

Розділ 10

Ряди динаміки

10.1. Поняття про ряди динаміки і їх види. Наукові умови побудови рядів динаміки

Соціально-правові явища, які вивчаються правовою статистикою, постійно змінюються і розвиваються як у просторі, так і в часі. З часом – від місяця до місяця, від року до року – змінюється чисельність і склад населення, обсяг і структура виробленої продукції, рівень продуктивності праці, кількість зареєстрованих злочинів і осіб, що їх вчинили і т.д. Тому одним з важливих завдань статистики є вивчення суспільних явищ в безперервному розвитку і динаміці. **Динамікою** в статистиці прийнято називати процес розвитку, руху соціально-економічних явищ у часі. Для відображення і аналізу динаміки будують динамічні (хронологічні, часові) ряди. Дослідження динаміки дає змогу охарактеризувати процес розвитку явищ, розкрити основні шляхи, тенденції і темпи цього розвитку.

У судах і правоохоронних органах ведеться багаторічний безперервний державний і відомчий облік злочинності, судимості, адміністративних правопорушень, цивільно-правових спорів, народжень, шлюбів та інших соціально-правових явищ. Статистичний аналіз динамічних рядів за тривалий період дає можливість виявляти існуючі та ті, що зароджуються, тенденції і закономірності у розвитку соціально-правових явищ і процесів.

Результати такого аналізу можуть бути використані для розробки державної політики у сфері боротьби зі злочинністю та іншими правопорушеннями, розробки і втілення в практику відповідних профілактичних та оперативно-розшукових заходів, прийняття необхідних управлінських рішень направлених на локалізацію і мінімізацію злочинності в країні.

Рядом динаміки називають ряд статистичних показників, які характеризують зміну суспільних явищ у часі. Наприклад, чисельність населення країни на певні дати (дати перепису або дати обліку), кількість зареєстрованих злочинів в області за 1991-2004 рр., чисельність працівників районного суду на початок кожного місяця тощо.

Кожний ряд динаміки складається з двох обов'язкових елементів: періодів часу (t) і рівнів (y). Показниками часу в рядах динаміки можуть бути або певні дати (моменти) часу, або окремі періоди (роки, квартали, місяці, декади, доба).

Рівнем ряду динаміки називають статистичний показник, який характеризує величину суспільного явища на даний момент або за певний період часу. Вони відображають кількісну оцінку (міру) розвитку досліджуваного суспільного явища.

Рівні динамічного ряду можуть бути виражені абсолютними, відносними і середніми величинами. При аналізі рядів динаміки всі ці величини необхідно використовувати в комплексі, вони мають доповнювати один одного. Рівні ряду динаміки можуть характеризувати величину статистичного показника на певний момент (будь-яку дату) і за відповідний період часу (рік, місяць, день, годину тощо). В зв'язку з цим розрізняють моментні та інтервальні ряди динаміки.

Моментними називають ряди динаміки, які характеризують розмір явища на певний період часу. Прикладом моментного ряду динаміки є така інформація про спискову чисельність працівників підприємства в 2004 р. (табл. 10.1).

Таблиця 10.1

Чисельність працівників підприємства в 2004 р.

Дата	1.01.2004 р.	1.04.2004 р.	1.07.2004 р.	1.10.2004 р.	1.01.2005 р.
Чисельність працівників, чол.	250	254	260	263	260

За допомогою моментних рядів динаміки характеризується найчастіше стан умов і факторів діяльності установ, організацій та підприємств. Наприклад, динамічні ряди наявності на початок звітного року автомобілів у райвідділі внутрішніх справ; навантаження кримінальних справ на суддю, слідчого; залишок нерозкритих злочинів; кількість ув'язнених в установах виконання покарань (за нормою і фактично) тощо.

В моментному ряду динаміки одні й ті самі одиниці сукупності входять до складу кількох рівнів. Тому підсумовування рівнів моментного ряду динаміки не має смислу, так як при цьому підсумки позбавлені економічного змісту. Так, сума чисельності працівників підприємства на 1.01 і 1.04.2004 р. ($250 + 254 = 504$) не має реального смислу. Проте

визначення різниці між рівнями моментного динамічного ряду має певний смисл. Так, різниця між чисельністю працівників підприємства на 1.04 і 1.01. 2004 р. (254–250) характеризує абсолютний приріст чисельності працівників за цей період.

Інтервальними називають ряди динаміки, які характеризують розмір явищ за певний період часу. Прикладом інтервального ряду динаміки можуть бути дані, наведені в табл. 10.2.

Таблиця 10.2

Динаміка злочинності в Україні за 1980-2003 рр.

Рік	Кількість зареєстрованих злочинів		Абсолютний приріст порівняно з	
	усього	у % до	1980 р.	попереднім роком
		1980 р.	попереднього року	
1980	196902	100,0	—	—
1981	209135	106,2	106,2	12233
1982	212990	108,2	101,8	16088
1983	236580	120,2	111,1	39678
1984	229712	116,7	97,1	32810
1985	249712	126,8	108,7	52810
1986	248663	120,3	99,6	51761
1987	237821	120,8	95,6	40919
1988	242974	123,4	102,2	46072
1989	322340	163,7	132,7	125438
1990	369809	187,8	114,7	172907
1991	405516	205,9	109,7	208614
1992	480478	244,0	118,5	283576
1993	539299	273,9	112,2	342397
1994	571632	290,3	106,0	374730
1995	641860	326,0	112,3	444958
1996	617262	313,5	96,2	420360
1997	589208	299,2	95,5	392306
1998	575982	292,5	97,8	379080
1999	558700	283,7	97,0	361798
2000	567800	288,4	101,6	370898
2001	514600	261,3	90,6	317698
2002	450661	228,9	87,6	253759
2003	556351	282,6	123,4	359449

Дані таблиці свідчать про стрімке зростання рівня злочинності в Україні, особливо за останні 15 років. Так кількість зареєстрованих злочинів у 2003 р. порівняно з 1980 р. зросла майже на 360 тисяч, або в 2,8 раза.

За допомогою інтервальних динамічних рядів як правило характеризуються підсумки діяльності установ, підприємств (обсяги виробленої продукції, виконаних робіт, кількість розкритих злочинів, суми стягнутих штрафів тощо). Рівні інтервального ряду динаміки абсолютних показників на відміну від рівнів моментного ряду не містяться в попередніх або наступних показниках. Тому важливе економічне значення має підсумовування цих рівнів, сума рівнів інтервального ряду динаміки характеризує обсяг досліджуваного явища за більш довгий період. Наприклад, підсумовування виробництва сталі, чавуну, вугілля тощо за період (2000–2004 рр.) дає уяву про обсяг її виробництва за 5 років. Для виявлення тенденції зміни досліджуваного явища рівні інтервального ряду динаміки можна укрупнювати.

При вивченні динаміки соціально-правових явищ вирішується цілий ряд завдань, основними з яких є такі: 1) характеристика за допомогою системи показників динаміки інтенсивності зміни рівнів ряду від періода до періода або від дати до дати; 2) визначення середніх значень динамічного ряду за той або інший період; 3) виявлення і кількісна оцінка основної тенденції розвитку (тренда) досліджуваного явища; 4) прогнозування розвитку явища на перспективу; 5) виявлення факторів, що зумовили зміну досліджуваного суспільного явища в часі; 6) аналіз сезонних коливань.

Однією з важливих вимог правильного обчислення і аналізу показників динаміки є дотримання умов зіставлення порівнюваних між собою рівнів ряду динаміки. Проблема порівнянності даних особливо гостро стоїть в динамічних рядах, оскільки вони, як правило, охоплюють значні періоди часу, за які могли виникнути зміни, що призводять до непорівнянності статистичних даних.

При побудові і аналізі рядів динаміки необхідно забезпечити порівнянність рівнів ряду передусім за територією, методикою розрахунку показників, періодом або моментом часу, об'єктом і одиницею спостереження, ступенем охоплення одиниць досліджуваної сукупності, одиницями вимірювання тощо.

Розглянемо основні наукові умови порівнянності рівнів ряду динаміки.

Непорівнянність даних, що виникає внаслідок адміністративно-територіальних змін, часто виявляється в статистичній практиці. Це зумовлено тим, що межі територій, районів, областей і т. д. протягом досліджуваного періоду змінюються внаслідок приєднання до них нових територій або від'єднання окремих частин їхньої території. Для приведення даних до порівнянного виду необхідно виконати перера-

хунок даних за попередні роки (до зміни території) з урахуванням нових меж.

Найбільш суттєвою вимогою при побудові ряду динаміки є єдина методика обчислення рівня за кожний з періодів, що розглядається. Завдяки цьому забезпечується порівнянність статистичних показників за змістом. Наприклад, при вивченні динаміки злочинності необхідно до всього ряду застосувати єдину методику обліку злочинів для всіх правоохоронних органів.

При дослідженні динаміки вартісних показників обсягу продукції необхідно усунути вплив зміни цін. На практиці для вирішення цього завдання кількість продукції, виробленої в різні періоди, оцінюють в цінах одного періоду, які називають фіксованими або порівнянними. Якщо ряд динаміки подано узагальнюючими показниками в умовно-натуральних одиницях вимірювання, коефіцієнти сумірництва для всіх рівнів мають бути єдиними.

Порівнянність рівнів ряду динаміки за періодом або моментом спостереження означає, по-перше, що всі показники характеризують явище або за певний період часу, або на певний момент часу. В зв'язку з цим неправомірно порівнювати, наприклад, середньорічну чисельність суддів з чисельністю суддів на початок або кінець року. По-друге, в інтервальних динамічних рядах рівні повинні відноситись до рівних періодів часу, а в моментних повинні бути, як правило, рівні відрізки часу між моментами (датами) спостереження. Крім того, не можна поєднувати в одному ряду динаміки періоди і моменти часу.

Порівнянність за об'єктом спостереження означає, що всі рівні ряду динаміки відносяться до одного і того самого об'єкта спостереження.

Порівнянність за одиницями спостереження передбачає, що всі рівні одержані по одних і тих самих одиницях спостереження.

Крім перелічених вимог, без урахування яких неможливо побудувати ряд динаміки, потрібно дотримуватися одних і тих самих одиниць вимірювання. Так, якщо дані про суму збитків від злочинів за одні роки наводяться в тисячах, а за інші в мільйонах, то необхідно перерахувати весь ряд в одні і ті самі одиниці вимірювання.

Науково обгрунтоване формування рядів динаміки вимагає також виділення строго однорідних періодів (етапів) у розвитку досліджуваних соціально-правових явищ, тому що всебічного аналізу динамічних процесів можна досягти лише в межах однорідних періодів. Періодизацію динамічних рядів слід проводити на основі глибокого теоретичного аналізу основних процесів і законів, які визначають розвиток досліджуваного явища.

Дослідження динаміки злочинності та правопорушень крім зазначених вимог до порівнюваних показників вимагає дотримання порівнянності рівнів ряду динаміки з точки зору правових норм. Якщо, наприклад, аналізується рівень злочинності, то необхідно врахувати зміни, що відбулися в кримінальному законодавстві (наприклад, введення або виведення якогось діяння зі складу кримінальних злочинів), і взяти дані про ті види злочинів, які передбачалися кримінальним законом протягом усього досліджуваного періоду.

10.2. Показники ряду динаміки

Одним з важливих завдань аналізу рядів динаміки є вивчення особливостей розвитку досліджуваних явищ за окремі періоди. Для виявлення напрямку та інтенсивності змін досліджуваних суспільних явищ за певні періоди часу визначають систему абсолютних і відносних показників динаміки. До таких показників відносяться абсолютний приріст, темп (коефіцієнт) зростання, темп приросту, абсолютне значення одного процента приросту і середні показники ряду динаміки (середній рівень ряду динаміки, середній абсолютний приріст, середній темп зростання і приросту та ін.).

Показники абсолютного приросту, темпу зростання і приросту, а також абсолютного значення одного процента приросту отримують порівнюючи між собою вихідні рівні ряду динаміки. При цьому рівень, з яким порівнюють, називають **базисним**, а порівнюваний **поточним рівнем**.

Якщо порівнянню підлягають декілька послідовних рівнів, то можливі два варіанти порівняння:

1) кожен рівень вихідного ряду динаміки зіставляють з одним і тим самим рівнем, взятим за базу порівняння. Найчастіше за базу порівняння беруть або початковий (перший) рівень, або ж рівень, з якого починається якийсь новий етап розвитку явища. Вибір бази порівняння повинен бути обґрунтований історично і економічно. Таке порівняння дістало назву порівняння з постійною базою;

2) кожен рівень вихідного ряду динаміки порівнюють з безпосередньо йому попереднім рівнем. Таке порівняння називають порівнянням зі змінною базою.

Відповідно до цих двох варіантів порівняння отримують дві системи показників ряду динаміки. При порівнянні кожного рівня з одним і тим самим рівнем, взятим за базу порівняння, одержують **базисні показники**; при порівнянні кожного рівня з безпосередньо йому попереднім рівнем отримують **ланцюгові показники**.

Для характеристики абсолютної швидкості зростання (зниження) рівнів ряду динаміки обчислюють показник абсолютного приросту (А).

Абсолютний приріст являє собою різницю між двома рівнями, один з яких взято за базу порівняння.

Він показує на скільки одиниць кожен даний рівень відрізняється від рівня, взятого за базу порівняння. Абсолютний приріст може мати додатний або від'ємний знак. Якщо наступний рівень ряду динаміки більший за попередній, то абсолютний приріст буде мати знак „плюс”, якщо менше знак „мінус”.

Динамічний ряд абсолютних приростів дає змогу визначити напрям (зростання, зниження) динаміки досліджуваного явища. Крім того, порівнянням абсолютних приростів між собою можна встановити характер зростання або зниження в абсолютному вираженні (рівномірний, прискорений, стрибкоподібний та ін.).

Розглянемо порядок обчислення абсолютних приростів та інших показників динаміки за даними про динаміку кількості зареєстрованих злочинів в області за 1999 – 2004 рр. (табл. 10.3).

Таблиця 10.3

Показники динаміки кількості зареєстрованих злочинів в області за 1999 – 2004 рр.

Рік	Кількість зареєстрованих злочинів	Абсолютний приріст		Темп (коефіцієнт) зростання		Темп приросту (%)		Абсолютне значення одного проценту приросту	Пункти зростання, %
		базисний	ланцюговий	базисний	ланцюговий	базисний	ланцюговий		
1999	16200	-	-	-	-	-	-	-	-
2000	16875	675	675	1,0417	1,0417	4,17	4,17	162,0	4,17
2001	17121	921	246	1,0568	1,0146	5,68	1,46	168,7	1,51
2002	17566	1366	445	1,0843	1,0260	8,43	2,60	171,2	2,75
2003	17083	883	-483	1,0545	0,9725	5,45	-2,75	175,7	-2,98
2004	18360	2160	1277	1,1333	1,0747	13,33	7,47	170,8	7,88

Абсолютні прирости становитимуть:

базисні (до 1999 р.)

$$A_1 = y_1 - y_0 = 16875 - 16200 = 675 \text{ злочинів;}$$

$$A_2 = y_2 - y_0 = 17121 - 16200 = 921 \text{ злочин і т. д.;}$$

ланцюгові (до попереднього року)

$$A_1 = y_1 - y_0 = 16875 - 16200 = 675 \text{ злочинів;}$$

$$A_2 = y_2 - y_1 = 17121 - 16875 = 246 \text{ злочинів і т.д.};$$

Ланцюгові і базисні абсолютні прирости пов'язані між собою такою рівністю: сума ланцюгових приростів дорівнює відповідному базисному приросту, тобто загальному приросту за весь відповідний період часу.

Для даного прикладу:

$$2160 = 675 + 246 + 445 - 483 + 1277.$$

Темп (коефіцієнт) зростання (К) це відношення двох рівнів, один з яких взято за базу порівняння.

Темп зростання характеризує відносну швидкість зміни явища і показує у скільки разів кожний даний рівень більший або менший рівня, який взято за базу порівняння. Він може бути виражений у вигляді коефіцієнтів або процентів. Темп зростання, виражений у процентах, називають **процентом зростання**.

Величина темпу зростання буде більшою від одиниці, якщо рівень щодо бази порівняння зростає, і меншою за одиницю, якщо рівень щодо бази порівняння зменшується.

Темпи (коефіцієнти) зростання для нашого прикладу становитимуть:

базисні: $K_1 = y_1 : y_0 = 16875 : 16200 = 1,0417;$

$K_2 = y_2 : y_0 = 17121 : 16200 = 1,0568 \text{ і т.д.};$

ланцюгові: $K_1 = y_1 : y_0 = 16875 : 16200 = 1,0417;$

$K_2 = y_2 : y_1 = 17121 : 16875 = 1,0146 \text{ і т.д.}$

Між ланцюговими і базисними темпами зростання, вираженими коефіцієнтами, є такий взаємозв'язок:

а) добуток ланцюгових коефіцієнтів зростання дорівнює базисному коефіцієнту зростання за відповідний період. Наприклад:

$$K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 = \frac{y_1}{y_0} \cdot \frac{y_2}{y_1} \cdot \frac{y_3}{y_2} = \frac{y_3}{y_0}.$$

Для нашого прикладу

$$1,1333 = 1,0417 \cdot 1,0146 \cdot 1,0260 \cdot 0,9725 \cdot 1,0747.$$

б) частка від ділення двох сусідніх базисних коефіцієнтів зростання дорівнює відповідному ланцюговому коефіцієнту зростання.

Наприклад, $K_2 : K_1 = \frac{y_2}{y_0} : \frac{y_1}{y_0} = \frac{y_2}{y_1}.$

Цей взаємозв'язок дає змогу здійснювати перехід від ланцюгових коефіцієнтів зростання до базисних і навпаки.

Для нашого прикладу:

$$K_2 = 1,0568 : 1,0417 = 1,0146;$$

$$K_3 = 1,0843 : 1,0568 = 1,0260 \text{ і т.д.}$$

Поряд з темпами зростання відносна зміна явища у часі може бути також охарактеризована за допомогою **темлів приросту** які являють собою відношення абсолютного приросту до рівня, взятого за базу порівняння (Т).

Темп приросту, як і абсолютний приріст може бути як додатним, так і від'ємним числом (відповідно при зростанні і зниженні рівня) і виражається у вигляді коефіцієнтів або процентів. На практиці темпи приросту найчастіше виражаються у формі процентів.

Вони показують наскільки процентів збільшився або зменшився поточний рівень порівняно з базисним, взятим за 100 %.

Визначимо для нашого прикладу темпи приросту (в %):

базисні: $T_1 = (A_1 : y_0) \cdot 100\% = (675 : 16200) \cdot 100 = 4,17;$

$T_2 = (A_2 : y_0) \cdot 100\% = (921 : 16200) \cdot 100 = 5,68 \text{ і т.д.}$

ланцюгові: $T_1 = (A_1 : y_0) \cdot 100\% = (675 : 16200) \cdot 100 = 4,17;$

$T_2 = (A_2 : y_1) \cdot 100\% = (246 : 16875) \cdot 100 = 1,46 \text{ і т.д.}$

Між темпом зростання і темпом приросту існує такий зв'язок:

або
$$T_i = K_i - 1,$$

$$T_i = (K_i \cdot 100\%) - 100\%,$$

тобто темп приросту завжди на одиницю менше відповідного темпу зростання, вираженого у формі коефіцієнта, або на 100 %, якщо його виражено в процентах.

Отже, щоб визначити темп приросту, потрібно від темпу зростання відняти одиницю, якщо його виражено коефіцієнтом, або 100 %, коли він у процентах.

Для динамічного ряду зареєстрованих злочинів темпи приросту, розраховані цим способом, становитимуть:

$T_1 = K_1 \cdot 100\% - 100\% = 1,0417 \cdot 100\% - 100\% = 4,17 \text{ %};$

$T_2 = K_2 \cdot 100\% - 100\% = 1,0568 \cdot 100\% - 100\% = 5,68 \text{ % і т.д.}$

Поряд з показниками темлів зростання і приросту в аналізі динамічних рядів викликає інтерес ще один відносний показник, який дає змогу визначити вагомість кожного процента приросту, і те, яка абсолютна величина виховується за цим процентом. Таким показником є **абсолютне значення одного процента приросту (П)**. Він обчислюється як відношення абсолютного приросту до відповідного темпу приросту, вираженого в процентах

$$P_i = \frac{A_i}{T_i(\%)}$$

Розрахунок цього показника має економічний зміст тільки на ланцюговій основі, оскільки на базисній основі по всіх часових відрізках буде отримано одне і те саме значення показника сота частина початкового (першого) рівня.

Абсолютне значення одного проценти приросту для нашого прикладу становитиме:

$$P_1 = \frac{A_1}{T_1} = \frac{675}{4,1667} = 162,0 \text{ злочина};$$

$$P_2 = \frac{A_2}{T_2} = \frac{246}{1,4578} = 168,7 \text{ злочину};$$

Цей показник можна обчислити значно простіше. Підставивши у формулу значення відповідних показників, дістанемо, що величина абсолютного значення одного процента приросту являє собою соту частину попереднього рівня:

$$P_i = \frac{A_i}{T_i(\%)} = \frac{A_i}{\frac{A_i}{y_0} \cdot 100} = \frac{y_0}{100} = 0,01y_0$$

Таким чином, не вдаючись до спеціального розрахунку, можна визначити, що абсолютне значення одного процента приросту для відповідних часових відрізків становитиме:

$$P_1 = y_0 : 100 = 16200 : 100 = 162,0 \text{ злочина};$$

$$P_2 = y_1 : 100 = 16875 : 100 = 168,7 \text{ злочину і т.д.}$$

Цей показник має важливе практичне значення в економічному аналізі, оскільки темпи зростання можуть сповільнюватись або залишатися на одному рівні, а абсолютне значення одного процента приросту зростати. Звичайно така закономірність спостерігається в динамічних рядах з рівнями, що постійно зростають.

Слід відмітити, що в динамічних рядах відносних величин (процентів зростання і приросту) їх безпосереднє порівняння можна здійснювати тільки шляхом визначення різниці рівнів. Ці різниці дістали назву **пунктів зростання**. Їх розраховують як різницю базисних процентів зростання або приросту двох суміжних періодів. На відміну від темпів приросту, які не можна підсумовувати та перемножувати, пункти зростання можна підсумовувати, в результаті чого дістанемо темп приросту відповідного періоду порівняно з базисним періодом.

Пункти зростання для нашого прикладу становитимуть:

для 2001 р. $PP_1 = T_2 - T_1 = 5,68 - 4,17 = 1,51 \%$;

для 2002 р. $PP_2 = T_3 - T_2 = 8,43 - 5,88 = 2,75 \%$ і т.д.

Контроль правильності розрахунків: сума пунктів зростання дорівнює загальному темпу приросту за весь період:

$$4,17 + 1,51 + 2,75 + (-2,98) + 7,88 = 13,33\%$$

Це відповідає темпу приросту рівня 2004 р. порівняно з 1999 р.

Для отримання узагальнюючих показників динаміки соціально-економічних явищ визначаються різного роду середні величини: середній рівень динамічного ряду, середній абсолютний приріст, середній темп зростання і приросту та ін. Середню з рівнів динамічного ряду називають **хронологічною середньою**. Середній рівень ряду динаміки характеризує типовий розмір рівнів ряду.

Порядок розрахунку середнього рівня для інтервальних і моментних рядів динаміки відрізняється. В інтервальних рядах динаміки з рівновіддаленими один від одного рівнями середній рівень обчислюється за формулою середньої арифметичної простої:

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n}$$

де n - число рівнів ряду динаміки.

Середній рівень динамічного ряду для нашого прикладу (табл. 10.3) становитиме:

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{16200 + 16875 + 17121 + 17566 + 17083 + 18360}{6} = \frac{103205}{6} = 17201 \text{ злочин.}$$

Якщо інтервальний ряд динаміки має нерівновіддалені один від одного рівні, то середній рівень розраховується за формулою середньої арифметичної зваженої:

$$\bar{y} = \frac{\sum yt}{\sum t}$$

де t - відрізок часу, протягом якого зберігалось дане значення рівня y .

Наприклад, середня чисельність працівників установи за перше півріччя становила 500 чоловік, за третій квартал 520, за четвертий 515 чоловік. Звідси середньорічна чисельність працівників становитиме:

$$\bar{y} = \frac{\sum yt}{\sum t} = \frac{500 \cdot 6 + 520 \cdot 3 + 515 \cdot 3}{12} = \frac{6105}{12} = 509 \text{ чол.}$$

У моментних динамічних рядах з рівними проміжками між датами середній рівень обчислюється за формулою:

$$\bar{y}_{\text{хронол}} = \frac{0,5y_1 + y_2 + \dots + 0,5y_n}{n-1},$$

де n - число рівнів ряду динаміки.

Застосування формули проілюструємо на даних про спискову чисельність працівників підприємства за 2004 р. (табл. 10.1). Середньорічна чисельність працівників підприємства становитиме:

$$\bar{y} = \frac{0,5y_1 + y_2 + \dots + 0,5y_n}{n-1} = \frac{0,5 \cdot 250 + 254 + 260 + 263 + 0,5 \cdot 260}{5-1} = \frac{1032}{4} = 258 \text{ чол.}$$

У моментних динамічних рядах з нерівними проміжками між датами середній рівень розраховують за формулою середньої арифметичної зваженої, тобто шляхом зваження рівнів за кількістю рівних періодів:

$$\bar{y} = \frac{\sum yt}{\sum t}.$$

Порядок обчислення середнього рівня для моментного ряду динаміки показано в табл. 10.4.

Таблиця 10.4

Динаміка чисельності працівників установи в липні 2004 р.

Показник	Число місяця				
	1	6	16	23	28
Чисельність працівників, чол (y)	260	261	264	262	265
Число днів перебування на підприємстві певної кількості працівників (t),	5	10	7	5	4
Кількість людино-днів (yt)	1300	2610	1848	1310	1060

Отже, середня чисельність працівників установи в липні 2004 р. становитиме:

$$\bar{y} = \frac{\sum yt}{\sum t} = \frac{1300 + 2610 + 1848 + 1310 + 1060}{5 + 10 + 7 + 5 + 4} = \frac{8128}{31} = 262 \text{ чол.}$$

Середній абсолютний приріст характеризує середню швидкість зростання (або зниження) рівня. Для моментних та інтервальних рядів динаміки з рівними проміжками між датами його обчислюють як середню арифметичну просту з ланцюгових абсолютних приростів або як

різницю між кінцевим і початковим рівнем, поділену на кількість членів ряду, зменшених на одиницю:

$$\bar{A} = \frac{\sum A}{n}, \text{ або } \bar{A} = \frac{y_n - y_0}{n-1},$$

де n - число абсолютних приростів;

$n - 1$ - кількість рівнів ряду динаміки, зменшених на одиницю.

Середній абсолютний приріст для ряду динаміки зареєстрованих злочинів (табл. 10.3) становитиме:

$$\bar{A} = \frac{\sum A}{n} = \frac{675 + 246 + 445 + (-483) + 1277}{5} = \frac{2160}{5} = 432 \text{ злочина,}$$

$$\text{або } \bar{A} = \frac{y_n - y_0}{n-1} = \frac{18360 - 16200}{5} = \frac{2160}{5} = 432 \text{ злочина.}$$

Для узагальнюючої характеристики темпів зростання за ряд років

обчислюють середній темп (коефіцієнт) зростання (\bar{K}). Він показує в скільки разів у середньому кожен даний рівень ряду більший (або менший) від попереднього рівня. Для динамічних рядів з рівними проміжками між датами середній темп зростання обчислюється за формулою середньої геометричної:

$$\bar{K} = \sqrt[n]{K_1 \cdot K_2 \cdot \dots \cdot K_n},$$

де K - коефіцієнти зростання за окремі періоди часу;

n - число коефіцієнтів зростання.

Середній коефіцієнт зростання може бути визначений за іншою формулою, що впливає з наведеної вище формули:

$$\bar{K} = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_0}},$$

де n - число рівнів ряду динаміки;

y_0 і y_n - початковий і кінцевий рівні ряду динаміки.

На основі середнього темпу зростання можна визначити середній темп приросту (\bar{T}). Він показує, на скільки процентів у середньому збільшується (або зменшується) даний рівень порівняно з попереднім. Його розраховують як різницю між середнім темпом зростання, вираженим у процентах і 100%:

$$\bar{T}_i = (\bar{K}_i \cdot 100\%) - 100\%.$$

За даними табл. 10.3 розрахуємо середній коефіцієнт зростання кількості зареєстрованих злочинів за 1999 – 2004 рр. Для цього використаємо формулу середньої геометричної

$$\bar{K} = \sqrt[n]{K_1 \cdot K_2 \cdot \dots \cdot K_n} = \sqrt[6]{1,0417 \cdot 1,0146 \cdot 1,0260 \cdot 0,9725 \cdot 1,0747} = \sqrt[6]{1,1333}.$$

Прологарифмуємо рівняння:

$$\begin{aligned} \lg \bar{K} &= \frac{\lg 1,0417 + \lg 1,0146 + \lg 1,0260 + \lg 0,9725 + \lg 1,0747}{5} = \\ &= \frac{0,01775 + 0,00629 + 0,01115 + (-0,01211) + 0,03129}{5} = \frac{0,05436}{5} = 0,0109. \end{aligned}$$

За таблицями антилогарифмів знайдемо середній коефіцієнт зростання: $\bar{K} = 1,025$, або 102,5%.

Такий самий результат дістанемо і за іншою (зручнішою) формулою, що впливає із взаємозв'язку ланцюгових і базисних коефіцієнтів: добуток ланцюгових коефіцієнтів дорівнює базисному крайніх періодів

$$\bar{K} = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_0}} = \sqrt[6-1]{\frac{18360}{16200}} = \sqrt[5]{1,1333}.$$

Прологарифмуємо рівняння:

$$\lg \bar{K} = \frac{1}{5} \lg 1,1333 = \frac{1}{5} 0,05436 = 0,0109.$$

За таблицями антилогарифмів знайдемо середній коефіцієнт зростання: $\bar{K} = 1,025$, або 102,5%.

Такий самий результат матимемо і за іншою формулою:

$$\lg K = \frac{\lg 18360 - \lg 16200}{5} = \frac{4,26378 - 4,20951}{5} = \frac{0,05436}{5} = 0,0109.$$

$\bar{K} = 1,025$, або 102,5%.

Величину середнього темпу легко визначити за спеціальними таблицями, витяг з яких наведено в дод. 25.

Обчисливши систему показників по ряду динаміки зареєстрованих злочинів (табл. 10.3), можна зробити такі висновки. Досліджуванний ряд динаміки є інтервальним. Середня кількість зареєстрованих злочинів рік за рік в області становить 17201 злочин. Щорічно вона зростала в середньому на 432 злочину. У цілому ж кількість злочинів за досліджуваний період (1999 – 2004 рр.) в області зросла на 2160 злочинів, або на 13,33%. За середнім коефіцієнтом зростання можна встановити, що середній щорічний темп зростання кількості злочинів становить 2,5% (102,5–100). Із зростанням кількості злочинів збільшувалося абсолютне значення одного процента приросту з 162,0 злочина в 2000 р. до 170,8 злочина в 2004 р.

При порівняльному аналізі кількох рядів динаміки, що відображають різні економічні явища за однакові відрізки часу, визначають ко-

ефіцієнт випередження. Він показує, у скільки разів швидше зростає рівень одного динамічного ряду (i) порівняно з другим (j), тобто

$$K_{\text{вип}} = \frac{T_i}{T_j}.$$

Наприклад, при порівнянні темпів зростання продуктивності праці і заробітної плати, судимості і злочинності тощо.

Так, якщо за п'ятиріччя (1999–2004 рр.) базисний темп зростання продуктивності праці на підприємстві становив $T_i = 115,6\%$, а темп зростання заробітної плати $T_j = 108,7\%$, коефіцієнт випередження темпу зростання продуктивності праці над темпом зростання заробітної плати дорівнює: $K_{\text{вип}} = T_i : T_j = 115,6 : 107,7 = 1,063$, тобто темп зростання продуктивності праці випереджав тем зростання заробітної плати в 1,063 раза.

10.3. Прийоми виявлення основної тенденції розвитку в рядах динаміки

Для всебічної характеристики зміни соціально-правових явищ у часі розрахунку тільки одних показників динаміки та їхніх середніх величин не досить. В зв'язку з цим статистика пропонує ряд спеціальних прийомів обробки й аналізу динамічних рядів.

Важливе місце у вивченні розвитку суспільних явищ належить порівняльному аналізу кількох рядів динаміки. При цьому можна порівнювати динамічні ряди як однойменних, так і різнойменних показників, що стосуються різних територій або є складовими частинами цілого. Абсолютні рівні таких рядів динаміки, як правило, внаслідок відмінностей методики обчислення показників, грошової оцінки продукції та інших причин безпосередньо непорівнянні. Тому доцільно порівнювати не абсолютні, а відносні показники і за ними робити висновки про те, яке явище і на якій території зростає (або знижується) швидше. Цей прийом дістав назву **приведення рядів динаміки до однієї основи**, тобто до загальної бази порівняння, яку беруть за одиницю або за сто процентів.

Суть цього прийому полягає в тому, що дані про величину показника, що вивчається, за рік (або інший відрізок часу), взятий за базу порівняння, беруть таким, що дорівнює 100%, а рівні окремих років (або інших відрізків часу) порівнюють з ним, а частку виражають в процентах.

Практичне застосування прийому приведення рядів динаміки до однієї основи розглядується в наступному параграфі розділу посібника, присвяченому факторному аналізу рядів динаміки (табл. 10.10 і 10.11).

У тих випадках, коли рівні ряду динаміки за одні роки непорівнянні з рівнями за інші роки в зв'язку з територіальними, відомчими, організаційними змінами, зміною методики обчислення показників або за іншими причинами і виникає потреба забезпечити порівнянність рівнів, удаються до змикання динамічних рядів, тобто об'єднання двох і більше рядів в один зімкнутий ряд.

Суть цього прийому полягає в наступному. Рівні року, протягом якого відбулися зміни, як до змін, так і після змін, беруть за базу порівняння (звичайно за 100%), інші порівнюються з ним і виражають у процентах. В результаті цього дістанемо єдиний ряд відносних величин, що характеризує зміну досліджуваного явища за весь період.

Припустимо, є дані за 1998–2004 рр. щодо кількості осіб, притягнутих до адміністративної відповідальності, в районі, в територіальних межах якого в 2001 р. відбулися зміни (табл. 10.5).

Таблиця 10.5

Динаміка кількості осіб, притягнутих до адміністративної відповідальності в районі за 1998–2004 рр.

Межі району	Роки						
	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
До змін	2100	2208	2315	2430	-	-	-
Після змін	-	-	-	2686	2717	2804	2861

Аналіз таблиці показує, що в зв'язку із зміною меж району в 2001 р. дані про осіб, притягнутих до адміністративної відповідальності за 2002–2004 рр. непорівнянні з даними за 1998–2000 рр. Щоб мати порівнянні дані, виконаємо змикання цих рядів динаміки.

Змикання рядів динаміки і зведення їх до порівнянного вигляду здійснимо двома способами:

а) вираженням ряду динаміки у відносних показниках, прийнявши за базу порівняння один і той самий період;

б) перерахунком абсолютних показників.

Змикання рядів способом вираження рядів відносними показниками динаміки виконаємо так. Візьмемо рік, в якому відбулися територіальні зміни (в нашому прикладі це 2001 р.) за базу порівняння або 100 %, а решту рівнів порівняємо з цим роком і отримані дані виразимо в процентах. Отже, за 100% для першого ряду динаміки (1998–2000 рр.) буде прийнята величина кількості осіб, притягнутих до адміністратив-

ної відповідальності, що дорівнює 2430 осіб, а для другого ряду динаміки (2002–2004 рр.) – 2686 осіб

Так, наприклад, відносний показник динаміки осіб, притягнутих до адміністративної відповідальності, в 1998 р. порівняно з 2001 р. становитиме 86,4% [(2100 : 2430) · 100], в 2004 р. порівняно з 2001 р. – 106,5% [(2861 : 2686) · 100] і т.д.

Внаслідок отримаємо ряди відносних показників динаміки осіб, притягнутих до адміністративної відповідальності, з однаковою базою порівняння, які можна замінити одним зімкнутим рядом.

Змикання рядів динаміки способом перерахунку абсолютних показників здійснимо за допомогою коефіцієнта перерахунку (K_n), який визначимо як відношення двох рівнів осіб, притягнутих до адміністративної відповідальності, після зміни меж району до таких самих осіб перед цією зміною:

$$K_n = \frac{2686}{2430} = 1,105.$$

Перемноживши кількість осіб першого ряду динаміки (1998–2000 рр.) на коефіцієнт перерахунку, матимемо дані, які порівняні з даними про кількість осіб другого ряду динаміки (2002–2004 рр.). Так, у 1998 р. кількість осіб у порівняному показникові дорівнюватиме 2320 осіб (2100 · 1,105), в 1999 р. – 2440 осіб (2208 · 1,105) і т.д.

Усі розрахунки з приведення рядів динаміки до порівнянного вигляду зведемо в табл. 10.6.

Таблиця 10.6

Зімкнуті ряди відносних і абсолютних змін кількості осіб, притягнутих до адміністративної відповідальності, в районі за 1998–2004 рр.

Показник	Рік						
	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
1. Відносні ряди, %							
а) до зміни меж	86,4	90,9	95,3	100,0	—	—	—
б) після зміни меж	—	—	—	100,0	101,2	104,4	106,5
Зімкнутий ряд динаміки, одержаний способом розрахунку відносних показників динаміки, %	86,4	90,9	95,3	100,0	101,2	104,4	106,5
Зімкнутий ряд динаміки, одержаний способом перерахунку абсолютних показників, злочинів	2320	2440	2558	2686	2717	2804	2861

Добуті зімкнуті ряди динаміки дають змогу зробити дані про кількість осіб, притягнутих до адміністративної відповідальності, за різні роки порівнянними, з них видно, що кількість осіб, притягнутих до адміністративної відповідальності, в районі як в абсолютних, так і у відносних показниках систематично зростала.

Під впливом множини факторів рівні ряду динаміки соціально-правових явищ часто-густо сильно коливаються по періодах часу, причому тенденція розвитку затушовується, наочно не проявляється. В зв'язку з цим одним із основних завдань аналізу рядів динаміки є виявлення основної тенденції розвитку соціально-економічних явищ.

Під **загальною тенденцією динамічного ряду** розуміють тенденцію до зростання, зниження або стабілізації рівня будь-якого суспільного явища.

Виявлення тенденції в динамічних рядах дає змогу оцінити характер розвитку досліджуваного явища, визначити ефективність факторів, що формують основну тенденцію, встановити рівні досліджуваного явища на перспективу.

Виявлення основної тенденції зміни рівнів динамічного ряду передбачає її кількісне вираження, в деякій мірі вільної від випадкових причин. Це досягається шляхом абстрагування від індивідуальних, випадкових змін ознаки. Виявлення основної тенденції розвитку (тренда) називається у статистиці також **вирівнюванням часового ряду**, а прийоми виявлення основної тенденції **прийомами вирівнювання**. Вирівнювання дає змогу охарактеризувати особливості зміни у часі даного динамічного ряду в найбільш загальному вигляді як функцію часу, передбачаючи, що через час можна виразити вплив основних факторів.

У практиці економічного аналізу нерідкі випадки, коли загальна тенденція явища до зростання або зниження проявляється досить чітко. Наведені дані про динаміку кількості зареєстрованих злочинів (табл. 10.3) показують, що в динамічному ряду має місце загальна тенденція до зростання рівня злочинності. Проте для виявлення тенденції в рядах динаміки не досить одного візуального аналізу ряду, якщо його рівні через будь-які об'єктивні або випадкові причини істотно коливаються, то зростаючи, то знижуючись. Це затушовує, наочно не проявляє основну тенденцію розвитку явища. Наприклад, якщо злочинність якогось виду під впливом комплексу факторів, що діють в різних напрямках, дуже коливається по роках, то основна тенденція зміни злочинності може не проявлятися безпосередньо. В таких випадках для проявлення основної тенденції потрібно вдатися до спеціальних прийомів обробки динамічних рядів.

До таких прийомів відносяться укрупнення періодів, згладжування ряду динаміки способом ковзної середньої, вирівнювання ряду динаміки по середньому абсолютному приросту, середньому коефіцієнту зростання і способу найменших квадратів (аналітичне вирівнювання рядів динаміки).

Розглянемо на конкретних прикладах умови і техніку виявлення основної тенденції розвитку динамічних рядів найчастіше застосованими на практиці і наукових дослідженнях прийомів.

Одним з найпростіших прийомів виявлення тенденції розвитку є прийом **укрупнення періодів**. Суть його полягає в тому, що абсолютні або середні рівні ряду динаміки за короткі інтервали (рік, місяць, декаду, день тощо), що зазнають випадкових коливань, замінюють узагальнюючим (звичайно середнім) значенням за триваліший період (триріччя, п'ятиріччя тощо).

По суті спосіб укрупнення періодів являє собою типологічне групування рівнів ряду динаміки, тому при його застосуванні необхідно дотримуватись наукових основ побудови статистичних групувань.

При укрупненні періодів дуже важливо науково обгрунтовано і правильно виділити періоди часу для укрупнення. Періоди, що їх виділяють, мають бути однорідними в якісному відношенні і досить тривалими за часом, щоб відбулося погашення випадкових коливань явища.

Застосування цього прийому, як правило, пов'язується з використанням рівних за тривалістю періодів. Проте тривалість періодів може бути різною. Виділення нерівних періодів зумовлюється наявністю якісних специфічних періодів в розвитку того або іншого соціально-правового явища.

Покажемо порядок розрахунку укрупнених періодів, використовуючи дані про рівень (коефіцієнт) злочинності неповнолітніх на 1000 чоловік населення у віці 14–17 років (включно) за 15 років (табл. 10.7).

Обгрунтуємо тривалість укрупнених періодів для нашого прикладу. Аналіз вихідного ряду динаміки показує, що яких-небудь якісних періодів або періодичних коливань всередині динамічного ряду рівня злочинності за досліджуваний період не спостерігається.

Як показує аналіз вихідного ряду динаміки, рівень злочинності в області змінюється поступово, тенденція його зміни затушовується в окремі роки головним чином несистематичними випадковими коливаннями, які обумовлені суб'єктивними та іншими частковими умовами. Для встановлення тенденції зміни рівня злочинності неповнолітніх в області укрупнення періодів здійснено по п'ятиріччях. Зав-

дяки такому укрупненню взаємопогасяться випадкові фактори і виявиться загальна тенденція зміни злочинності.

Таблиця 10.7

Динаміка рівня злочинності неповнолітніх в області
за 1990–2004 рр.

Рік	Рівень злочинності, злочинів	Укрупнення періодів		Ковзна середня	
		суми по п'ятиріччях	середні по п'ятиріччях	суми ковзних по п'ятиріччях	середні ковзні по п'ятиріччях
1990	10,3	-	-	-	-
1991	12,1	-	-	-	-
1992	11,6	61,0	12,2	61,0	12,2
1993	13,1				
1994	13,9	-	-	65,6	13,1
1995	12,9	-	-	69,0	13,8
1996	14,1	-	-	72,3	14,5
1997	15,0	74,3	14,9	74,3	14,9
1998	16,4				
1999	15,9	-	-	78,3	15,7
2000	16,9	-	-	78,0	15,6
2001	13,8	-	-	79,6	15,9
2002	16,6	85,1	17,0	85,1	17,0
2003	17,8				
2004	20,0	-	-	-	-

Щоб отримати середні рівні по п'ятиріччях, спочатку знайдемо суми рівнів злочинності за кожне п'ятиріччя (1990–1994 рр., 1995–1999 рр., 2000–2004 рр.), а потім добути суми поділимо на кількість років в укрупненому періоді (п'ять).

Знайдені суми і середні запишемо центруючи їх на середину кожного п'ятиріччя (відповідно 1992 р., 1997 р. і 2002 р.).

В результаті проведеного укрупнення періодів ряду динаміки чіткіше проявляється тенденція зростання рівня злочинності за роки, що аналізуються. Так, добути результати показують, що від п'ятиріччя до п'ятиріччя рівень злочинності в області систематично зростав (з 12,2 злочина в 1990–1994 рр. до 17,0 злочинів в 2000–2004 рр., тобто на 4,8 злочина, або на 39,3%).

При укрупненні періодів число членів динамічного ряду дуже скорочується. Цей істотний недолік значною мірою усувається при використанні прийому вирівнювання динамічних рядів **способом ковзних середніх**.

Цей спосіб також ґрунтується на укрупненні періодів. Суть розрахунку ковзних середніх полягає в тому, що склад періоду безперервно і постійно змінюється – відбувається зсув на одну дату при збереженні постійного інтервалу періоду (триріччя, п'ятиріччя тощо).

Ковзна середня – це середня укрупнених періодів, створених послідовним виключенням кожного початкового рівня інтервалу і заміни його черговим наступним рівнем ряду. Таким чином, відбувається ніби ковзання періоду і отриманої середньої по динамічному ряду. Наприклад, при згладжуванні по триріччях

$$\bar{y}_1 = \frac{y_0 + y_1 + y_2}{3}; \bar{y}_2 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}; \bar{y}_3 = \frac{y_2 + y_3 + y_4}{3} \text{ і т.д.}$$

Цей прийом, як і попередній, ґрунтується на відомому теоретичному положенні про те, що в середніх величинах взаємно погашаються випадкові відхилення і виявляється типове, закономірне.

При виявленні тенденції прийомом ковзних середніх, так само як і при використанні прийому укрупнення періодів, одним з важливих питань є питання щодо тривалості періодів. Інтервал має бути досить великим і забезпечити взаємне погашення випадкових відхилень рівнів. Якщо в розвитку явища має місце циклічність (періодичність), то інтервал ковзання слід брати рівним тривалості циклу. Чим довше інтервал ковзання, тим більшою мірою вирівнюється ряд в результаті усереднення вихідних рівнів.

Покажемо порядок розрахунку ковзних середніх, використовуючи дані про рівень злочинності неповнолітніх (табл. 10.7).

Ковзні середні розрахуємо також по п'ятирічних періодах. Для розрахунку ковзних середніх підсумуємо рівні злочинності за перші п'ять років (1990–1994 рр.), а потім, опускаючи дані першого в ряду динаміки року, підсумуємо рівні злочинності за наступне п'ятиріччя (1991–1995 рр.) і т.д. Відбувається як би ковзання по ряду динаміки. Добути

суми поділимо на число років в періоді ковзання (п'ять), а обчислену середню віднесемо до середини періоду ковзання (в нашому прикладі третій рік кожного п'ятирічного періоду ковзання).

Розраховані ковзні середні показують стійку тенденцію зростання рівня злочинності неповнолітніх в області.

Ковзна середня згладжує варіацію рівнів, але не дає ряду динаміки, в якому всі вихідні рівні були б замінені вирівняними. Це пояснюється недоліком вирівнювання ряду способом ковзної середньої, при якому вирівняний ряд "скорочується" порівняно з вихідним на $(n-1):2$ члена з одного та другого кінця (під n розуміють число членів, з яких визначають ковзні середні).

Прагнення в процесі вирівнювання ряду замінити всі вихідні рівні вирівняними зумовлює застосування досконаліших прийомів вирівнювання рядів динаміки. До таких прийомів належить прийом вирівнювання рядів динаміки способом найменших квадратів або аналітичне вирівнювання.

Вирівнювання по цьому способу ґрунтується на припущенні, що зміни досліджуваного ряду динаміки можуть бути наближено виражені певним математичним рівнянням (апроксимуючою функцією), за яким і визначають вирівняні рівні динамічного ряду. Іншими словами, рівні ряду динаміки розглядаються як функція часу $\tilde{y}_t = f(t)$, де \tilde{y}_t - рівні динамічного ряду, визначені за відповідним рівнянням на момент часу t .

Аналітичне вирівнювання можна провести з використанням різних типів функцій: прямої лінії, параболи другого порядку, показникової кривої (експоненти), гіперболи тощо.

Рівняння, що виражає рівні ряду динаміки як деяку функцію часу t , називають **трендом**. Поняття про рівняння тенденції було введено в статистику англійським вченим Гукером у 1902 р. Він запропонував називати таке рівняння трендом (the trend).

Суть аналітичного вирівнювання динамічних рядів полягає в тому, що фактичні рівні ряду замінюються рядом рівнів, які змінюються плавно (теоретичними рівнями), обчисленими на основі певної кривої, вибраної в припущенні, що вона найточніше відображає загальну тенденцію зміни досліджуваного соціально-правового явища у часі.

Підбір найбільш придатної функції є важливим і відповідальним завданням, від якого в остаточному підсумку залежать результати вирівнювання. В основі вирішення його має бути змістовний теоретичний аналіз істотності досліджуваного явища і законів його розвитку.

Треба підібрати таку криву, яка б максимально близько проходила до фактичних рівнів. Добитися цього можна за умови, що сума квадратів відхилень фактичних рівнів (y) від розрахованих за рівнянням (\tilde{y}_t), буде мінімальною $\Sigma(y - \tilde{y}_t)^2 = \min$.

У практиці соціально-економічних досліджень найчастіше застосовують такий підхід: добирають кілька рівнянь, визначають їх параметри, а потім віддають перевагу тому, в якого $\Sigma(y - \tilde{y}_t)^2$ і коефіцієнт варіації найменші.

Наближено обґрунтувати рівняння, що відображає основну тенденцію, можна за допомогою побудови графіка (лінійної діаграми).

Вирівнювання динамічних рядів способом найменших квадратів, як і вирівнювання за допомогою інших прийомів, має здійснюватись в межах одноякісних періодів. Якщо в динамічному ряду є якісно специфічні періоди, то виявляти тенденцію доцільно в межах кожного з них.

Залежно від вихідних даних для вирівнювання рядів динаміки можуть бути вибрані різні типи кривих або пряма лінія. Аналіз динаміки суспільних явищ показує, що їхня зміна супроводжується постійними зростаючими і спадаючими абсолютними приростами, постійними темпами зростання і приросту, прискоренням або уповільненням, тобто їхнє вирівнювання слід здійснювати за рівнянням прямої лінії, параболи другого порядку або показникової кривої.

Основна тенденція (тренд) показує, як впливають систематичні фактори на рівні ряду динаміки, а відхилення фактичних рівнів від вирівняних характеризує варіацію рівнів, викликану індивідуальними особливостями кожного періоду. Випадкова (залишкова) варіація в рядах динаміки може бути виміряна способами, якими вимірюється звичайна варіація, наприклад за допомогою залишкового середнього квадратичного відхилення

$$\sigma_{\text{зал}} = \sqrt{\frac{\Sigma(y - \tilde{y}_t)^2}{n}},$$

$$\text{або коефіцієнта варіації } V = \frac{\sigma_{\text{зал}}}{\bar{y}} \cdot 100\%.$$

Показники варіації рівнів динамічних рядів можуть бути використані для оцінки правильності вибору апроксимуючої функції (рівняння) для вирівнювання, а також оцінки порівняльної стійкості окремих динамічних рядів. Очевидно, що чим показники варіації менше, тим вирівнювання здійснене точніше, а ряди динаміки стійкіші.

Вирівнювання динамічних рядів за рівнянням прямої лінії доцільно проводити тоді, коли для емпіричного ряду характерні більш або менш постійні ланцюгові абсолютні прирости, тобто тоді, коли рівні ряду змінюються приблизно в арифметичній прогресії.

Стосовно рядів динаміки аналітичне рівняння прямої лінії має вигляд:

$$\tilde{y}_t = a_0 + a_1 t,$$

де \tilde{y}_t - вирівняні значення рівнів динамічного ряду;

t - час, тобто порядкові номери періодів;

a_0 і a_1 - параметри рівняння шуканої прямої;

a_0 - початок відліку (економічного змісту не має);

a_1 - коефіцієнт регресії або пропорційності, який показує середній щорічний приріст (зниження) досліджуваного явища (тангенс кута нахилу прямої лінії до осі абсцис).

Параметри a_0 і a_1 шуканої прямої, що задовольняють вимозі способу найменших квадратів, знаходять розв'язуючи таку систему нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} \sum y = a_0 n + a_1 \sum t; \\ \sum yt = a_0 \sum t + a_1 \sum t^2, \end{cases}$$

де n - число рівнів ряду динаміки.

Техніка утворення системи рівнянь така. Перше рівняння дістають множенням всіх членів вихідного рівняння ($\tilde{y}_t = a_0 + a_1 t$) на коефіцієнт при a_0 (на одиницю) і підсумовування знайдених добутків. Щоб мати друге рівняння, всі члени вихідного рівняння необхідно помножити на коефіцієнт при a_1 (на t) і знайдені добутки підсумувати. Аналогічно будують систему нормальних рівнянь і для інших кривих (параболи другого порядку, гіперболи тощо).

Розрахунок параметрів рівняння (a_0 і a_1) можна значно спростити, якщо відлік часу (t) проводити так, щоб сума показників часу дорівнювала нулю ($\Sigma t = 0$). Цього досягають так. Рівень, що знаходиться в середині ряду динаміки, беруть за умовний початок відліку, або нульове значення. Для того, щоб сума показників часу дорівнювала нулю, умовні позначення дат потрібно давати так.

При непарному числі рівнів ряду динаміки для отримання $\Sigma t = 0$ рівень, що знаходиться в середині ряду, прирівнюють до нуля, а рівні, розташовані вище його позначають числами із знаком мінус 1, 2, 3 і т. д., а нижче числами із знаком плюс +1, +2, +3 і т. д.

При парному числі рівнів ряду динаміки рівні, що лежать вище середнього значення (воно знаходиться в середині між двома середніми датами), позначають натуральними числами із знаком мінус 1, 3, 5 і т. д., а рівні, що лежать нижче середнього значення натуральними числами із знаком плюс +1, +3, +5 і т. д.

За умовою, що $\Sigma t = 0$, система нормальних рівнянь спрощується і приймає вигляд:

$$\begin{cases} \sum y = a_0 n; \\ \sum yt = a_1 \sum t^2. \end{cases}$$

$$\text{Звідки } a_0 = \frac{\sum y}{n}; \quad a_1 = \frac{\sum yt}{\sum t^2}.$$

Розв'язуючи вихідну систему нормальних рівнянь способом визначників, параметри a_0 і a_1 можна обчислити за іншими формулами, які дають змогу дістати точніші результати за рахунок зведення до мінімуму помилки через заокруглення в обчисленнях параметрів:

$$a_0 = \frac{\sum y \sum t^2 - \sum yt \sum t}{n \sum t^2 - \sum t \sum t}; \quad a_1 = \frac{n \sum yt - \sum y \sum t}{n \sum t^2 - \sum t \sum t}.$$

Отже, для визначення параметрів a_0 і a_1 необхідно мати чотири суми: Σy ; Σyt ; Σt ; Σt^2 .

Якщо ж $\Sigma t = 0$, то тоді формули для обчислення параметрів a_0 і a_1 , спрощуються, набираючи такого вигляду:

$$a_0 = \frac{\sum y \sum t^2 - \sum yt \sum t}{n \sum t^2 - \sum t \sum t} = \frac{\sum y \sum t^2}{n \sum t^2} = \frac{\sum y}{n} = \bar{y};$$

$$a_1 = \frac{n \sum yt - \sum y \sum t}{n \sum t^2 - \sum t \sum t} = \frac{n \sum yt}{n \sum t^2} = \frac{\sum yt}{\sum t^2}.$$

Значення Σt можна обчислити за формулою:

$$\Sigma t = \frac{n(n+1)}{2}.$$

За умов, що $\Sigma t = 0$, значення Σt^2 можна відшукати за формулами:

$$\text{при парному числі рівнів } \Sigma t^2 = \frac{(n-1)n(n+1)}{3} = \frac{n(n-1)}{3};$$

$$\text{при непарному числі рівнів } \Sigma t^2 = \frac{(n-1)n(n+1)}{12} = \frac{n(n-1)}{12};$$

Для обчислення параметрів a_0 і a_1 можна користуватися формулами:

$$a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{t}; \quad a_1 = \frac{\sum (y - \bar{y})(t - \bar{t})}{\sum (t - \bar{t})^2}.$$

Порядок вирівнювання за рівнянням прямої лінії проілюструємо на прикладі ряду динаміки рівня (коефіцієнта) злочинності неповнолітніх на 1000 чоловік населення у віці 14–17 років (включно) в області за 1990–2004 рр. (табл. 10.8).

Обґрунтуємо вибір математичного рівняння для вирівнювання динамічного ряду. З даних таблиці видно, що зростання рівня злочинності відбувається рівномірно. Побудова лінійної діаграми (див. рис. 10.1) показує, що ламана крива за своєю формою близька до прямої лінії. Виходячи з цього, доцільніше цей ряд динаміки вирівнювати за рівнянням прямої лінії (лінійному тренду):

$$\tilde{y}_t = a_0 + a_1 t.$$

Параметри a_0 і a_1 шуканої прямої, яка задовольняє способу найменших квадратів, знайдемо розв'язавши таку систему нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} \sum y = a_0 n + a_1 \sum t; \\ \sum yt = a_0 \sum t + a_1 \sum t^2. \end{cases}$$

Отже, щоб визначити параметри рівняння, необхідно знайти такі чотири суми: $\sum y$; $\sum yt$; $\sum t$; $\sum t^2$.

Усі розрахунки зведемо в табл. 10.8.

Вирівнювання динамічного ряду проведемо двома способами звичайним і спрощеним (способом відліку від умовного початку),

І спосіб. Використовуючи отримані величини, розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 220,4 = 15a_0 + 120a_1 \\ 1910,4 = 120a_0 + 1240a_1 \end{cases}$$

Поділимо обидва рівняння на коефіцієнти при a_0 : перше рівняння на 15, а друге – на 120, а потім віднімемо від другого рівняння перше:

$$\begin{cases} 14,69 = a_0 + 8,00a_1; \\ 15,92 = a_0 + 10,33a_1; \end{cases}$$

$$1,23 = 2,33a_1.$$

Таблиця 10.8
Розрахункові дані для аналітичного вирівнювання динамічного ряду рівня злочинності способом найменших квадратів

Рік	Рівень злочинності, злочинів	1 спосіб			2 спосіб			Різниця між фактичним і вирівняним рівнем злочинності, злочинів $y - \tilde{y}_t$	Квадрат різниці $(y - \tilde{y}_t)^2$
		t	yt	t^2	Вирівняний рівень злочинності, злочинів \tilde{y}_t	t	yt		
1990	10,3	1	10,3	1	11,0	-7	-72,1	49	0,49
1991	12,1	2	24,2	4	11,5	-6	-72,6	36	0,36
1992	11,6	3	34,8	9	12,0	-5	-58,0	25	0,16
1993	13,1	4	52,4	16	12,6	-4	-52,4	16	0,25
1994	13,9	5	69,5	25	13,1	-3	-41,7	9	0,64
1995	12,9	6	77,4	36	13,6	-2	-25,8	4	0,49
1996	14,1	7	98,7	49	14,2	-1	-14,4	1	0,01
1997	15,0	8	120,0	64	14,7	0	0	0	0,09
1998	16,4	9	147,6	81	15,2	1	16,4	1	1,44
1999	15,9	10	159,0	100	15,8	2	31,8	4	0,01
2000	16,9	11	185,9	121	16,3	3	50,7	9	0,36
2001	13,8	12	165,6	144	16,8	4	55,2	16	9,00
2002	16,6	13	215,8	169	17,3	5	83,0	25	0,49
2003	17,8	14	249,2	196	17,9	6	106,8	36	0,01
2004	20,0	15	300,0	225	18,4	7	140,0	49	2,56
Разом	220,4	120	1910,4	1240	220,4	0	147,2	280	16,36

Звідси $a_1 = 0,5279 = 0,53$ злочину.

Визначимо a_0 , підставивши в одно з рівнянь значення a_1 :

$$220,4 = 15a_0 + 120 \cdot 0,53;$$

$$a_0 = \frac{220,4 - 63,2}{15} = \frac{157,2}{15} = 10,48 \text{ злочину}$$

Параметри рівняння можна визначити і за іншими, зручнішими, формулами:

$$a_0 = \frac{\sum y \sum t^2 - \sum yt \sum t}{n \sum t^2 - \sum t \sum t} = \frac{220,4 \cdot 1240 - 1910,4 \cdot 120}{15 \cdot 1240 - 120 \cdot 120} = 10,48 \text{ злочину};$$

$$a_1 = \frac{n \sum yt - \sum y \sum t}{n \sum t^2 - \sum t \sum t} = \frac{15 \cdot 1910,4 - 220,4 \cdot 120}{15 \cdot 1240 - 120 \cdot 120} = 0,53 \text{ злочину};$$

або $a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{t}$,

$$\text{де } \bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{220,4}{15} = 14,69; \quad \bar{t} = \frac{\sum t}{n} = \frac{120}{15} = 8;$$

$$a_1 = \frac{\overline{yt} - \bar{y} \cdot \bar{t}}{\bar{t}^2 - (\bar{t})^2}; \quad \overline{yt} = \frac{\sum yt}{n} = \frac{1910,4}{15} = 127,36;$$

$$\bar{t}^2 = \frac{\sum t^2}{n} = \frac{1240}{15} = 82,67; \quad (\bar{t})^2 = 8^2 = 64.$$

$$a_1 = \frac{\overline{yt} - \bar{y} \cdot \bar{t}}{\bar{t}^2 - (\bar{t})^2} = \frac{127,36 - 14,69 \cdot 8}{82,67 - 64,00} = \frac{9,84}{18,67} = 0,53 \text{ злочину};$$

$$a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{t} = 14,69 - 0,5287 \cdot 8 = 10,48 \text{ злочину}$$

Перевіримо правильність розв'язання системи рівнянь, виходячи з рівності:

$$\tilde{y} = a_0 + a_1 \bar{t}; \quad 14,69 = 10,48 + 0,5287 \cdot 8 = 14,69.$$

Таким чином, рівняння прямої лінії, що вирівнює ряд динаміки, має вигляд:

$$\tilde{y}_t = a_0 + a_1 t = 10,48 + 0,53t.$$

Коефіцієнт регресії $a_1 = 0,53$ злочину показує, що в середньому за досліджуваній період рівень злочинності щорічно підвищувався на 0,53 злочина. Коефіцієнт $a_0 = 10,48$ злочину значення вирівняного рівня злочинності для року в динамічному ряду, взятого за початок відліку (1997 р., коли $t = 0$).

Підставляючи в отримане рівняння значення ($t=1, 2, \dots, 15$), дістанемо вирівняні (розрахункові) значення рівня злочинності.

Наприклад,

$$\text{для } 1990 \text{ р. } \tilde{y}_{t=1} = 10,48 + 0,53 \cdot 1 = 11,0 \text{ злочинів};$$

$$\text{для } 1991 \text{ р. } \tilde{y}_{t=2} = 10,48 + 0,53 \cdot 2 = 11,5 \text{ злочину і т.д.}$$

Перевіримо правильність всіх розрахунків, порівнюючи суми фактичного і вирівняного рівнів злочинності:

$$\sum y = \sum \tilde{y}_t; \quad 220,4 = 220,4.$$

II спосіб. Для спрощення розрахунків використаємо спосіб відліку від умовного початку. Виразимо значення дат (t) у відхиленнях від дати, взятої за умовний початок (вона знаходиться в центрі ряду динаміки; $t = 0$ в 1997 р.; табл. 10.8). Система рівнянь спрощується, оскільки $\sum t = 0$:

$$\begin{cases} \sum y = n a_0; \\ \sum yt = a_1 \sum t^2. \end{cases}$$

Звідси

$$a_0 = \frac{\sum y}{n} = \frac{220,4}{15} = 14,69 \text{ злочину};$$

$$a_1 = \frac{\sum yt}{\sum t^2} = \frac{147,2}{280} = 0,53 \text{ злочину.}$$

Параметри рівняння можна знайти і за іншими, наведеними у першому способі, формулами розв'язання прикладу. Їхні значення будуть такими самими.

Рівняння лінійного тренду має вигляд:

$$\tilde{y}_t = a_0 + a_1 t = 14,69 + 0,53t.$$

Параметр $a_0 = 14,69$ злочину значення вирівняного рівня злочинності для центрального в динамічному ряду року, взятого за початок відліку. Для 1997 р. $t = 0$, тоді $\tilde{y}_t = 14,69 + 0,53 \cdot 0 = 14,69$ злочину. Параметр a_0 дорівнює середньому рівню злочинності в динамічному ряду $\bar{y} = \sum y : n = 220,4 : 15 = 14,69$ злочину. Коефіцієнт регресії $a_1 = 0,53$ злочину характеризує середнє щорічне збільшення рівня злочинності. Він має таке саме значення і зміст, що й при вирівнюванні першим способом.

Вирівняні (теоретичні) рівні коефіцієнта злочинності (\tilde{y}_t) обчислюють аналогічно тому, як це було зроблено в першому способі розрахунків.

Щоб оцінити ступінь наближення лінійного тренду до фактичних даних динамічного ряду, розрахуємо залишкове середнє квадратичне відхилення і коефіцієнт варіації. Для цього обчислимо відхилення фактичного рівня злочинності від вирівняного $(y - \tilde{y}_t)$, їх квадрати $(y - \tilde{y}_t)^2$ і їх суму $\sum (y - \tilde{y}_t)^2$ (гр.11 і 12 табл. 10.8).

Залишкове середнє квадратичне відхилення становитиме:

$$\sigma_{\text{зал}} = \sqrt{\frac{\sum (y - \tilde{y}_t)^2}{n}} = \sqrt{\frac{16,36}{15}} = \sqrt{1,09} = 1,04 \text{ злочину.}$$

Коефіцієнт варіації дорівнює:

$$V = \frac{\sigma}{\bar{y}} 100\% = \frac{1,04}{14,69} \cdot 100\% = 7,1\%.$$

Отже, коливання фактичного рівня злочинності навколо прямої лінії в середньому становить 1,04 злочину, або 7,1 %. Невеликий коефіцієнт варіації вказує на те, що рівняння прямої лінії досить точно відображує тенденцію зміни рівня злочинності в часі.

Водночас аналіз динамічного ряду рівня злочинності свідчить про те, що не зважаючи на значне коливання рівня злочинності по роках, чітко простежується тенденція його підвищення і прискорення приростів в останні роки. Тому логічно припустити, що досліджуваний ряд динаміки можна вирівнювати за рівнянням параболи другого порядку.

Вирівнювання рядів динаміки **за параболою другого порядку** здійснюється в тих випадках, коли зміна рівнів ряду відбувається приблизно рівномірним прискоренням або уповільненням ланцюгових абсолютних приростів.

Рівняння параболи другого порядку характеризується трьома параметрами:

$$\tilde{y}_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2,$$

де a_2 - показник щорічного прискорення (або уповільнення, якщо a_2 зі знаком мінус) абсолютного приросту рівнів ряду.

Параметри параболи другого порядку a_0 , a_1 і a_2 знаходять з такої системи нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} \sum y = a_0 n + a_1 \sum t + a_2 \sum t^2; \\ \sum yt = a_0 \sum t + a_1 \sum t^2 + a_2 \sum t^3; \\ \sum yt^2 = a_0 \sum t^2 + a_1 \sum t^3 + a_2 \sum t^4. \end{cases}$$

При $\sum t = 0$ і $\sum t^3 = 0$ система рівнянь значно спрощується, набуваючи такого вигляду:

$$\begin{cases} \sum y = a_0 n + a_2 \sum t^2; \\ \sum yt = a_1 \sum t^2; \\ \sum yt^2 = a_0 \sum t^2 + a_2 \sum t^4. \end{cases}$$

З цієї системи a_1 визначають елементарно з другого рівняння

$$a_1 = \frac{\sum yt}{\sum t^2},$$

а a_0 і a_2 з системи двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} \sum y = a_0 n + a_2 \sum t^2; \\ \sum yt^2 = a_0 \sum t^2 + a_2 \sum t^4. \end{cases}$$

Використовуючи дані попереднього прикладу про динаміку рівня злочинності неповнолітніх за 1990–2004 рр. (табл. 10.8), проведемо вирівнювання ряду за рівнянням параболи другого порядку способом найменших квадратів (табл. 10.9). Для спрощення розрахунків візьмемо $\sum t = 0$ і $\sum t^3 = 0$.

Щоб визначити параметри a_0 , a_1 і a_2 , рівняння параболи другого порядку, розв'яжемо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} \sum y = a_0 n + a_2 \sum t^2; \\ \sum yt = a_1 \sum t^2; \\ \sum yt^2 = a_0 \sum t^2 + a_2 \sum t^4. \end{cases}$$

Підставимо знайдені величини в систему рівнянь:

$$\begin{cases} 220,4 = 15a_0 + 280a_2; \\ 147,2 = 280a_1; \\ 4119,4 = 280a_0 + 9352a_2. \end{cases}$$

З другого рівняння визначимо значення a_1 :

$$a_1 = \frac{147,2}{280} = 0,5257 = 0,53 \text{ злочину.}$$

Розв'язавши перше і третє рівняння, матимемо значення параметрів a_0 і a_2 :

Таблиця 10.9

Розрахунок даних для вирівнювання динамічного ряду рівня злочинності за параболою другого порядку способом найменших квадратів

Рік	Рівень злочинності, злочинів	Умовне позначення часу	Розрахункові величини				Вирівняний рівень злочинності, злочинів	Різниця між фактичним і вирівняним рівнем злочинності, злочинів	Квадрат різниці
			t^2	t^4	yt	yt^2			
1990	10,3	-7	49	2401	-72,1	504,7	10,8	-0,5	0,25
1991	12,1	-6	36	1296	-72,6	435,6	11,5	0,6	0,36
1992	11,6	-5	25	625	-58,0	290,0	12,0	-0,4	0,16
1993	13,1	-4	16	256	-52,4	209,6	12,6	0,5	0,25
1994	13,9	-3	9	81	-41,7	125,1	13,1	0,8	0,64
1995	12,9	-2	4	16	-25,8	51,6	13,6	-0,7	0,49
1996	14,1	-1	1	1	-14,1	14,1	14,1	0	0
1997	15,0	0	0	0	0	0	14,7	0,3	0,09
1998	16,4	1	1	1	16,4	16,4	15,2	1,2	1,44
1999	15,9	2	4	16	31,8	63,6	15,7	0,2	0,04
2000	16,9	3	9	81	50,7	152,1	16,3	0,6	0,36
2001	13,8	4	16	256	55,2	220,8	16,8	-3,0	9,00
2002	16,6	5	25	625	83,0	415,0	17,4	-0,8	0,64
2003	17,8	6	36	1296	106,8	640,8	17,9	-0,1	0,01
2004	20,0	7	49	2401	140,0	980,0	18,7	1,3	1,69
Разом	220,4	0	280	9352	147,2	4119,4	220,4	0	15,42

$$\begin{cases} 220,4 = 15a_0 + 280a_2; \\ 4119,4 = 280a_0 + 9352a_2. \end{cases}$$

Для вирівнювання коефіцієнтів при a_0 розділимо перше рівняння на 15, а друге на 280. Дістанемо:

$$\begin{cases} 14,69 = a_0 + 18,67a_2; \\ 14,71 = a_0 + 33,40a_2. \end{cases}$$

Віднявши з другого рівняння перше, отримаємо:

$$0,02 = 14,73 a_2.$$

Звідси

$$a_2 = \frac{0,02}{14,73} = 0,0014 \text{ злочину.}$$

Визначимо значення параметру a_0 , підставивши значення a_2 в перше рівняння:

$$220,4 = 15a_0 + 280 \cdot 0,0014;$$

$$a_0 = \frac{220,4 - 0,39}{15} = \frac{220,01}{15} = 14,67 \text{ злочину.}$$

Розв'язання системи рівнянь дає таке значення шуканих параметрів рівняння (в злочинах):

$$a_0 = 14,67; a_1 = 0,53; a_2 = 0,0014.$$

Параметри рівняння параболи другого порядку можна визначити не тільки способом підстановки, а й безпосередньо користуючись формулами, що спрощують розрахунки:

$$a_0 = \frac{\sum y \sum t^4 - \sum yt^2 \sum t^2}{n \sum t^4 - \sum t^2 \sum t^2} = \frac{220,4 \cdot 9352 - 4119,4 \cdot 280}{15 \cdot 9352 - 280 \cdot 280} = 14,67 \text{ злочину;}$$

$$a_1 = \frac{\sum yt}{\sum t^2} = \frac{147,2}{280} = 0,5257 = 0,53 \text{ злочину;}$$

$$a_2 = \frac{n \sum yt^2 - \sum y \sum t^2}{n \sum t^4 - \sum t^2 \sum t^2} = \frac{15 \cdot 4119,4 - 220,4 \cdot 280}{15 \cdot 9352 - 280 \cdot 280} = 0,0014 \text{ злочину.}$$

Перевіримо правильність розрахунку параметрів, підставляючи в нормальне рівняння їхні числові значення:

$$\begin{cases} \sum y = a_0 n + a_2 \sum t^2; 220,4 = 15 \cdot 14,67 + 0,014 \cdot 280 = 220,4; \\ \sum yt = a_1 \sum t^2; 147,2 = 0,5257 \cdot 280 = 147,2; \\ \sum yt^2 = a_0 \sum t^2 + a_2 \sum t^4; 4119,4 = 14,67 \cdot 280 + 0,0014 \cdot 9352 = 4119,4. \end{cases}$$

Отже, параболічний тренд має такий вигляд:

$$\tilde{y}_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 = 14,67 + 0,53t + 0,0014t^2.$$

Пояснимо значення знайдених коефіцієнтів: $a_0 = 14,67$ злочину це початок відліку або вирівняне значення рівня злочинності для центрального в ряду динаміки року, взятого за початок умовного відліку (1997 р., коли $t = 0$); $a_1 = 0,53$ злочину середній щорічний приріст рівня злочинності; $a_2 = 0,0014$ злочину середнє щорічне прискорення приросту рівня злочинності.

Обчислимо за рівнянням параболічного згладжене значення рівня злочинності, підставляючи до рівняння замість t його числові значення (від 7 до +7; гр. 8 табл. 10.9):

$$\text{в } 1990 \text{ р. при } t = -7; \tilde{y}_t = 14,67 + 0,53(-7) + 0,0014(-7)^2 = 10,8 \text{ злочину};$$

$$\text{в } 1991 \text{ р. при } t = -6; \tilde{y}_t = 14,67 + 0,53(-6) + 0,0014(-6)^2 = 11,5 \text{ злочину і т. д.}$$

Перевіримо правильність розрахунків:

$$\sum y = \sum \tilde{y}_t; 220,4 = 220,4.$$

Як видно з розрахунків, вирівняні рівні коефіцієнта злочинності дуже близькі до фактичних рівнів. Отже, парабола другого порядку досить точно відображує тенденцію зміни рівня злочинності на досліджуваному відрізку часу.

Щоб оцінити ступінь наближення параболічного тренду до фактичних даних динамічного ряду, обчислимо залишкове середнє квадратичне відхилення і коефіцієнт варіації. Для цього визначимо відхилення $(y - \tilde{y}_t)$, квадрат відхилення $(y - \tilde{y}_t)^2$ та їхню суму $\sum (y - \tilde{y}_t)^2$ (гр. 9 і 10 табл. 10.9).

Залишкове середнє квадратичне відхилення становитиме:

$$\sigma_{\text{зал}} = \sqrt{\frac{\sum (y - \tilde{y}_t)^2}{n}} = \sqrt{\frac{15,42}{15}} = \sqrt{1,028} = 1,01 \text{ злочину.}$$

Коефіцієнт варіації дорівнює:

$$V = \frac{\sigma}{\bar{y}} \cdot 100\% = \frac{1,01}{14,69} \cdot 100\% = 6,9\%.$$

Отже, коливання фактичного рівня злочинності навколо параболі другого порядку в середньому становить 1,01 злочину, або 6,9 %.

Невеликий коефіцієнт варіації вказує на те, що параболічний тренд досить точно відображує тенденцію зміни рівня злочинності за досліджуваний відрізок часу.

Порівняємо результати вирівнювання динамічного ряду рівня злочинності за лінійним і параболічним трендом. Залишкове середнє квадратичне відхилення, добуто за рівнянням параболі другого порядку, дещо менше, ніж залишкове середнє квадратичне відхилення, отримане за рівнянням прямої лінії ($1,01 < 1,04$). Отже, парабола другого порядку точніше відтворює тенденцію зміни рівня злочинності у часі, чим пряма лінія.

Однак несуттєві відмінності в σ і V допускають можливість вирівнювання даного ряду динаміки і за лінійним трендом.

Для обґрунтування вибору вирівнювання ряду динаміки за лінійним або параболічним трендом можна оцінити істотність відмінностей між залишковими дисперсіями по критерієм F – Фішера за правилами, викладеними в розділі 8.

Фактичне дисперсійне відношення становитиме:

$$F_{\text{факт}} = \frac{\sigma^2_{\text{но прямій}}}{\sigma^2_{\text{но параболі}}} = \frac{1,09}{1,028} = 1,06.$$

Табличне значення критерія F при кількості ступенів свободи варіації і рівні значущості $\alpha = 0,05$ становитиме 3,74 (дод. 18).

Оскільки ($3,74 > 1,06$), то відмінності в залишкових дисперсіях є випадковими, відтак не можна віддати перевагу якому-небудь способу вирівнювання.

10.4. Факторний аналіз рядів динаміки

Важливе місце у вивченні динаміки суспільних явищ належить факторному аналізу, метою якого є дослідження впливу окремих факторів на кількісні і якісні зміни явища в часі. В аналізі динаміки соціально-правових явищ важливо насамперед оцінити залежність результативних показників від комплексу економічних і соціальних факторів.

Для здійснення факторного аналізу рядів динаміки статистика використовує ряд методів і прийомів, серед яких найбільш поширені такі: приведення рядів динаміки до однієї основи, порівняння кількох паралельних рядів результативних і факторних показників (одного результативного і одного факторного показників, одного результативного і кількох факторних показників, одного факторного і кількох результативних показників), укрупнення періодів, розчленування досліджуваної сукупності на якісно однорідні групи і підгрупи, тобто побудова простих і комбінаційних групувань, застосування дисперсійного і кореляційного методів аналізу та ін.

Застосування деяких з перелічених прийомів факторного аналізу рядів динаміки розглянемо на таких прикладах.

Найпростішим і розповсюдженим прийомом вивчення залежності результативних показників від факторів, що визначають тенденцію, є прийом **приведення рядів динаміки до однієї основи**. В табл. 10.10 наведена динаміка коефіцієнта злочинності (на 1000 чоловік населення) в районі за 1999–2004 рр.

Дані таблиці свідчать про те, що зростання рівня злочинності в районі супроводжувалося закономірним зростанням факторів злочинності (безробіття і вживання алкогольних напоїв).

Таблиця 10.10

Динаміка коефіцієнта злочинності та основних факторів злочинності в районі за 1999–2004 рр.

Рік	Коефіцієнт злочинності, злочинів	Рівень безробіття, %	Вжито алкоголю на душу населення, л/рік
1999	8,6	5,6	4,5
2000	8,5	5,7	4,6
2001	9,0	6,0	5,1
2002	9,5	6,2	5,4
2003	10,1	6,8	5,7
2004	10,4	7,3	5,8

Для проведення порівняльного аналізу трьох рядів динаміки і виявлення більш чіткої залежності результативного показника (коефіцієнта злочинності) від досліджуваних факторів здійснено перетворення вихідних рядів динаміки.

Потреба перетворення рядів динаміки зумовлена тим, що різноіменні показники наведених трьох паралельних рядів безпосередньо непорівняні між собою. Крім того, вони виражені в різних одиницях вимірювання.

Щоб привести потрібні ряди динаміки до порівняльного вигляду, використаємо прийом **приведення їх до однієї основи**. З цією метою розрахуємо базисні темпи зростання взявши за постійну базу порівняння рівні 1999 р. Добуті дані виразимо в процентах (табл. 10.11).

Порівняння темпів зростання рівня злочинності та її факторів свідать про випереджаючі темпи зростання факторів (в 1,3 раза) порівняно з темпами зростання рівня злочинності. Це означає, що в досліджуваному районі в динаміці рівень злочинності на одиницю факторів мав тенденцію до зниження.

Таблиця 10.11

Динаміка коефіцієнта злочинності і основних факторів злочинності в районі за 1999–2004 рр. (в % до 1999 р.)

Рік	Коефіцієнт злочинності	Рівень безробіття	Вжито алкоголю на душу населення
1999	100,0	100,0	100,0
2000	98,8	101,8	102,2
2001	104,6	107,1	113,3
2002	110,5	110,7	120,0
2003	117,4	121,4	126,7
2004	120,9	130,4	128,9

Зроблені за факторним аналізом рядів динаміки висновки доповнимо розрахунком коефіцієнтів випередження. Коефіцієнти випередження визначимо як відношення базисних темпів зростання за однакові відрізки часу по двох динамічних рядах.

Так, коефіцієнт випередження зростання безробіття порівняно із зростанням коефіцієнта злочинності становить 1,08 (1,304:1,209), зростання вживання алкоголю населенням району порівняно із зростанням коефіцієнта злочинності – 1,07 (1,289:1,209). Отже темпи зростання факторів злочинності – безробіття і вживання алкоголю – випереджали темпи зростання злочинності відповідно в 1,08 і 1,07 раза.

10.5. Інтерполяція і екстраполяція. Прогнозування суспільних явищ

Під час аналізу рядів динаміки доводиться стикатися з такими випадками, коли в рядах відсутні дані про їхні рівні за той або інший період. Такі дані можуть бути відсутні або всередині ряду, або спочатку чи в кінці його.

Приблизне визначення відсутніх рівнів усередині одноякісного періоду, коли відомі рівні, що лежать по обидві сторони невідомого, називають **інтерполяцією ряду динаміки**. Приблизне визначення невідомих рівнів, що лежать за його межами, тобто в майбутньому (або в минулому) називають **екстраполяцією ряду динаміки**. Відповідно екстраполявання може здійснюватися як у бік майбутнього (**перспективна екстраполяція**), так і у бік минулого (**ретроспективна екстраполяція**). По суті екстраполяція являє собою продовження ряду динаміки на основі виявленої закономірності зміни рівнів за досліджуваний відрізок часу.

Інтерполяцію (як і екстраполяцію) здійснюють виходячи з припущення, що зміни в межах періоду, що виражають закономірність

розвитку, відносно стійкі, тобто що ні виявлена тенденція, ні її характер не зазнали і не зазнають суттєвих змін у тому проміжку часу, рівні якого нам невідомі.

Щоб мати досить надійні результати обчислення відсутніх рівнів, інтерполяцію та екстраполяцію слід проводити в межах однорідних періодів, яким властива одна закономірність розвитку.

Інтерполяцію і екстраполяцію ряду динаміки можна проводити різними способами. Найпростішим способом є використання середніх характеристик досліджуваного ряду динаміки: середнього абсолютного приросту (при стабільних ланцюгових абсолютних приростах) і середнього коефіцієнту зростання (при стабільних темпах зростаннях). Однак визначення відсутніх рівнів ряду динаміки, і особливо при екстраполяції, найчастіше пов'язують з аналітичним вирівнюванням рядів способом найменших квадратів, який дає точніші результати. При цьому для виходу за межі періоду, для якого знайдена залежність від часу, досить продовжити значення незалежної змінної – часу.

Дослідження динаміки суспільних явищ і виявлення основної тенденції їх розвитку в минулому дають основу для визначення їхніх майбутніх розмірів.

Велику роль в плануванні має екстраполяція, яка дає змогу прогнозувати суспільні явища. Прогнозування є важливим етапом планової роботи.

Під прогнозуванням розуміють процес наукового виявлення можливих шляхів і результатів майбутнього розвитку суспільних явищ, оцінку показників, що характеризують ці явища для більш або менш віддаленого майбутнього.

Розрізняють **короткострокові** прогнози (від кількох днів до одного року), **середньострокові** (від одного року до 5 років) і **довгострокові** прогнози (понад 5 років).

Застосування екстраполяції для прогнозування базується на припущенні, що характер динаміки, тобто певна закономірність (тенденція) зміни досліджуваного явища, яка мала місце для певного періоду часу в минулому збережеться на обмеженому відрізку в майбутньому. Така екстраполяція справедлива, якщо система розвивається еволюційно в досить стабільних умовах. Чим крупніша система, тим більш імовірно збереження параметрів її зміни, звісно, на невеликий строк.

Користуючись цим методом слід пам'ятати, що можливості використання отриманих кривих для прогнозування надто обмежені, тому що зміна величини ознаки не є власне функцією часу. Крім того, закономірності і тенденції теперішнього часу не можна механічно перенести на майбутнє.

У зв'язку з цим прогнозуванню має передувати ретельний аналіз комплексу взаємопов'язаних факторів, які в майбутньому будуть визначати тенденцію розвитку досліджуваного суспільного явища.

Принципове значення у встановленні прогнозного рівня мають два питання. Перше стосується проблеми встановлення періоду завчасності (на яку віддаленість), на який можна визначати майбутній рівень ряду. На практиці виходять з такого положення. Якщо досліджуване явище зазнає суттєвих змін, то віддаленість слід брати невеликою (не більше двох-трьох років), якщо ж явище в часі змінюється незначно, то віддаленість прогнозованого рівня можна брати до п'яти років.

Друге питання стосується визначення минулого періоду, за яким повинна встановлюватися основна тенденція розвитку явища. За базу для прогнозування не можна, очевидно, брати короткий період, бо він для даного явища може виявитися не досить типовим через дію випадкових факторів. Недоцільно брати за основу і дуже тривалий період, оскільки умови розвитку явища в часі можуть істотно змінюватися. Отже, потрібно брати оптимальний (якісно однорідний), не дуже довгий і не дуже короткий ряд, для рівнів якого характерні однакові умови розвитку.

Розглянемо методику прогнозування по лінійному тренду на прикладі ряду динаміки рівня злочинності неповнолітніх (табл. 10.8).

Нагадаємо, що в результаті розв'язання рівняння прямої лінії знайдена така залежність рівня злочинності в часі:

$$\tilde{y}_t = a_0 + a_1 t = 10,48 + 0,53t,$$

де коефіцієнт регресії $a_1 = 0,53$ злочину характеризує середній щорічний приріст рівня злочинності за досліджуваний період. Використаємо знайдене рівняння лінійного тренду для прогнозування рівня злочинності на перспективу (2005–2007 рр.). Ряд динаміки обмежений 2004 роком, для якого $t = 15$. Для 2005–2007 рр. t відповідно дорівнює 16, 17 і 18.

Підставимо значення t в рівняння лінійного тренду і одержимо такий прогноз рівня злочинності по роках:

на 2005 р. ($t = 16$) $= 10,48 + 0,53 \cdot 16 = 19,0$ злочинів;

на 2006 р. ($t = 17$) $= 10,48 + 0,53 \cdot 17 = 19,5$ злочинів;

на 2007 р. ($t = 18$) $= 10,48 + 0,53 \cdot 18 = 20,0$ злочинів.

Отже, при збереженні діючої тенденції і стану економічних і соціальних факторів злочинність в районі зросте у 2007 році до 20,0 злочинів на 1000 чоловік неповнолітніх у віці 14–17 років (включно).

Зобразимо фактичний і вирівняний ряд динаміки рівня злочинності графічно (рис. 10.1).

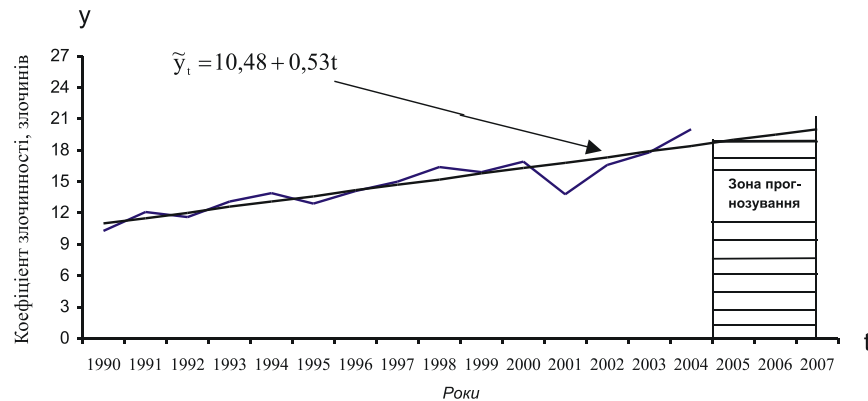


Рис. 10.1. Динаміка і прогнозування рівня злочинності в районі на 2005–2007 рр.

Відмітимо, що за графіком і рівнянням лінійного тренду прогноз рівня злочинності має збігатися.

10.6. Аналіз сезонних коливань

У практиці дослідження динамічних рядів часто доводиться мати справу з аналізом сезонних коливань рівнів рядів.

Сезонними коливаннями називають періодичні внутрішньорічні коливання, зумовлені зміною пори року. Такі коливання спостерігаються в багатьох галузях народного господарства. Вони характерні і для соціально-правових явищ. Наприклад, кількість вчинених дорожньо-транспортних пригод має явно виражений сезонний характер, у курортних регіонах „літня” злочинність буває в кілька разів вище злочинності „мертвого сезону” тощо.

При вивченні сезонних коливань перед статистикою ставляться такі завдання: по-перше, встановити загальну тенденцію зміни досліджуваного явища у часі, по-друге, охарактеризувати супінь сезонності, по-третє, виявити фактори, що викликають сезонні коливання.

Аналіз сезонних коливань дає змогу дати кількісну оцінку інтенсивності сезонних змін і розробити заходи щодо їх послаблення.

Щоб виявити сезонні коливання, аналізують місячні рівні ряду за один рік або кілька років.

Сезонні коливання в статистиці вимірюють за допомогою розрахунку спеціальних показників – **індексів сезонності**. Показники сезон-

ності у вигляді сезонної хвилі можуть бути розраховані різними способами. Способи розрахунку показників сезонності залежать від характеру основної тенденції ряду динаміки.

При стабільній тенденції у ряду динаміки, в якому внутрішньорічні коливання ознаки відбуваються навколо деякого постійного рівня, показники сезонності визначають як процентне відношення рівнів за кожний місяць до середньомісячного рівня за рік.

Однак місячні рівні за один рік можуть бути нетиповими через вплив випадкових причин. Тому на практиці індекси сезонності визначають за місячними даними за кілька років (три роки і більше). В цьому разі для кожного місяця встановлюють середню величину рівня за кілька років (наприклад, три роки), далі з них розраховують середньомісячний рівень для всього ряду. Після цього кожен середньомісячний рівень порівнюють з середньомісячним річним рівнем за кілька років, а знайдений результат перемножують на сто процентів.

Проведемо аналіз сезонності на такому прикладі.

Є дані по Житомирській області щодо динаміки дорожньо-транспортних пригод (ДТП) за три роки (табл. 10.12).

Сезонність ДТП охарактеризуємо за допомогою **індексів сезонності** – процентного відношення окремих рівнів до середнього рівня даного ряду динаміки. Місячні дані одного року через вплив випадкових факторів можуть бути нетиповими для виявлення тенденції розвитку. Тому визначимо індекси сезонності не за один рік, а в середньому за три роки. Спочатку для кожного місяця обчислимо середню величину ДТП за три роки, а потім визначимо середньорічний рівень для триріччя і знайдемо процентне відношення середніх для кожного місяця до середньорічного рівня (індекси сезонності).

Визначимо середні рівні ДТП для кожного місяця за формулою середньої арифметичної простої:

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n} = \frac{\sum y}{n},$$

де y – місячні рівні; n – число місяців.

$$\text{У січні } \bar{y}_1 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{n} = \frac{30 + 30 + 37}{3} = \frac{97}{3} = 32,3;$$

$$\text{у лютому } \bar{y}_2 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{n} = \frac{54 + 53 + 47}{3} = \frac{154}{3} = 51,3 \text{ і т.д.}$$

За обчисленими середньомісячними рівнями визначимо загальний середній рівень для трьох років (гр. 6 табл. 10.12):

$$\bar{y}_{заг} = \frac{\sum \bar{y}}{n} = \frac{32,3 + 51,3 + \dots + 63,3}{12} = \frac{7609}{12} = 63,4.$$

Таблиця 10.12

Динаміка ДТП в Житомирській області за 2000–2002 рр.

Місяць	Рік			Всього за три роки	У середньому за три роки \bar{y}_i	Показники сезонності $I_s = \frac{\bar{y}_i}{\bar{y}_{заг}} \cdot 100\%$
	2000	2001	2002			
I	30	30	37	97	32,3	50,9
II	54	53	47	154	51,3	80,9
III	39	39	51	129	43,0	67,8
IV	55	64	60	179	59,7	94,2
V	58	62	66	186	62,0	97,8
VI	69	67	60	196	65,3	103,0
VII	52	66	61	179	59,7	94,2
VIII	76	71	70	217	72,3	114,0
IX	74	77	62	213	71,0	111,9
X	96	98	96	290	96,7	152,5
XI	77	93	83	253	84,3	133,0
XII	91	40	59	190	63,3	99,8
Разом	771	760	752	2283	63,4	1200,0
У середньому	64,2	63,3	62,7	190,2	63,4	100,0

Значення загального середнього рівня можна визначити і за загальними даними за окремі роки:

$$\bar{y}_{заг} = \frac{\sum y}{n} = \frac{771 + 760 + 752}{36} = \frac{2283}{36} = 63,4,$$

або за даними про середні рівні за кожен рік:

$$\bar{y}_{заг} = \frac{\sum \bar{y}}{n} = \frac{64,2 + 63,3 + 62,7}{3} = \frac{190,2}{3} = 63,4.$$

Встановимо індекси сезонності ДТП в області (гр. 7 табл. 10.12):

$$\text{у січні } I_s = \frac{\bar{y}_{січня}}{\bar{y}_{заг}} \cdot 100\% = \frac{32,3}{63,4} \cdot 100\% = 50,9\%;$$

$$\text{у лютому } I_s = \frac{\bar{y}_{лютого}}{\bar{y}_{заг}} \cdot 100\% = \frac{51,3}{63,4} \cdot 100\% = 80,9\% \text{ і т.д.}$$

Оскільки середній індекс сезонності для всіх дванадцяти місяців має дорівнювати 100 %, то сума індексів повинна становити 1200.

Усі розрахунки зведемо в таблицю 10.12.

Зобразимо сезонну хвилю ДТП в області графічно, побудувавши лінійну діаграму (рис. 10. 2).

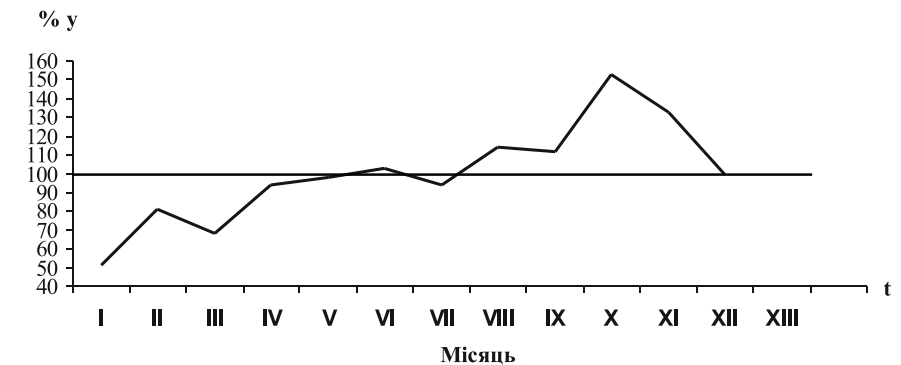


Рис. 10.2. Сезонна хвиля ДТП в області

На осі абсцис відкладемо шкалу показників часу, що відповідає кількості місяців ($n = 12$), на осі ординат побудуємо шкалу кількості ДТП в процентах і проведемо горизонтальну лінію, яка відповідає 100 %. На графік нанесемо індекси сезонності (у процентах).

З даних таблиці і графіка видно, що сезонність ДТП в області має чітко виражений характер: найбільша кількість ДТП припадає на осінь (вересень – листопад), а найменше – взимку (січень – лютий). Максимум ДТП припадає на жовтень, а мінімум – на січень.

Питання для самоконтролю

1. Що таке ряди динаміки і яка їх роль в статистичному аналізі?
2. З яких елементів складається ряд динаміки?
3. Які Ви знаєте види рядів динаміки? Наведіть приклади.
4. Яких умов треба дотримуватися при побудові рядів динаміки?
5. Який вид середніх величин використовується при розрахунку середнього рівня моментного і інтервального ряду динаміки?
6. Що таке базисні і ланцюгові показники динаміки?

7. Назвіть показники динаміки і розкажіть як вони розраховуються.
8. Як розраховується середній темп зростання в рядах динаміки?
9. Назвіть прийоми вирівнювання рядів динаміки.
10. У чому суть прийому приведення рядів динаміки до однієї основи і змикання рядів динаміки?
11. У чому суть прийому і які умови застосування прийому укрупнення періодів?
12. Охарактеризуйте прийоми вирівнювання рядів динаміки способом ковзної середньої.
13. Як здійснюється виявлення тенденції способом найменших квадратів?
14. Які правила підбору кривих для вирівнювання рядів динаміки?
15. Що таке інтерполяція і екстраполяція рядів динаміки, їх значення і застосування?
16. Як виконується прогноз на майбутнє за допомогою рівняння тренду?
17. Як виміряти сезонні коливання в рядах динаміки?
18. За наведеними даними розрахуйте базисні і ланцюгові показники динаміки: абсолютний приріст, темп зростання, процент приросту, абсолютне значення одного процента приросту. Обчисліть середній рівень ряду динаміки, середній абсолютний приріст. Зробіть висновки.

Рік	2000	2001	2002	2003	2004
Відсоток розкриття злочинів, %.	70,1	68,3	75,6	78,1	80,1