництво «Центр учбової літератури»

вул. Електриків, 23

м. Київ, 04176

тел./факс 425-01-34, тел. 451-65-95, 425-04-47, 425-20-63

8-800-501-68-00 (безкоштовно в межах України)

e-mail: office@uabook.com

сайт: WWW.CUL.COM.UA

Свідоцтво ДК № 2458 від 30.03.2006