Частина III

Тема 1. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Розглянемо систему m лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \ldots & +a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \ldots & +a_{2n}x_n = b_2, \\ & \ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + & \ldots & +a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (1)$$

де число рівнянь m не обов'язково повинно дорівнювати числу змінних n.

Нагадаємо відомі означення.

1) **Розв'язком системи** (1) називається всяка сукупність значень змінних $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, ..., $x_n = \alpha_n$, яка задовольняє всі рівняння системи (1).

2) Система лінійних рівнянь називається **сумісною**, якщо вона має принаймні один розв'язок, і **несумісною**, якщо множина її розв'язків порожня.

3) Сумісна система лінійних рівнянь називається **означеною**, якщо вона має єдиний розв'язок, і **неозначеною**, коли вона має більше одного розв'язку. Фактично неозначена система має безліч розв'язків.

Дві системи лінійних рівнянь відносно одних і тих самих змінних називаються **рівносильними**, якщо множини їхніх розв'язків збігаються.

Раніше ми розглядали такі способи розв'язування систем лінійних рівнянь, як спосіб підстановки, спосіб алгебраїчного додавання, метод Крамера і матричний метод.

Загальним методом розв'язування систем лінійних рівнянь є метод виключення невідомих. Нехай $a_{ij} \neq 0$. Назвемо цей елемент **розв'язувальним** (**провідним**). Рядок, якому належить розв'язувальний елемент, називатимемо **розв'язувальним**

(провідним) рядком, а стовпчик, якому належить розв'язувальний елемент – **розв'язувальним (провідним) стовпчиком**.

Запишемо систему (1) у вигляді таблиці:

$$\begin{array}{cccc|c}
A_1 & A_2 & \dots & A_n & A_0 \\ \hline
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m
\end{array}.$$

Припустимо, що $a_{11} \neq 0$. Поділимо на нього всі елементи першого рядка. Користуючись першим рядком, виключимо змінну x_1 з решти рівнянь. Для цього помножимо перший рядок по черзі на $-a_{21}, -a_{31}, \dots, -a_{m1}$ і додамо відповідно до другого, третього, $\dots, m$-го рядка. Дістанемо таблицю

$$\begin{array}{cccc|c}
A_1 & A_2 & \dots & A_n & A_0 \\ \hline
1 & a'_{12} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\
0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} & b'_m
\end{array}.$$

Далі за розв'язувальний елемент візьмемо $a'_{22} \neq 0$ (якщо $a'_{22} = 0$, то міняємо місцями друге рівняння з якимось із наступних, щоб одержати рівносильну систему з $a'_{22} \neq 0$) і з його допомогою виключимо змінну x_2 з решти рівнянь (дістанемо нулі в другому стовпчику під a'_{22}):

$$\begin{array}{ccccc|c}
A_1 & A_2 & A_3 & \dots & A_n & A_0 \\ \hline
1 & a'_{12} & a'_{13} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\
0 & 1 & a''_{23} & \dots & a''_{2n} & b''_2 \\
0 & 0 & a''_{33} & \dots & a''_{3n} & b''_3 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & a''_{m3} & \dots & a''_{mn} & b''_m
\end{array}.$$

Якщо під час перетворень одержимо рядок, який складається з нулів, то його можна відкинути.

Продовжуємо процес далі. При цьому можливі такі ситуації: 1) після деякого кроку дістанемо рядок, у якому всі елементи зліва від вертикальної риски дорівнюють нулю, а елемент справа від цієї риски не дорівнює нулю (всі коефіцієнти при змінних деякого рівняння дорівнюють нулю, а вільний член відмінний від нуля), тоді дана система несумісна; 2)якщо такого рядка не дістанемо, то система сумісна.

У другому випадку матимемо систему

$$\begin{array}{cccccccc|c} A_1 & A_2 & A_3 & \dots & A_r & \dots & A_n & & A_0 \\ \hline 1 & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1r} & \dots & c_{1n} & & d_1 \\ 0 & 1 & c_{23} & \dots & c_{2r} & \dots & c_{2n} & & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & c_{3r} & \dots & c_{3n} & & d_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & c_{rn} & & d_r \end{array}.$$

Якщо $r = n$, то система має єдиний розв'язок. Щоб одержати цей розв'язок, необхідно в передостаннє рівняння замість x_n підставити його значення з останнього рівняння і знайти x_{n-1} і т.д. Якщо $r < n$, то перші r змінні $(x_1, x_2, \dots, x_r)$ виражаємо через решту $n - r$ змінних $(x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n)$

$$\begin{cases} x_1 = c'_{1,r+1}x_{r+1} + & \dots & +c'_{1n}x_n + d'_1, \\ x_2 = c'_{2,r+1}x_{r+1} + & \dots & +c'_{2n}x_n + d'_2, \\ & \dots & \\ x_r = c'_{r,r+1}x_{r+1} + & \dots & +c'_{rn}x_n + d'_r. \end{cases} \tag{2}$$

У системі (2) змінні $x_1, x_2, \dots, x_r$ виражені через $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$. Такий розв'язок системи називається **загальним розв'язком**, змінні x_1, $x_2, \dots, x_r$ називаються **базисними**, змінні x_{r+1}, $x_{r+2}, \dots, x_n$ – **вільними**. Надаючи вільним змінним довільних значень, діставатимемо частинні розв'язки.

Якщо вільним змінним надати нульових значень, то з системи (2) одержимо значення базисних змінних:

$$x_1 = d'_1, x_2 = d'_2, \dots, x_r = d'_r.$$

Одержаний розв'язок системи (1) називають **базисним розв'язком**. Кількість базисних розв'язків не перевищує C_n^m. Якщо один базисний розв'язок знайдено, то для відшукання наступного одну з небазисних змінних переводять у базисні, а відповідну базисну – у небазисні.

Базисний розв'язок, у якого всі базисні змінні невід'ємні, називається **допустимим базисним розв'язком**.

Зручно здійснювати зведення системи (1) до базисної форми

$$\begin{cases} x_1 + \qquad\qquad\qquad a'_{1,m+1}x_{m+1} + \ \dots \ + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ \qquad x_2 + \qquad\quad\ \ a'_{2,m+1}x_{m+1} + \ \dots \ + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \qquad\qquad \dots \qquad\qquad\qquad\quad \dots \\ \qquad\qquad\quad x_m + a'_{m,m+1}x_{m+1} + \ \dots \ + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases} \tag{3}$$

за допомогою методу Жордана-Гаусса.

Розглянемо детально даний процес. Нехай змінна x_s входить в r-е рівняння з коефіцієнтом $a_{rs} \neq 0$. Для того, щоб ця змінна стала базисною, поділимо r-е рівняння на a_{rs}, тобто зробимо коефіцієнт при x_s рівним одиниці, і результат віднімемо від кожного з решти рівнянь, множачи кожного разу його на відповідний коефіцієнт a_{is} (дістанемо x_s з коефіцієнтом 0).

Сукупність операцій, які утворюють крок жорданових виключень, називають **жордановим перетворенням**. Формули для розрахунку коефіцієнтів a'_{ij}, b'_i, $i \in \{1, ..., m\}$, $j \in \{1, ..., n\}$, нової системи, одержуваної у результаті одного кроку жорданових виключень з розв'язувальним елементом a_{rs}, мають вигляд:

$$a'_{rj} = \frac{1}{a_{rs}} a_{rj}, \quad b'_r = \frac{1}{a_{rs}} b_r;$$

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{is}a_{rj}}{a_{rs}}, \quad b'_i = b_i - \frac{a_{is}b_r}{a_{rs}}, \quad i \in \{1, \dots, m\}, i \neq r, \tag{4}$$
$$j \in \{1, \dots, n\}.$$

Обчислення за формулами (4) можна описати за допомогою **правила прямокутника**: щоб знайти

$$\begin{array}{ccc} a_{ij} & - - - - & a_{is} \\ | & & | \\ | & & | \\ | & & | \\ a_{rj} & - - - - & \boxed{a_{rs}} \end{array}$$

елемент a'_{ij}, треба від елемента a_{ij} відняти добуток коефіцієнтів, які стоять навпроти нього у провідних стовпчику і рядку, поділений на провідний елемент, розміщений по діагоналі від елемента a_{ij}.

Отже, послідовність дій, які виконуються на одному кроці жорданових перетворень у відповідності з формулами (4) така: *провідний елемент замінюється одиницею; усі решта елементів провідного рядка діляться на провідний елемент; усі решта елементів провідного стовпчика замінюються нулями; елементи, які не належать провідним рядку або стовпчику, обчислюються за правилом прямокутника.*

Для перетворення системи (1) у базисну систему (3) треба не більше ніж m кроків жорданових виключень. На першому кроці за провідний елемент вибирається довільний елемент $a_{rs} \neq 0$. На другому кроці провідний елемент вибирається у будь-якому рівнянні (крім r-го) серед ненульових коефіцієнтів системи, одержаної після першого кроку і т.д. Якщо в процесі виключень з'явиться рівняння, у якому ліва частина дорівнює нулю, а вільний член відмінний від нуля, – це ознака несумісності системи. Якщо ліва і права частини деякого рівняння перетворюються в нуль, то воно є лінійною комбінацією решти рівнянь, і його треба виключити з розгляду. Таким чином, у процесі жорданових виключень або встановлюється несумісність системи рівнянь, або система зводиться до еквівалентної базисної системи (3), звідки розв'язок одержується безпосередньо. Формули жорданових перетворень (4) застосовуються як увипадку $m = n$, так і у випадку $m < n$.

Приклад 1. Розв'язати систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 & & +x_4 & = -3, \\ 3x_1 - x_2 & -2x_3 & & = 1, \\ 2x_1 + x_2 & -2x_3 & -x_4 & = 4, \\ x_1 + 3x_2 & -2x_3 & -2x_4 & = 7 \end{cases}$$

і знайти всі її базисні розв'язки.

◁ Скористаємось методом Жордана-Гаусса, записуючи все за допомогою таблиці.

Базисні змінні	A_1	A_2	A_3	A_4	A_0	Базисний розв'язок
	$\boxed{1}$	-2	0	1	-3	
	3	-1	-2	0	1	
	2	1	-2	-1	4	
	1	3	-2	-2	7	

Базисні змінні	A_1	A_2	A_3	A_4	A_0	Базисний розв'язок
	1	-2	0	1	-3	
	0	5	-2	-3	10	
	0	5	-2	-3	10	
	0	5	-2	-3	10	
	1	-2	0	1	-3	Рівняння 3 і 4
	0	$\boxed{1}$	$-2/5$	$-3/5$	2	виключено
x_1	1	0	$\boxed{-4/5}$	$-1/5$	1	$(1;2;0;0)$
x_2	0	1	$-2/5$	$-3/5$	2	Загальний розв'язок: $x_1=1+\frac{4}{5}x_3+\frac{1}{5}x_4$, $x_2=2+\frac{2}{5}x_3+\frac{3}{5}x_4$.
x_3	$-5/4$	0	1	$1/4$	$-5/4$	
x_2	$\boxed{-1/2}$	1	0	$-1/2$	$3/2$	$(0;\frac{3}{2};-\frac{5}{4};0)$
x_3	0	$-5/2$	1	$\boxed{3/2}$	-5	
x_1	1	-2	0	1	-3	$(-3;0;-5;0)$
x_4	0	$-5/3$	$2/3$	1	$-10/3$	
x_1	1	$\boxed{-1/3}$	$-2/3$	0	$1/3$	$(\frac{1}{3};0;0;-\frac{10}{3})$
x_4	-5	0	4	1	-5	
x_2	-3	1	$\boxed{2}$	0	-1	$(0;-1;0;-5)$
x_4	1	-2	0	1	-3	
x_3	$-3/2$	$1/2$	1	0	$-1/2$	$(0;0;-\frac{1}{2};-3)$ ▷

У випадку існування матриці, оберненої до заданої, її можна знаходити за допомогою методу Жордана-Гаусса (наприклад, матрицю, обернену до матриці даної системи алгебраїчних рівнянь).

Приклад 2. Знайти матрицю A^{-1}, яка є оберненою до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\lhd$ Справа від вихідної матриці припишемо одиничну матрицю того самого порядку. До утвореної таким чином розширеної матриці застосуємо метод Жордана-Гаусса. У результаті перетворень на місці вихідної матриці дістанемо одиничну, а на місці одиничної – обернену матрицю.

A_1	A_2	A_3	E_1	E_2	E_3
$\boxed{1}$	2	3	1	0	0
2	3	4	0	1	0
3	1	2	0	0	1
1	2	3	1	0	0
0	$\boxed{-1}$	-2	-2	1	0
0	-5	-7	-3	0	0
1	0	-1	-3	2	0
0	1	2	2	-1	0
0	0	$\boxed{3}$	7	-5	1
1	0	0	$-2/3$	$1/3$	$1/3$
0	1	0	$-8/3$	$7/3$	$-2/3$
0	0	1	$7/3$	$-5/3$	$1/3$

Отже,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 & 1/3 \\ -8/3 & 7/3 & -2/3 \\ 7/3 & -5/3 & 1/3 \end{pmatrix}. \quad \rhd$$

Зауваження. Якщо в останній ітерації зліва не дістаємо одиничну матрицю, то це означає, що обернена матриця до даної не існує.

Вправи

О1. Розв'язати системи

$$1)\begin{cases} x_1+x_2-3x_3+2x_4=6,\\ x_1-2x_2\qquad -x_4=-6,\\ \qquad x_2+x_3+3x_4=16,\\ 2x_1-3x_2+2x_3\qquad =6;\end{cases} \quad 2)\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+x_4=1,\\ x_1-3x_2+x_3+x_4=0,\\ 4x_1-x_2-x_3-x_4=1,\\ 4x_1+3x_2-4x_3-x_4=2;\end{cases}$$

$$3)\begin{cases} 6x_1-5x_2+7x_3+8x_4=3,\\ 3x_1+11x_2+2x_3+4x_4=6,\\ 3x_1+2x_2+3x_3+4x_4=1,\\ x_1+x_2+x_3\qquad =0;\end{cases} \quad 4)\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=5,\\ x_1+x_2-x_3=0,\\ 4x_1-x_2+5x_3=3;\end{cases}$$

$$5)\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+x_4=1,\\ 8x_1+12x_2-9x_3+8x_4=3,\\ 4x_1+6x_2+3x_3-2x_4=3,\\ 2x_1+3x_2+9x_3-7x_4=3;\end{cases} \quad 6)\begin{cases} x_1-5x_2-8x_3+x_4=3,\\ 3x_1+x_2-3x_3-5x_4=1,\\ x_1\qquad -7x_3+2x_4=-5,\\ 11x_2+20x_3-9x_4=2;\end{cases}$$

$$7)\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4+2x_5=4,\\ x_2-x_3+x_4+4x_5=-3,\\ x_1+3x_2\qquad -3x_4\qquad =1,\\ x_1+x_2+x_3-3x_4+3x_5=1;\end{cases} \quad 8)\begin{cases} x_1+x_2-x_3+2x_4=2,\\ -x_1+x_2-3x_3-x_4=1,\\ 3x_1-x_2+5x_3+4x_4=3.\end{cases}$$

О2. Знайти декілька базисних розв'язків для кожної з систем рівнянь

$$1)\begin{cases} 2x_1+4x_2-x_3+3x_4=2,\\ 2x_2+3x_3-x_4=0,\\ 2x_1\qquad -3x_3+x_4=4;\end{cases} \quad 2)\begin{cases} -x_1+2x_2-x_3+3x_4=1,\\ 5x_1+4x_2+3x_3+x_4=2,\\ x_1+8x_2+x_3+7x_4=4;\end{cases}$$

$$3)\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=1,\\ 2x_1-x_2+x_3-2x_4=2,\\ 3x_1+x_2-x_3-x_4=0;\end{cases} \quad 4)\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4=2,\\ 2x_1-2x_2+x_3-4x_4=1,\\ x_1+x_2-x_3+x_4=2.\end{cases}$$

О3. Знайти матрицю A^{-1}, обернену до матриці A, якщо

$$1)\quad A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2\\ 3 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix};\quad 2)\quad A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix};$$

$$3)\quad A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&5\end{pmatrix};\quad 4)\quad A=\begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}.$$

С1. Знайти всі базисні розв'язки систем

$$1)\begin{cases}2x_1+x_2-3x_3-x_4=0,\\x_1+3x_2+x_3+x_4=1,\\3x_2-x_3-x_4=2;\end{cases}\qquad 2)\begin{cases}x_1-x_2-x_3+2x_4=1,\\2x_1-4x_2-x_3-x_4=3,\\x_1-x_2+x_3+2x_4=1.\end{cases}$$

С2. Знайти матриці, обернені до даних:

$$1)\quad A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix};\quad 2)\quad A=\begin{pmatrix}1&2&4&8\\0&1&2&4\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

С3. Розв'язати рівняння

$$\begin{pmatrix}1&2&0\\1&3&2\\-2&-4&-1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}3&1&0\\-1&6&3\\3&-3&1\end{pmatrix},$$

де X – невідома матриця розміру 3×3.

Домашнє завдання

Д1. Розв'язати системи

$$1)\begin{cases}x_1+x_2-x_3+x_4=4,\\2x_1-x_2+3x_3-2x_4=1,\\x_1-x_3+2x_4=6,\\3x_1-x_2+x_3-x_4=0;\end{cases}\qquad 2)\begin{cases}4x_1+2x_2+3x_3=-2,\\2x_1+8x_2-x_3=8,\\9x_1+x_2+8x_3=0;\end{cases}$$

$$3)\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=8,\\x_2+3x_3+x_4=15,\\4x_1+x_3+x_4=11,\\x_1+x_2+5x_4=23;\end{cases}\qquad 4)\begin{cases}x_1+5x_2-2x_3-3x_4=1,\\7x_1+2x_2-3x_3-4x_4=2,\\x_1+x_2+x_3+x_4=5,\\2x_1+3x_2+2x_3-3x_4=4,\\x_1-x_2-x_3-x_4=-2;\end{cases}$$

$$5)\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=2, \\ x_1-x_2-x_3=-2, \\ x_1+3x_2-x_3=-2; \end{cases} \qquad 6)\begin{cases} x_1-3x_2+2x_3+2x_4=1, \\ 3x_1-8x_2+8x_3+7x_4=3, \\ 2x_1-4x_2+8x_3+8x_4=0, \\ 2x_1-3x_2+10x_3+8x_4=1; \end{cases}$$

$$7)\quad\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3+2x_4=3, \\ 4x_1-3x_2+x_3+x_4=5, \\ 14x_1-9x_2+3x_3+2x_4=2, \\ 2x_1-x_2+x_3+x_4=1. \end{cases}$$

Д2. Знайти всі базисні розв'язки систем

$$1)\begin{cases} x_1+x_2-x_3-2x_4=1, \\ 2x_1-x_2+3x_3+x_4=2, \\ x_1-3x_2-x_3-x_4=0; \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} x_1-x_2-3x_3+x_4=0, \\ 4x_1+x_2+x_3-x_4=1, \\ 2x_1-x_2+3x_3+x_4=2; \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} x_1-x_2+3x_3 \qquad =4, \\ 2x_1-3x_2+2x_3+x_4=2, \\ -x_1+2x_2+x_3+2x_4=8; \end{cases} \qquad 4)\begin{cases} 2x_1+3x_2+5x_3+4x_4=6, \\ -2x_1+3x_2 \qquad -x_4=2, \\ x_1+2x_2+3x_3+2x_4=0. \end{cases}$$

Д3. Знайти обернені матриці до даних:

$$1)\quad A=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}; \quad 2)\quad A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix};$$

$$3)\quad A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}; \quad 4)\quad A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

Відповіді

О1. 1) (8;6;4;2); 2) $x_1=\frac{2}{5}+\frac{3}{5}x_3$, $x_2=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}x_3$, $x_4=\frac{7}{20}+\frac{13}{20}x_3$, $x_3\in\mathbb{R}$; 3) несумісна; 4) (-1;3;2); 5) $x_3=5-8x_1-12x_2$, $x_4=6-10x_1-15x_2$, $x_1\in\mathbb{R}$, $x_2\in\mathbb{R}$; 6) несумісна; 7) $x_1=-8-21x_5$, $x_2=3+x_4+7x_5$, $x_3=6+2x_4+11x_5$, $x_4\in\mathbb{R}$, $x_5\in\mathbb{R}$; 8) несумісна. **О2.** 1) $(\frac{11}{4};-\frac{3}{4};\frac{1}{2};0)$; $(\frac{9}{4};-\frac{1}{4};0;-\frac{1}{2})$; 2) $(0;\frac{1}{2};0;0)$, $(0;0;\frac{1}{2};\frac{1}{2})$; 3) $(-\frac{1}{2};0;0;-\frac{3}{2})$; 4) (1;0;-1;0), $(\frac{3}{2};0;0;\frac{1}{2})$, (0;0;-3;-1).

О3. 1) $\begin{pmatrix} 1/8 & 1/8 & -1/2 \\ 3/8 & -5/8 & 1/2 \\ -3/8 & 5/8 & 1/2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1/5 \\ 0 & 1 & -2/5 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

С1. 1) $(-\frac{3}{5}; \frac{3}{5}; -\frac{1}{5}; 0)$, $(-\frac{3}{7}; \frac{4}{7}; 0; -\frac{2}{7})$, $(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -1)$, (3;0;4;-6);
2) $(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 0; 0)$, $(0; -\frac{7}{9}; 0; \frac{1}{9})$, $(\frac{7}{5}; 0; 0; -\frac{1}{5})$.

С2. 1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

С3. $X = \begin{pmatrix} -25 & -5 & -10 \\ 14 & 3 & 5 \\ 9 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. **Д1.** 1) (1;2;3;4); 2) несумісна; 3) (1;2;3;4); 4) несумісна; 5) $(-1; 0; 1)$; 6) $x_1 = 6 - 8x_3$, $x_2 = 1 - 2x_3$, $x_4 = -1$, $x_3 \in \mathbb{R}$; 7) несумісна. **Д2.** 1) $(\frac{18}{17}; \frac{5}{17}; 0; \frac{3}{17})$, $(\frac{9}{10}; \frac{1}{4}; \frac{3}{20}; 0)$, $(0; 0; 1; -1)$; 2) $(\frac{5}{16}; -\frac{17}{32}; \frac{9}{32}; 0)$, $(\frac{5}{16}; 0; \frac{9}{32}; \frac{17}{32})$; 3) $(12; 8; 0; 2)$, $(-2; 0; 2; 2)$, $(0; \frac{8}{7}; \frac{12}{7}; 2)$; 4) $(56; 38; -44; 0)$, $(0; 38; -44; 28)$.

Д3. 1) $\begin{pmatrix} -7/3 & 2 & -1/3 \\ 5/3 & -1 & -1/3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$;

3) не існує; 4) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1/11 \\ 0 & 1 & -2/11 \\ 0 & 0 & 1/11 \end{pmatrix}$.

Тема 2. Математичні моделі економічних задач

При складанні математичної моделі конкретної економічної задачі, треба виділити сталі та змінні величини, які характеризують дану задачу, а далі у вигляді рівнянь чи нерівностей записати всі обмеження та співвідношення, що притаманні цій задачі.

Оскільки не існує універсального методу складання математичної моделі конкретної економічної задачі, то обмежимося деякими порадами щодо послідовності роботи з економічною задачею.

Вивчивши уважно текст задачі, необхідно систематизувати всі дані та подати їх у вигляді певних таблиць. При цьому слід ввести змінні, якими ми можемо керувати (розпоряджатися), позначивши їх літерами x, y, z, ... або цими літерами з одним чи двома індексами. Крім того, треба ввести цільову функцію f, яку досліджуватимемо на екстремум.

Співвідношення між змінними й обмеженнями на ці величини треба записати у вигляді рівнянь або нерівностей, слідкуючи за тим, щоб усі дані задачі були враховані та правильно сформована цільова функція.

Якщо за змістом задачі деякі змінні повинні бути невід'ємними або цілими, то і це треба відобразити в математичній моделі.

У загальному випадку математична модель задачі складається з обмежень у вигляді рівнянь та нерівностей і цільової функції. Якщо всі обмеження і цільова функція є лінійними, то матимемо задачу **лінійного програмування**, а коли принаймні одне з обмежень або цільова функція є нелінійними, то задача є **нелінійною**.

Приклад 1. На трьох складах C_1, C_2, C_3 є відповідно 90, 70, 50 тонн борошна, яке треба перевезти у крамниці K_1, K_2, K_3, K_4 відповідно у кількості 80, 60, 40, 30 тонн. Скласти оптимальний план перевезення борошна, якщо вартість перевезення 1 тонни в крамниці K_1, K_2, K_3, K_4 зі складу C_1 дорівнює відповідно 2, 1, 3, 2 гривням, зі складу C_2 – 2, 3, 3, 1 гривням, зі складу C_3 – 3, 3, 2, 1 гривням.

$\triangleleft$ Побудуємо математичну модель даної задачі. Для цього позначимо через x_{ij} кількість борошна в тоннах, яка перевозиться з i-го складу в j-у крамницю, а через f – сумарні транспортні витрати. Подамо умови задачі у вигляді таблиці

Склади	Крамниці				Запаси
	K_1	K_2	K_3	K_4	борошна
C_1	2 x_{11}	1 x_{12}	3 x_{13}	2 x_{14}	90
C_2	2 x_{21}	3 x_{22}	3 x_{23}	1 x_{24}	70
C_3	3 x_{31}	3 x_{32}	2 x_{33}	1 x_{34}	50
Потреби у борошні	80	60	40	30	210

Кількість борошна, яка вивозиться зі складу C_1 в крамниці, дорівнює $x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}$. Оскільки вивозиться все борошно, то

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=90.$$

Аналогічно для складів C_2 і C_3 маємо:

$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=70,$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=50.$$

Оскільки потреби кожної з крамниць за умовою задачі повністю задовольняються кількістю борошна, одержаного зі складів C_1, C_2, C_3, то:

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}=80,$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}=60,$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}=40,$$
$$x_{14}+x_{24}+x_{34}=30.$$

Природним є те, що $x_{ij}\geq 0$, $i\in\{1,2,3\}$, $j\in\{1,2,3,4\}$, бо зворотні перевезення відсутні. Отже, змінні x_{ij} задовольняють систему рівнянь і нерівностей

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=90, \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=70, \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=50, \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}=80, \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=60, \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=40, \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=30; \end{cases} \tag{1}$$

$$x_{ij} \geq 0,\ i \in \{1,2,3\},\ j \in \{1,2,3,4\}. \tag{2}$$

Сукупність рівнянь (1) і нерівностей (2) називається **системою обмежень** даної задачі.

Очевидно, що сумарні транспортні витрати

$$f = 2x_{11} + x_{12} + 3x_{13} + 2x_{14} + 2x_{21} + 3x_{22} + 3x_{23} + x_{24} +$$

$$+3x_{31} + 3x_{32} + 2x_{33} + x_{34}. \tag{3}$$

Функція f є **цільовою функцією**, а кожний розв'язок системи обмежень (1), (2) – **допустимим** планом задачі. Задача лінійного програмування полягає у відшуканні на множині допустимих планів такого плану, який реалізував би мінімум цільової функції f. Такий допустимий план називається **оптимальним**. $\triangleright$

Приклад 2. Для виготовлення трьох видів виробів Π_1, Π_2, Π_3 використовують чотири типи обладнання S_1, S_2, S_3, S_4. Затрати часу на обробку одного виробу для кожного з видів обладнання, часовий ресурс обладнання та прибуток від реалізації виробу даного типу наведено у таблиці:

Тип обладнання	Затрати часу на обробку одного виробу			Загальний фонд робочого часу обладнання
	Π_1	Π_2	Π_3	
S_1	2	4	5	120
S_2	1	8	6	280
S_3	7	4	5	240
S_4	4	6	7	360
Прибуток	10	14	12	

Визначити, скільки виробів і якого виду слід виготовити, щоб прибуток від їх реалізації був максимальним. Скласти математичну модель.

$\triangleleft$ Припустимо, що буде вироблено x_j одиниць виробів виду Π_j, $j \in \{1,2,3\}$. Тоді для виробництва такої кількості виробів треба затратити $2x_1 + 4x_2 + 5x_3$ верстато-годин обладнання S_1. Оскільки загальна сума робочого часу верстатів даного типу не може перевищувати 120, то повинна виконуватись нерівність

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 120.$$

Аналогічні міркування щодо можливого використання обладнання S_2, S_3 і S_4 типів приводять до таких нерівностей:

$$\begin{aligned} x_1 + 8x_2 + 6x_3 &\leq 280, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 &\leq 240, \\ 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 &\leq 360. \end{aligned}$$

Кількість виробів не може бути від'ємною, тому $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$.

Очевидно, що прибуток від реалізації всієї продукції складе

$$f = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3$$

грошових одиниць.

Таким чином, ми одержали математичну модель задачі:

$$f = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 \to \max;$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 120, \\ x_1 + 8x_2 + 6x_3 \leq 280, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 240, \\ 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \leq 360; \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

Оскільки цільова функція f і обмеження є лінійними, то ми маємо задачу лінійного програмування.

Метод розв'язування даної задачі буде описано пізніше. ▹

Вправи

Для пропонованих нижче задач треба лише скласти математичні моделі. Методи їх розв'язування будуть описані у наступних темах.

О1. У механічному цеху встановлено два верстати, на кожному з яких можна обробляти будь-яку з деталей A_1, A_2, A_3. У таблиці наведено норми затрат часу на обробку кожним з верстатів однієї деталі відповідного виду, вартість однієї години роботи верстата і добовий фонд робочого часу верстатів

Верстати	Норми затрат часу на обробку однієї деталі			Вартість однієї год роботи	Фонд робочого часу
	A_1	A_2	A_3		
P_1	$0,3$	$0,1$	$0,2$	30	20
P_2	$0,5$	$0,2$	$0,4$	20	22

Знайти, скільки деталей кожного виду слід обробити на кожному з верстатів, щоб загальні витрати на обробку деталей були найменшими при такому добовому завданні виготовлення деталей: A_1 – 30 од., A_2 – 80 од., A_3 – 70 од.

<u>О2.</u> Треба утворити суміш, яка містить три хімічні речовини A_1, A_2, A_3. Відомо, що дана суміш повинна містити речовини A_1 не менше 6 одиниць, речовини A_2 не менше 8 одиниць, речовини A_3 не менше 12 одиниць. Речовини A_1, A_2, A_3 містяться в трьох видах продуктів Π_1, Π_2, Π_3 у концентраціях, що визначаються таблицею

	Хімічні речовини		
Продукти	A_1	A_2	A_3
Π_1	2	1	3
Π_2	1	2	4
Π_3	3	$1,5$	2

Вартість одиниці продукту Π_1 складає 2 гривні, одиниці продукту Π_2 - 3 гривні, одиниці продукту Π_3 – 2,5 гривні. Суміш повинна бути такою, щоб вартість використаних продуктів була найменшою.

<u>О3.</u> У пунктах A_1 і A_2 розміщені цегельні заводи, а в пунктах B_1 і B_2 – кар'єри, які постачають глину. Потреби заводів у глині не більші, ніж продуктивність кар'єрів. Відомо, скільки глини потрібно кожному заводу і скільки її добувають у кожному з кар'єрів. Відома також вартість перевезення 1 тонни глини з кожного кар'єру до заводів. Як спланувати постачання заводів глиною, щоб витрати були найменшими, якщо всі необхідні дані наведено в таблиці

Постачальник	Споживач		Запаси
	A_1	A_2	
B_1	2	6	70
B_2	5	3	30
Потреби	40	50	

О4. У студенській їдальні для виготовлення бутербродів трьох типів використовуються чотири види продуктів, загальні обсяги яких і норми витрат зазначені в таблиці. Відомий також прибуток, одержуваний їдальнею від реалізації однієї партії бутербродів кожного виду.

Вид продукту	Норми витрат продуктів (кг) на одну партію бутербродів типу			Наявність продуктів (кг)
	$Б_1$	$Б_2$	$Б_3$	
S_1	4	3	1	42
S_2	2	5	4	56
S_3	3	6	2	38
S_4	5	7	3	40
Прибуток (грн.)	5	7	8	

Спланувати випуск партій бутербродів у таких кількостях, щоб загальний прибуток їдальні був максимальним. При цьому слід урахувати, що бутербродів першого типу необхідно приготувати не менше, ніж 4 партії.

О5. Для виготовлення сплаву з міді, олова і цинку як сировину використовують два сплави A і B цих же металів, що відрізняються складом і вартістю. Дані про ці сплави наведено в таблиці

Компоненти сплаву	Вміст компонентів у %	
	A	B
Мідь	10	10
Олово	10	30
Цинк	80	60
Вартість 1 кг	4	6

Одержаний сплав повинен містити не більше 2 кг міді, не менше 3 кг олова, а вміст цинку може складати від 7,2 до 12,8 кг.

Знайти кількість x_j, $j \in \{1,2\}$, сплавів кожного виду, які забезпечують одержання нового сплаву з мінімальними витратами на сировину.

О6. Стандартом передбачено, що октанове число бензину А-76 повинно бути не нижчим від 76, а вміст сірки в ньому – не більше 0,3 %. Для виготовлення такого бензину на заводі використовується суміш з чотирьох компонентів. Дані про ресурси компонентів, їхня собівартість і їхнє октанове число, а також про вміст сірки подані в таблиці

Характеристики марки бензину	Компоненти			
	1	2	3	4
Октанове число	68	72	80	90
Вміст сірки, %	$0,35$	$0,35$	$0,3$	$0,2$
Ресурси, т	700	600	500	300
Собівартість, гр.од./т	40	45	60	90

Визначити, скільки тонн кожного компонента треба використати для одержання 1000 тонн бензину А-76, щоб його собівартість була мінімальною.

С1. Ткацька фабрика має N_1 верстатів типу A_1 і N_2 верстатів типу A_2. Верстати можуть виробляти три види тканин: T_1, T_2 і T_3, але з різною продуктивністю, а саме a_{ij} – продуктивність верстата A_i при виробництві тканини типу T_j, $i \in \{1,2\}$, $j \in \{1,2,3\}$.

Кожний метр тканини виду T_j дає прибуток c_j, $j \in \{1, 2, 3\}$. Фабрика за контрактом повинна виробляти за місяць не менше b_j метрів тканини T_j, $j \in \{1, 2, 3\}$. Кількість метрів кожного виду тканини не повинна перевищувати відповідно β_1, β_2 і β_3 метрів. Крім того, усі без винятку верстати повинні бути завантажені. Треба так організувати виробництво тканин T_j, $j \in \{1, 2, 3\}$, щоб сумарний місячний прибуток від їхньої реалізації був максимальним.

C2. Скласти оптимальний план (мінімум капітальних витрат) забудови мікрорайону міста житловими будинками трьох різних типів. Наявність квартир у кожному з типових будинків відображає таблиця

Типи квартир	Кількість квартир за типом будинку		
	першим	другим	третім
2	50	50	60
3	30	100	50
4	120	60	40

Відома вартість одного будинку: першого типу – 8040 тис. грн., другого типу – 8220 тис. грн., третього типу – 6020 тис. грн.

Демографічний склад майбутнього населення мікрорайону зумовлює необхідність того, щоб було не менше, ніж 750 двокімнатних квартир, 1700 трикімнатних квартир і 450 чотирикімнатних квартир.

C3. На будівництво дороги необхідно завезти 20 000 м^3 різних матеріалів з трьох кар'єрів A_1, A_2 і A_3, запаси яких відповідно дорівнюють 8 000 м^3, 9 000 м^3 і 10 000 м^3. Для навантаження матеріалів виділено 60 машино-змін, і при цьому використовуються екскаватори з продуктивністю 250 м^3 за зміну в кар'єрах A_1 і A_2 і 500 м^3 за зміну в кар'єрі A_3.

Транспортні витрати на перевезення матеріалів такі: для перевезення 10 000 м^3 з кар'єру A_1 треба 1 000, з кар'єру A_2 – 1 350, з кар'єру A_3 – 1 700 автомобіле-змін. Скласти план перевезень, який забезпечує мінімальні транспортні витрати.

Домашнє завдання

Д1. Кондитерська фабрика для виробництва трьох видів карамелі A_1, A_2, A_3 використовує три типи сировини S_1, S_2, S_3. Норми витрат сировини кожного типу на виробництво 1т карамелі даного виду наведені в таблиці

Тип сировини	Норми витрат сировини на 1т карамелі			Загальна кількість сировини
	A_1	A_2	A_3	
S_1	$0,8$	$0,5$	$0,6$	800
S_2	$0,4$	$0,4$	$0,3$	600
S_3	–	$0,1$	$0,1$	120
Прибуток	108	112	126	

У даній таблиці вказано також загальну кількість сировини кожного типу, яка може бути використана фабрикою, а також наведено прибуток від реалізації 1т карамелі даного виду.

Знайти план виробництва карамелі, який забезпечує максимальний прибуток від її реалізації.

Д2. При відгодівлі кожна тварина щоденно повинна одержувати не менше 60 од. поживної речовини A_1, не менше 50 од. речовини A_2 і не менше 12 од. речовини A_3. Вказані поживні речовини містяться у трьох видах корму P_1, P_2, P_3. Вміст одиниць поживної речовини в 1кг кожного з видів корму наведено у таблиці:

Поживні речовини	Вміст поживної речовини в 1кг корму		
	P_1	P_2	P_3
A_1	1	3	4
A_2	2	4	2
A_3	1	4	3

Скласти добовий раціон, який забезпечує одержання необхідної кількості поживних речовин при мінімальних грошових витратах, якщо ціна 1кг корму P_1 складає 9 грн., корму P_2 – 12 грн. і корму P_3 – 10 грн.

Д3. Дві торговельні бази забезпечують чотири крамниці борошном. Відомі транспортні витрати на перевезення борошна від кожного постачальника кожному споживачеві, коп/кг (див. таблицю)

Резерви постачальників, кг	Обсяг потреб споживачів, кг			
	900	800	1200	1100
1700	3	4	2	3
2200	2	5	1	4

Визначити план закріплення крамниць за базами при мінімальних транспортних витратах.

Д4. Неохідно розподілити посівну площу під пшеницю та ячмінь таким чином, щоб одержати максимальну кількість продукції у вартісному вираженні, знаючи врожайність, ціну, витрати ресурсів механізованої і ручної праці на 1га посівної площі, а також обсяг наявних ресурсів:

Вид ресурсу	Норми витрат на 1га посівної площі		Загальна кількість ресурсів
	Пшениця	Ячмінь	
Механізована праця, год/га	$1,6$	$1,8$	4000
Ручна праця, год/га	$2,4$	$2,0$	6000
Урожайність, ц/га	20	25	
Ціна 1 ц продукції	6	4	

Д5. З листового прокату необхідно вирізати заготовки двох типів A і B для виготовлення 60 штук виробів. Для одного виробу треба три заготовки типу A і вісім заготовок типу B. Розміри листа, а також розміри і конфігурація заготовок дозволяють вибрати чотири раціональні варіанти розкрою листа (див. таблицю)

Заготовки	Варіанти розкрою				Потреби
	1	2	3	4	
A	4	3	2	1	180
B	0	4	6	10	480
Відходи	12	5	3	0	

Скласти такий план розкрою, щоб одержати необхідну кількість заготовок кожного типу при мінімальних сумарних відходах.

Відповіді

О1. $f = 9x_{11} + 3x_{12} + 6x_{13} + 10x_{21} + 4x_{22} + 8x_{23} \to \min;$

$$\begin{cases} 0,3x_{11} + 0,1x_{12} + 0,2x_{13} \le 20, \\ 0,5x_{21} + 0,2x_{22} + 0,4x_{23} \le 22, \\ x_{11} + x_{21} = 30, \\ x_{12} + x_{22} = 80, \\ x_{13} + x_{23} = 70; \end{cases}$$

$x_{ij} \ge 0, \quad x_{ij}$ – цілі, $\quad i \in \{1,2\}, \quad j \in \{1,2,3\}.$

О2. $f = 2x_1 + 3x_2 + 2,5x_3 \to \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 6, \\ x_1 + x_2 + 1,5x_3 \ge 8, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \ge 12; \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad j \in \{1,2,3\}.$

О3. $f = 2x_{11} + 6x_{12} + 5x_{21} + 3x_{22} \to \min;$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} \le 70, \\ x_{21} + x_{22} \le 30, \\ x_{11} + x_{21} = 40, \\ x_{12} + x_{22} = 50; \end{cases}$$

$x_{ij} \ge 0, \quad i \in \{1,2\}, \quad j \in \{1,2\}.$

О5. $f = 4x_1 + 6x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} 0,1x_1 + 0,1x_2 \le 2, \\ 0,1x_1 + 0,3x_2 \ge 3, \\ 0,8x_1 + 0,6x_2 \ge 7,2, \\ 0,8x_1 + 0,6x_2 \le 12,8; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

О6. $f = 40x_1 + 45x_2 + 60x_3 + 90x_4 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1000, \\ 68x_1 + 72x_2 + 80x_3 + 90x_4 \ge 76 \cdot 1000, \\ 0,35x_1 + 0,35x_2 + 0,3x_3 + 0,2x_4 \le 0,3 \cdot 1000, \\ x_1 \le 700, \quad x_2 \le 600, \quad x_3 \le 500, \quad x_4 \le 300; \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j \in \{1,2,3,4\}.$$

С1. $f = c_1(a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21}) + c_2(a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22}) + $
$+ c_3(a_{13}x_{13} + a_{23}x_{23}) \to \max;$

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21} \ge b_1, \\ a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22} \ge b_2, \\ a_{13}x_{13} + a_{23}x_{23} \ge b_3; \end{cases} \quad \begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21} \le \beta_1, \\ a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22} \le \beta_2, \\ a_{13}x_{13} + a_{23}x_{23} \le \beta_3; \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = N_1, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = N_2; \end{cases} \quad x_{ij} \ge 0, \quad i \in \{1,2\}, \; j \in \{1,2,3\}.$$

С3. $f = 1000x_1 + 1350x_2 + 1700x_3 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 40x_1 + 40x_2 + 20x_3 \le 60, \\ x_1 \le 0,8; \quad x_2 \le 0,9; \quad x_3 \le 1; \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j \in \{1,2,3\}.$$

Д5. $f = 12x_1 + 5x_2 + 3x_3 \to \min;$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \ge 180, \\ 4x_2 + 6x_3 + 10x_4 \ge 480; \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j \in \{1,2,3,4\}.$$

Тема 3. Різні форми запису задачі лінійного програмування. Перехід від однієї форми запису до іншої

Задачі лінійного програмування можуть бути записані в загальній формі, симетричній або канонічній.

Розглянемо задачу лінійного програмування, задану в **загальній** формі запису: максимізувати (мінімізувати) функцію

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1}$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i \in \{1, \dots, m_1\}; \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, \quad i \in \{m_1 + 1, \dots, m_2\}; \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i \in \{m_2 + 1, \dots, m\}; \tag{4}$$

$$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, \dots, n_1\}; \tag{5}$$

$$x_j - \text{довільні}, \quad j \in \{n_1 + 1, \dots, n\}. \tag{6}$$

Якщо задача лінійного програмування має вигляд

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max; \tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i \in \{1, \dots, m\}; \tag{8}$$

$$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, \dots, n\}, \tag{9}$$

то
її називають **симетричною** (**стандартною**) задачею лінійного програмування. При цьому m і n можуть бути довільними.

Задача лінійного програмування називається **канонічною** (**основною**), якщо вона має вигляд

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max; \tag{10}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i \in \{1, \ldots, m\}; \tag{11}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \ldots, n\}. \tag{12}$$

Тут $m < n$, бо інші випадки не є важливими.

При використанні тих або інших методів розв'язування задач лінійного програмування доводиться здійснювати переходи від однієї форми запису задачі до іншої. Робиться це за допомогою відповідних перетворень, зміст яких ми опишемо нижче.

Нерівності (2) множенням лівих і правих частин на (-1) можна перетворити в нерівності (3) і навпаки. Якщо в задачі деяка змінна довільного знаку, то її подають у вигляді різниці двох невід'ємних змінних. Наприклад, довільну змінну x_k заміняють на $(x'_k - x''_k)$, де $x'_k \geq 0$ і $x''_k \geq 0$. У випадку, коли деяка змінна $x_p \leq 0$, то її заміняють на $x'_p = -x_p$, яка вже є невід'ємною.

Задачу мінімізації можна формально замінити на задачу максимізації, бо мінімальне значення функції f дорівнює максимальному значенню функції $(-f)$, взятому з протилежним знаком, тобто $\min f = -\max(-f)$.

Перетворення нерівностей у рівняння і рівнянь у нерівності проводиться на основі того, що будь-якому розв'язку $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ нерівності

$$a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n \leq b \tag{13}$$

відповідає розв'язок $(\beta_1, \ldots, \beta_n, \beta_{n+1})$ рівняння

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + x_{n+1} = b \tag{14}$$

і нерівності

$$x_{n+1} \geq 0, \tag{15}$$

і, навпаки, кожному розв'язку $(\beta_1, \ldots, \beta_n, \beta_{n+1})$ рівняння (14) і нерівності (15) відповідає єдиний розв'язок $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ нерівності (13).

Змінна x_{n+1} називається **додатковою** або **балансуючою**. Її введення не змінює цільову функцію.

Приклад 1. Звести до канонічної форми запису задачу:

$$f = 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 12, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 \geq 6, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 8; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \leq 0.$$

◁ На змінні x_1 і x_2 накладено умови невід'ємності. Змінну x_3 замінюємо на $x_3' = -x_3$, де $x_3' \geq 0$. Змінну x_4 замінюємо різницею невід'ємних змінних $x_4' \geq 0, x_4'' \geq 0$, а саме: $x_4 = x_4' - x_4''$. Крім того, введемо дві додаткові змінні, щоб перетворити нерівності в рівняння. Для цього введемо $x_5 \geq 0$ і $x_6 \geq 0$. Далі вихідну задачу запишемо у канонічній формі

$$f = 2x_1 - 3x_2 - x_3' - 2x_4' + 2x_4'' \to \max;$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 4x_3' + x_4' - x_4'' + x_5 = 12, \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3' - 2x_4' + 2x_4'' - x_6 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3' + 3x_4' - 3x_4'' = 8; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3' \geq 0, x_4' \geq 0, x_4'' \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0. \quad \triangleright$$

Приклад 2. Звести до симетричної форми запису задачу, задану в канонічній формі:

$$f = -x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 & & = 4, \\ \quad 2x_2 + 4x_3 & -x_4 & = 8, \\ \quad x_2 + x_3 & & +x_5 = 6; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \ldots, 5\}.$$

$\triangleleft$ Замінюємо функцію f на $(-f) = x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5$. Оскільки змінні x_1, x_4, x_5 невід'ємні, то, виключивши їх з системи обмежень, дістанемо систему нерівностей:

$$\begin{cases} -x_2 - 2x_3 \leq 4, \\ -2x_2 - 4x_3 \leq -8, \\ x_2 + x_3 \leq 6. \end{cases}$$

Якщо знайти x_1, x_4 і x_3 з системи обмежень

$$x_1 = 4 + x_2 + 2x_3,$$
$$x_4 = -8 + 2x_2 + 4x_3,$$
$$x_5 = 6 - x_2 - x_3;$$

і підставити їх у цільову функцію, то одержимо
$-f = (4 + x_2 + 2x_3) + 2x_2 - x_3 - (-8 + 2x_2 + 4x_3) - 2(6 - x_2 - x_3) =$
$= 3x_2 - x_3$.

Отже, маємо таку симетричну форму нашої задачі:

$$-f = 3x_2 - x_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} -x_2 - 2x_3 \leq 4, \\ -2x_2 - 4x_3 \leq -8, \\ x_2 + x_3 \leq 6; \end{cases}$$

$$x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \quad \triangleright$$

Приклад 3. Задачу лінійного програмування

$$f = 6{,}5x_1 - 7{,}5x_3 + 23{,}5x_4 - 5x_5 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 12, \\ 2x_1 \qquad - x_3 + 12x_4 - x_5 = 14, \\ x_1 + 2x_2 \qquad + 3x_4 - x_5 = 6; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \ldots, 5\},$$

записати в симетричній формі.

◁ Зробимо даний перехід за допомогою зменшення числа змінних. Для цього систему обмежень запишемо у базисній формі, скориставшись методом Жордана-Гаусса:

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_0
$\boxed{1}$	3	1	4	−1	12
2	0	−1	12	−1	14
1	2	0	3	−1	6
1	3	1	4	−1	12
0	−6	−3	4	$\boxed{1}$	−10
0	−1	−1	−1	0	−6
1	−3	−2	8	0	2
0	−6	−3	4	1	−10
0	$\boxed{-1}$	−1	−1	0	−6
1	0	1	11	0	20
0	0	3	10	1	26
0	1	1	1	0	6

Отже, система обмежень набула базисного вигляду

$$\begin{cases} x_1 \quad + x_3 + 11x_4 \qquad = 20, \\ \qquad 3x_3 + 10x_4 + x_5 = 26, \\ \quad x_2 + x_3 + x_4 \qquad = 6. \end{cases}$$

Звідси випливає, що

$$\begin{gathered} x_3 + 11x_4 \leq 20, \\ 3x_3 + 10x_4 \leq 26, \\ x_3 + x_4 \leq 6, \end{gathered}$$

оскільки $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_5 \geq 0$.

Виразимо базисні змінні x_1, x_2 і x_5 через вільні змінні x_3 і x_4:

$$\begin{gathered} x_1 = 20 - x_3 - 11x_4, \\ x_5 = 26 - 3x_3 - 10x_4, \\ x_2 = 6 - x_3 - x_4; \end{gathered}$$

і підставимо в цільову функцію:
$f = 6,5(20 - x_3 - 11x_4) - 7,5x_3 + 23,5x_4 - 5(26 - 3x_3 - 10x_4) = x_3 + 2x_4$.

Отже, маємо симетричний вигляд задачі:

$$f = x_3 + 2x_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_3 + 11x_4 \le 20, \\ 3x_3 + 10x_4 \le 26, \\ x_3 + x_4 \le 6; \end{cases}$$

$$x_3 \ge 0, x_4 \ge 0. \quad \triangleright$$

Вправи

О1. Записати в симетричній формі задачу

$$f = x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 4, \\ 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 8, \\ x_2 + x_3 + x_5 = 6; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, \ldots, 5\}.$$

О2. Задачу

$$f = 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 \le 2, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 \le 3, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 \le 6, \\ x_1 + x_4 - 5x_5 \ge 8; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, \ldots, 5\}$$

звести до канонічного вигляду.

О3. Сформульовані нижче задачі лінійного програмування звести до канонічного вигляду.

$$1)\ f = -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 - x_6 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad + 2x_4 \qquad + x_6 \geq 6, \\ \qquad 6x_2 \qquad\qquad + x_5 + x_6 \leq 9, \\ \qquad 4x_2 - 8x_3 + 2x_4 \qquad + 6x_6 = 4; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \ldots, 6\};$$

2) $f = x_1 + x_2 + x_3 \to \max;$
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 5; \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \leq 0;$$

3) $f = 2x_1 - x_2 + 3x_3 \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 4, \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 = 8; \end{cases}$$
$$x_1 \leq 0;$$

4) $f = -4x_1 + 3x_2 - 5x_3 \to \min;$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -7, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 8; \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_3 \leq 0;$$

5) $f = x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 \to \max;$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 \geq 2, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \leq 3; \end{cases}$$
$$x_j \leq 0, \ j \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

O4. Звести пропоновані задачі до симетричного (стандартного) вигляду:

1) $f = 4x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \qquad = 4, \\ x_1 \qquad + x_3 + x_4 \quad = 8, \\ -5x_1 \quad + x_3 \quad + x_5 = 5; \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \ldots, 5\};$$

2) $f = x_1 - x_3 + 5x_5 \to \min;$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \quad + 2x_5 = 7, \\ x_1 \qquad\quad - x_4 + x_5 = 1, \\ -x_1 \quad - x_3 \quad + 3x_5 = 4; \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \ldots, 5\};$$

3) $f = x_2 - x_3 + x_4 \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 - \frac{1}{2}x_2 + 2x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 5; \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \ldots, 4\};$$

4) $f = 6x_1 + 8x_3 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 \quad + \frac{5}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 10, \\ 2x_1 + \frac{1}{6}x_2 + x_3 \quad = 12; \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \ldots, 4\}.$$

C1. Звести до канонічного вигляду задачі лінійного програмування

1) $f = 2x_1 - x_2 + x_3 \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 5, \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 \geq 3; \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0;$$

2) $f = -2x_1 - x_2 + 4x_3 \to \min;$
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 \leq 5, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 \geq 6; \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \leq 0;$$

3) $f = 2x_1 + 3x_2 - x_3 \to \max;$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \le 8, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 5; \end{cases}$$
$$x_2 \ge 0, x_3 \ge 0;$$

4) $f = 2x_1 + x_2 - x_3 \to \max;$
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 \le 5, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \ge 6; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

С2. Подати пропоновані задачі лінійного програмування у симетричній (стандартній) формі:

1) $f = x_1 - 5x_2 + 16x_3 - 5x_4 - x_5 \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 4, \\ x_1 + 2x_3 + x_5 = 10; \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, \ldots, 5\};$$

2) $f = -x_1 + x_2 - x_3 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 9; \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, \ldots, 4\};$$

3) $f = x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 7x_5 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 3x_5 = 2, \\ \frac{1}{4}x_2 - x_3 + \frac{1}{4}x_4 + x_5 = 3, \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_4 + x_5 = 6; \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, \ldots, 5\};$$

4) $f = 42x_1 + 17x_2 + 29x_3 + 36x_4 + 4x_5 \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 + 2x_5 = 200, \\ x_1 + x_2 = 250, \\ x_2 + 2x_4 + x_5 = 200; \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, \ldots, 5\}.$$

Домашнє завдання

Д1. Записати у канонічній формі задачі лінійного програмування

1) $f = -2x_1 - x_2 + x_3 \to \min;$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 6x_3 \le 12, \\ 3x_1 + 5x_2 - 12x_3 = 14, \\ -3x_1 + 6x_2 + 4x_3 \le 18; \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, j \in \{1, 2, 3\};$$

2) $f = 4x_1 - x_2 + 3x_3 \to \max;$
$$\begin{cases} 4x_1 + x_3 \le 16, \\ 6x_1 - 2x_2 - x_3 \ge 6; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0;$$

3) $f = 3x_1 + x_2 - x_3 \to \min;$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 8, \\ -4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 5; \end{cases}$$
$x_1 \le 0, x_3 \ge 0;$

4) $f = x_1 + x_2 + x_3 \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6; \end{cases}$$

5) $f = 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 \to \max;$
$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 \ge 3, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 \ge 6, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 \le 24; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, j \in \{1, 2, 3\};$

6) $f = -x_1 + x_2 - x_3 \to \min;$
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 \le 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 8; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \le 0, x_3 \ge 0.$

Д2. Подати в симетричній (стандартній) формі задачі лінійного програмування

1) $f = 7x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 9x_5 \to \max;$
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 9, \\ 3x_1 - x_2 + x_5 = 12; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, \ldots, 5\};$

2) $f = 2x_1 + x_2 + 8x_3 \to \max;$
$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 + 2x_3 = 12, \\ 6x_1 + 5x_3 - x_4 = 30; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, \ldots, 4\};$

3) $f = 2x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ 7x_1 - 5x_2 + \frac{1}{2}x_3 + 5x_4 = 12; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, \ldots, 4\};$

4) $f = x_3 - x_5 \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_3 - x_4 - 2x_5 = 3, \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + 4x_5 = 6, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + x_5 = 15; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, \ldots, 5\};$

5) $f = -3x_1 - x_2 + 4x_4 + x_6 \to \min;$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_4 = 13, \\ x_1 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_4 + x_6 = 26; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, \ldots, 6\};$

6) $f = 2x_4 + 3x_6 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 4, \\ x_2 + x_4 + x_6 = 5, \\ x_3 + x_4 + 3x_6 = 8, \\ x_4 + x_5 + 3x_6 = 9; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, \ldots, 6\}.$

Тема 4. Властивості задач лінійного програмування. Графічний (градієнтний) метод розв'язування задач лінійного програмування

Розглянемо задачу лінійного програмування, яка записана в канонічній формі:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max; \tag{1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases} \tag{2}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \ldots, m\}. \tag{3}$$

Запишемо дану задачу у векторній формі. Нехай $X = (x_1, x_2, ..., x_n), C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$,

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Тоді задача (1) – (3) набуде вигляду

$$f = CX \to \max; \tag{4}$$

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_nA_n = A_0; \tag{5}$$

$$X \geq 0, \tag{6}$$

де CX – скалярний добуток.

Вектор $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, координати якого задовольняють умови (2), (3), називається **допустимим розв'язком** (**планом**).

План $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, при якому цільова функція f набуває максимального значення, називається **оптимальним**.

Опорним планом задачі (4) – (6) називається план $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, якщо система векторів A_j, які стоять у (2) при $x_j > 0$, є лінійно незалежною. Оскільки вектори A_j є m-вимірними, то з означення опорного плану випливає, що число його додатних компонент не може бути більшим, ніж m. Якщо в опорному плані число додатних компонент дорівнює m, то такий план називається **невиродженим**, а в протилежному випадку – **виродженим**.

Доводиться, що *множина планів канонічної задачі лінійного програмування є опуклою*, якщо вона не порожня. Її називають **многогранником розв'язків**. Виявляється, що кожна вершина цього многогранника визначає опорний план. Якщо цільова функція обмежена зверху, то в одній з вершин многогранника розв'язків (одному з опорних планів) значення цільової функції є максимальним. Якщо ж максимального значення цільова функція набуває більше, ніж в одній вершині, то це саме значення набувається нею у будь-якій точці, яка є опуклою лінійною комбінацією даних вершин.

Вершину многогранника розв'язків, у якій цільова функція набуває максимального значення, можна знайти досить просто, якщо задача записана у симетричній формі й містить дві змінні або вона записана в канонічній формі й містить не більше двох вільних змінних, тобто $n - r \leq 2$, де n – число змінних, r – ранг матриці, складеної з коефіцієнтів системи обмежень задачі.

Алгоритм **графічного методу** розв'язування задачі лінійного програмування розглянемо для задачі

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max; \tag{7}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m; \end{cases} \tag{8}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \tag{9}$$

Для знаходження розв'язку задачі (7) – (9) поступають так:

1) будують прямі, рівняння яких одержуються заміною в обмеженнях (8), (9) знаків нерівностей на знаки рівностей;

2) знаходять напівплощини, які визначаються кожним з обмежень задачі;

3) будують многокутник розв'язків;

4) рисують нормальний вектор $\vec{n} = (c_1, c_2)$ прямої $c_1x_1 + c_2x_2 = h$ (h – деяка стала), яка проходить через многокутник розв'язків;

5) пересувають пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = h$ (лінію рівня) у напрямку вектора $\vec{n}$ і в результаті – або знаходять точку (точки), в якій цільова функція набуває максимального значення, або встановлюють необмеженість зверху даної функції на многокутнику розв'язків;

6) знаходять координати точки максимуму функції f і обчислюють її значення в цій точці.

Приклад 1. Процес виготовлення двох видів виробів заводом вимагає, по-перше, послідовної обробки на токарних і фрезерних верстатах і, по-друге, витрат двох видів сировини: сталі й кольорових металів. Дані про витрати кожного ресурсу на одиницю продукції та загальні запаси ресурсів наведено в таблиці

Матеріали та обладнання	Витрати на один виріб A_1	Витрати на один виріб A_2	Ресурси
Сталь(кг)	10	70	320
Кольорові метали(кг)	20	50	420
Токарні верстати (верстато-години)	300	400	6200
Фрезерні верстати (верстато-години)	200	100	3400

Прибуток від реалізації одиниці виробу A_1 – 3 тис.грн., одиниці виробу A_2 – 8 тис.грн. Знайти такий план випуску продукції, який забезпечить максимальний прибуток за умови, що час роботи фрезерних верстатів буде використано повністю.

$\triangleleft$ Побудуємо математичну модель задачі. Позначимо через x_1 число виробів виду A_1, через x_2 – число виробів виду A_2. На виготовлення всієї продукції піде $(10x_1+70x_2)$ кг сталі та $(20x_1+50x_2)$ кг кольорових металів. Оскільки запаси сталі не перевищують 320кг, а кольорових металів – 420кг, то

$$10x_1 + 70x_2 \leq 320,$$

$$20x_1 + 50x_2 \leq 420.$$

Час обробки всіх виробів на токарних верстатах дорівнює $(300x_1 + 400x_2)$ верстато-годин. З умови задачі випливає, що

$$300x_1 + 400x_2 \leq 6200.$$

Враховуючи, що фрезерні верстати використовуються максимально, маємо

$$200x_1 + 100x_2 = 3400.$$

Загальний прибуток від реалізації всієї продукції

$$f = 3x_1 + 8x_2.$$

Отже, маємо математичну модель даної задачі

$$f = 3x_1 + 8x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 70x_2 \leq 320, \\ 20x_1 + 50x_2 \leq 420, \\ 300x_1 + 400x_2 \leq 6200, \\ 200x_1 + 100x_2 = 3400; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0,$$

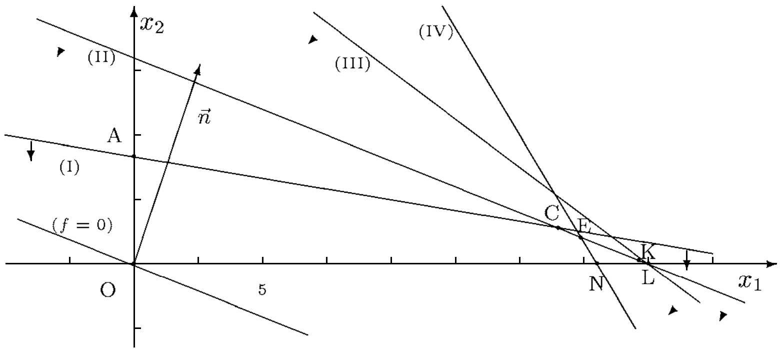
яку можна подати у вигляді

$$f = 3x_1 + 8x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 \leq 32, \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 42, \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 62, \\ 2x_1 + x_2 = 34; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Побудуємо многокутник розв'язків. Нерівності $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ та $x_1 + 7x_2 \leq 32$, $2x_1 + 5x_2 \leq 42$, $3x_1 + 4x_2 \leq 62$ визначають у першій чверті многокутник $OACKL$.



Рівняння $2x_1 + x_2 = 34$ виділяє з неї множину допустимих планів. Це точки відрізка EN. Серед точок цього відрізка треба вибрати таку, в якій цільова функція f досягає максимального значення. Для цього за рівнянням $3x_1 + 8x_2 = h$ будуємо декілька прямих (ліній рівня f), надаючи h різних значень. Рухаючи пряму $3x_1 + 8x_2 = h$ у напрямку вектора $\vec{n} = (3;8)$, одержимо, що останньою точкою відрізка EN, якої доторкнеться ця пряма, буде точка E. Знайдемо її координати, розв'язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 34, \\ 2x_1 + 5x_2 = 42; \end{cases}$$

$x_1 = 16, x_2 = 2, E(16;2)$. Тоді оптимальний план $X^* = (16;2)$, а $f_{\max} = f(16,2) = 3 \cdot 16 + 8 \cdot 2 = 64$. ▷

Приклад 2. Розв'язати задачу лінійного програмування

$$f = 3x_1 + 2x_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} 13x_1 - x_2 + 3x_3 \phantom{{}-x_4} = 150, \\ 2x_1 \phantom{{}-x_2} + 3x_3 - x_4 = 84; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \dots, 4\}.$$

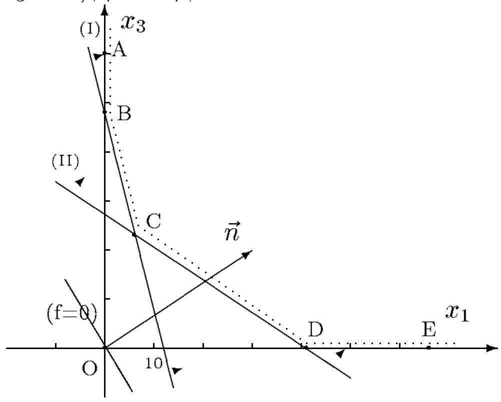
◁ Запишемо задачу в симетричній формі

$$f = 3x_1 + 2x_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} 13x_1 + 3x_3 \geq 150, \\ 2x_1 + 3x_3 \geq 84; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

Побудуємо многокутник розв'язків, вектор $\vec{n} = (3;2)$ і лінію рівня $f = 3x_1 + 2x_3 = h$, де h – деяка стала.



Якщо пряму $3x_1+2x_3 = h$ рухати в напрямку вектора $\vec{n}$, то вона весь час перетинатиме многокутник розв'язків $ABCDE$, а отже, не досягне свого найбільшого значення. Таким чином, функція f необмежено зростає ($f \to \infty$). Задача не має розв'язку. $\triangleright$

Приклад 3. Мінімізувати функцію $f = -x_1 + x_2$ при обмеженнях

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 & = 2, \\ -x_1 + 2x_2 \qquad - x_4 & = 8, \\ \quad x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_5 & = 5; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \ldots, 5\}.$$

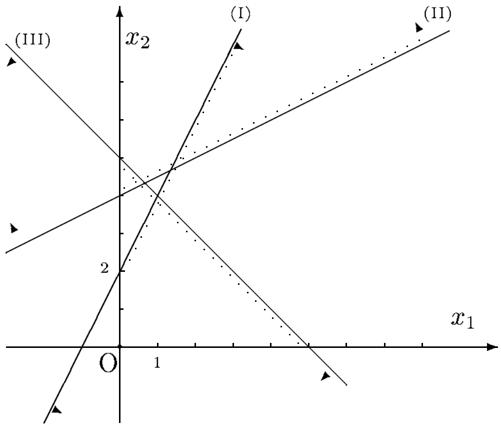
$\triangleleft$ Маємо задачу лінійного програмування, записану в канонічній формі. Подамо її в симетричній формі

$$f = -x_1 + x_2 \to \min;$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 2, \\ -x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ \quad x_1 + x_2 \leq 5; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Знайдемо множину допустимих планів, зробивши відповідний рисунок.



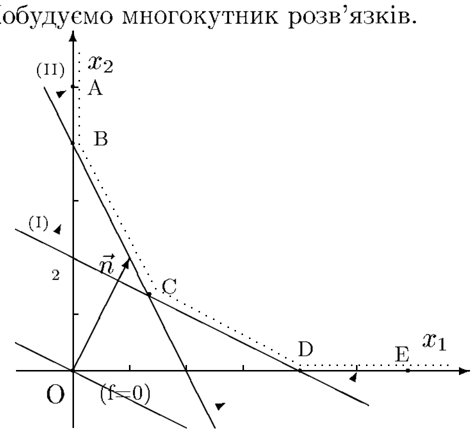
З даного рисунка випливає, що многокутник розв'язків є порожньою множиною. Отже, задача розв'язку не має (система обмежень несумісна). ▷

Приклад 4. Знайти найбільше і найменше значення функції $f = x_1 + 2x_2$ при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ 2x_1 + x_2 \geq 4; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

◁ Побудуємо многокутник розв'язків.



Якщо рухати лінію рівня $x_1 + 2x_2 = h$ у напрямку вектора $\vec{n} = (1; 2)$, то побачимо, що f досягає найменшого значення на відрізку CD, а найбільшого не досягає, бо лінія рівня весь час перетинає многокутник розв'язків $ABCDE$. Точка C має координати $(\frac{4}{3}; \frac{4}{3})$, які знаходяться з системи рівнянь $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4, \\ 2x_1 + x_2 = 4. \end{cases}$ Точка D має координати $(4, 0)$.

Отже, оптимальний план $X^* = \lambda C + (1 - \lambda) D, 0 \le \lambda \le 1,$ а $f_{\min} = f(C) = f(D) = 4.$ ▹

Вправи

О1. Для збереження працездатності та здоров'я людина повинна споживати за добу певну кількість поживних речовин: білків B_1, жирів B_2, вітамінів B_3. Запаси їх у продуктах Π_1 і Π_2 неоднакові. Кількість відповідної речовини в одній одиниці кожного продукту і ціна продукту наведені в таблиці

Поживні речовини	Вміст поживних речовин в одиниці продукту		Мінімальна норма
	Π_1	Π_2	
B_1	$0,2$	$0,1$	120
B_2	$0,075$	$0,1$	70
B_3	0	$0,1$	10
Вартість продукту	$0,2$	$0,3$	

Треба так організувати харчування, щоб вартість його була найменшою, а організм одержав належну кількість поживних речовин.

О2. Розв'язати подані задачі лінійного програмування

1) $f = x_1 + 3x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 + x_2 \le 7, \\ 3x_1 + x_2 \le 15; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$

2) $f = 2x_1 + 2x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 7, \\ 0 \le x_1 \le 6, \\ 0 \le x_2 \le 5; \end{cases}$$

3) $f = 3x_1 + 3x_2 \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \ge -6, \\ 4x_1 + 6x_2 \le 24, \\ x_1 + x_2 \ge -4, \\ -3 \le x_1 \le 2; \end{cases}$$

4) $f = 3x_1 + x_2 \to \min;$
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 2, \\ 2x_1 - x_2 \le 2, \\ x_2 \le 4; \end{cases}$$

5) $f = 2x_1 - x_2 \to \min;$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \ge 12, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 \le 5; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$

6) $f = 4x_1 + 2x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 18, \\ -x_1 + 3x_2 \le 9, \\ 2x_1 - x_2 \le 10; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$

7) $f = 2x_1 + 4x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 11, \\ -2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - 3x_2 \le 0; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$

8) $f = -3x_1 - 2x_2 \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 7, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \\ x_2 \le 3; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$

9) $f = -x_1 - 2x_2 \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ 2x_1 - x_2 \ge -1, \\ x_1 - 2x_2 \le 0; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$

10) $f = 4x_1 + 2x_2 + x_4 - 8 \to \max;$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 14, \\ x_2 + x_4 = 8, \\ x_1 + x_2 - x_5 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_6 = 6; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, \ldots, 6\};$

11) $f = -x_1 + 4x_2 + 2x_4 - x_5 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 5, \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 8; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, j \in \{1, \ldots, 5\};$

12) $f = -x_3 + x_5 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + x_5 = 15, \\ -x_1 - 4x_3 + x_4 + 2x_5 = -3, \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + 4x_5 = 6; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, j \in \{1, \ldots, 5\};$

13) $f = -3x_1 + x_3 \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 - x_5 = -7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 + x_3 - x_4 - x_5 = -4; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, j \in \{1, \ldots, 5\};$

14) $f = -x_1 + 5x_2 - 16x_3 + 5x_4 + x_5 \to \max;$
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_3 - x_4 = 8, \\ x_1 + 2x_3 + x_5 = 10, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 6; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, j \in \{1, \ldots, 5\};$

15) $f = x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 14x_6 \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 20, \\ x_2 + x_5 = 50, \\ x_3 + x_6 = 30, \\ x_4 + x_5 + x_6 = 60; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, \ldots, 6\};$

16) $f = x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 - x_5 + 88 \to \max(\min),$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ -x_1 + 5x_2 + x_4 = 37, \\ 5x_1 + x_2 + x_5 = 49, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_6 = 11, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_7 = 19; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, \ldots, 7\}.$

С1. Цех випускає вироби двох видів: вали і втулки. На виготовлення одного валу робітник затрачає 3 год, а однієї втулки – 2 год. Від реалізації валу підприємство одержує 80 коп. прибутку, а від реалізації втулки – 60 коп. Цех повинен випустити не менше 100 валів і не менше 200 втулок. Скільки треба виготовити валів і втулок, щоб цех одержав найбільший прибуток, якщо фонд робочого часу становить 900 людино-годин.

С2. Продаючи товари двох типів A і B, торгівельне підприємство використовує чотири види ресурсів P_1, P_2, P_3, P_4. Норми витрат ресурсів на реалізацію одиниці товару та обсяг ресурсів наведено в таблиці

Ресурси	Норма витрат ресурсів на реалізацію одиниці товару		Кількість ресурсів на підприємстві
	A	B	
P_1	2	2	12
P_2	1	2	8
P_3	4	0	16
P_4	0	4	12

Прибуток від реалізації одиниці товару A складає 2 грн., товару B – 3 грн.

Знайти оптимальний план реалізації товарів, який забезпечує максимальний прибуток.

Домашнє завдання

Д1. Розв'язати задачі лінійного програмування

1) $f = -x_1 + 2x_2 \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 3, \\ 3x_1 - 4x_2 \ge -12, \\ x_1 \le 5; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$$

2) $f = x_1 + 3x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_2 \le 4; \end{cases}$$

3) $f = -x_1 - x_2 \to \min;$
$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 \le 18, \\ x_1 + x_2 \le 4, \end{cases}$$
$x_1 \ge 1, x_2 \ge 0;$

4) $f = -x_1 - x_2 \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 - x_2 \ge -1, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 \le 2, \\ x_2 \le 2; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

Д2. Розв'язати задачі лінійного програмування

1) $f = -2x_1 - x_2 \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ 2x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 - 2x_2 \le 0, \\ x_1 - x_2 \ge -1; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$

2) $f = 4x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 8, \\ -5x_1 + x_3 + x_5 = 5, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 4; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, \ldots, 5\};$

3) $f = x_1 - 8x_2 - x_3 + x_4 + x_5 \to \max;$
$$\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + 8x_4 - x_5 = 3, \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 42, \\ x_1 - 6x_2 + x_3 - 4x_4 = 48; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, \ldots, 5\};$

4) $f = 2x_4 + 3x_6 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 4, \\ x_4 + x_5 + 3x_6 = 9, \\ x_3 + x_4 + 2x_6 = 8, \\ x_2 + x_4 + x_6 = 5; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, \ldots, 6\};$

5) $f = 7x_1 + 7x_2 + x_3 - x_5 - 50 \to \max;$
$$\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 + x_3 = 55, \\ 11x_1 + 12x_2 + x_4 = 132, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_5 = 5; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, \ldots, 5\};$

6) $f = 3x_2 - x_3 + 2x_4 - 2 \to \max;$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 22, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 16, \\ 4x_1 + x_2 - x_5 = 4; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, \ldots, 5\};$

7) $f = 4x_1 - 3x_2 - x_4 + x_5 \to \min;$
$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_4 = 13, \\ 4x_1 + x_2 + x_5 = 26, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + x_6 = 0; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, \ldots, 6\};$

8) $f = -4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \to \max;$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, \ldots, 4\}.$

Д3. Для виготовлення виробів P_1 і P_2 промкомбінат використовує три види сировини S_1, S_2 і S_3 відповідно у кількостях 280, 300 і 300 одиниць. Для виготовлення одного виробу P_1 витрачається 6 одиниць сировини S_1, 8 одиниць сировини S_2 і 10 одиниць сировини S_3. На один виріб P_2 витрачається відповідно 5, 5 і 2,5 одиниці кожного виду сировини. Знайти такий план виробництва, який забезпечував би найбільший прибуток, якщо реалізація одного виробу P_1 дає 7 грн. прибутку, а виробу P_2 – 5 грн.

Відповіді

О1. $X^* = (800; 100), f_{\min} = 190$. **О2.** 1) $X^* = (2; 5)$, $f_{\max} = 17$; 2) $X^* = \lambda X_1^* + (1-\lambda)X_2^*$, $0 \le \lambda \le 1$, $X_1^* = (6; 1)$, $X_2^* = (2; 5)$, $f_{\max} = 14$; 3) $X^* = \lambda X_1^* + (1-\lambda)X_2^*$, $0 \le \lambda \le 1$, $X_1^* = (-3; -1)$, $X_2^* = (2; -6)$, $f_{\min} = -12$; 4) немає розв'язку; 5) $f_{\min} \to -\infty$; 6) $X^* = (6; 2)$, $f_{\max} = 28$; 7) $f_{\max} \to \infty$; 8) $X^* = (3; 2)$, $f_{\min} = -13$; 9) немає розв'язку; 10) $X^* = (6; 2; 0; 6; 4; 0)$, $f_{\max} = 26$; 11) $X^* = (2; 6; 33; 0; 0)$, $f_{\max} = 22$; 12) $X^* = \lambda X_1^* + (1-\lambda)X_2^*$, $0 \le \lambda \le 1$, $X_1^* = (9; 3; 0; 0; 3)$, $X_2^* = (7; 0; 1; 0; 4)$, $f_{\max} = 3$; 13) $X^* = (4; 0; 1; 0; 9)$, $f_{\min} = -11$; 14) $X^* = (4; 0; 3; 14; 0)$, $f_{\max} = 18$; 15) $X^* = (10; 0; 30; 10; 50; 0)$, $f_{\min} = 390$; 16) а) $X^* = (8; 9; 9; 0; 0; 23; 41)$, $f_{\max} = 60$; б) $X^* = \lambda X_1^* + (1-\lambda)X_2^*$, $X_1^* = (1; 4; 0; 18; 40; 24; 0)$, $X_2^* = (5; 1; 11; 37; 23; 0; 0)$, $0 \le \lambda \le 1$, $f_{\min} = 19$. **С1.** $X^* = (100; 300)$. **С2.** $X^* = (4; 2)$, $f_{\max} = 14$. **Д1.** 1) $X^* = (3; 0)$, $f_{\min} = -3$; 2) $X^* = (3; 3)$, $f_{\max} = 12$; 3) $X^* = \lambda X_1^* + (1-\lambda)X_2^*$, $0 \le \lambda \le 1$, $X_1^* = (3; 1)$, $X_2^* = (4; 0)$, $f_{\min} = -4$; 4) $X^* = (2; 2)$, $f_{\min} = -4$; **Д2.** 1) немає розв'язку; 2) $X^* = (6; 0; 2; 0; 33)$, $f_{\max} = 22$; 3) $f_{\max} \to \infty$; 4) $X^* = (1; 0; 1; 3; 0; 2)$, $f_{\max} = 12$; 5) $X^* = (5; 5; 0; 17; 0)$, $f_{\max} = 20$; 6) $X^* = (2; 6; 0; 0; 10)$, $f_{\max} = 16$; 7) $X^* = (5; 6; 5; 0; 0; 13)$, $f_{\min} = 2$; 8) $X^* = (0; 2; 1; 0)$, $f_{\max} = 3$.

Д3.
$$f = 7x_1 + 5x_2 \to \max;$$
$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 \le 280, \\ 8x_1 + 5x_2 \le 300, \\ 10x_1 + 2,5x_2 \le 300; \end{cases} \qquad X^* = (10; 44),\ f_{\max} = 290.$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Тема 5. Симплексний метод розв'язування задач лінійного програмування

Основним методом розв'язування задач лінійного програмування є симплексний метод (симплекс-метод). Він є точний і належить до методів послідовного покращення планів. Це означає, що спочатку будується початковий опорний план, а далі робиться висновок або про оптимальність цього плану, або про необхідність переходу до нового опорного плану. При цьому даний перехід здійснюється так, що значення цільової функції, що досліджується на максимум, на наступному опорному плані має бути більший, ніж на попередньому, якщо тільки опорні плани невироджені.

Оскільки симплексний метод розроблено для задач лінійного програмування, записаних у канонічній формі, і все починається з вихідного опорного плану, то спочатку розглянемо задачу, для якої цей план записується безпосередньо.

Нехай треба розв'язати задачу

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max; \tag{1}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 \qquad\qquad +a_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad x_2 \qquad +a_{2,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad\qquad \ldots \\ \qquad\qquad x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m; \end{array}\right. \tag{2}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \ldots, n\}, \tag{3}$$

де a_{ij}, b_i, c_j – сталі, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $m < n$ і $b_i \geq 0$, $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Запишемо цю задачу у векторній формі

$$f = CX \to \max;$$

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_nA_n = A_0;$$

$$X \geq 0,$$

де $C=(c_1,c_2,\ldots,c_n)$, $\quad X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$,

$$A_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ldots,A_m=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix},$$

$$A_{m+1}=\begin{pmatrix}a_{1,m+1}\\a_{2,m+1}\\\vdots\\a_{m,m+1}\end{pmatrix},\ldots,A_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix},A_0=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$b_1\cdot A_1+...+b_m\cdot A_m+0\cdot A_{m+1}+...+0\cdot A_n=A_0,$$

то згідно з означенням опорного плану вектор $X_0=(b_1,b_2,\ldots,b_m;0,\ldots,0)$ є опорним планом даної задачі. Якщо $b_i>0$, $i\in\{1,...,m\}$, то план невироджений, а у випадку, коли серед них є нульові, то план вироджений.

Введемо позначення $f_0=C_\delta A_0$ або $f_0=c_1b_1+\ldots+c_mb_m$; $f_j=C_\delta A_j$ або $f_j=c_1a_{1j}+c_2a_{2j}+\ldots+c_ma_{mj}$, $\quad j\in\{1,\ldots,n\}$;

$$\Delta_j=f_j-c_j,\quad j\in\{1,...,n\}, \tag{4}$$

де $C_\delta=(c_1,...,c_m)$ – вектор коефіцієнтів цільової функції при базисних змінних.

Доводиться, що: *1) опорний план $X_0=(b_1,\ldots,b_m;0,\ldots,0)$ задачі (1) – (3) є оптимальним, коли $\Delta_j\geq0$, $j\in\{1,\ldots,n\}$; 2) якщо для деякого $j=k$ $\;\Delta_k<0$ і серед чисел $a_{ik},i\in\{1,\ldots,m\}$ немає додатних, то цільова функція f необмежена на множині планів; 3) якщо опорний план X_0 задачі невироджений і $\Delta_k<0$, але серед чисел a_{ik}, $i\in\{1,...,m\}$ є додатні, то існує опорний план X_1 такий, що $f(X_1)>f(X_0)$.*

Наведені вище твердження дозволяють перевірити, чи знайдений опорний план є оптимальним, і виявнити доцільність переходу до нового опорного плану.

Дослідження опорного плану на оптимальність, а також подальші обчислення зручно здійснювати, якщо умови задачі та початкові дані, одержані після того, як знайдено початковий опорний план, з допомогою симплексної таблиці

i	Б	C_δ	A_0	$\frac{c_1}{A_1}$	$\frac{c_2}{A_2}$	$\frac{\dots}{\dots}$	$\frac{c_m}{A_m}$	$\frac{\dots}{\dots}$	$\frac{c_n}{A_n}$
1	A_1	c_1	b_1	1	0	...	0	...	a_{1n}
2	A_2	c_2	b_2	0	1	...	0	...	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$
m	A_m	c_m	b_m	0	0	...	1	...	a_{mn}
$m+1$			f_0	Δ_1	Δ_2	...	Δ_m	...	Δ_n

При заповненні $(m+1)$-го рядка користуємось формулами (4). Даний рядок називають часто **оціночним** або **індексним**.

Опишемо алгоритм симплексного методу.

1. Переглядяємо знаки всіх коєфіцієнтів Δ_j $m+1$-го рядка. Якщо всі $\Delta_j \geq 0$, $j \in \{1, ..., n\}$, то задача розв'язана: допустимий план є оптимальним, $\max f = f_0$. Якщо ж не всі $\Delta_j \geq 0$, то переходимо до наступного кроку.

2. Серед значень $\Delta_j < 0$ знаходимо найбільше за абсолютною величиною, і стовпчик, що йому відповідає, виберемо за провідний. Нехай це буде стовпчик з номером s. Якщо у цьому стовпчику всі елементи $a_{is} \leq 0$, $i \in \{1, ..., m\}$, то це означає, що цільова функція f необмежена, тобто $\max f = \infty$. Розв'язування закінчено. Якщо ж не всі $a_{is} \leq 0$, $i \in \{1, ..., m\}$, то переходимо до кроку 3.

3. Для кожного елемента $a_{is} > 0$ провідного стовпчика знаходимо відношення $\frac{b_i}{a_{is}}$, вибираємо найменше $\Theta_{0s} = \min\limits_i \frac{b_i}{a_{is}}$, і беремо рядок, де цей мінімум досягається, за провідний. Нехай це буде рядок з номером r. Елемент a_{rs}, який стоїть на перетині провідного рядка і провідного стовпчика, є провідним (розв'язувальним).

4. Виконуємо жорданове перетворення (див. тему 1) симплексної таблиці з провідним елементом a_{rs} і переходимо до кроку 1.

Послідовність операцій 1–4 називається **ітерацією** симплексного методу.

Зауваження 1. Якщо на кроці 2 є декілька найбільших за абсолютною величиною оцінок Δ_j, то до базису вводять той вектор, якому відповідає $\max\limits_j c_j$. Точнішим є таке правило: якщо не всі $\Delta_j \geq 0, j \in \{1, ..., n\}$, то до базису вводять той вектор, якому відповідає $\min \Theta_{0j}\Delta_j$ (беруть ті j, для яких $\Delta_j < 0$); якщо ж мінімальних оцінок декілька, то до базису вводять вектор, якому відповідає $\max\limits_j c_j$.

Зауваження 2. Якщо в $(m+1)$-у рядку останньої симплексної таблиці серед Δ_j є більше, ніж m нульових, то це означає, що знайдений оптимальний план не єдиний.

Зауваження 3. У випадку, коли $f \to \min$, умовою оптимальності плану є $\Delta_j \leq 0$, $j \in \{1, ..., n\}$. Якщо вона не виконується, то до базису вводять вектор, якому відповідає найбільше Δ_j. Якщо таких значень є декілька, то включають той вектор, якому відповідає $\min\limits_j c_j$.

Приклад 1. Максимальна площа, яку господарство може використати під посадку плодових дерев, складає 1000 га. На цій площі планується посадити три види дерев P_1, P_2 і P_3. Господарство має три типи обмежених ресурсів: S_1 – орна земля; S_2 – трудові ресурси; S_3 – гроші та матеріали. Запаси ресурсів, витрати їх на 1 га посадок і ціна продукції з одного гектара відповідної культури задані таблицею

Типи ресурсів	Види дерев P_1	P_2	P_3	Запаси ресурсів
S_1	1	1	1	1 тис. га
S_2	100	60	200	200 тис. людиноднів
S_3	400	200	800	600 тис. грн.
Ціна продукції з 1га (тис. грн.)	3	2	5	

Треба знайти такі площі посадок дерев кожного виду, які б забезпечували максимальний прибуток від реалізації одержаної продукції.

◁ Позначимо через x_1, x_2 і x_3 площі посадок дерев відповідно видів P_1, P_2, P_3. Оскільки загальна площа посадок не може перевищувати 1000 га, то $x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$. Обмеженість ресурсів дає такі нерівності: $100x_1 + 60x_2 + 200x_3 \leq 200$, $400x_1 + 200x_2 + 800x_3 \leq 600$.

Сумарна вартість виробленої продукції

$$f = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3.$$

Таким чином, математична модель задачі має вигляд

$$f = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 1, \\ 5x_1 + 3x_2 + 10x_3 \le 10, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 \le 3; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Запишемо дану задачу в канонічній формі, ввівши додаткові невід'ємні змінні x_4, x_5, x_6:

$$f = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \qquad = 1, \\ 5x_1 + 3x_2 + 10x_3 \quad + x_5 \quad = 10, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 \qquad + x_6 = 3; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, j \in \{1, 2, ..., 6\}.$$

Складемо симплексні таблиці.

i	Б	C_δ	A_0	$\frac{3}{A_1}$	$\frac{2}{A_2}$	$\frac{5}{A_3}$	$\frac{0}{A_4}$	$\frac{0}{A_5}$	$\frac{0}{A_6}$
1	A_4	0	1	1	1	1	1	0	0
2	A_5	0	10	5	3	10	0	1	0
3	A_6	0	3	2	1	$\boxed{4}$	0	0	1
$m+1$			0	-3	-2	-5	0	0	0
1	A_4	0	1/4	1/2	$\boxed{3/4}$	0	1	0	$-1/4$
2	A_5	0	5/2	0	1/2	0	0	1	$-5/2$
3	A_3	5	3/4	1/2	1/4	1	0	0	1/4
$m+1$			15/4	$-1/2$	$-3/4$	0	0	0	5/4
1	A_2	2	1/3	2/3	1	0	4/3	0	$-1/3$
2	A_5	0	7/3	$-1/3$	0	0	$-2/3$	1	$-7/3$
3	A_3	5	2/3	1/3	0	1	$-1/3$	0	1/3
$m+1$			4	0	0	0	1	0	1

Оскільки у першій симплексній таблиці серед Δ_j є від'ємні, то початковий опорний план не є оптимальним. Максимальне за абсолютною величиною $\Delta_3 = -5$, а тому треба ввести до базису вектор A_3. Вивести з базису треба вектор A_6, бо $\Theta_{03} = \min(1/1, 10/10, 3/4) = 3/4, i = 3$. Далі робимо перерахунок за допомогою методу Жордана-Гаусса, взявши за провідний елемент $a_{33} = 4$.

У другій симплексній таблиці найбільшим за абсолютною величиною серед від'ємних Δ_j є $\Delta_2 = -3/4$. Це означає, що провідним є другий стовпчик, а провідним рядком є перший, бо $\Theta_{02} = \min(1/3, 5, 3) = 1/3$, $i = 1$. Отже, до базису треба включити вектор A_2, а вивести A_4. Переходимо до нової таблиці, зробивши перерахунок за методом Жордана-Гаусса, взявши за провідний елемент $a_{12} = 3/4$.

У третій симплексній таблиці всі $\Delta_j > 0$, а це означає, що план оптимальний.

Таким чином, оптимальний план $X^* = (0, 1/3, 2/3)$, а $f_{\max} = 4$. Звідси випливає, що для одержання максимального прибутку від реалізації продукції, одержаної від багаторічних насаджень, треба під дерева виду P_2 відвести 1/3 тис. га, під дерева виду P_3 - 2/3 тис. га. Тоді сумарна вартість одержаної продукції досягне максимального значення $f_{\max} = 4000$ грн. $\triangleright$

Приклад 2. Підприємство випускає чотири типи продукції, для чого використовує три види сировини. Дані про витрати сировини на одиницю продукції, обмеження на запаси сировини, а також величину прибутку від реалізації одиниці продукції наведено в таблиці

Вид сировини	Витрати сировини на одиницю продукції P_1	P_2	P_3	P_4	Запаси сировини
S_1	2	2	4	5	28
S_2	0	1	2	2	10
S_3	2	1	0	6	14
Прибуток	2	4	6	1	

Треба так спланувати випуск продукції, щоб сумарний прибуток від її реалізації був максимальним.

$\triangleleft$ Складемо математичну модель задачі. Нехай x_j – кількість продукції $P_j, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, що виробляється на підприємстві. Тоді цільова функція

$$f = 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + x_4 \to \max,$$

а обмеження за кількістю сировини мають вигляд:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 &\le 28, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 &\le 10, \\ 2x_1 + x_2 \qquad + 6x_4 &\le 14. \end{aligned}$$

До цих умов необхідно приєднати ще умови невід'ємності змінних:

$$x_j \geq 0, j \in \{1,2,3,4\}.$$

Отже, одержали математичну модель розглядуваної задачі в стандартній формі. Перш ніж розв'язувати цю задачу симплексним методом, зведемо її до канонічної форми, ввівши додаткові невід'ємні змінні x_5, x_6, x_7:

$$f = 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + x_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 + x_5 = 28, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_6 = 10, \\ 2x_1 + x_2 + 6x_4 + x_7 = 14; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j \in \{1, ..., 7\}.$$

Складемо симплексні таблиці.

i	Б	C_δ	A_0	$\frac{2}{A_1}$	$\frac{4}{A_2}$	$\frac{6}{A_3}$	$\frac{1}{A_4}$	$\frac{0}{A_5}$	$\frac{0}{A_6}$	$\frac{0}{A_7}$
1	A_5	0	28	2	2	4	5	1	0	0
2	A_6	0	10	0	1	$\boxed{2}$	2	0	1	0
3	A_7	0	14	2	1	0	6	0	0	1
$m+1$			0	-2	-4	-6	-1	0	0	0
1	A_5	0	8	$\boxed{2}$	0	0	1	1	-2	0
2	A_3	6	5	0	1/2	1	1	0	1/2	0
3	A_7	0	14	2	1	0	6	0	0	1
$m+1$			30	-2	-1	0	5	0	3	0
1	A_1	2	4	1	0	0	1/2	1/2	-1	0
2	A_3	6	5	0	1/2	1	1	0	1/2	0
3	A_7	0	6	0	$\boxed{1}$	0	5	-1	2	1
$m+1$			38	0	-1	0	6	1	1	0
1	A_1	2	4	1	0	0	1/2	1/2	-1	0
2	A_3	6	2	0	0	1	$-3/2$	$\boxed{1/2}$	$-1/2$	$-1/2$
3	A_2	4	6	0	1	0	5	-1	2	1
$m+1$			44	0	0	0	11	0	3	1
1	A_1	2	2	1	0	-1	2	0	$-1/2$	1/2
2	A_5	0	4	0	0	2	-3	1	-1	-1
3	A_2	4	10	0	1	2	2	0	1	0
$m+1$			44	0	0	0	11	0	3	1

У першій симплексній таблиці серед Δ_j є від'ємні, тому початковий опорний план не є оптимальним. Тоді провідним стовпчиком є третій, бо максимальним за абсолютною величиною є $\Delta_3 = -6$. Провідним рядком є другий, бо $\Theta_{03} = \min(28/4, 10/2) = 5, i = 2$.

У другій симплексній таблиці від'ємним, найбільшим за абсолютною величиною, є $\Delta_1 = -2$, а тому провідним є перший стовпчик. Провідним рядком є перший, бо $\Theta_{01} = \min(8/2, 14/2) = 4, i = 1$. Переходимо до третьої симплексної таблиці.

Оскільки Δ_2 є від'ємним, то провідним стовпчиком є другий, а провідним рядком – третій, бо $\Theta_{02} = \min(10, 6) = 6, i = 3$.

У четвертій симплексній таблиці всі $\Delta_j \geq 0$, а це означає, що план є оптимальним. Цей план не єдиний, бо в $(m+1)$-у рядку є не три, а чотири $\Delta_j = 0$. Тому організуємо ще одну ітерацію, ввівши у базис вектор A_5 замість A_3, оскільки $\Theta_{05} = \min(8, 4) = 4, i = 2$.

Таким чином, маємо такі оптимальні плани $X_1^* = (4; 6; 2; 0), X_2^* = (2; 10; 0; 0)$ і $f_{\max} = 44$.

Отже, підприємство може випускати продукцію за двома планами. У першому варіанті необхідно випускати 4 одиниці продукції P_1, 6 одиниць продукції P_2, 2 одиниці продукції P_3 і не випускати продукцію P_4. У другому варіанті випускається 2 одиниці продукції P_1 і 10 одиниць продукції P_2, а продукція P_3 і P_4 не випускається. При цьому прибуток підприємства становитиме 44 грошові одиниці.

Можливі й інші оптимальні плани випуску продукції, які визначаються рівністю $X^* = \lambda X_1^* + (1-\lambda) X_2^*$, $0 \leq \lambda \leq 1$. ▹

Приклад 3. Розв'язати задачу

$$f = -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 4x_5 \to \min;$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 \qquad - 6x_5 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 7x_5 = 10, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 - 6x_4 \qquad = 1; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, ..., 5\}.$$

◃ З допомогою методу Жордана-Гаусса зведемо систему обмежень до базисної форми:

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_0
3	$\boxed{1}$	1	0	−6	7
2	1	3	3	−7	10
−3	1	1	−6	0	1
3	1	1	0	−6	7
−1	0	2	3	−1	3
−6	0	0	−6	6	−6

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_0
3	1	1	0	−6	7
$\boxed{1}$	0	−2	−3	1	−3
−1	0	0	−1	1	−1
0	1	7	9	−9	16
1	0	−2	−3	1	−3
0	0	−2	−4	2	−4
0	1	7	9	−9	16
1	0	−2	−3	1	−3
0	0	$\boxed{1}$	2	−1	2
0	1	0	−5	−2	2
1	0	0	1	−1	1
0	0	1	2	−1	2

Отже, система обмежень набула вигляду

$$\begin{cases} \quad x_2 \quad - 5x_4 - 2x_5 = 2, \\ x_1 \qquad + x_4 - x_5 = 1, \\ \qquad x_3 + 2x_4 - x_5 = 2. \end{cases}$$

Таким чином, задачу лінійного програмування ми звели до такої:

$$f = -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 4x_5 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 \qquad + x_4 - x_5 = 1, \\ \quad x_2 \quad - 5x_4 - 2x_5 = 2, \\ \qquad x_3 + 2x_4 - x_5 = 2; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, ..., 5\}.$$

Розв'язування цієї задачі проведемо за допомогою симплексних таблиць.

i	Б	C_δ	A_0	$\frac{-1}{A_1}$	$\frac{-1}{A_2}$	$\frac{-1}{A_3}$	$\frac{-1}{A_4}$	$\frac{4}{A_5}$
1	A_1	−1	1	1	0	0	$\boxed{1}$	−1
2	A_2	−1	2	0	1	0	−5	−2
3	A_3	−1	2	0	0	1	2	−1
$m+1$			−5	0	0	0	3	0
1	A_4	−1	1	1	0	0	1	−1
2	A_2	−1	7	5	1	0	0	−7
3	A_3	−1	0	−2	0	1	0	$\boxed{1}$
$m+1$			−8	−3	0	0	0	3

i	Б	C_δ	A_0	$\frac{-1}{A_1}$	$\frac{-1}{A_2}$	$\frac{-1}{A_3}$	$\frac{-1}{A_4}$	$\frac{4}{A_5}$
1	A_4	-1	1	-1	0	1	1	0
2	A_2	-1	7	-9	1	7	0	0
3	A_5	4	0	-2	0	1	0	1
$m+1$			-8	3	0	-3	0	0

Оскільки у першій симплексній таблиці $\Delta_4 > 0$, то початковий опорний план не є оптимальним. До базису введемо вектор A_4, а виведемо A_1, бо $\Theta_{04} = \min(1/1; 2/2) = 1, i = 1$. У другій симплексній таблиці $\Delta_5 > 0$, і тому треба перейти до наступної симплексної таблиці, включичшивши до базису вектор A_5, а виключивши з базису A_3, оскільки $\Theta_{05} = \min(0/1) = 0$, $i = 3$.

В останній симплексній таблиці $\Delta_1 > 0$, і отже, опорний план не оптимальний. У стовпчику A_1 усі елементи від'ємні, а це означає, що цільова функція необмежена знизу, тобто задача розв'язку не має. $\triangleright$

Вправи

О1. Знайти розв'язки пропонованих нижче задач лінійного програмування:

1) $f = 2x_1 - 6x_2 + 5x_5 \to \max;$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 \quad + x_5 = 20, \\ -x_1 - 2x_2 \quad + x_4 + 3x_5 = 24, \\ 3x_1 - x_2 \quad - 12x_5 + x_6 = 18; \end{cases}$$
$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, ..., 6\};$

2) $f = 2x_1 + 4x_2 - x_3 + {}$
$+ x_4 \to \max;$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 6; \end{cases}$$
$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, ..., 4\};$

3) $f = 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 -$
$-x_5 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \quad = 5, \\ 2x_1 + x_2 \quad + x_4 \quad = 9, \\ x_1 + 2x_2 \quad + x_5 = 7; \end{cases}$$
$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, ..., 5\};$

4) $f = 7x_1 + 5x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 19, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 13, \\ 3x_2 + x_5 = 15, \\ 3x_1 \quad + x_6 = 18; \end{cases}$$
$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, ..., 6\};$

5) $f = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 - x_5 + 8x_6 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 + x_6 = 120, \\ 2x_1 + 9x_2 - 5x_3 - 7x_4 + 4x_5 + 2x_6 = 320; \end{cases}$$
$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, ..., 6\};$

6) $f = x_1 + 2x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6, \\ x_2 \le 4, \\ 2x_1 + x_2 \le 10; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$

7) $f = 2x_1 + x_2 + x_4 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, ..., 4\};$

8) $f = x_1 - 2x_2 + 4x_3 \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 \quad + x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 2, \\ x_3 - x_4 = 1; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, ..., 4\};$

9) $f = -3x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max;$
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 7, \\ -x_1 \quad + 3x_3 \le 2, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 4; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, 2, 3\};$

10) $f = 2x_3 + 2x_4 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 \quad + 4x_3 + 6x_4 = 24, \\ x_2 + 6x_3 + 6x_4 = 30; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, ..., 4\};$

11) $f = 2x_1 + 6x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 9; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, ..., 4\};$

12) $f = -x_1 + x_2 \to \min;$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, ..., 5\}.$

<u>О2</u>. Треба утворити суміш, яка містить три хімічні речовини A, B, C. Відомо, що утворена суміш повинна містити речовини A не менше 6 одиниць, речовини B – не менше 8 одиниць, речовини C – не менше 12 одиниць. Речовини A, B, C містяться в трьох видах продуктів Π_1, Π_2, Π_3 в концентраціях, що задаються таблицею

Продукти	Хімічні речовини		
	A	B	C
Π_1	2	1	3
Π_2	1	2	4
Π_3	3	1,5	2

Одиниця продукту Π_1 коштує 2 грн., одиниця Π_2 – 3 грн., одиниця Π_3 – 2,5 грн. Суміш повинна бути такою, щоб вартість використаних продуктів була найменшою.

<u>О3</u>. Для виробництва продукції типу P_1 і P_2 підприємство використовує два види сировини: S_1 і S_2. Дані про виробництво наведені в таблиці

Сировина	Витрати сировини на одиницю продукції, кг/од.		Кількість сировини, кг
	P_1	P_2	
S_1	1	3	300
S_2	1	1	150
Прибуток, тис. грн./од. прод.	2	3	

Треба так організувати виробництво, щоб прибуток був максимальним.

<u>О4</u>. На обладнанні трьох типів P_1, P_2, P_3 підприємство повинно виробити три види продукції A_1, A_2, A_3. Потужності обладнання кожного типу, затрати часу на виробництво одиниці продукції і прибуток від реалізації одиниці продукції кожного виду задані у таблиці

Тип обладнання	Затрати часу на од. пр-ції			Потужність облад-ня (год.)
	A_1	A_2	A_3	
P_1	2	4	0	100
P_2	5	1	4	20
P_3	0	1	4	80
Прибуток (грн.)	3	2	4	

Знайти, скільки виробів кожного виду повинно випускати підприємство, щоб: 1) одержати максимальний прибуток; 2) використати повністю наявні потужності обладнання.

<u>О5</u>. Фабрика випускає три види тканин P_1, P_2 і P_3, причому добовий план складає не менше 90 м тканини P_1, 70 м тканини P_2 і 60 м тканини P_3. Добові ресурси такі: 780 одиниць обладнання, 850 одиниць сировини і 790 одиниць електроенергії, витрати яких на один метр тканини подано в таблиці

Ресурси	Тканини		
	P_1	P_2	P_3
Обладнання	2	3	4
Сировина	1	4	5
Електроенергія	3	4	2

.

Ціна одного метра тканини P_1 – 80 грн., P_2 – 70 грн., P_3 – 60 грн.

Визначити, скільки метрів тканини кожного виду треба виробити, щоб загальна вартість виробленої продукції була найбільшою.

С1. Розв'язати задачі

1) $f = -x_1 + x_4 - 2x_5 + 3x_6 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 - x_5 + x_6 = 3, \\ x_2 - x_5 + 4x_6 = 21, \\ x_3 + 4x_5 - x_6 = 21, \\ x_4 + x_5 - x_6 = 3; \end{cases}$$
$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, ..., 6\};$

2) $f = 3x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 4, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 2, \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 = 3; \end{cases}$$
$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, 2, 3\};$

3) $f = 3x_1 + x_2 - 2x_3 \to \min;$
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2; \end{cases}$$
$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, 2, 3\};$

4) $f = -5x_3 - 3x_4 \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 + 5x_3 + 3x_4 = 30, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 8; \end{cases}$$
$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, ..., 4\};$

5) $f = 3x_1 + 3x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 4, \\ x_2 + x_5 = 5; \end{cases}$$
$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, ..., 5\};$

6) $f = -2x_1 + 2x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 2; \end{cases}$$
$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, ..., 5\}.$

Домашнє завдання

Д1. Підприємство випускає чотири види продукції і використовує три типи основного обладнання: токарне, фрезерне і шліфувальне. Затрати часу на виготовлення одиниці продукції для кожного з типів обладнання наведені в таблиці. В ній також вказано загальний фонд робочого часу для кожного типу обладнання і прибуток від реалізації одного виробу даного виду.

Тип обладнання	Затрати часу на од. пр-ції P_1	P_2	P_3	P_4	Фонд робоч. часу
Токарне	2	1	1	3	300
Фрезерне	1	0	2	1	70
Шліфувальне	1	2	1	0	340
Прибуток	8	3	2	1	

Знайти обсяг випуску кожного з виробів, при якому загальний прибуток від їхньої реалізації буде максимальним.

Д2. Скласти оптимальний добовий раціон відгодівлі тварин. Вихідні дані для розв'язування задачі наведено в таблиці

Поживні речовини, умовн. од.	Вміст поживних речовин в одиниці корму виду K_1	K_2	Мінімальна добова норма споживання, умовн. од.
Кормові одиниці	1	$0,5$	5
Перетравлюваний протеїн	80	200	560
Кальцій	1	8	20
Ціна 1 од. корму, грн.	3	5	

Д3. Розв'язати з допомогою симплекс-методу задачі, запропоновані нижче:

1) $f = x_1 - x_2 \to \min;$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5; \end{cases}$$
$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, ..., 5\};$

2) $f = -6x_1 - x_2 \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 6x_1 + x_2 + x_4 = 12; \end{cases}$$
$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, ..., 4\};$

3) $f = 12x_1 + x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1 + 3x_2 \leq 9; \end{cases}$$
$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$

4) $f = 2x_1 + 2x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \leq 24, \\ 6x_1 + 6x_2 \leq 30; \end{cases}$$
$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$

5) $f = 4x_1 + 3x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 \le 4000, \\ x_2 \le 6000, \\ x_1 + \frac{2}{3}x_3 \le 6000; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 > 0;$

6) $f = 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 3; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, ..., 4\};$

7) $f = x_2 - x_5 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_5 = 2, \\ x_2 + x_4 - 2x_5 = 2, \\ x_2 + x_3 + x_5 = 5; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, ..., 5\};$

8) $f = x_1 - 3x_2 + 2x_3 \to \min;$
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 \le 7, \\ -2x_1 + 4x_2 \le 12, \\ -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \le 10; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, 2, 3\};$

9) $f = 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_5 + 6x_6 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 - x_4 - 2x_6 = 5, \\ x_2 + 2x_4 - 3x_5 + x_6 = 3, \\ x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 = 5; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, ..., 6\};$

10) $f = 8x_1 - 3x_2 + x_3 + 6x_4 - 5x_5 \to \max;$
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 28, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 + x_5 = 31, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 - 8x_5 = 118; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, ..., 5\};$

11) $f = 5x_1 - x_2 + 8x_3 + 10x_4 - 5x_5 + x_6 \to \max;$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_4 + x_5 - x_6 = 36, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_6 = 20, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 + x_6 = 30; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, ..., 6\}.$

Відповіді

О1. 1) Немає розв'язку; 2) $X^* = (2;4;0;0)$, $f_{\max} = 20$; 3) $X^* = (3;2;0;1;0)$, $f_{\max} = 9$; 4) $X^* = (5;3;0;0;6;3)$, $f_{\max} = 50$; 5) $X^* = (0;0;0;80;0;440)$, $f_{\max} = 3920$; 6) $X^* = (2;4)$, $f_{\max} = 10$; 7) $X^* = (1/2;1/2;0;1)$, $f_{\max} = 5/2$; 8) немає розв'язку (система несумісна); 9) немає розв'язку (функція необмежена); 10) $X^* = \lambda X_1^* + (1-\lambda)X_2^*$, $X_1^* = (0;0;3;2)$, $X_2^* = (4;0;5;0)$, $0 \le \lambda \le 1$, $f_{\max} = 10$; 11) $X^* = \lambda X_1^* + (1-\lambda)X_2^*$, $X_1^* = (3/2;5/2;0;0)$, $X_2^* = (0;3;7;0)$, $0 \le \lambda \le 1$,

$f_{\max} = 18$; 12) $X^* = (4;1;9;0;0)$, $f_{\min} = -3$.

О2. $f = 2x_1 + 3x_2 + 2,5x_3 \to \min;$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 6, \\ x_1 + x_2 + 1,5x_3 \geq 8, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 12; \end{cases}$$
$x_j \geq 0, \quad j \in \{1,2,3\};$ $\qquad X^* = (0;10/3;8/9), f_{\min} = 110/9$.

О3. $f = 2x_1 + 3x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 300, \\ x_1 + x_2 \leq 150; \end{cases}$$
$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$ $\qquad X^* = (75;75), f_{\max} = 375$.

О4. 1) $X^* = (0;0;20)$, $f_{\max} = 80$; 2) $X^* = (0;20;0)$, $f_{\max} = 40$.

О5. $f = 80x_1 + 70x_2 + 60x_3 \to \max;$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 780, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 850, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 790; \end{cases}$$
$x_1 \geq 90, \ x_2 \geq 70, \ x_3 \geq 60;$ $\qquad X^* = (112,5;70;86,25)$, $f_{\max} = 19075$.

С1. 1) $X^* = (0;0;15;6;3;6)$, $f_{\max} = 18$; 2) немає розв'язку (функція необмежена); 3) немає розв'язку (система несумісна); 4) $X^* = \lambda X_1^* + (1-\lambda)X_2^*$, $X_1^* = (0;0;3;5)$, $X_2^* = (0;2;6;0)$, $0 \leq \lambda \leq 1$, $f_{\min} = -30$; 5) $X^* = \lambda X_1^* + (1-\lambda)X_2^*$, $X_1^* = (3;5;0;6;0)$, $X_2^* = (6;2;0;0;3)$, $0 \leq \lambda \leq 1$, $f_{\max} = 24$; 6) $X^* = \lambda X_1^* + (1-\lambda)X_2^*$, $X_1^* = (0;1;0;2;0)$, $X_2^* = (1/2;3/2;0;2;0)$, $0 \leq \lambda \leq 1$, $f_{\max} = 2$.

Д1. $f = 8x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \to \max;$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 300, \\ x_1 \quad + 2x_3 + x_4 \leq 70, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \quad \leq 340; \end{cases}$$
$x_j \geq 0, \quad j \in \{1,...,4\};$ $\qquad X^* = (70;135;0;0)$, $f_{\max} = 965$.

Д2. $f = 3x_1 + 5x_2 \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 + 0,5x_2 \geq 5, \\ 80x_1 + 200x_2 \geq 560, \\ x_1 + 8x_2 \geq 20; \end{cases}$$
$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$ $\qquad X^* = (4;2), f_{\min} = 22$.

Д3. 1) $X^* = (1;4;0;9;0)$, $f_{\min} = -3$; 2) $X^* = \lambda X_1^* + (1-\lambda)X_2^*$, $X_1^* = (6/5;24/5;0;0)$, $X_2^* = (2;0;4;0)$, $0 \leq \lambda \leq 1$, $f_{\min} = -12$; 3) $X^* = (2;0)$, $f_{\max} = 24$; 4) $X^* = \lambda X_1^* + (1-\lambda)X_2^*$, $X_1^* = (5;0)$, $X_2^* = (3;2)$, $0 \leq \lambda \leq 1$, $f_{\max} = 10$; 5) $X^* = (2000;6000)$, $f_{\max} = 26000$; 6) $X^* = (0;3;4;0)$, $f_{\max} = 7$; 7) $X^* = (9;4;0;0;1)$, $f_{\max} = 3$; 8) $X^* = (4;5;0)$, $f_{\min} = -11$; 9) немає розв'язку; 10) $X^* = (0;0;6;28;3)$, $f_{\max} = 159$; 11) $X^* = (6;0;10;8;0;0)$, $f_{\max} = 190$.

Тема 6. Метод штучного базису (М-метод) розв'язування задач лінійного програмування

Згідно з алгоритмом симплексного методу обчислення зручно розпочинати з відомого опорного плану, який передбачає наявність одиничного базису. Проте далеко не кожна задача лінійного програмування має одиничний базис, якому відповідає допустимий базисний розв'язок. Тому доводиться штучно організувати одиничний базис.

Нехай треба розв'язати задачу:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max; \tag{1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases} \tag{2}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, ..., n\}, \tag{3}$$

де $b_i \geq 0, i \in \{1, ..., m\}, m < n$, і серед векторів

$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, ..., A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ немає одиничних.

Поряд з цією задачею розглядатимемо розширену задачу (М-задачу):

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n - Mx_{n+1} - ... - Mx_{n+m} \to \max; \tag{4}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} & = b_1, \\ a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n \quad + x_{n+2} & = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n \qquad + x_{n+m} & = b_m; \end{cases} \tag{5}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, ..., n+m\}, \tag{6}$$

де M – деяке досить велике число, конкретне значення якого, як правило, не задається.

Опорний план $X_0 = (0; ...; 0; b_1; ...; b_m)$, що визначається системою одиничних векторів $A_{n+1}, A_{n+2}, ..., A_{n+m}$, які утворюють базис, називається штучним.

Оскільки розширена задача має початковий опорний план, то її можна розв'язати за допомогою симплексного методу. Доведено таке: *1) якщо в оптимальному плані $\bar{X}^* = (x_1^*; ...; x_n^*; x_{n+1}^*; x_{n+2}^*; ...; x_{n+m}^*)$ розширеної задачі (4)–(6) значення штучних змінних x_{n+i}^*, $i \in \{1, ..., m\}$, є нульовими, то $X^* = (x_1^*; ...; x_n^*)$ є оптимальним планом задачі (1)–(3); 2) якщо в оптимальному плані $\bar{X}^*$ задачі (4)–(6) принаймні одна з штучних змінних додатна, то вихідна задача (1)–(3) не має допустимих планів – її умови несумісні; 3) якщо М-задача не має розв'язку, то і вихідна задача нерозв'язна.* Отже, при розв'язуванні М-задачі симплекс-методом або одержуємо оптимальний розв'язок вихідної задачі, або доводимо її нерозв'язність.

Опишемо процес розв'язування М-задачі. Для початкового опорного плану $\bar{X}_0 = (0; ...; 0; b_1; ...; b_m)$ задачі (4)–(6) значення цільової функції є $\bar{f}_0 = -M(b_1 + ... + b_m)$, а значення $\bar{\Delta}_j = \bar{f}_j - \bar{c}_j = -M(a_{1j} + ... + a_{mj}) - c_j$. Таким чином, $\bar{f}_0$ і $\bar{\Delta}_j$ складаються з двох незалежних частин, одна з яких містить М, а друга – ні.

Після обчислення $\bar{f}_0$ і $\bar{\Delta}_j$ їхнє значення, а також вихідні дані М-задачі заносять у таблицю, яка містить на один рядок більше, ніж звичайна симплексна таблиця. При цьому в $(m+2)$-й рядок записують коефіцієнти при М, а в $(m+1)$-й – доданки, які не містять М.

При переході від одного опорного плану до іншого в базис вводять вектор, який відповідає найбільшому за абсолютною величиною від'ємному числу $(m+2)$-го рядка. Штучний вектор, виведений з базису в результаті деякої ітерації, надалі можна не вводити в наступні базиси і, отже, перетворення стовпчика цього вектора зайве. Проте, якщо треба знайти розв'язок двоїстої задачі для даної, то таке перетворення необхідне. Може трапитися і таке, що в результаті деякої ітерації жодний з штучних векторів не буде виведений з базису.

Перерахунок симплексної таблиці при переході від одного опорного плану до іншого проводять за загальними правилами симплексного методу.

Ітераційний процес по $(m+2)$-му рядку ведуть до тих пір поки: а) всі штучні вектори не будуть виведені з базису, або б) не всі штучні вектори виведені з базису, але $(m+2)$-й рядок не містить більше від'ємних елементів у стовпчиках $A_1, ..., A_{n+m}$.

У першому випадку базис відповідає деякому опорному плану вихідної задачі (1)–(3), і далі знаходження її оптимального плану продовжують за $(m+1)$-м рядком.

У другому випадку, якщо елемент, який стоїть в $(m+2)$-му рядку стовпчика A_0 від'ємний, вихідна задача не має розв'язку; якщо ж він дорівнює нулю, то знайдений опорний план вихідної задачі є виродженим (базис задачі містить принаймні один штучний вектор).

Якщо вихідна задача (1)–(3) містить одиничні вектори, то їх слід включити до базису розширеної задачі.

Таким чином, процес знаходження роз'язку задачі (1)–(3) методом штучного базису складається з таких етапів: 1) записують розширену задачу (4)–(6); 2) знаходять опорний план розширеної задачі; 3) за допомогою симплексного методу виключають штучні вектори з базису; як результат або знаходять опорний план вихідної задачі (1)–(3), або встановлюють її нерозв'язність; 4) використовуючи знайдений опорний план задачі (1)–(3) або знаходять симплексним методом її оптимальний план, або доводять її нерозв'язність.

Приклад 1. Розв'язати задачу

$$f = -2x_1 + 3x_2 - 6x_3 - x_4 \to \min;$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \quad \le 22, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \quad \ge 10; \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, ..., 4\}.$$

◁ Запишемо дану задачу в канонічній формі

$$\bar{f} = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 \to \max;$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 \qquad = 24, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \quad + x_5 \quad = 22, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \qquad - x_6 = 10; \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, ..., 6\}.$$

Для того, щоб мати базис з одиничних векторів, введемо у третьому рівнянні штучну невід'ємну змінну x_7 і розглянемо розширену задачу:

$$\bar{f} = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 - Mx_7 \to \max;$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_5 = 22, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_6 + x_7 = 10; \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, ..., 7\}.$$

Складемо симплексні таблиці.

i		C_δ	A_0	$\frac{2}{A_1}$	$\frac{-3}{A_2}$	$\frac{6}{A_3}$	$\frac{1}{A_4}$	$\frac{0}{A_5}$	$\frac{0}{A_6}$	$\frac{-M}{A_7}$
1	A_4	1	24	2	1	-2	1	0	0	0
2	A_5	0	22	1	2	4	0	1	0	0
3	A_7	$-M$	10	1	-1	$\boxed{2}$	0	0	-1	1
$m+1$			24	0	4	-8	0	0	0	0
$m+2$			-10	-1	1	-2	0	0	1	0
1	A_4	1	34	3	0	0	1	0	-1	
2	A_5	0	2	-1	4	0	0	1	$\boxed{2}$	
3	A_3	6	5	$1/2$	$-1/2$	1	0	0	$-1/2$	
$m+1$			64	4	0	0	0	0	-4	
1	A_4	1	35	$5/2$	2	0	1	$1/2$	0	
2	A_6	0	1	$-1/2$	2	0	0	$1/2$	1	
3	A_3	6	$11/2$	$1/4$	$1/2$	1	0	$1/4$	0	
$m+1$			68	2	8	0	0	2	0	

У $(m+2)$-му рядку першої симплексної таблиці є від'ємні числа в стовпчиках A_1 і A_3, і більшим за абсолютною величиною є число, що стоїть в стовпчику A_3, тому за провідний беремо третій стовпчик. За провідний рядок слід взяти третій, бо $\Theta_{03} = \min(22/4; 10/2) = 5$, $i = 3$. Далі переходимо до наступної таблиці, взявши за провідний елемент $a_{33} = 2$.

Оскільки штучний вектор виведено з базису, то аналіз другої симплексної таблиці ведемо по $(m+1)$-му рядку. Маємо, що $\Delta_6 = -4$, а це означає, що даний опорний план не є оптимальним і треба перейти до нового опорного плану. У стовпчику A_6 є тільки один додатний елемент $a_{26} = 2$, який беремо за провідний і переходимо до наступної симплексної таблиці.

Як видно з третьої симплексної таблиці, умова оптимальності виконується, бо в $(m+1)$-му рядку всі $\Delta_j \geq 0$, $j \in \{1, ..., 6\}$. Тоді одержуємо, що оптимальний розв'язок $X^* = (0; 0; 11/2; 35)$, а $f_{\min} = -f_{\max} = -68$. $\triangleright$

Приклад 2. Розв'язати задачу

$$
f = 2x_1 - x_2 - x_4 \to \min;
$$
$$
\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \quad = 10, \\ -2x_1 - x_2 \quad - 2x_4 \geq 18, \\ 3x_1 + 2x_2 \quad + x_4 \geq 36; \end{cases}
$$
$$
x_j \geq 0, \quad j \in \{1, ..., 4\}.
$$

$\triangleleft$ Розглянемо розширену задачу, ввівши дві невід'ємні додаткові змінні x_5, x_6, а також дві невід'ємні штучні змінні x_7, x_8:

$$
\bar{f} = -2x_1 + x_2 + x_4 - Mx_7 - Mx_8 \to \max;
$$
$$
\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \qquad = 10, \\ -2x_1 - x_2 \quad - 2x_4 - x_5 + x_7 = 18, \\ 3x_1 + 2x_2 \quad + x_4 - x_6 + x_8 = 36; \end{cases}
$$
$$
x_j \geq 0, \quad j \in \{1, ..., 8\}.
$$

Запишемо розв'язання задачі у вигляді симплексної таблиці.

i		C_δ	A_0	$\frac{-2}{A_1}$	$\frac{1}{A_2}$	$\frac{0}{A_3}$	$\frac{1}{A_4}$	$\frac{0}{A_5}$	$\frac{0}{A_6}$	$\frac{-M}{A_7}$	$\frac{-M}{A_8}$
1	A_3	0	10	1	-2	1	0	0	0	0	0
2	A_7	$-M$	18	-2	-1	0	-2	-1	0	1	0
3	A_8	$-M$	36	3	$\boxed{2}$	0	1	0	-1	0	1
$m+1$			0	2	-1	0	-1	0	0	0	0
$m+2$			-54	-1	-1	0	1	1	1	0	0
1	A_3	0	46	4	0	1	1	0	-1	0	
2	A_7	$-M$	36	$-1/2$	0	0	$-3/2$	-1	$-1/2$	1	
3	A_2	1	18	$3/2$	1	0	$1/2$	0	$-1/2$	0	
$m+1$			18	$7/2$	0	0	$-1/2$	0	$-1/2$	0	
$m+2$			-36	$1/2$	0	0	$3/2$	1	$1/2$	0	

У першій симплексній таблиці в $(m+2)$-му рядку є два однакові від'ємні значення у стовпчиках A_1 і A_2, а тому за провідний стовпчик виберемо той, у якому стоїть $\max\limits_j c_j$, тобто другий. За провідний рядок беремо третій, оскільки $\Theta_{02} = \min(36/2) = 18, i = 3$.

Перейшовши до другої симплексної таблиці, бачимо, що в $(m+2)$-му рядку в стовпчиках $A_1, ..., A_7$ відсутні від'ємні елементи. У цьому рядку в стовпчику A_0 маємо від'ємне число, а це означає, що вихідна задача не має опорного плану. $\triangleright$

Вправи

O1. Розв'язати пропоновані задачі лінійного програмування за допомогою М-методу:

1) $f = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 \quad \le 20, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \quad \ge 10, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, ..., 4\};$

2) $f = x_1 + 4x_2 + x_3 \to \min;$
$$\begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 2x_3 = 9, \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 11; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, 2, 3\};$

3) $f = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 6; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, ..., 4\};$

4) $f = 2x_1 + 4x_2 + 20x_3 -$
$-5x_4 \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 8; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, ..., 4\};$

5) $f = -x_1 + x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 3, \\ -2x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 + x_2 \le 1; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$

6) $f = 8x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 -$
$-6x_5 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 16, \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_5 = 20; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, ..., 5\};$

7) $f = -2x_1 + x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_5 = 2; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, ..., 5\};$

8) $f = -x_1 + 2x_3 + x_4 \to \max;$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, ..., 4\};$

9) $f = 3x_1 + 2x_2 +$
$+x_3 \to \max;$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \qquad = 8, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, 2, 3\};$

10) $f = -2x_1 + x_2 - x_3 \to \min;$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 \qquad - 2x_3 \le 5, \\ 2x_1 + 2x_2 \qquad \ge 3; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, 2, 3\}.$

C1. Розв'язати М-методом задачі

1) $f = x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 10x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 14x_2 + 10x_3 - 10x_4 = 11; \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, ..., 4\};$

2) $f = x_1 + 10x_2 - x_3 + 5x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 5; \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, ..., 4\};$

3) $f = -2x_1 - 3x_2 + x_3 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 11, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 13; \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, 2, 3\};$

4) $f = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 6, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 \leq 4, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 8; \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, 2, 3\};$

5) $f = 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} 10x_1 + 14x_2 + x_3 - 10x_4 = 24, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2; \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, ..., 4\};$

6) $f = 3x_1 + x_2 + 4x_3 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 18, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 \geq 10, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 3; \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, 2, 3\};$

7) $f = -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} -x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1; \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, ..., 4\}.$

Домашнє завдання

Д1. Розв'язати з допомогою методу штучного базису задачі

1) $f = x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 \quad + 2x_3 + x_4 = 2; \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, ..., 4\};$

2) $f = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \to \max;$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 9, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 8, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 7; \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, 2, 3\};$

3) $f = 12x_1 + 27x_2 + 6x_3 \to \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 14, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 6, \\ 6x_1 + 9x_2 + 2x_3 \geq 22; \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, 2, 3\};$

4) $f = 3x_1 + x_2 - 2x_3 \to \min;$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2; \end{cases}$$

$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, 2, 3\};$

5) $f = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \le 2, \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \ge 11, \\ 3x_1 - x_2 + 6x_3 = 23; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, 2, 3\};$

6) $f = -x_1 - x_2 \to \min;$
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 - x_4 = 1, \\ -x_1 + 5x_2 + x_5 = 10; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, ..., 5\};$

7) $f = 8x_1 - 6x_2 - 5x_3 + +2x_4 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 16, \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 20; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, ..., 4\};$

8) $f = x_1 + 2x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 \le 20, \\ -2x_1 + 4x_2 \ge 3, \\ 5x_1 + 3x_2 \ge 14; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, 2\};$

9) $f = 10x_1 - 5x_2 \to \min;$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 3, \\ x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 + 2x_2 \ge -1; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$

10) $f = 15x_1 + 33x_2 \to \min;$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ 6x_1 + x_2 \ge 6, \\ x_2 \ge 1; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

Відповіді

О1. 1) немає розв'язку (цільова функція необмежена); 2) $X^* = (1; 0; 2)$, $f_{\min} = 3$; 3) немає розв'язку (система умов несумісна); 4) $X^* = (3; 0; 0; 2)$, $f_{\min} = -4$; 5) немає розв'язку (система умов несумісна); 6) $X^* = (26/3; 22/3; 0; 0; 0)$, $f_{\max} = 84$; 7) немає розв'язку (цільова функція необмежена); 8) $X^* = (0; 1; 3; 0)$, $f_{\max} = 6$; 9) $X^* = \lambda X_1^* + (1 - \lambda) X_2^*$, $X_1^* = (4; 0; 2)$, $X_2^* = (2; 4; 0)$, $0 \le \lambda \le 1$, $f_{\max} = 14$; 10) $X^* = (3/2; 0; 1)$, $f_{\min} = -4$. **С1.** 1) немає розв'язку (цільова функція необмежена); 2) немає розв'язку (система умов несумісна); 3) $X^* = \lambda X_1^* + (1 - \lambda) X_2^*$, $X_1^* = (0; 1; 4)$, $X_2^* = (0; 2; 7)$, $0 \le \lambda \le 1$, $f_{\max} = 1$; 4) $X^* = (0; 0; 3)$, $f_{\min} = 12$; 5) $X^* = (2; 0; 4; 0)$, $f_{\max} = 10$; 6) $X^* = (6; 0; 3)$, $f_{\max} = 30$; 7) немає розв'язку (система умов несумісна). **Д1.** 1) $X^* = (0; 4/3; 0; 2)$, $f_{\max} = 14/3$; 2) $X^* = (0; 0; 4, 5)$, $f_{\max} = 18$; 3) $X^* = (3/4; 0; 13/4)$, $f_{\min} = 57/2$; 4) немає розв'язку (система умов несумісна); 5) $X^* = (0; 1; 4)$, $f_{\min} = 11$; 6) немає розв'язку (цільова функція необмежена); 7) $X^* = (12; 0; 0; 4)$, $f_{\max} = 104$; 8) немає розв'язку (система умов несумісна); 9) $X^* = (5/3; 1/3)$, $f_{\min} = 15$; 10) $X^* = (4/3; 1)$, $f_{\min} = 53$.

Тема 7. Двоїсті задачі лінійного програмування. Зв'язок між розв'язками прямої і двоїстої задач

Кожній задачі лінійного програмування можна поставити у відповідність деяку іншу задачу лінійного програмування, яку називають **двоїстою** до даної. Початкову задачу при цьому називають **прямою** або **вихідною**. Розв'язавши одну з них, ми одночасно знайдемо розв'язок другої. Ці задачі називають **парою взаємно двоїстих задач**. Щоб навчитися формувати двоїсту задачу за даною вихідною, розглянемо деякі важливі окремі випадки, а також найзагальніший випадок.

Розглянемо спочатку симетричну (стандартну) задачу лінійного програмування:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max; \tag{1}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m; \end{array} \right. \tag{2}$$

$$x_j \geq 0, j \in \{1, \ldots, n\}. \tag{3}$$

Двоїстою до цієї задачі є задача

$$F = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min; \tag{4}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \geq c_2, \\ \ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \geq c_n; \end{array} \right. \tag{5}$$

$$y_i \geq 0, i \in \{1, \ldots, m\}. \tag{6}$$

Задачі (1)–(3) і (4)–(6) утворюють симетричну двоїсту пару. Задача (4)–(6) складена за такими правилами:

1) цільова функція f задачі (1)–(3) досліджується на максимум, а цільова функція F двоїстої задачі (4)–(6) – на мінімум;

2) матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

яка складена з коефіцієнтів при невідомих у системі обмежень (2), і аналогічна матриця

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ & & \dots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

обмежень (5) одержуються одна з другої транспонуванням, тобто заміною рядків стовпчиками, і навпаки;

3) число змінних у двоїстій задачі (4)–(6) дорівнює числу обмежень в системі (2) вихідної задачі, а число обмежень у системі (5) двоїстої задачі – числу змінних у вихідній задачі;

4) коефіцієнтами при невідомих у цільовій функції F задачі (4)–(6) є вільні члени з обмежень (2), а правими частинами у співвідношеннях системи (5) двоїстої задачі – коефіцієнти при невідомих у цільовій функції (1) вихідної задачі;

5) всі умови в системі (5) двоїстої задачі (4)–(6) є нерівністями вигляду " $\geq$ ", бо в умовах (3) всі $x_j \geq 0$. Якщо деяка j-а змінна в умовах (3) $x_j \leq 0$, то j-е співвідношення у системі (5) було б нерівністю вигляду " $\leq$ "; якщо ж змінна x_j довільного знаку, то j-е співвідношення у системі (5) було б рівнянням. Аналогічний зв'язок (тільки протилежний за знаком) існує між i-им співвідношенням в системі (2) та умовою в (6) на i-у змінну y_i двоїстої задачі.

У випадку загальної постановки задачі лінійного програмування

$$f = \sum_{j=1}^{m} c_j x_j \to \max;$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i \in \{1, \ldots, m_1\}, \quad m_1 \leq m; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i \in \{m_1+1, \ldots, m\}; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, \ldots, n_1\}, \quad n_1 \leq n,$$

двоїстою до неї є задача

$$F = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min;$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \geq c_j, \quad j \in \{1, \ldots, n_1\}, \quad n_1 \leq n; \\ \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}y_i = c_j, \quad j \in \{n_1+1, \ldots, n\}; \end{cases}$$

$$y_i \geq 0, \quad i \in \{1, \ldots, m_1\}, \quad m_1 \leq m.$$

Зауважимо, що співвідношення двоїстості взаємне, тобто задача, двоїста щодо двоїстої, збігається з вихідною.

Кожна із задач (1)–(3) і (4)–(6) є окремою задачею лінійного програмування, і її можна розв'язувати незалежно від другої. Виявляється, що, розв'язавши одну з них, ми тим самим знайдемо розв'язок другої. При цьому використовуються властивості розв'язків прямої і двоїстої задач, які ми сформулюємо для випадку симетричної пари двоїстих задач.

Теорема 1 (перша теорема двоїстості). Якщо одна з задач двоїстої пари має розв'язок, то друга задача також має розв'язок. При цьому для довільних оптимальних планів $X^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$, $Y^* = (y_1^*, \ldots, y_m^*)$ даних задач правильна рівність

$$f(X^*) = F(Y^*).$$

Наслідок 1. Для розв'язності однієї з задач двоїстої пари необхідно і досить, щоб кожна з них мала принаймні один розв'язок.

Наслідок 2. Якщо цільова функція однієї з задач двоїстої пари необмежена, то друга задача не має розв'язку.

Наслідок 3. Для оптимальності планів $X^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ і $Y^* = (y_1^*, \ldots, y_m^*)$ пари двоїстих задач необхідно і достатньо виконання рівності

$$f(X^*) = F(Y^*).$$

Теорема 2 (друга теорема двоїстості). План $X^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ задачі (1)–(3) і план $Y^* = (y_1^*, \ldots, y_m^*)$ задачі (4)–(6) є оптимальними планами цих задач тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{aligned} &(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j) x_j^* = 0, \quad j \in \{1, \ldots, n\}; \\ &y_i^* (b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*) = 0, \quad i \in \{1, \ldots, m\}. \end{aligned} \tag{7}$$

Теорема правильна і для несиметричної двоїстої пари задач. Вона дозволяє знайти оптимальний розв'язок однієї з пари задач за розв'язком другої.

Якщо число змінних в прямій або двоїстій задачі дорівнює двом, то, використовуючи геометричну інтерпретацію задачі лінійного програмування, можна графічно знайти розв'язок однієї з них, а далі, використовуючи попередні властивості, визначити розв'язок другої. При цьому має місце один з трьох випадків: 1) обидві задачі мають плани; 2) плани має лише одна задача; 3) для кожної задачі двоїстої пари множина планів є порожньою.

Приклад 1. Нехай вихідна задача має вигляд

$$f = 2x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 \to \max; \tag{8}$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - x_4 \le 5, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 6; \end{cases} \tag{9}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \le 0. \tag{10}$$

Записати двоїсту до неї.

◁ Двоїстою до задачі (8)–(10) є задача

$$F = 5y_1 + 6y_2 \to \min; \tag{11}$$

$$\begin{cases} 3y_1 - 2y_2 \geq 2, \\ -4y_1 + y_2 \geq -1, \\ 2y_1 - y_2 \leq 1, \\ -y_1 + 2y_2 = 5; \end{cases} \tag{12}$$

$$y_1 \geq 0. \tag{13}$$

Зробимо пояснення щодо побудови задачі (11)–(13). Кількість змінних x_j у (9) вимагає стільки ж умов-обмежень у двоїстій задачі, а коефіцієнти стовпчиків вихідної задачі стають коефіцієнтами умов-обмежень у двоїстій задачі. Оскільки $f \to \max$,то $F \to \min$. Коефіцієнти цільової функції f стають вільними членами в системі обмежень двоїстої задачі, а вільні члени з (9) – коефіцієнтами цільової функції F. Формуючи умови-обмеження двоїстої задачі, змінну y_1 множимо на коефіцієнти першої умови з (9), змінну y_2 – на коефіцієнти другої умови з (9). Вигляд умов-обмежень з (9) диктує обмеження на знаки y_1 і y_2, але при цьому ще слід врахувати, чи максимізується, чи мінімізується функція f. Оскільки в нас $f \to \max$ і перша умова в (9) " $\leq$ ", то на y_1 треба накласти умову $y_1 \geq 0$. Якщо б перше обмеження в (9) було типу " $\geq$ ", то слід було б вимагати $y_1 \leq 0$, а якщо б перша умова в (9) була б рівнянням, то на y_1 не накладалася б умова щодо знака. Враховуючи сказане, а також те, що в (9) друга умова-обмеження є рівнянням, на y_2 не накладаємо вимогу щодо знака.

Умови-обмеження у двоїстій задачі формуються так. Перше обмеження у спряженій задачі складається за коефіцієнтами першого стовпчика в (9), який відповідає змінній x_1. Щоб визначити вигляд першої умови-обмеження, слід з'ясувати, якими є вимоги щодо знака x_1 у (10). Бачимо, що $x_1 \geq 0$, а це означає, що перша умова-обмеження у двоїстій задачі буде нерівністю вигляду " $\geq$ ". Але якби в (10) вимагалося $x_1 \leq 0$, то перша умова у двоїстій задачі також була б нерівністю, але вигляду " $\leq$ ". У тому випадку, коли на x_1 у (10) не накладалася би умова на знак, то перша умова-обмеження у двоїстій задачі подавалася б у вигляді рівняння. Виходячи з цих рекомендацій, другу умову-обмеження у двоїстій задачі запишемо у вигляді нерівності " $\geq$ ", третю – " $\leq$ " і четверту – " $=$ ". ▷

<u>**Приклад 2.**</u> Побудувати двоїсту задачу до даної

$$f = 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 - 5x_5 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 - 2x_5 \le 12, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 11, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 \qquad - x_5 \ge 10, \\ \qquad 2x_2 \qquad + 3x_4 \qquad \le 15; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0.$$

◁ Щоб побудувати задачу, двоїсту до даної, впорядкуємо вихідну задачу. Оскільки треба знайти максимум цільової функції, то обмеження-нерівності повинні бути записані із знаком " $\le$ ". Помноживши третю нерівність на (-1), зведемо систему обмежень до вигляду

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 - 2x_5 \le 12, \\ -4x_1 + x_2 - 5x_3 \qquad + x_5 \le -10, \\ \qquad 2x_2 \qquad + 3x_4 \qquad \le 15, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 11. \end{cases}$$

Двоїста задача матиме чотири змінні y_1, y_2, y_3, y_4, оскільки вихідна задача містить чотири обмеження. У відповідності з вказаними правилами запишемо двоїсту задачу

$$F = 12y_1 - 10y_2 + 15y_3 + 11y_4 \to \min;$$

$$\begin{cases} 2y_1 - 4y_2 \qquad + y_4 \ge 3, \\ 3y_1 + y_2 + 2y_3 + 2y_4 = 4, \\ 4y_1 - 5y_2 \qquad + 3y_4 \ge -1, \\ -y_1 \qquad + 3y_3 + 2y_4 \ge 2, \\ -2y_1 + y_2 \qquad - 3y_4 = -5; \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0.$$

Друге і п'яте обмеження двоїстої задачі записані у вигляді рівності, оскільки на їм змінні x_2 і x_5, що їм відповідають, у вихідній задачі не накладено умову невід'ємності. На змінні y_1, y_2, y_3 накладено умови невід'ємності у зв'язку з тим, що у вихідній задачі їм відповідають обмеження-нерівності. ▷

Приклад 3. Знайти розв'язок прямої задачі, графічно розв'язавши двоїсту до неї:

$$f = 15x_1 + 6x_2 + 4x_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 9, \\ 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 25; \end{cases}$$

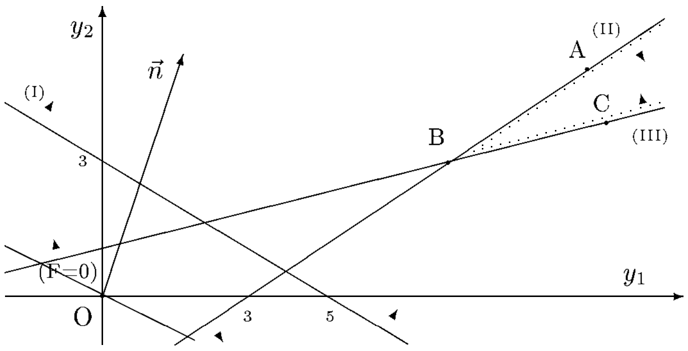
$$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, 2, 3\}.$$

◁ Двоїста задача має вигляд

$$F = 9y_1 + 25y_2 \to \min;$$

$$\begin{cases} 3y_1 + 5y_2 \geq 15, \\ 2y_1 - 3y_2 \geq 6, \\ -y_1 + 4y_2 \geq 4. \end{cases}$$

Графічне розв'язання двоїстої задачі подамо на рисунку.



Многокутником розв'язків є кут ABC. Оптимальний розв'язок досягається в точці B, координати якої одержимо, розв'язавши систему двох рівнянь

$$\begin{cases} 2y_1 - 3y_2 = 6, \\ -y_1 + 4y_2 = 4. \end{cases}$$

Маємо $y_1 = 7,2; y_2 = 2,8$, тобто $Y^* = (7,2; 2,8); F_{\min} = 134,8$. Підставляючи одержаний розв'язок у систему обмежень двоїстої задачі, знаходимо

$$3 \cdot 7,2 + 2,8 \cdot 5 = 35,6 > 15,$$

$$2 \cdot 7,2 - 3 \cdot 2,8 = 6,$$

$$-7,2 + 4 \cdot 2,8 = 4.$$

Перше обмеження задовольняється як строга нерівність, отже, згідно з другою теоремою двоїстості змінна $x_1 = 0$. Підставляючи $x_1 = 0$ у вихідну систему, знаходимо

$$\begin{cases} 2x_2 - x_3 = 9, \\ -3x_2 + 4x_3 = 25; \end{cases}$$

звідки $x_2 = 12,2; x_3 = 15,4$. Тому $X^* = (0; 12,2; 15,4)$, $f_{\max} = 134,8$. ▷

Вправи

О1. До даних задач побудувати двоїсті:

1) $f = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \to \max;$
$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 12, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 24, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 18; \end{cases}$$
$x_j \geq 0, j \in \{1, 2, 3\};$

2) $f = 4x_1 + x_2 - 4x_3 \to \max;$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 12, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 13, \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 \leq 11; \end{cases}$$
$x_j \geq 0, j \in \{1, 2, 3\};$

3) $f = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7; \end{cases}$$
$x_j \geq 0, j \in \{1, \ldots, 4\};$

4) $f = 3x_1 + 4x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 10, \\ x_1 + x_5 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_6 = 12; \end{cases}$$
$x_j \geq 0, j \in \{1, \ldots, 6\};$

5) $f = x_1 - 5x_2 \to \min;$
$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \leq 9, \\ 2x_1 + x_2 \geq 10, \\ -x_1 + 4x_2 \geq 2; \end{cases}$$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0;$

6) $f = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 6, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 9, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 11; \end{cases}$$
$x_1 \geq 0, x_3 \geq 0.$

О2. Побудувати двоїсту задачу і, розв'язавши графічно одну з них, записати розв'язок другої задачі:

1) $f = 2x_1 + 7x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \leq 14, \\ x_1 + x_2 \leq 8; \end{cases}$$
$x_j \geq 0, j \in \{1, 2\};$

2) $f = -2x_1 - 3x_2 \to \min;$
$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ x_1 + x_2 \geq 6; \end{cases}$$
$x_j \geq 0, j \in \{1, 2\};$

3) $f = -2x_1 + x_2 + 5x_3 \to \max;$
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 12, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 18; \end{cases}$$
$x_j \geq 0, j \in \{1, \ldots, 4\};$

4) $f = 4x_1 + 24x_2 + 20x_3 +$
$+6x_4 \to \min;$
$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 2, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 \geq 5; \end{cases}$$
$x_j \geq 0, j \in \{1, \ldots, 4\};$

5) $f = 4x_1 + 6x_2 + 9x_3 + {}$
$+6x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 \qquad + x_3 + 3x_4 \le 30, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 20; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, j \in \{1, \ldots, 4\};$

6) $f = 3x_1 + x_2 + 4x_3 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 6, \\ 3x_1 - x_2 \qquad + 2x_4 \qquad \le 11; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, j \in \{1, \ldots, 5\}.$

<u>С1.</u> За допомогою графічного методу знайти оптимальні розв'язки пари двоїстих задач:

1) $f = -3x_1 + x_2 - 3x_3 - {}$
$-2x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} -5x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 \le -1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 \le 2; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, j \in \{1, \ldots, 4\};$

2) $f = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad = 10, \\ -x_1 + 4x_2 \qquad + x_4 = 8; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, j \in \{1, \ldots, 4\};$

3) $f = -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - {}$
$-x_4 \to \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \qquad + x_4 - x_5 = 18, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 \qquad \ge -8; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, j \in \{1, \ldots, 5\};$

4) $f = 2x_1 + 2x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + x_3 \qquad = 24, \\ 6x_1 + 6x_2 \qquad + x_4 = 30; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, j \in \{1, \ldots, 4\};$

5) $f = 3x_1 - x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 6, \\ x_1 + x_5 = 6, \\ x_2 + x_6 = 6; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, j \in \{1, \ldots, 6\}.$

<u>Домашнє завдання</u>

<u>Д1.</u> Побудувати двоїсті задачі до даних:

1) $f = 2x_1 + 3x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4, \\ 3x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_1 + 5x_2 \ge 4, \\ 0 \le x_1 \le 3, \\ 0 \le x_2 \le 3; \end{cases}$$

2) $f = x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \to \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \ge 3, \\ x_1 \qquad - x_3 \qquad \le 4; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, j \in \{1, 2\};$

3) $f = x_1 - 2x_2 + 5x_3 \to \max;$
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 18, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \le 20, \\ 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 \ge 19; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, j \in \{1, 2, 3\};$

4) $f = 6x_1 - x_2 + 3x_3 \to \max;$
$$\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + 5x_3 \le 15, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 16, \\ 6x_1 + 5x_2 - 8x_3 \le 12; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, j \in \{1, 2, 3\};$

5) $f = 2x_1 + 5x_2 \to \min;$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 4, \\ -x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + 2x_2 \le 14, \\ -x_1 + 3x_2 \ge 5; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, j \in \{1, 2\}.$

6) $f = 7x_1 + x_2 - x_4 + 2x_5 \to \max;$
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 + x_5 \le -1, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 5x_5 \le 3, \\ x_2 + 5x_3 \qquad - 6x_5 = 2; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$

Д2. Записати двоїсту задачу до даної і, графічно розв'язавши одну з них, знайти розв'язок іншої:

1) $f = 6x_1 + 8x_2 + x_3 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 3, \\ x_1 + 2x_2 \qquad \le 4; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, j \in \{1, 2, 3\};$

2) $f = 27x_1 + 10x_2 + 15x_3 + 28x_4 \to \max;$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 2, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 \le 5; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, j \in \{1, \ldots, 4\};$

3) $f = 6x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 \to \max;$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 5x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, j \in \{1, \ldots, 4\};$

4) $f = -5x_1 + x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \qquad = 8, \\ -5x_1 + x_2 \quad + x_4 \quad = 5, \\ x_1 - 4x_2 \qquad + x_5 = 4; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, j \in \{1, \ldots, 5\};$

5) $f = x_1 + 3x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \qquad = 1, \\ x_1 - x_2 \quad + x_4 \quad = 5, \\ x_1 + x_2 \qquad + x_5 = 2; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, j \in \{1, \ldots, 5\};$

6) $f = 2x_1 + 5x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad = 12, \\ x_1 + x_2 \qquad + x_4 \quad = 9, \\ 3x_1 - 2x_2 \qquad + x_5 = 12; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, j \in \{1, \ldots, 5\};$

7) $f = 2x_1 + x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad = 6, \\ 2x_1 + 6x_2 \quad + x_4 \quad = 12, \\ x_1 \qquad\qquad + x_5 = 2; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, j \in \{1, \ldots, 5\};$

8) $f = -2x_1 + 8x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad = 12, \\ 2x_1 - x_2 \quad + x_4 \quad = 0, \\ -3x_1 + 2x_2 \qquad + x_5 = 3; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, j \in \{1, \ldots, 5\}.$

Відповіді

О2. 1) $X^* = (2;6)$, $Y^* = (1;4)$, $f_{\max} = F_{\min} = 46$; 2) У прямої задачі цільова функція необмежена знизу, а у двоїстої множина планів є порожньою. 3) $X^* = (3;0;0;0)$, $Y^* = (\frac{19}{7} + \frac{9}{7}\lambda; -\frac{15}{7} - \frac{6}{7}\lambda)$, $0 \leq \lambda \leq 1$, $f_{\max} = F_{\min} = -6$; 4) $X^* = (0;2/3;0;11/3)$, $Y^* = (4;6)$, $f_{\min} = F_{\max} = 38$; 5) $X^* = (14;0;2;0)$, $Y^* = (3/5;14/5)$, $f_{\max} = F_{\min} = 74$; 6) $X^* = (0;0;23/6;11/2;0)$, $Y^* = (4/3;2/3)$, $f_{\max} = F_{\min} = 46/3$. **С1.** 1) $X^* = (3/7;8/7;0;0)$, $Y^* = (5/7;2/7)$, $f_{\max} = F_{\min} = -1/7$; 2) $X^* = (0;0;10;8)$, $Y^* = (4;0)$, $f_{\max} = F_{\min} = 40$; 3) немає розв'язку; 4) $X^* = \lambda X_1^* + (1-\lambda)X_2^*$, $X_1^* = (3;2;0;0)$, $X_2^* = (5;0;4;0)$, $0 \leq \lambda \leq 1$, $Y^* = (0;1/3)$, $f_{\max} = F_{\min} = 10$; 5) $X^* = (6;2;20;0;0;4)$, $Y^* = (0;1/3;7/3;0)$, $f_{\max} = F_{\min} = 16$. **Д2.** 1) $X^* = (2;1;0)$, $Y^* = (4;2)$, $f_{\max} = F_{\min} = 20$; 2) $X^* = (0;0;1;1/2)$, $Y^* = (12;1)$, $f_{\max} = F_{\min} = 29$; 3) $X^* = (0;4;0;0)$, $Y^* = (-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\lambda; \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\lambda)$, $0 \leq \lambda \leq 1$, $f_{\max} = F_{\min} = 4$; 4) $X^* = (0;5;3;0;24)$, або $X^* = (1/2;15/2;0;0;67/2)$, $Y^* = (0;1;0)$, $f_{\max} = F_{\min} = 5$; 5) $X^* = (1/2;3/2;0;2;0)$, $Y^* = (1;0;2)$, $f_{\max} = F_{\min} = 5$; 6) $X^* = (3;6;0;0;15)$, $Y^* = (3/5;16/5;0)$, $f_{\max} = F_{\min} = 36$; 7) $X^* = (2;4/3;4;0;0)$, $Y^* = (0;1/6;5/3)$, $f_{\max} = F_{\min} = 16/3$; 8) $X^* = (6;1;22;0;0)$, $Y^* = (0;2/3;4/3)$, $f_{\max} = F_{\min} = 8$.

Тема 8. Розв'язування пари двоїстих задач симплексним методом. Двоїстий симплексний метод

Розглянемо пару двоїстих задач. Нехай вихідна задача лінійного програмування має вигляд

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max; \tag{1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \qquad ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m; \end{cases} \tag{2}$$

$$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, ..., n\}. \tag{3}$$

Тоді двоїстою для неї є задача

$$F = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m \to \min; \tag{4}$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \ge c_2, \\ \qquad ... \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m \ge c_n; \end{cases} \tag{5}$$

$$y_i \ge 0, \quad i \in \{1, ..., m\}. \tag{6}$$

Якщо одна з задач (1)–(3) або (4)–(6) розв'язується графічно, то, використовуючи теореми двоїстості, можна знайти розв'язок іншої.

Однак не завжди одну із пари двоїстих задач можна розв'язати графічно. Тоді використовують загальніший підхід, який грунтується на використанні симплексного методу. Нехай задача (1)–(3) розв'язана за допомогою симплекс-методу і знайдено оптимальний план $X^* = (x_1^*, ..., x_n^*)$, який визначається базисом, утвореним векторами $A_{i_1}, ..., A_{i_m}$. Позначимо через $C_\delta = (c_{i_1}, ..., c_{i_m})$ вектор-рядок, складений з коефіцієнтів при невідомих у цільовій функції задачі (1)–(3), які відповідають даному базису, а через A^{-1} матрицю, обернену до матриці A, складеної з компонент векторів $A_{i_1}, ..., A_{i_m}$ базису. Доводиться, що вектор $Y^* = C_\delta A^{-1}$ є оптимальним планом двоїстої задачі (4)–(6).

Отже, якщо знайдено за допомогою симплекс-методу оптимальний план задачі (1)–(3), то з останньої симплексної таблиці знайдемо C_δ і A^{-1}, і, отже, за допомогою співвідношення $Y^* = C_\delta A^{-1}$ одержимо оптимальний план задачі (4)–(6).

Якщо ми маємо канонічну задачу лінійного програмування і двоїсту до неї, то у випадку, коли серед векторів $A_1, ..., A_n$ складених з коефіцієнтів при невідомих у системі обмежень прямої задачі, є m одиничних, указану матрицю A^{-1} утворюють числа перших m рядків останньої симплексної таблиці, які стоять у стовпчиках даних векторів. Тоді відпадає необхідність визначати оптимальний план двоїстої задачі множенням C_δ на A^{-1}, оскільки компоненти цього плану збігаються з відповідними елементами $(m + 1)$-го рядка одиничних векторів, якщо даний коефіцієнт $c_j = 0$, і дорівнюють сумі відповідного елемента цього рядка і c_j, якщо $c_j \neq 0$.

У випадку задачі (1)–(3), компоненти оптимального плану двоїстої задачі (4)–(6) збігаються з відповідними числами $(m + 1)$-го рядка останньої симплексної таблиці розв'язування прямої задачі. Указані числа стоять у стовпчиках векторів, що відповідають додатковим змінним.

Приклад 1. Для задачі

$$f = x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 12, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 17, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4; \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, 2, 3\}$$

записати двоїсту і знайти розв'язки обох задач.

$\triangleleft$ Двоїста задача до даної має вигляд

$$F = 12y_1 + 17y_2 + 4y_3 \to \min;$$
$$\begin{cases} -y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 1, \\ 4y_1 + y_2 - y_3 \geq 2, \\ -2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq -1; \end{cases}$$
$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0.$$

Розв'яжемо пряму задачу за допомогою М-методу. Для цього розглянемо розширену задачу

$$\bar{f} = x_1 + 2x_2 - x_3 - Mx_6 \to \max;$$
$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 12, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 17, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_6 = 4; \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1,..,6\}.$$

Розв'язання подамо у вигляді симплексних таблиць.

i	Б	C_δ	A_0	$\frac{1}{A_1}$	$\frac{2}{A_2}$	$\frac{-1}{A_3}$	$\frac{0}{A_4}$	$\frac{0}{A_5}$	$\frac{-M}{A_6}$
1	A_4	0	12	-1	4	-2	1	0	0
2	A_5	0	17	1	1	2	0	1	0
3	A_6	$-M$	4	$\boxed{2}$	-1	2	0	0	1
$m+1$			0	-1	-2	1	0	0	0
$m+2$			-4	-2	1	-2	0	0	0
1	A_4	0	14	0	$\boxed{7/2}$	-1	1	0	$1/2$
2	A_5	0	15	0	$3/2$	1	0	1	$-1/2$
3	A_1	1	2	1	$-1/2$	1	0	0	$1/2$
$m+1$			0	2	$-5/2$	2	0	0	$1/2$
1	A_2	2	4	0	1	$-2/7$	$2/7$	0	$1/7$
2	A_5	0	9	0	0	$10/7$	$-3/7$	1	$-5/7$
3	A_1	1	4	1	0	$6/7$	$1/7$	0	$4/7$
$m+1$			12	0	0	$9/7$	$5/7$	0	$6/7$

Отже, оптимальний план прямої задачі $X^* = (4; 4; 0)$, а $f_{\max} = 12$. Оптимальний план двоїстої задачі знаходимо з останньої симплексної таблиці. Координати цього плану знаходяться в $(m+1)$-у рядку цієї таблиці у стовпчиках A_4, A_5, A_6, які утворюють початковий базис. Маємо $Y^* = (5/7; 0; 6/7)$, а $F_{\min} = f_{\max} = 12$. $\triangleright$

__**Двоїстий симплекс-метод.**__ Симплекс-метод застосовується при розв'язуванні задач з невід'ємними правими частинами b_i системи умов – обмежень і довільними за знаком Δ_j. Інколи буває легше знайти базис, який задовольняє умову оптимальності (всі $\Delta_j \geq 0$), але не задовольняє критерій допустимості, оскільки не всі $b_i \geq 0$. Варіант симплекс-методу, який застосовується при розв'язуванні таких задач, називається двоїстим симплекс-методом. З його допомогою розв'язуються задачі лінійного програмування

$$\begin{gathered} f = CX \to \max; \\ AX = A_0; \\ X \geq 0, \end{gathered}$$

де матриця A містить одиничний базис і всі $\Delta_j \geq 0$, $j \in \{1, ..., n\}$. При цьому умова $b_i \geq 0, i \in \{1, ..., m\}$, не вимагається. Таку задачу ми називатимемо задачею у двоїстій базисній формі. Для неї можливий один з таких випадків.

__**Випадок 1.**__ Усі координати вектора обмежень A_0 невід'ємні, тобто $b_i \geq 0$, $i \in \{1, ..., m\}$. Тоді ми маємо не тільки допустимий, але й оптимальний план задачі, оскільки за припущенням усі $\Delta_j \geq 0$, $j \in \{1, ..., n\}$.

__**Випадок 2.**__ У стовпчику A_0 є елемент $b_i < 0$, і в цьому i-му рядку всі $a_{ij} \geq 0$, $j \in \{1, ..., n\}$. Тоді задача нерозв'язна, оскільки система обмежень несумісна.

__**Випадок 3.**__ Існує рядок r такий, що $b_r < 0$ і $a_{rj} < 0$ принаймні для одного $j \in \{1, ..., n\}$. Нехай s таке, що $a_{rs} < 0$ і

$$\frac{\Delta_s}{a_{rs}} = \min_{a_{rj}<0, \Delta_j \geq 0} \left(\frac{-\Delta_j}{a_{rj}} \right).$$

Тоді жорданове перетворення з провідним елементом a_{rs} приводить до еквівалентної задачі, у якій, по-перше, всі $\Delta_j \geq 0$, $j \in \{1, ..., n\}$, а по-друге, значення цільової функції не збільшилося.

Застосування двоїстого симплекс-методу до задачі в двоїстій базисній формі здійснюється за такою схемою.

1. Перевіряємо знаки елементів стовпчика A_0. Якщо всі $b_i \geq 0$, $i \in \{1, ..., m\}$, то має місце випадок 1. Базисний розв'язок і значення цільової функції, які записані в стовпчику A_0, дають оптимальний розв'язок вихідної задачі. Якщо не всі $b_i \geq 0$, переходимо до кроку 2.

2. Серед від'ємних коефіцієнтів b_i вибираємо коефіцієнт b_r, найбільший за абсолютною величиною і рядок r називаємо провідним.

3. У провідному рядку перевіряємо знаки всіх коефіцієнтів a_{rj}, $j \in \{1, ..., n\}$. Якщо всі $a_{rj} \geq 0$, має місце випадок 2, тобто задача не має розв'язку. Якщо знайдеться принаймні один коефіцієнт $a_{rj} < 0$, то має місце випадок 3. Переходимо до наступного кроку.

4. Серед від'ємних коефіцієнтів a_{rj} провідного рядка вибираємо елемент a_{rs}, для якого

$$\frac{\Delta_s}{a_{rs}} = \min_{a_{rj}<0, \Delta_j \geq 0} \left(-\frac{\Delta_j}{a_{rj}} \right),$$

і назвемо його провідним.

5. Виконуємо жорданове перетворення симплексної таблиці з провідним елементом a_{rs} і переходимо до кроку 1.

Двоїстий симплексний метод зручно використовувати також і при розв'язуванні задач, які володіють одиничним базисом, але не належать до задач у базисній або двоїстій базисній формі, оскільки є від'ємні елементи як серед b_i, $i \in \{1, ..., m\}$, так і серед Δ_j, $j \in \{1, ..., n\}$ одночасно. Розв'язок такої задачі складається з двох етапів: спочатку за допомогою двоїстого симплекс-методу виключаються всі $b_i < 0$, потім оптимальний план знаходиться звичайним симплексним методом. Треба лише на першому етапі змінити крок 4 на крок $4'$.

$4'$. Серед від'ємних коефіцієнтів a_{rj} провідного рядка вибираємо елемент a_{rs}, для якого $\frac{b_r}{a_{rs}} = \max\limits_{a_{rj}<0} \frac{b_r}{a_{rj}}$.

<u>Приклад 2.</u> Розв'язати задачу

$$f = 8x_1 + 2x_2 - 5x_3 \to \max;$$
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 \geq 3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 2; \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, 2, 3\}.$$

$\triangleleft$ За допомогою додаткових невід'ємних змінних x_4, x_5, x_6 переходимо від обмежень-нерівностей до обмежень-рівностей і після множення першого і другого обмежень на (-1) остаточно одержимо

$$f = 8x_1 + 2x_2 - 5x_3 \to \max;$$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -6, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_5 = -3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 2; \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, ..., 6\}.$$

Заповнимо симплексну таблицю. Згідно з кроками 1 і 2 двоїстого алгоритму у першій симплекс-таблиці вибираємо провідний рядок – $r = 1$. Виконуючи крок $4'$, знайдемо $\max\left\{\frac{-6}{-2}; \frac{-6}{-1}\right\} = 6$, звідси – $s = 3$, і виконуємо жорданове перетворення з провідним елементом $a_{13} = -1$. Далі здійснюємо ще дві ітерації за правилом звичайного симплексного методу.

i	Б	C_δ	A_0	$\frac{8}{A_1}$	$\frac{2}{A_2}$	$\frac{-5}{A_3}$	$\frac{0}{A_4}$	$\frac{0}{A_5}$	$\frac{0}{A_6}$
1	A_4	0	-6	1	-2	$\boxed{-1}$	1	0	0
2	A_5	0	-3	-1	2	-2	0	1	0
3	A_6	0	2	2	1	-1	0	0	1
$m+1$			0	-8	-2	5	0	0	0
1	A_3	-5	6	-1	2	1	-1	0	0
2	A_5	0	9	-3	$\boxed{6}$	0	-2	1	0
3	A_6	0	8	1	3	0	-1	0	1
$m+1$			-30	-3	-12	0	5	0	0
1	A_3	-5	3	0	0	1	$-1/3$	$-1/3$	0
2	A_2	2	$3/2$	$-1/2$	1	0	$-1/3$	$1/6$	0
3	A_6	0	$7/2$	$\boxed{5/2}$	0	0	0	$-1/2$	1
$m+1$			-12	-9	0	0	1	2	0

i	Б	C_δ	A_0	$\frac{8}{A_1}$	$\frac{2}{A_2}$	$\frac{-5}{A_3}$	$\frac{0}{A_4}$	$\frac{0}{A_5}$	$\frac{0}{A_6}$
1	A_3	-5	3	0	0	1	$-1/3$	$-1/3$	0
2	A_2	2	11/5	0	1	0	$-1/3$	1/15	1/5
3	A_1	8	7/5	1	0	0	0	$-1/5$	2/5
$m+1$			3/5	0	0	0	1	1/5	18/5

Отже, оптимальний план задачі $X^* = (7/5; 11/5;\ 3; 0; 0; 0), f_{\max} = 3/5$. $\triangleright$

Вправи

О1. Записати двоїсту задачу щодо даної задачі лінійного програмування і, розв'язавши за допомогою симплекс-методу одну з них, знайти розв'язок другої.

1) $f = 14x_1 + 6x_2 + 22x_3 \to \max;$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 6x_3 \le 12, \\ 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 \le 27, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 6; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, 2, 3\};$

2) $f = 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 \to \max;$
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \le 18, \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \le 24, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 \le 36; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, 2, 3\};$

3) $f = 9x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 7x_4 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 \le 180, \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 210, \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_4 \le 800; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, ..., 4\};$

4) $f = -x_1 + 2x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 4, \\ x_2 + x_5 = 5; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, ..., 5\};$

5) $f = x_1 + 2x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 14, \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = 2; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, ..., 5\};$

6) $f = -x_1 - 3x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = -2; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, ..., 5\};$

7) $f = 4x_1 + 2x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \le 9, \\ 3x_1 - x_2 \le 15; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$

8) $f = x_1 - 2x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 - 4x_2 \le 2, \\ x_1 - x_2 \le 5; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$

9) $f = 2x_1 + 3x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 - 4x_2 \le 2, \\ x_1 - x_2 \le 5; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$

10) $f = 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 18, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 16, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 10; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

<u>O2.</u> Для виготовлення продукції двох типів $П_1$ і $П_2$ підприємство використовує чотири види сировини S_1, S_2, S_3, S_4. Норми витрат кожного виду сировини на одиницю продукції, її наявність на підприємстві, а також прибуток від реалізації одиниці продукції наведено у таблиці

Вид сировини	Норми витрат сировини на од. пр-ії		Запаси сировини
	$П_1$	$П_2$	
S_1	2	3	19
S_2	2	1	13
S_3	0	3	15
S_4	3	0	18
Прибуток	7	5	

Треба скласти такий план випуску продукції, при якому прибуток підприємства від реалізації продукції був би максимальним.

Записати двоїсту задачу до даної. Пряму задачу розв'язати графічно, а двоїсту – симплексним методом.

<u>O3.</u> Застосовуючи двоїстий симплекс-метод, знайти розв'язок даної та двоїстої щодо неї задачі:

1) $f = x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 - x_2 \ge 4, \\ x_1 + 2x_2 \ge 6; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, 2, 3\};$

2) $f = 2x_1 + 3x_2 + 5x_4 \to \max;$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 10, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_5 = 18; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, ..., 5\};$

3) $f = x_1 - x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 8, \\ x_1 - 2x_2 \le 6, \\ -x_1 + 2x_2 \le -2, \\ -x_1 - 2x_2 \le -2; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, 2\};$

4) $f = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 4, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 \ge 7; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, 2, 3\};$

5) $f = 3x_1 + 2x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 6, \\ 4x_1 + 3x_2 \ge 5, \\ x_2 \ge 1; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$

6) $f = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 - -x_5 \to \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 3; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, ..., 5\}.$

<u>С1.</u> Знайти розв'язок двоїстої задачі, використовуючи розв'язок вихідної задачі, одержаний симплексним методом:

1) $f = x_1 - 4x_2 + x_3 - -x_4 \to \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 8, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_4 = 9; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, ..., 4\};$

2) $f = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + +2x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} 5x_1 + 24x_2 - 7x_3 - x_4 = 41, \\ -x_1 - 2x_2 - 7x_3 + 3x_4 = 3; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, ..., 4\}.$

<u>С2.</u> Застосовуючи двоїстий симплекс-метод, знайти розв'язок даної та двоїстої до неї задач:

1) $f = 5x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_3 + x_4 = 16, \\ 6x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = 4; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, ..., 4\};$

2) $f = x_2 - 2x_3 - 3x_5 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 3; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, ..., 5\};$

3) $f = -3x_1 - 4x_2 - 5x_3 - 6x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 10x_4 \ge 200, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 \ge 300, \\ 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 \ge 400; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, ..., 4\};$

<u>Домашнє завдання</u>

<u>Д1.</u> Записати двоїсту задачу до даної задачі лінійного програмування і, розв'язавши за допомогою симплекс-методу одну з них, знайти розв'язок іншої:

1) $f = 3x_1 - 7x_2 - 4x_3 \to \min;$
$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 - 2x_3 \le 12, \\ -4x_1 - 4x_2 - 3x_3 \le 24, \\ 5x_1 + 5x_2 + 3x_3 \le 15; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, 2, 3\};$

2) $f = 3x_1 + 2x_5 - 5x_6 \to \max;$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_5 + 5x_6 = 30, \\ 4x_1 + x_3 + 2x_5 - 4x_6 = 28, \\ -3x_1 + x_4 - 3x_5 + 6x_6 = 24; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, ..., 6\};$

3) $f = x_1 + x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 6x_1 + x_2 + x_4 = 6; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, ..., 4\};$

4) $f = -2x_1 + x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ 4x_1 + x_2 + x_4 = 12; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, ..., 4\};$

5) $f = 3x_1 - x_2 + 6x_3 \to \max;$
$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_5 = 2; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, ..., 5\};$

6) $f = x_1 - x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 5; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

Д2. За допомогою двоїстого симплекс-методу знайти розв'язок даної та двоїстої до неї задачі:

1) $f = -4x_1 - 7x_2 - 8x_3 - 5x_4 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 \ge 4, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 6; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, ..., 4\};$

2) $f = -2x_1 - 8x_2 - x_3 - 5x_4 \to \max;$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \ge 18, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 \ge 24, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 \ge 30; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, ..., 4\};$

3) $f = x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 \to \max;$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 18, \\ -2x_2 + 3x_3 + x_4 \ge 24, \\ -x_1 + 4x_2 - x_4 \ge 12; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, ..., 5\};$

4) $f = 5x_1 + 18x_2 \to \min;$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_4 = -5, \\ x_1 - 4x_2 + x_5 = -8, \\ -3x_1 + x_2 - x_3 = -13; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, ..., 5\};$

5) $f = 8x_1 + 4x_2 - 2x_3 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 = 3, \\ -5x_1 - 3x_2 + x_3 = -10, \\ x_1 + 6x_2 - x_3 = 5; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, 2, 3\};$

6) $f = x_1 + 2x_2 \to \min;$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 3, \\ 2x_1 - 7x_2 \le 1, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

7) $f = -2x_1 + x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 - 3x_2 \ge 6, \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 3, \\ -x_1 + 3x_2 \le -5; \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, 2\}.$

<u>Відповіді</u>

О1. 1) $X^* = (3/2;0;3/2)$, $Y^* = (2;0;5)$, $f_{\max} = F_{\min} = 54$; 2) $X^* = (18;6;0)$, $Y^* = (7/9;0;13/9)$, $f_{\max} = F_{\min} = 66$; 3) $X^* = (95;210;0;0)$, $Y^* = (0;3/2;9/4)$, $f_{\max} = F_{\min} = 2115$; 4) $X^* = (0;5;3;9;0)$, $Y^* = (0;0;2)$, $f_{\max} = F_{\min} = 10$; 5) $X^* = (2;6;0;0;12)$, $Y^* = (0;1;0)$, $f_{\max} = F_{\min} = 14$; 6) $X^* = (0;1;3;4;0)$, $Y^* = (0;0;3/2)$, $f_{\max} = F_{\min} = -3$; 7) $Y^* = (0;5/2;1/2)$, $F_{\min} = 30$; 8) $Y^* = (0;1/3;2/3)$, $F_{\min} = 4$; 9) у двоїстої задачі система умов несумісна; 10) $X^* = (14;0;-4)$, $Y^* = (0;1;3)$, $f_{\max} = F_{\min} = 46$. **О2.** $X^* = (5;3)$, $Y^* = (3/4;11/4;0;0)$, $f_{\max} = F_{\min} = 50$. **О3.** 1) $X^* = (14/3;2/3;8/3)$, $Y^* = (2;1/3;2/3)$, $f_{\max} = F_{\min} = 32/3$; 2) система обмежень прямої задачі несумісна; 3) $X^* = (20/3;1/3)$, $Y^* = (1/6;5/6;0;0)$, $f_{\max} = F_{\min} = 19/3$; 4) $X^* = (3/2;5/2;0)$, $Y^* = (3/2;1/2)$, $f_{\min} = F_{\max} = 19/2$; 5) $X^* = (5/2;1)$, $f_{\min} = 19/2$; 6) $X^* = (3/5;4/5;0;0;0)$, $Y^* = (-7/5;2)$, $f_{\max} = F_{\min} = 18/5$. **С1.** 1) $X^* = (25;42;0;0)$, $Y^* = (-10;-7)$, $f_{\min} = F_{\max} = -143$; 2) у двоїстої задачі система обмежень несумісна. **С2.** 1) $X^* = (4;5;0;0)$, $Y^* = (13/8;-1/4)$, $f_{\max} = F_{\min} = 25$; 2) $X^* = (0;7;0;10;0)$, $Y^* = (1;2)$, $f_{\max} = F_{\min} = 7$; 3) $X^* = (200/3;100/3;0;0)$, $f_{\max} = -1000/3$. **Д1.** 1) $Y^* = (0;0;7/5)$, $F_{\max} = -21$; 2) $Y^* = (0;1;0)$, $F_{\min} = 28$; 3) $X^* = (0;6;0;0)$, $Y^* = (1;0)$, $f_{\max} = F_{\min} = 6$; 4) $X^* = (0;4;0;8)$, $Y^* = (1/3;0)$, $f_{\max} = F_{\min} = 4$; 5) $X^* = (0;1/20;11/20;0;0)$, $Y^* = (9/4;1/2)$, $f_{\max} = F_{\min} = 13/4$; 6)$X^* = (4;1)$, $Y^* = (0;2/3;1/3)$, $f_{\max} = F_{\min} = 3$. **Д2.** 1) $X^* = (3;0;0;1/2)$, $f_{\max} = -29/2$; 2) $X^* = (0;12;0;6)$, $f_{\max} = 126$; 3) $X^* = (0;3;10;0;19)$, $f_{\max} = 11$; 4) $X^* = (4;3;4;0;0)$, $Y^* = (-38/7;-41/7;0)$, $f_{\min} = F_{\max} = 74$; 5) $X^* = (23/7;2/7;0)$, $Y^* = (0;44/7;0;12/7)$, $f_{\max} = F_{\min} = 192/7$; 6) $X^* = (9/4;1/2)$, $Y^* = (0;1/20;11/20)$, $f_{\min} = F_{\max} = 13/4$; 7) система обмежень прямої задачі несумісна.

Тема 9. Задачі цілочислового програмування

Розглянемо задачу цілочислового програмування вигляду:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max; \tag{1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases} \tag{2}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, ..., n\}, \tag{3}$$

$$x_j - \text{ціле}, \; j \in \{1, ..., k\}, \; k \leq n. \tag{4}$$

Відомо багато економічних задач, математичні моделі яких мають вигляд (1)–(4). Це задачі, де всі або частина планованих товарів, ресурсів і т.п. виражається в цілих числах.

Очевидно, що задача (1)–(4) є складнішою, ніж задача лінійного програмування, бо вона містить додаткову умову (4). Тому оптимальне значення цієї задачі не більше, ніж відповідної задачі без умови цілочисловості (4).

Для розв'язування цілочислових задач використовують часто метод відсікання (відтинання), або, як його ще називають, метод Гоморі. Опишемо його спочатку для випадку, коли всі змінні цілочислові, тобто $k = n$.

Цілою частиною числа z називають найбільше ціле число, яке не перевищує z, і позначають символом $[z]$. Наприклад, $[1/3] = 0$, $[-2,3] = -3$, $[4] = 4$, $[-5] = -5$.

Дробовою частиною числа z називають різницю між z і його цілою частиною $[z]$, і позначають символом $\{z\}$. Наприклад, $\{-2,3\} = -2,3-(-3) = -2,3+3 = 0,7$; $\{4\} = 4-4 = 0$. Очевидно, що $0 \leq \{z\} < 1$, причому $\{z\} = 0$ тоді і тільки тоді, коли z – ціле число.

У методі Гоморі починають розв'язувати задачу (1)–(4), наприклад, за допомогою симплекс-методу. Якщо при цьому дістаємо оптимальний розв'язок, координати якого є цілими числами, то розв'язування задачі закінчено. Якщо ж необхідної цілочисловості немає, то будується відсікання, згідно з яким відсікається знайдений нецілочисловий результат, але в області допустимих розв'язків залишаються усі розв'язки з цілими координатами.

Нехай в оптимальному плані задачі (1)–(4) є дробові координати. Виберемо ту з них, дробова частина якої найбільша. Нехай це буде координата, що відповідає r – му рядку таблиці, в якій одержали оптимальний, але не цілочисловий результат. З допомогою коефіцієнтів цього рядка й будується відсікання

$$\{a_{r1}\}x_1 + \{a_{r2}\}x_2 + ... + \{a_{rn}\}x_n \geq \{b_r\},$$

яке із введенням додаткової (балансуючої) змінної $x_{n+1} \geq 0$ набуває вигляду

$$-\{a_{r1}\}x_1 - \{a_{r2}\}x_2 - ... - \{a_{rn}\}x_n + x_{n+1} = -\{b_r\}.$$

Це рівняння додається в останню таблицю для продовження розв'язування. Змінну x_{n+1} беремо за базисну і для неї вводимо додатковий стовпчик.

До нової таблиці з додатково введенним рядком застосовуємо симплексні процедури. Цей рядок беремо за провідний, а розв'язувальний елемент вибираємо за двоїстим симплексним методом.

Якщо
в черговій таблиці знову деякі компоненти оптимального плану є дробовими, то знову будуємо відсікання з додатковою змінною x_{n+2} і процес обчислень повторюємо.

Провівши скінченне число ітерацій, або одержуємо оптимальний план задачі (1)–(4), або встановлюємо її нерозв'язність. Останнє має місце тоді, коли в рядку з дробовим b_s усі a_{is} цілі, $i \in \{1, ..., m\}$.

Приклад 1. Розв'язати задачу

$$f = 3x_1 + 2x_2 \to \max;$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 13, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 6, \\ -3x_1 + x_2 + x_5 = 9; \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad x_j \in \mathbb{Z}, \quad j \in \{1, ..., 5\}.$$

◁ Розв'язуватимемо задачу симплексним методом

i	Б	C_δ	A_0	$\frac{3}{A_1}$	$\frac{2}{A_2}$	$\frac{0}{A_3}$	$\frac{0}{A_4}$	$\frac{0}{A_5}$
1	A_3	0	13	1	1	1	0	0
2	A_4	0	6	$\boxed{1}$	-1	0	1	0
3	A_5	0	9	-3	1	0	0	1
$m+1$			0	-3	-2	0	0	0
1	A_3	0	7	0	$\boxed{2}$	1	-1	0
2	A_1	3	6	1	-1	0	1	0
3	A_5	0	27	0	-2	0	3	1
$m+1$			18	0	-5	0	3	0
1	A_2	2	7/2	0	1	1/2	$-1/2$	0
2	A_1	3	19/2	1	0	1/2	1/2	0
3	A_5	0	34	0	0	1	2	1
$m+1$			71/2	0	0	5/2	1/2	0

Умова оптимальності виконується, бо всі $\Delta_j \geq 0$, $j \in \{1, ..., 5\}$, але в стовпчику A_0 є дробові елементи. Дробові частини обох цих елементів однакові й дорівнюють 1/2. Тому додаткове обмеження можна скласти для першого або для другого рядка. Зробимо це для другого рядка.

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 + 0 \cdot x_5 \geq \frac{1}{2},$$

або

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 - x_3 - x_4 + 0 \cdot x_5 + x_6 = -1.$$

Тепер маємо симплексну таблицю

i	Б	C_δ	A_0	$\frac{3}{A_1}$	$\frac{2}{A_2}$	$\frac{0}{A_3}$	$\frac{0}{A_4}$	$\frac{0}{A_5}$	$\frac{0}{A_6}$
1	A_2	2	7/2	0	1	1/2	$-1/2$	0	0
2	A_1	3	19/2	1	0	1/2	1/2	0	0
3	A_5	0	34	0	0	1	2	1	0
4	A_6	0	-1	0	0	-1	$\boxed{-1}$	0	1
$m+1$			71/2	0	0	5/2	1/2	0	0

i	Б	C_δ	A_0	$\frac{3}{A_1}$	$\frac{2}{A_2}$	$\frac{0}{A_3}$	$\frac{0}{A_4}$	$\frac{0}{A_5}$	$\frac{0}{A_6}$
1	A_2	2	4	0	1	1	0	0	$-1/2$
2	A_1	3	9	1	0	0	0	0	$1/2$
3	A_5	0	32	0	0	-1	0	1	2
4	A_4	0	1	0	0	1	1	0	-1
$m+1$			35	0	0	2	0	0	$1/2$

Розв'язувальний елемент у розширеній (четвертій) таблиці ми вибрали, використовуючи процедуру двоїстого симплексного методу.

З останньої симплексної таблиці одержуємо, що розв'язком даної задачі є $X^* = (9; 4; 0; 1; 32), f_{\max} = 35$. ▹

Якщо у задачі (1)–(4) не всі незалежні змінні є цілими, тобто $k < n$, то алгоритм розв'язування такої задачі відрізняється від попереднього лише тим, що не обов'язково зводити задачу до цілих коефіцієнтів та вільних членів перед введенням додаткових змінних та відсікання.

Нехай задачу розв'язано з допомогою симплекс-методу й знайдено оптимальний результат. Якщо компоненти змінних, на які накладено вимогу цілочисловості, є цілі, то задачу розв'язано.

У випадку наявності дробових компонент проводиться відсікання. Нехай для певної змінної, що на неї накладено вимогу цілочисловості, маємо дробовий результат b_s і організовуємо відсікання щодо s-го рядка. Дане відсікання запишемо у вигляді додаткового рядка з балансуючою змінною $x_{n+1} \geq 0$:

$$-\alpha_{s1}x_1 - \alpha_{s2}x_2 - ... - \alpha_{sn}x_n + x_{n+1} = -\{b_s\},$$

де $\alpha_{sj}, j \in \{1, ..., n\}$, – спеціально підраховні коефіцієнти. Для змінних x_j, на які не накладено вимог цілочисловості,

$$\alpha_{sj} = \begin{cases} a_{sj}, \text{ якщо } a_{sj} \geq 0, \\ \frac{\{b_s\}}{1-\{b_s\}}|a_{sj}|, \text{ якщо } a_{sj} < 0; \end{cases} \tag{5}$$

а для змінних x_j з вимогою цілочисловості

$$\alpha_{sj} = \begin{cases} \{a_{sj}\}, \text{ якщо } \{a_{sj}\} \leq \{b_s\}, \\ \frac{\{b_s\}}{1-\{b_s\}}(1 - \{a_{sj}\}), \text{ якщо } \{a_{sj}\} > \{b_s\}. \end{cases} \tag{6}$$

Додатково введений рядок беремо за розв'язувальний і після вибору розв'язувального елемента за правилом двоїстого симплекс-методу переходимо до нової симплексної таблиці. Якщо у відповіді є знову дробові компоненти, то робимо нове відсікання з додатковою змінною x_{n+2}. І так до тих пір, поки не одержимо відповідь з цілочисловими результатами для тих змінних, на які накладено вимогу цілочисловості.

Приклад 2. Розв'язати задачу частково цілочислового програмування

$$f = x_1 + 2x_2 \to \max;$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad = 13, \\ x_1 - x_2 \qquad + x_4 = 19/3; \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \ \ j \in \{1, ..., 4\}; \quad x_j \in \mathbb{Z}, \ \ j \in \{1, 2\}.$$

◃ Розв'яжемо за допомогою симплекс-методу задачу лінійного програмування

$$f = x_1 + 2x_2 \to \max;$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad = 13, \\ x_1 - x_2 \qquad + x_4 = 19/3; \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, ..., 4\}.$$

i	Б	C_δ	A_0	$\frac{1}{A_1}$	$\frac{2}{A_2}$	$\frac{0}{A_3}$	$\frac{0}{A_4}$
1	A_3	0	13	2	$\boxed{2}$	1	0
2	A_4	0	19/3	1	-1	0	1
$m+1$			0	-1	-2	0	0
1	A_2	2	13/2	1	1	1/2	0
2	A_4	0	77/6	2	0	1/2	1
$m+1$			13	1	0	1	0

Одержали, що умова оптимальності виконується, бо всі $\Delta_j \geq 0$, $j \in \{1, ..., 4\}$. У той же час оптимальний план $X^* = (0; 13/2; 0; 77/6)$ містить дві дробові компоненти і, зокрема, x_2, яка згідно з умовою задачі повинна бути цілочисловою. Для цієї змінної (першого рядка) складаємо додаткове обмеження, використовуючи формули (5) і (6):

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \frac{1}{2} x_3 + 0 \cdot x_4 \geq \frac{1}{2}.$$

Ввівши додаткову змінну $x_5 \geq 0$, перепишемо це обмеження у вигляді

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 - x_3 + 0 \cdot x_4 + x_5 = -1$$

і доповнимо ним останню симплексну таблицю.

i	Б	C_δ	A_0	$\frac{1}{A_1}$	$\frac{2}{A_2}$	$\frac{0}{A_3}$	$\frac{0}{A_4}$	$\frac{0}{A_5}$
1	A_2	2	13/2	1	1	1/2	0	0
2	A_4	0	77/6	2	0	1/2	1	0
3	A_5	0	-1	0	0	$\boxed{-1}$	0	1
$m+1$			13	1	0	1	0	0
1	A_2	2	6	1	1	0	0	1/2
2	A_4	0	37/3	2	0	0	1	1/2
3	A_3	0	1	0	0	1	0	-1
$m+1$			12	1	0	0	0	1

Процес розв'язування розширеної задачі відображено у поданій вище таблиці. З неї випливає, що $X^* = (0; 6; 1; 37/3)$ є оптимальним планом вихідної задачі і $f_{\max} = 12$. ▹

Вправи

О1. З допомогою методу відсікань Гоморі знайти повністю цілочисловий оптимальний розв'язок задач

1) $f = x_1 + 4x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 19/3, \\ x_1 + 3x_2 \le 4; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad x_j \in \mathbb{Z}, \quad j \in \{1, 2\};$

2) $f = -x_1 - x_2 \to \min;$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 5, \\ x_2 \le 2; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad x_j \in \mathbb{Z}, \quad j \in \{1, 2\};$

3) $f = -4x_1 - 10x_2 \to \min;$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 + 4x_2 - x_4 = 8, \\ 2x_2 + x_5 = 8; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \ x_j \in \mathbb{Z}, \ j \in \{1, ..., 5\};$

4) $f = 4x_1 + 5x_2 + x_3 \to \max;$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 + 4x_2 \le 11, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \le 13; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \ x_j \in \mathbb{Z}, \ j \in \{1, 2, 3\};$

5) $f = \quad x_4 - x_5 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 - x_4 + 7x_5 = 2, \\ x_2 + x_4 - 2x_5 = 3, \\ x_3 + x_4 + x_5 = 6; \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ x_j \in \mathbb{Z},\ j \in \{1, ..., 5\};$

6) $f = 4x_1 + 3x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + x_3 = 16, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_4 = 11; \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ x_j \in \mathbb{Z},\ j \in \{1, ..., 4\};$

7) $f = -6x_4 - 2x_5 \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 \qquad + 2x_4 + x_5 = 3, \\ \quad x_2 \quad - 3x_4 + 4x_5 = 2, \\ \qquad x_3 + x_4 - 2x_5 = 1; \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ x_j \in \mathbb{Z},\ j \in \{1, ..., 5\};$

8) $f = x_1 + 4x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 6; \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ x_j \in \mathbb{Z},\ j \in \{1, ..., 4\};$

9) $f = 3x_1 + 4x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_1 + 4x_2 \leq 10; \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ x_j \in \mathbb{Z},\ j \in \{1, 2\};$

10) $f = x_1 - 20x_2 \to \min;$
$$\begin{cases} -x_1 + 10x_2 \leq 40, \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 29; \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ x_j \in \mathbb{Z},\ j \in \{1, 2\};$

11) $f = 3x_1 + x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 3; \end{cases}$$
$x_j \geq 0, \quad x_j \in \mathbb{Z}, \quad j \in \{1, 2\}.$

<u>O2.</u> Виділено 20 тис. грн. для придбання обладнання двох типів A і B, яке треба розмістити на площі, що не перевищує 38 м^2. Кожний верстат типу A коштує 5 тис. грн, займає площу 8 м^2 і виробляє за змінну 7 тис. деталей, а кожний верстат типу B коштує 2 тис. грн, займає площу 4 м^2 і виробляє за зміну 3 тисячі деталей.

Треба придбати такий набір обладнання, щоб випуск продукції на ньому був максимальним.

<u>C1.</u> Застосовуючи метод Гоморі для частково цілочислових задач лінійного програмування, розв'язати задачі:

1) $f = x_1 + 2x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 7, \\ 10x_1 + 3x_2 + x_4 = 15; \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ j \in \{1, ..., 4\},$
$x_j \in \mathbb{Z},\ j \in \{1, 2\};$

2) $f = -x_1 + 3x_2 - 3x_3 \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + x_4 = 2, \\ -x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + x_5 = 1, \\ x_1 - \frac{3}{4}x_2 \qquad\qquad + x_6 = \frac{1}{2}; \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ j \in \{1, ..., 6\},$
$x_j \in \mathbb{Z},\ j \in \{1, 2, 3\}.$

С2. Підприємство може виробляти чотири типи продукції $P_j,\ j \in \{1, 2, 3, 4\}$, на виробництво яких витрачається три види ресурсів $S_i,\ i \in \{1, 2, 3\}$. Доход від реалізації виробу P_1 складає 2 тис. грн., виробу P_2 – 4 тис. грн., виробу P_3 і P_4 – по 1 тис. грн. Витрати на одиницю продукції наведено в таблиці

Ресурси	Витрати ресурсів на виріб				Запаси ресурсів
	P_1	P_2	P_3	P_4	
S_1	1	3	0	1	4
S_2	2	1	0	0	3
S_3	0	1	4	1	3

Треба знайти оптимальний план виробництва, при якому підприємство одержувало б максимальний доход.

Домашнє завдання

Д1. З допомогою відсікань Гоморі знайти повністю цілочисловий оптимальний план задач

1) $f = 6x_1 + 2x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 8, \\ x_1 \qquad\qquad + x_5 = 3, \\ \qquad x_2 \qquad + x_6 = 1; \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ x_j \in \mathbb{Z},\ j \in \{1, ..., 6\};$

2) $f = 7x_1 + x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 + x_3 = 110, \\ 11x_1 - 3x_2 - x_4 = 24, \\ 2x_1 - 7x_2 - x_5 = 15; \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ x_j \in \mathbb{Z},\ j \in \{1, ..., 5\};$

3) $f = 2x_1 + 3x_2 \to \min;$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 9, \\ 3x_1 - 4x_2 - x_4 = 3; \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ x_j \in \mathbb{Z},\ j \in \{1, ..., 4\};$

4) $f = 3x_1 + x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 8, \\ x_1 \leq 3, \\ x_2 \leq 1; \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ x_j \in \mathbb{Z},\ j \in \{1, 2\};$

5) $f = x_1 + x_2 + x_3 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_3 + x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 4; \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ x_j \in \mathbb{Z},\ j \in \{1, ..., 6\};$

6) $f = 2x_1 + 3x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq 34, \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 60, \\ x_2 \leq 8; \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ x_j \in \mathbb{Z},\ j \in \{1, 2\};$

7) $f = x_1 + 4x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 \leq 4, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 6; \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ x_j \in \mathbb{Z},\ j \in \{1, 2\};$

8) $f = x_1 + x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 5, \\ x_2 \leq 2; \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ x_j \in \mathbb{Z},\ j \in \{1, 2\};$

9) $f = x_1 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ 3x_1 - 8x_2 + x_4 = 24; \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ x_j \in \mathbb{Z},\ j \in \{1, ..., 4\};$

10) $f = x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3, \\ 2x_1 + x_2 \geq 1, \\ 2x_2 + 3x_3 \geq 4; \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ x_j \in \mathbb{Z},\ j \in \{1, 2, 3\};$

11) $f = 2x_1 + 4x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 19/3, \\ x_1 + 3x_2 \leq 10; \end{cases}$$
$x_j \geq 0, \quad x_j \in \mathbb{Z}, \quad j \in \{1, 2\}.$

Д2. Розв'язати частково цілочислові задачі

$$1)\ f = x_1 + 2x_2 \to \max;\quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 4, \\ x_2 \le 1; \end{cases}\quad x_j \ge 0,\quad j \in \{1,2\};\quad x_1 \in \mathbb{Z}.$$

$$2)\ f = x_1 + 3x_2 + x_3 \to \min;\quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \le 4, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 10, \\ x_2 + 2x_3 \le 6; \end{cases}\quad x_j \ge 0,\quad j \in \{1,2,3\};\quad x_j \in \mathbb{Z},\quad j \in \{1,3\};$$

$$3)\ f = 5x_1 + x_2 \to \max;\quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7/2, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 1; \end{cases}\quad x_j \ge 0,\quad j \in \{1,...,4\};\quad x_j \in \mathbb{Z},\quad j \in \{1,2\};$$

$$4)\ f = -x_1 + x_2 - 2x_3 \to \max;\quad \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \le 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 6, \\ -2x_1 + 6x_2 + \frac{5}{2}x_3 \le 5; \end{cases}\quad x_j \ge 0,\quad j \in \{1,2,3\};\quad x_j \in \mathbb{Z},\quad j \in \{2,3\}.$$

Відповіді

О1. 1) $X^* = (1;1)$, $f_{\max} = 5$; 2) $X^* = (1;1)$, $f_{\min} = -2$; 3) $X^* = (1;4;1;9;0)$, $f_{\min} = -44$; 4) $X^* = (2;2;1)$, $f_{\max} = 19$; 5) $X^* = (0;0;0;5;1)$, $f_{\max} = 4$; 6) $X^* = (2;0;0;5)$, $f_{\max} = 8$; 7) $X^* = (0;1;2;1;1)$, $f_{\min} = -8$; 8) $X^* = (1;1;1;1)$, $f_{\max} = 5$; 9) $X^* = (1;2)$, $f_{\max} = 11$; 10) $X^* = (0;4)$, $f_{\min} = 80$; 11) $X^* = (1;1)$, $f_{\max} = 4$.

О2. $f = 7x_1 + 3x_2 \to \max;$ $\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 \le 38, \\ 5x_1 + 2x_2 \le 20; \end{cases}$ $x_j \ge 0$, $x_j \in \mathbb{Z}$, $j \in \{1,2\}$; $X^* = (2;5)$, $f_{\max} = 29$.

С1. 1) $X^* = (1;1;1;2)$, $f_{\max} = 3$; 2) $X^* = (2;2;5;2/3;0;0)$, $f_{\min} = -11$. **С2.** $X^* = (1;1;0;0)$, $f_{\max} = 6$. **Д1.** 1) $X^* = (3;0;7;2;0;1)$, $f_{\max} = 18$; 2) $X^* = (12;0;2;108;9)$, $f_{\max} = 84$; 3) $X^* = (5;0;1;12)$, $f_{\min} = 10$; 4) $X^* = (3;0)$, $f_{\max} = 9$; 5) $X^* = (0;2;1;0;1;1)$, $f_{\max} = 3$; 6) $X^* = (2;7)$, $f_{\max} = 25$; 7) $X^* = (1;1;2;1)$, $f_{\max} = 5$; 8) $X_1^* = (0;2)$, $X_2^* = (1;1)$, $f_{\max} = 2$; 9) $X^* = (9;1;0;5)$, $f_{\max} = 9$; 10) $X^* = (1;0;2)$, $f_{\min} = 3$; 11) $X^* = (1;3)$, $f_{\max} = 14$. **Д2.** 1) $X^* = (1;2/3)$, $f_{\max} = 7/3$; 2) $X^* = (5;0;1)$, $f_{\min} = 6$; 3) $X^* = (3;0;1/2;5)$, $f_{\max} = 15$; 4) $X^* = (1/2;1;0)$, $f_{\max} = 1/2$.

Тема 10. Транспортні задачі

Загальна постановка транспортної задачі полягає у знаходженні оптимального плану перевезень деякого однорідного вантажу з m пунктів відправлення $A_1, \ldots, A_m$ у n пунктів призначення $B_1, \ldots, B_n$. При цьому критерієм оптимальності є або мінімальна вартість перевезень усього вантажу, або мінімальний час його доставки. Ми розглядатимемо випадок, де критерієм оптимальності є мінімальна вартість перевезень.

Позначимо через c_{ij} тарифи перевезень одиниці вантажу з i-го пункту відправлення в j-ий пункт призначення, через a_i – запаси вантажу в пункті A_i, через b_j – потреби у вантажі в j-му пункті призначення, а через x_{ij} – кількість одиниць вантажу, який перевозиться з пункту A_i у пункт B_j. Тоді математична модель транспортної задачі має вигляд:

$$f = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{1n}x_{1n} + \ldots + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \ldots +$$

$$+c_{mn}x_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min; \tag{1}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1, \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = a_2, \\ \ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m; \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1, \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = b_2, \\ \ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_n; \end{cases} \tag{3}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i \in \{1, \ldots, m\}, \quad j \in \{1, \ldots, n\}. \tag{4}$$

Якщо

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, \tag{5}$$

то така транспортна задача називається закритою, а у випадку невиконання умови (5) – відкритою. Доведено, що *умова (5) є необхідною і достатньою для розв'язності задачі (1)–(4).*

Число змінних x_{ij} у транспортній задачі nm, а число рівнянь в системах (2),(3) $n+m$. Оскільки ми припускаємо, що виконується умова (5), то число лінійно незалежних рівнянь дорівнює $n+m-1$. Тому опорний план транспортної задачі може мати не більше ніж $n+m-1$ додатних координат. Якщо цих координат точно $n+m-1$, то план називається невиродженним, якщо ж менше – виродженним.

Якщо $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i \neq \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$, то задачу треба закрити, тобто збалансувати (зрівняти) поставки й потреби. Робиться це введенням фіктивного постачальника або фіктивного споживача залежно від співвідношення сум $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i$ і $\sum\limits_{j=1}^{n} b_j$.

Якщо $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i < \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$, то вводиться під номером $m+1$ фіктивний постачальник із поставкою $a_{m+1} = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j - \sum\limits_{i=1}^{m} a_i$. При побудові моделі у цьому випадку для сумісності обмежень умови (2) треба записувати у вигляді обмежень-нерівностей. Модель матиме вигляд

$$f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min;$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, \quad i \in \{1, ..., m\};$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j \in \{1, ..., n\};$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad i \in \{1, ..., m\}, \quad j \in \{1, ..., n\}.$$

Коли $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i > \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$, то вводиться $(n+1)$ – й фіктивний споживач із потребою $b_{n+1} = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i - \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$. У цьому випадку нерівностями треба записувати обмеження (3).

Із введенням фіктивного постачальника в транспортній таблиці додатково з'являється n робочих клітинок (додатковий рядок), а якщо добавлено фіктивного споживача, то виникають додатково m робочих клітинок (додатковий стовпчик). Водночас виникає проблема, які ціни присвоїти цим клітинкам, щоб фіктивний рядок або фіктивний стовпчик були нейтральними щодо оптимального вибору планових перевезень. Нейтральність забезпечується тим, що всі ціни у фіктивних клітинках вибираються однаковими, а оскільки ці ціни при поставках не повинні впливати на значення цільової функції f, то їх беремо нульовими. Це означає, що у випадку фіктивного постачальника $c_{m+1,1} = 0, \ldots, c_{m+1,n} = 0$, а фіктивного споживача – $c_{1,n+1} = 0, \ldots, c_{m,n+1} = 0$.

Забезпечивши закритість розв'язуваної задачі, розпочинаємо будувати початковий опорний план. Зручно подавати транспортну задачу та її розв'язування за допомогою транспортної таблиці (матриці) вигляду

Поста-чальник	Споживач				Запаси
	B_1	B_2	$\ldots$	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{22}	$\ldots$ $\ldots$	c_{1n} x_{1n}	a_1
	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
A_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	$\ldots$ $\ldots$	c_{in} x_{in}	a_i
	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	$\ldots$ $\ldots$	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потреби	b_1	b_2	$\ldots$	b_n	

Для побудови опорних планів задачі (1) – (5) використовуватимемо такі три методи: північно-західного кута, мінімальної вартості, подвійної переваги.

Метод північно-західного кута. Згідно з цим методом формування величин перевезень розпочинається з північно-західного кута таблиці, тобто з клітинки $(1, 1)$, причому насамперед розподіляється товар першого постачальника. Цей постачальник спочатку якомога повніше задовольняє першого споживача. Далі, якщо в постачальника товар ще лишився, він якомога повніше задовольняє другого споживача і т.д.

Використовуючи даний метод, ми жодної уваги не звертаємо на ціни перевезень. Наступні методи цей факт уже враховують.

Метод мінімальної вартості. Суть методу полягає у виборі клітинки з мінімальною вартістю перевезень. На кожному кроці вибираємо клітинку, якій відповідає мінімальний тариф (якщо таких клітинок декілька, то вибираємо будь-яку з них), і розглядаємо пункти призначення і відправлення, що їй відповідають. У цю клітинку записуємо менше з чисел a_i і b_j. Потім з розгляду виключаємо рядок, який відповідає постачальнику, запаси якого повністю використано, або стовпчик, що відповідає споживачу, попит якого повністю задоволено. Може виявитися, що треба виключити рядок і стовпчик одночасно, якщо повністю використані запаси постачальника і повністю задоволено попит споживача. Далі з рядків і стовпчиків, які залишилися, знову вибираємо ті, на перетині яких стоїть найменший тариф і процес розподілу запасів продовжуємо до тих пір, поки всі вони не будуть розподілені, а попит – задоволено.

Метод подвійної переваги. Метод реалізується так. Спочатку робимо помітки, наприклад, знаком V у тих клітинках рядків, у яких стоїть найменша ціна. Далі обходимо таблицю за стовпчиками, і клітинки з найменшою ціною також помічаємо знаком V. Після цього виявиться, що деякі клітки мають по дві позначки, деякі по одній, а цілий ряд кліток зовсім залишився без позначок. Подальший розподіл спочатку виконується, наскільки це можливо, за клітинками з двома позначками, потім – з однією й нарешті проводиться добалансування задачі до $m + n - 1$ заповнень. Заповнення проводимо, проходячи таблицю зліва направо і зверху вниз.

Якщо число заповнень менше, ніж $m + n - 1$, то постає запитання, у яку клітинку поставити заповнення, що його не вистачає, позначене числом 0 (нуль). Цей нуль слід розмістити так, щоб можна було, розпочавши з будь-якої заповненої клітинки й переходячи від заповнення до заповнення вздовж рядка чи стовпчика, побувати у всіх заповнених клітинках.

Приклад 1. З допомогою методу північно-західного кута побудувати опорний план транспортної задачі

Поста-чальник	Споживач				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	4	1	2	60
A_2	4	2	6	3	40
A_3	7	3	5	4	35
Потреби	40	25	20	50	135

$\triangleleft$ У клітинку (1,1) поміщаємо $x_{11} = \min(60, 40) = 40$. Попит першого споживача задоволено повністю, перший стовпчик з розрахунку виключається. Залишок вантажу $x_{12} = 20$ від першого постачальника записуємо у клітинку (1,2). У цьому випадку запас першого постачальника вичерпано. Переходимо до розподілу вантажу другого постачальника.

Поста-чальник	Споживач				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5 40	4 20	1 –	2 –	60
A_2	4 –	2 5	6 20	3 15	40
A_3	7 –	3 –	5 –	4 35	35
Потреби	40	25	20	50	135

У клітинку (2,2) поміщаємо необхідну кількість вантажу $x_{22} = 5$. У цьому випадку попит другого споживача задоволено повністю.

Другий стовпчик виключаємо з розгляду, залишок вантажу від другого постачальника з урахуванням попиту третього споживача поміщаємо у клітинку (2,3), тобто $x_{23} = 20$. Попит третього споживача задоволено повністю. Залишок вантажу другого постачальника, з урахуванням попиту четвертого споживача, поміщаємо в клітинку (2,4), тобто $x_{24} = 15$. У цьому випадку запас другого постачальника вичерпано. Переходимо до розподілу запасу вантажу третього постачальника. У клітинку (3,4) поміщаємо необхідну кількість вантажу $x_{34} = 35$. Одержали повний розподіл запасів вантажу. При цьому заповненими виявились 6 клітинок, що дорівнює $m+n-1$, а це означає, що одержали невироджений план

$$X_0 = \begin{pmatrix} 40 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 20 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 35 \end{pmatrix}.$$

Цьому плану відповідає значення цільової функції $f = 5 \cdot 40 + 4 \cdot 20 + 2 \cdot 5 + 6 \cdot 20 + 3 \cdot 15 + 4 \cdot 35 = 595$. $\triangleright$

Приклад 2. Знайти вихідний опорний план за правилом мінімальної вартості транспортної задачі з прикладу 1.

$\triangleleft$ Найменший тариф маємо у клітинці (1,3), $c_{13} = 1$. Тому в дану клітинку поміщаємо кількість вантажу $x_{13} = 20$ і виключаємо з подальшого розгляду третій стовпчик. Знову знаходимо в таблиці найменший тариф $c_{14} = c_{22} = 2$. Помістимо, наприклад, необхідну кількість вантажу в клітинку (1,4), $x_{14} = 40$. Виключається з подальшого розгляду перший рядок.

Поста-чальник	Споживач				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5 –	4 –	1 20	2 40	60
A_2	4 5	2 25	6 –	3 10	40
A_3	7 35	3 –	5 –	4 –	35
Потреби	40	25	20	50	135

Далі в клітинку (2,2) поміщаємо кількість вантажу $x_{22} = 25$ і виключаємо з подальшого розгляду другий стовпчик. У матриці тарифів, що залишилася, мінімальним буде тариф для клітинок (2,4), (3,2), $c_{24} = c_{32} = 3$. Оскільки перший стовпчик вже виключено з розгляду, то завантажуємо клітинку (2,4), $x_{24} = 10$, і виключаємо з розгляду четвертий стовпчик. Новий найменший тариф серед тих, що залишилися, $c_{21} = 4$. У клітинку (2,1) помістимо кількість вантажу $x_{21} = 5$ і виключаємо з розгляду другий рядок.

На останньому етапі беремо єдиний невикреслений перший стовпчик і єдиний третій рядок, для яких маємо спільну клітинку (3,1) у яку поміщаємо залишок вантажу $x_{31} = 35$. Після повного розподілу вантажів дістанемо вихідний опорний розв'язок

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 5 & 25 & 0 & 10 \\ 35 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

для якого значення цільової функції $f = 415$.

Якщо порівняти значення цільової функції для опорних планів, одержаних за правилом північно-західного кута і мінімальної вартості, то бачимо, що у другому випадку воно менше, тобто план, який побудовано за методом мінімальної вартості, є кращим. $\triangleright$

Приклад 3. Побудувати за правилом подвійної переваги початковий опорний план транспортної задачі з прикладу 1.

$\triangleleft$ Розглянемо спочатку перший рядок таблиці і помітимо значком V клітинку (1,3) у якій стоїть найменша вартість. У другому рядку помічаємо клітинку (2,2), у третьому – (3,2). Аналогічно у першому стовпчику помічаємо клітинку (2,1), у другому – клітинку (2,2), у третьому – клітинку (1,3), а в четвертому – клітинку (1,4). Таким чином, у клітинках (1,3) і (2,2) буде дві позначки, а тому треба заповнити їх першими. Потім заповнюємо клітинки з однією позначкою – (1,4) і (2,1). Далі добалансовуємо задачу, заповнивши інші клітинки.

Поста-чальник	Споживач				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5 –	4 –	1 VV 20	2 V 40	60
A_2	4 V 15	2 VV 25	6 –	3 –	40
A_3	7 25	3 V –	5 –	4 10	35
Потреби	40	25	20	50	135

Отже, одержали опорний план

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 15 & 25 & 0 & 0 \\ 25 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix},$$

для якого значення цільової функції $f = 425$. $\triangleright$

Можна було б очікувати, що ближчими до оптимального будуть плани, побудовані за допомогою методу мінімальної вартості або подвійної переваги. Оскільки на практиці це не завжди так, то найчастіше використовують найпростіший, а саме метод північно-західного кута.

Нехай транспортна задача має закритий вигляд (або її зведено до закритого вигляду) і для неї побудовано опорний план. Тоді для знаходження оптимального плану перевезень зручно використовувати метод потенціалів, який грунтується на такій теоремі.

Теорема. *Якщо для деякого опорного плану*

$$X^* = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & & & \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

закритої транспортної задачі існують такі числа α_i, $i \in \{1, \dots, m\}$; β_j, $j \in \{1, \dots, n\}$, що

$$\beta_j - \alpha_i = c_{ij} \quad \text{при } x_{ij} > 0$$

і

$$\beta_j - \alpha_i \leq c_{ij} \quad \text{при } x_{ij} = 0,$$

то X^* є оптимальним планом транспортної задачі.

Числа α_i і β_j називаються **потенціалами** відповідно пунктів відправлення і пунктів призначення. Дані числа знаходять з системи рівнянь

$$\beta_j - \alpha_i = c_{ij}, \tag{6}$$

де c_{ij} – тарифи, які стоять у заповнених клітинках таблиці умов задачі. Таких рівнянь є $m+n-1$, а невідомих – $m+n$, тобто число рівнянь на одиницю менше, ніж число невідомих, а тому одне з невідомих, наприклад α_1, можна взяти рівним нулю. Усі інші α_i та β_j знаходять з системи (1). Після цього для вільних клітинок $(x_{ij}=0)$ знаходять числа

$$d_{ij}=\beta_j-\alpha_i-c_{ij}. \tag{7}$$

Якщо серед цих чисел немає додатних, то одержимо оптимальний план; якщо ж вони є, то переходимо до нового опорного плану. Для цього серед чисел d_{ij} вибирають найбільше і для клітинки, якій воно відповідає, роблять перерахунок вантажу за циклом, тобто заповнюють цю клітинку, зробивши перерозподіл вантажу між клітинками, які пов'язані з нею циклом.

Зауваження. Якщо в останній таблиці серед d_{ij} крім від'ємних є нульові, то оптимальний план задачі неєдиний.

Приклад 4. Розв'язати транспортну задачу, задану таблицею з прикладу 1, методом потенціалів.

$\triangleleft$ Нехай початковий опорний план (розв'язок) одержано за правилом мінімальної вартості, тобто маємо таблицю

Постачальник	Споживач				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	4	1 20	2 40	60
A_2	4 5	+ 2 − 25	6	3 10	40
A_3	7 35 −	3 +	5	4	35
Потреби	40	25	20	50	135

Оскільки опорний план невироджений, то перевіряємо його на оптимальність. Для цього знайдемо потенціали, склавши систему рівнянь (6) для заповнених клітинок

$$\begin{aligned}&\beta_3-\alpha_1=1, \quad \beta_1-\alpha_2=4, \quad \beta_4-\alpha_2=3,\\&\beta_4-\alpha_1=2, \quad \beta_2-\alpha_2=2, \quad \beta_1-\alpha_3=7.\end{aligned}$$

Якщо взяти $\alpha_1=0$, то матимемо $\beta_3=1$, $\beta_4=2$, $\alpha_2=-1$, $\beta_1=3$, $\beta_2=1$, $\alpha_3=-4$.

Далі для вільних клітинок знаходимо числа d_{ij}

$$d_{11} = 3 - 0 - 5 = -2, \quad d_{23} = 1 + 1 - 6 = -4, \quad d_{33} = 1 + 4 - 5 = 0,$$
$$d_{12} = 1 - 0 - 4 = -3, \quad d_{32} = 1 + 4 - 3 = 2, \quad d_{34} = 2 + 4 - 4 = 2.$$

Одержаний план не є оптимальним, бо серед чисел d_{ij} є додатні, а саме $d_{32} = d_{34} = 2$. Одержано дві перспективні (потенціальні) клітинки з однаковою оцінкою. Завантажимо, наприклад, клітинку (3,2). Для неї будуємо цикл, який містить клітинки (3,2), (3,1), (2,1) і (2,2). У вільній клітинці вказаного циклу запишемо знак " + ", у наступній клітинці (за годинниковою стрілкою або проти неї) – " − ", у наступній – " + " і т.д. У вершинах " − " циклу вибираємо найменшу кількість вантажу, тобто $x_{32} = 25$, додаємо її у клітинки із знаком " + " і віднімаємо від вантажу в клітинках із знаком " − ". Одержуємо новий опорний план, який є також невиродженим.

5 –	4 –	1 20	2 40
4 + 30	2 –	6 –	3 − 10
7 10 −	3 25	5 –	4 – +

Розглядаємо знову заповнені клітинки і складаємо систему рівнянь (6) для заповнених клітинок

$$\beta_3 - \alpha_1 = 1, \quad \beta_1 - \alpha_2 = 4, \quad \beta_1 - \alpha_3 = 7,$$
$$\beta_4 - \alpha_1 = 2, \quad \beta_4 - \alpha_2 = 3, \quad \beta_2 - \alpha_3 = 3.$$

Якщо взяти $\alpha_1 = 0$, то матимемо $\beta_3 = 1$, $\beta_4 = 2$, $\alpha_2 = -1$, $\beta_1 = 3$, $\alpha_3 = -4$, $\beta_2 = -1$.

Знайдемо d_{ij} для вільних клітинок:

$$d_{11} = 3 - 0 - 5 = -2, \quad d_{22} = -1 + 1 - 2 = -2, \quad d_{33} = 1 + 4 - 5 = 0,$$
$$d_{12} = -1 - 0 - 4 = -5, \quad d_{23} = 1 + 1 - 6 = -4, \quad d_{34} = 2 + 4 - 4 = 2.$$

Оскільки серед d_{ij} є додатні, то план не оптимальний. Тому треба заповнити клітинку (3,4), організувавши цикл з вершинами у клітинках (2,1), (2,4), (3,4), (3,1). Після заповнення клітинки (3,4) одержимо новий опорний план. Цей план вироджений, а тому клітинку (3,1) вважатимемо заповненою, помістивши туди нульовий вантаж.

5 + –	4 –	1 20	2 – 40
4 40	2 –	6 –	3 –
7 0 –	3 25	5 –	4 10 +

Знайдемо потенціали постачальників і споживачів, записавши відповідну систему для заповнених клітинок

$$\beta_3 - \alpha_1 = 1, \quad \beta_1 - \alpha_2 = 4, \quad \beta_2 - \alpha_3 = 5,$$
$$\beta_4 - \alpha_1 = 2, \quad \beta_1 - \alpha_3 = 7, \quad \beta_4 - \alpha_3 = 4.$$

Якщо $\alpha_1 = 0$, то $\beta_3 = 1, \beta_4 = 2, \alpha_3 = -2, \beta_2 = 3, \beta_1 = 5, \alpha_2 = 1$. Числа d_{ij} для вільних клітинок такі:

$$d_{11} = 5 - 0 - 5 = 0, \qquad d_{22} = 3 - 1 - 2 = 0, \qquad d_{24} = 2 - 1 - 3 = -2,$$
$$d_{12} = 3 - 0 - 4 = -1, \quad d_{23} = 1 - 1 - 6 = -6, \quad d_{33} = 1 + 2 - 5 = -2.$$

Таким чином, одержаний план є оптимальним. Він має вигляд

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

і йому відповідає мінімальне значення цільової функції $f_{\min} = 1 \cdot 20 + 2 \cdot 40 + 4 \cdot 40 + 3 \cdot 25 + 4 \cdot 10 = 375$.

В останній таблиці $d_{11} = 0$ і $d_{22} = 0$. Це означає, що задача має безліч розв'язків. Якщо для клітинки, наприклад, (1,1) побудувати цикл перерахунку, то ми одержимо такий план

5 0	4 –	1 20	2 40
4 40	2 –	6 –	3 –
7 –	3 25	5 –	4 10

Перевіримо даний план на оптимальність. Із системи

$$\beta_1 - \alpha_1 = 5, \quad \beta_4 - \alpha_1 = 2, \quad \beta_2 - \alpha_3 = 3,$$
$$\beta_3 - \alpha_1 = 1, \quad \beta_1 - \alpha_2 = 4, \quad \beta_4 - \alpha_3 = 4$$

знаходимо при $\alpha_1 = 0$, що $\beta_1 = 5, \beta_3 = 1, \beta_4 = 2, \alpha_3 = -2, \beta_2 = 1, \alpha_2 = 1$. Тоді

$$\begin{array}{lll} d_{12} = 1 - 0 - 4 = -3, & d_{23} = 1 - 1 - 6 = -6, & d_{31} = 5 + 2 - 7 = 0, \\ d_{22} = 1 - 1 - 2 = -2, & d_{24} = 2 - 1 - 3 = -2, & d_{33} = 1 + 2 - 5 = -2, \end{array}$$

а це означає, що план є оптимальним, тобто

$$X_1^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 10 \end{pmatrix} \text{ і } f_{\min} = 375.$$

Оптимальний план не змінився, але структура його інша. Очевидно, що коли б в клітинці (3,1) стояв не нуль, а інше число, то оптимальний план X_1^*, взагалі кажучи, не збігався б з X^*. ▹

Вправи

<u>О1.</u> На три бази A_1, A_2, A_3 надійшов однорідний вантаж у кількостях відповідно 140, 180 і 160 одиниць. Цей вантаж треба перевезти у п'ять пунктів призначення B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 відповідно у кількостях 60, 70, 120, 130 і 100 одиниць. Тарифи перевезень наведено у таблиці

Поста-чальник	Споживач					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	2	3	4	2	4	140
A_2	8	4	1	4	1	180
A_3	9	7	3	7	2	160
Потреби	60	70	120	130	100	

Знайти початковий план перевезень даної задачі методом північно-західного кута, мінімальної вартості та подвійної переваги.

<u>О2.</u> Знайти опорні плани пропонованих транспортних задач методом північно-західного кута, мінімальної вартості та подвійної переваги:

1)

b_j / a_i	25	10	13
18	4	1	5
10	2	3	6
20	5	7	4

; 2)

b_j / a_i	20	25	30	25
40	4	2	5	7
30	6	0	3	1
30	5	4	2	6

;

3)

b_j / a_i	60	40	40	30	30
60	5	2	0	7	3
40	6	1	4	2	8
70	7	4	3	6	1
30	3	5	6	4	2

.

О3. У пунктах постачання A_1, A_2, A_3 є однорідний вантаж в обсязі 250, 350, 300 одиниць відповідно; цей вантаж треба транспортувати у пункти B_1, B_2, B_3 і $_4$ в обсязі відповідно 180, 220, 230 і 270 од. Матриця перевезень одиниці вантажу має вигляд

$$C = \begin{pmatrix} 11 & 4 & 15 & 7 \\ 20 & 9 & 7 & 14 \\ 18 & 9 & 3 & 8 \end{pmatrix} .$$

Знайти оптимальний план перевезень, тобто такий план, для якого сума транспортних витрат є мінімальною.

О4. Розв'язати за допомогою методу потенціалів транспортні задачі, які задані таблицями

1)

b_j / a_i	150	120	80	50
100	3	5	7	11
130	1	4	6	3
170	5	8	12	7

; 2)

b_j / a_i	30	40	20
20	7	5	3
40	4	6	1
30	3	2	4

;

3)

a_i \ b_j	20	30	20	20
20	4	1	5	3
30	2	6	4	7
40	5	3	6	4

; 4)

a_i \ b_j	20	20	45
15	5	2	3
25	2	4	6
35	5	3	3

;

5)

a_i \ b_j	25	30	40	15
30	4,5	3,0	2,7	1,5
40	4,2	2,3	4,0	6,2
30	1,6	5,4	3,6	4,4

; 6)

a_i \ b_j	20	30	10
25	4	2	3
35	1	2	4

;

7)

a_i \ b_j	6	14	10
10	4	5	1
8	2	3	4
12	1	2	4

; 8)

a_i \ b_j	30	25	35	20
50	3	2	4	1
40	2	3	1	5
20	3	2	4	4

.

C1. Для будівництва чотирьох доріг використовують гравій з трьох кар'єрів. Запаси гравію у кожному з кар'єрів відповідно дорівнюють 120, 280 і 160 умовних одиниць. Будівництво кожної з доріг потребує відповідно 130, 220, 60 і 70 умовних одиниць гравію. Тарифи перевезень однієї умовної одиниці гравію з кожного кар'єру до відповідної дороги задані таблицею

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 & 5 \\ 4 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Скласти такий план перевезень гравію, при якому потреби кожної дороги задовольнялись би при найменшій загальній вартості перевезень.

C2. Зібраний врожай зерна з чотирьох господарств треба перевезти на три елеватори – елеватор B_1 потужністю 90 тис.т, елеватор B_2 потужністю 70 тис. т, елеватор B_3 потужністю 50 тис. т. Усі числові дані задачі наведено в таблиці

	Витрати на перевезення 1 т зерна на елеватор			Запас зерна, тис.т
	B_1	B_2	B_3	
A_1	$10,5$	$22,0$	$17,4$	50
A_2	$27,3$	$12,5$	$23,7$	60
A_3	$13,7$	$18,6$	$15,3$	70
A_4	$18,1$	$14,4$	$11,5$	40

Знайти план доставки зерна на елеватори з мінімальними транспортними витратами.

Домашнє завдання

Д1. Знайти початкові опорні плани пропонованих нижче задач методами північно-західного кута, мінімальної вартості та подвійної переваги:

1)

a_i \ b_j	70	220	40	30	60
115	4	5	2	8	6
175	3	1	9	7	3
130	9	6	7	2	1

;

2)

a_i \ b_j	270	140	200	110
510	1	4	7	3
90	5	6	8	9
120	7	2	4	3

;

3)

a_i \ b_j	50	40	10	15	25	30
70	6	3	1	5	7	4
50	8	4	2	4	3	6
20	3	5	5	6	2	4
30	5	1	1	3	6	2

.

Д2. Знайти оптимальні розв'язки транспортних задач

1)

a_i \ b_j	80	80	60	80
160	5	4	3	4
140	3	2	5	5
60	1	6	3	2

; 2)

a_i \ b_j	80	50	50	70
80	4	2	3	1
140	6	3	5	6
70	3	2	6	3

;

3)

a_i \ b_j	85	60	80	75
50	1	20	10	8
150	6	5	2	1
100	5	3	7	6

; 4)

a_i \ b_j	40	20	10	30
50	5	6	4	2
30	3	2	4	1
20	2	3	6	5

;

5)

a_i \ b_j	30	100	40	110
60	4	5	2	3
100	1	3	6	2
120	6	2	7	4

; 6)

a_i \ b_j	70	30	20
40	0	0	8
60	3	5	1
50	1	2	4

;

7)

a_i \ b_j	50	40	10	15	25	30
70	6	3	1	5	7	4
50	8	4	2	4	3	6
20	3	5	5	6	2	4
30	5	1	1	3	6	2

.

Д3. Для будівництва чотирьох об'єктів використовується цегла, яка виготовляється на трьох заводах. Щоденно кожний завод може виготовляти 100, 150 і 50 куб. м цегли. Щоденні потреби в цеглі на кожному з об'єктів відповідно дорівнюють 75, 80, 60 і 85 куб. м. Відомі також тарифи перевезень

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 20 & 1 \end{pmatrix}.$$

Скласти такий план перевезень цегли до об'єктів, при якому загальна вартість перевезень є мінімальною.

Відповіді

О3. $X^* = \begin{pmatrix} 180 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 150 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 270 \end{pmatrix}$, $f_{\min} = 7260$.

О4. 1) $X^* = \lambda X_1^* + (1-\lambda)X_2^*$, де $X_1^* = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 80 & 0 \\ 130 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 100 & 0 & 50 \end{pmatrix}$,
$X_2^* = \begin{pmatrix} 0 & 100 & 0 & 0 \\ 50 & 0 & 80 & 0 \\ 100 & 20 & 0 & 50 \end{pmatrix}$, $0 \le \lambda \le 1$, $f_{\min} = 2040$;
2) $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 0 \\ 20 & 0 & 20 \\ 10 & 20 & 0 \end{pmatrix}$, $f_{\min} = 270$; 3) $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 10 & 20 \end{pmatrix}$,
$f_{\min} = 270$; 4) $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 15 & 0 \\ 20 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 35 \end{pmatrix}$, $f_{\min} = 195$;
5) $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 15 & 15 \\ 0 & 30 & 10 & 0 \\ 25 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, $f_{\min} = 230$; 6) $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 15 & 10 \\ 20 & 15 & 0 \end{pmatrix}$,
$f_{\min} = 110$; 7) $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0 & 8 & 0 \\ 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, $f_{\min} = 52$;
8) $X^* = \lambda X_1^* + (1-\lambda)X_2^*$, де $X_1^* = \begin{pmatrix} 25 & 5 & 0 & 20 \\ 5 & 0 & 35 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$X_2^* = \begin{pmatrix} 5 & 25 & 0 & 20 \\ 5 & 0 & 35 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $0 \le \lambda \le 1$, $f_{\min} = 190$.

С1. $X^* = \begin{pmatrix} 120 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 220 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 60 & 70 \end{pmatrix}$, $f_{\min} = 790$.

С2. $X^* = \begin{pmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 0 & 0 \\ 40 & 0 & 20 & 10 \\ 0 & 10 & 30 & 0 \end{pmatrix}$, $f_{\min} = 2618$.

Д2. 1) $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 60 & 80 \\ 20 & 80 & 0 & 0 \\ 60 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f_{\min} = 780$;

2) $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 & 70 \\ 10 & 50 & 40 & 0 \\ 70 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f_{\min} = 720$;

3) $X^* = \begin{pmatrix} 5-5\lambda & 5\lambda & 60 & 35 \\ 70+5\lambda & 80-5\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}$, $0 \le \lambda \le 1$, $f_{\min} = 665$;

4) $X^* = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 10 & 30 \\ 10 & 20 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f_{\min} = 260$;

5) $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 40 & 20 \\ 30 & 0 & 0 & 70 \\ 0 & 100 & 0 & 20 \end{pmatrix}$, $f_{\min} = 590$;

6) $X^* = \begin{pmatrix} 10 & 30 & 0 \\ 10 & 0 & 20 \\ 50 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f_{\min} = 100$;

7) $X^* = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 10 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 10 & 0 & 15 & 25 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f_{\min} = 575$.

Д3. $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 60 & 35 \\ 75 & 75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}$, $f_{\min} = 665$.

Тема 11. Задачі теорії ігор і лінійне програмування

Гра – це дійсний або формальний конфлікт, у якому є принаймні два учасники (гравці), кожний з яких намагається досягти своїх цілей. Допустимі дії кожного з гравців, спрямовані на досягнення певної мети, називаються **правилами гри**.

Кількісна оцінка результатів гри називається **платежем**.

Гра називається **парною**, якщо в ній беруть участь тільки дві сторони (дві особи). Парна гра називається **грою з нульовою сумою**, якщо сума платежів дорівнює нулю, тобто якщо програш одного гравця дорівнює виграшу іншого.

Парні ігри з нульовою сумою і розглядатимуться нижче.

Однозначне описання вибору гравця у кожній з можливих ситуацій, при якій він повинен зробити особистий хід, називається **стратегією** гравця. Стратегія гравця називається **оптимальною**, якщо при багаторазовому повторенні гри вона забезпечує гравцеві максимально можливий середній виграш (або, що одне і те ж саме, мінімально можливий середній програш).

Нехай є два гравці, один з яких може вибрати i-у стратегію з m своїх можливих стратегій A_i, $i \in \{1, ..., m\}$; а другий, не знаючи вибору першого, вибирає j-у стратегію з n своїх можливих стратегій B_j, $j \in \{1, ..., n\}$. Як результат перший гравець виграє величину a_{ij}, а другий програє цю величину. З чисел a_{ij}, $i \in \{1, ..., m\}$, $j \in \{1, ..., n\}$ складемо матрицю

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

яка називається **платіжною**, або **матрицею гри**. Рядки матриці C відповідають стратегіям першого гравця, а стовпчики – стратегіям другого. Гра, яка визначається матрицею C, що має m рядків і n стовпчиків, називається **скінченною** грою розміру $m \times n$.

Число $\alpha = \max_i(\min_j a_{ij})$ називається **нижньою ціною** гри або **максиміном**, відповідна йому стратегія (рядок) – **максимінною**.

Число $\beta = \min_j(\max_i a_{ij})$ називається **верхньою ціною** гри або **мінімаксом**, а відповідна йому стратегія (стовпчик) – **мінімаксною**.

Доводиться, що завжди $\alpha \leq \beta$. Якщо $\alpha = \beta$, то кажуть, що гра має сідлову точку в чистих стратегіях і чисту ціну гри $v = \alpha = \beta$. Пару чистих стратегій A_r і B_s, при яких $\alpha = \beta$, називають **сідловою точкою** матричної гри, а елемент a_{rs} платіжної матриці, що стоїть на перетині r-го рядка і s-го стовпчика, – **сідловим елементом** платіжної матриці (часто цей елемент називають сідловою точкою). Цей елемент одночасно є мінімальним у своєму рядку і максимальним у своєму стовпчику. Стратегії A_r і B_s є оптимальними. Трійку $\{A_r; B_s; v\}$ називають **розв'язком** гри.

Якщо матрична гра не має сідлової точки, то для знаходження її розв'язку використовуються змішані стратегії.

Вектор, кожна компонента якого показує відносну частоту використання гравцем відповідної чистої стратегії, називається **змішаною стратегією** даного гравця. Змішану стратегію першого гравця позначають як вектор $U = (u_1, u_2, ..., u_m)$, а другого гравця – як вектор $Z = (z_1, z_2, ..., z_n)$, де $u_i \geq 0, i \in \{1, ..., m\}$; $z_j \geq 0$, $j \in \{1, ..., n\}$; $u_1 + ... + u_m = 1$, $z_1 + ... + z_n = 1$. Якщо U^* і Z^* – оптимальні стратегії, відповідно гравців A і B, то число $v = \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} u_i^* z_j^*$ є ціною гри.

Знаходження оптимальних стратегій і ціни гри складає процес розв'язування матричної гри.

Доводиться, що *всяка матрична гра з нульовою сумою має розв'язок у змішаних стратегіях*, причому якщо один з гравців застосовує оптимальну змішану стратегію, то його виграш дорівнює ціні гри незалежно від того, з якими частотами буде застосовувати другий гравець стратегії, що ввійшли до оптимальної (у тому числі й чисті стратегії). Це означає, що для оптимальної стратегії $U^* = (u_1, ..., u_m)$ гравця A і ціни гри v виконуються нерівності

$$a_{1j}u_1 + a_{2j}u_2 + ... + a_{mj}u_m \geq v, \quad j \in \{1, ..., n\}, \tag{1}$$

а для оптимальної стратегії $Z^* = (z_1, ..., z_n)$ гравця B – нерівності

$$a_{i1}z_1 + a_{i2}z_2 + ... + a_{in}z_n \leq v, \quad i \in \{1, ..., m\}. \tag{2}$$

Можна вважати, що $v > 0$. Якщо це не так, то, додавши до всіх елементів матриці C одне і те саме число K, ми одержимо $\bar{v} > 0$. Це не приведе до зміни оптимальних стратегій, а лише збільшить ціну гри на K.

Поділивши обидві частини (1) і (2) на v і ввівши позначення

$$\frac{u_i}{v} = y_i, i \in \{1, ..., m\}; \quad \frac{z_j}{v} = x_j, j \in \{1, ..., n\}, \tag{3}$$

дістанемо

$$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + ... + a_{mj}y_m \geq 1, \quad j \in \{1, ..., n\};$$

$$y_i \geq 0, \quad i \in \{1, ..., m\};$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \leq 1, \quad i \in \{1, ..., m\};$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, ..., n\}.$$

З рівностей $u_1 + ... + u_m = 1$ і $z_1 + ... + z_n = 1$, врахувавши позначення (3), одержимо

$$y_1 + ... + y_m = \frac{1}{v}, \quad x_1 + ... + x_n = \frac{1}{v}.$$

Оскільки гравець A намагається дістати максимальний виграш, то він повинен забезпечити мінімум величині $1/v$. Це означає, що

$$F = y_1 + y_2 + ... + y_m \to \min,$$

а

$$f = x_1 + x_2 + ... + x_n \to \max .$$

Отже, ми маємо такі дві задачі лінійного програмування:

$$f = x_1 + x_2 + ... + x_n \to \max;$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le 1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le 1, \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le 1; \end{cases} \tag{4}$$

$$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, ..., n\},$$

$$F = y_1 + y_2 + ... + y_m \to \min;$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \ge 1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \ge 1, \\ ... \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m \ge 1; \end{cases} \tag{5}$$

$$y_i \ge 0, \quad i \in \{1, ..., m\}.$$

Задачі (4), (5) утворюють пару двоїстих задач, де (4) є прямою, а (5) – двоїстою.

Якщо знайдено оптимальні розв'язки задач (4) і (5), то змішані стратегії і ціна гри знаходяться за формулами:

$$u_i^* = \frac{y_i^*}{\sum\limits_{k=1}^{m} y_k^*} = v y_i^*,\ i \in \{1, ..., m\}; \quad z_j^* = \frac{x_j^*}{\sum\limits_{l=1}^{n} x_l^*} = v x_j^*,\ j \in \{1, ..., n\};$$

$$v = \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^*} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{m} y_i^*} \text{ або } v = \frac{1}{f_{\max}} = \frac{1}{F_{\min}}.$$

Приклад 1. Для гри, яка задана платіжною матрицею

$$\begin{pmatrix} 6 & 7 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 4 \\ 8 & 5 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

знайти ціну гри, чисті стратегії та сідлові точки.

◁ Маємо

$$\begin{array}{rccl}
 & & \min & \\
 & \begin{pmatrix} 6 & 7 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 4 \\ 8 & 5 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} & \left.\begin{matrix} \to & -1 \\ \to & -2 \\ \to & -1 \\ \to & 2 \\ \to & -2 \end{matrix}\right\} & \begin{matrix} \max \\ \to 2=\alpha \end{matrix} \\
\max & \begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix} & & \\
 & \underbrace{\begin{matrix} 8 & 7 & 4 & 2 & 6 \end{matrix}}_{\substack{\min\downarrow \\ 2=\beta}} & &
\end{array}$$

Отже, ціна гри $v = \alpha = \beta = 2$, сідловою точкою є $a_{44} = 2$, а чисті стратегії – A_4 і B_4. ▷

Приклад 2. Кожний з гравців A і B записує одне з чисел 1; 4; 6; 9, потім вони одночасно показують написане. Якщо обидва числа виявились однакової парності, то суму цих чисел виграє A, якщо різної – виграє B. Скласти платіжну матрицю, знайти нижню і верхню чисті ціни гри, мінімаксні стратегії гравців.

◁ Чистими стратегіями гравця A будуть: A_1 – записати число 1, A_2 – число 4, A_3 – число 6, A_4 – число 9. У гравця будуть аналогічні стратегії.

Елемент $a_{11} = 2$, оскільки в ситуації $(A_1; B_1)$ обидва гравці записують непарне число 1 і виграш гравця A дорівнює 1+1=2. Елемент $a_{12} = -5$, оскільки в ситуації $(A_1; B_2)$ гравець A записує число 1, а B – число 4, тобто числа різної парності, а тому виграш гравця B дорівнює 5, тоді як виграш гравця A складе – 5. Аналогічно обчислюються інші елементи платіжної матриці, яка матиме вигляд

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & -7 & 10 \\ -5 & 8 & 10 & -13 \\ -7 & 10 & 12 & -15 \\ 10 & -13 & -15 & 18 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо нижню і верхню ціну гри. Маємо

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & & \min \\ \begin{pmatrix} 2 & -5 & -7 & 10 \\ -5 & 8 & 10 & -13 \\ -7 & 10 & 12 & -15 \\ 10 & -13 & -15 & 18 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \to \ -7 \\ \to \ -13 \\ \to \ -15 \\ \to \ -15 \end{array} & \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} \begin{array}{c} {\scriptstyle \max} \\ {\scriptstyle \to -7 = \alpha} \end{array} \end{array} \\ \max & \begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ & \underbrace{\begin{array}{cccc} 10 & 10 & 12 & 18 \end{array}}_{\min\downarrow} \\ & 10 = \beta. \end{array}$$

Оскільки нижня ціна гри $\alpha = -7$ не дорівнює верхній ціні гри $\beta = 10$, то дана гра не має сідлової точки. Максимінною для гравця A буде чиста стратегія A_1. Користуючись нею, гравець A "виграє"не менше -7 (програє не більше 7). Мінімаксними для гравця B будуть чисті стратегії B_1 і B_2 , при яких він програє не більше 10. ▷

Приклад 3. Розв'язати гру з платіжною матрицею $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, звівши її до пари двоїстих задач лінійного програмування.

◁ Спочатку перевіримо, чи не має платіжна матриця сідлового елемента. Знаходимо $\alpha = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = 1$; $\beta = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = 2$. Оскільки $\alpha \neq \beta$, то розв'язком гри будуть змішані стратегії, а ціна гри міститься в межах $1 \leq v \leq 2$. За матрицею гри запишемо задачі (4) і (5):

$$\begin{array}{l} f = x_1 + x_2 + x_3 \to \max; \\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 \qquad \leq 1, \\ 3x_1 \qquad + x_3 \leq 1, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 1; \end{cases} \\ x_j \geq 0, \quad j \in \{1, 2, 3\}; \end{array} \tag{6}$$

$$
\begin{gathered}
F = y_1 + y_2 + y_3 \to \min; \\
\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 1, \\ y_1 \qquad + 2y_3 \geq 1, \\ \qquad y_2 + 4y_3 \geq 1; \end{cases} \\
y_i \geq 0, \quad i \in \{1,2,3\}.
\end{gathered} \tag{7}
$$

Розв'яжемо симплексним методом задачу (6).

i	Б	C_δ	A_0	$\frac{1}{A_1}$	$\frac{1}{A_2}$	$\frac{1}{A_3}$	$\frac{0}{A_4}$	$\frac{0}{A_5}$	$\frac{0}{A_6}$
1	A_4	0	1	2	1	0	1	0	0
2	A_5	0	1	3	0	1	0	1	0
3	A_6	0	1	1	$\boxed{2}$	4	0	0	1
$m+1$			0	-1	-1	-1	0	0	0
1	A_4	0	1/2	$\boxed{3/2}$	0	-2	1	0	$-1/2$
2	A_5	0	1	3	0	1	0	1	0
3	A_2	1	1/2	1/2	1	2	0	0	1/2
$m+1$			1/2	$-1/2$	0	1	0	0	1/2
1	A_1	1	1/3	1	0	$-4/3$	2/3	0	$-1/3$
2	A_5	0	0	0	0	5	-2	1	1
3	A_2	1	1/3	0	1	8/3	$-1/3$	0	2/3
$m+1$			2/3	0	0	1/3	1/3	0	1/3

Маємо у $(m+1)$-му рядку $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = -1$. Тому розв'язувальний елемент виберемо за $\min\limits_j \Theta_{0j}(\Delta_j) = \max(1/3; 1/2; 1/4) = 1/2$, де $\Theta_{01} = 1/3, \Theta_{02} = 1/2, \Theta_{03} = 1/4$.

Таким чином, $X^* = (1/3; 1/3; 0)$, $f_{\max} = F_{\min} = 2/3$, $Y^* = (1/3; 0; 1/3)$.

Тоді ціна гри $v = \frac{1}{f_{\max}} = \frac{1}{F_{\min}} = 3/2$, а змішані стратегії $U^* = vY^* = \frac{3}{2}(1/3; 0; 1/3) = (1/2; 0; 1/2)$, $Z^* = vX^* = \frac{3}{2}(1/3; 1/3; 0) = (1/2; 1/2; 0)$. $\triangleright$

При розв'язуванні довільної скінченної гри з матрицею розміру $m \times n$ зручно дотримуватись такої схеми:

1) виключити з платіжної матриці явно невигідні стратегії. Такими стратегіями для гравця $A(B)$ є ті, яким відповідають рядки (стовпці) з елементами значно меншими (більшими), ніж елементи інших рядків (стовпців);

2) Знайти нижню і верхню ціни гри й перевірити, чи має гра сідлову точку. Якщо сідлова точка є, то стратегії, що їй

відповідають, будуть оптимальними, а ціна гри збігається з верхньою (нижньою) ціною;

3) якщо сідлова точка відсутня, то розв'язок треба шукати у змішаних стратегіях. Для ігор з матрицею розміру $m \times n$ рекомендується симплексний метод, а ігри, в яких матриця має розмір 2×2, $2 \times n$ або $m \times 2$, зручно роз'язувати графічно.

Приклад 4. Підприємство випускає продукцію, що швидко псується, яку можна відправити одразу споживачеві (стратегія A_1), відправити на склад для зберігання (стратегія A_2) або піддати додатковій обробці для тривалого зберігання (стратегія A_3). Споживач може придбати стратегію або негайно (стратегія B_1), або через деякий час (стратегія B_2), або після тривалого зберігання (стратегія B_3). У випадку стратегій A_2 і A_3 підприємство має додаткові витрати на зберегання й обробку продукції. Крім того, при стратегії A_2 можливі збитки через псування продукції, якщо споживач вибере стратегії B_2 або B_3.

Треба знайти оптимальні пропорції продукції при використанні стратегій A_1, A_2, A_3 для гарантування середнього рівня збитків, якщо матриця витрат

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 7 & 6 & 10 \\ 12 & 10 & 8 \end{pmatrix}.$$

$\triangleleft$ Перший рядок у матриці C можна опустити, оскільки його елементи менші за відповідні елементи другого рядка. Тому матриця C набуде вигляду

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 10 \\ 12 & 10 & 8 \end{pmatrix}.$$

Елементи першого стовпчика більші за відповідні елементи другого стовпчика, а тому його можна відкинути.

Отже, матриця гри остаточно набуде вигляду:

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}.$$

Дану матричну гру зводимо до пари взаємно двоїстих задач лінійного програмування:

$$f = x_2 + x_3 \to \max; \qquad F = y_2 + y_3 \to \min;$$
$$\begin{cases} 6x_2 + 10x_3 \le 1, \\ 10x_2 + x_3 \le 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} 6y_2 + 10y_3 \ge 1, \\ 10y_2 + 8y_3 \ge 1; \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j \in \{2,3\}; \qquad y_i \ge 0, \quad i \in \{2,3\}.$$

Розв'язавши ці задачі графічно, отримуємо

$$x_2 = 1/26, \quad x_3 = 1/13, \quad X^* = (0; 1/26; 1/13)$$

$$y_2 = 1/26, \quad y_3 = 1/13, \quad Y^* = (0; 1/26; 1/13)$$

Тоді

$$v = \frac{1}{x_1^* + x_2^* + x_3^*} = \frac{1}{y_1^* + y_2^* + y_3^*} = \frac{26}{3};$$
$$U^* = Z^* = (0; 1/3; 2/3).$$

Це означає, що стратегія A_1 не застосовується, $1/3$ продукції відправляється на склад (стратегія A_2), $2/3$ продукції додатково обробляється (стратегія A_3), а ціна гри $v = 26/3$. ▷

Вправи

О1. Для ігор, заданих платіжними матрицями, знайти ціну гри, чисті стратегії, а також сідлові точки, якщо вони є:

$$1) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 7 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}; \quad 2) \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 & 9 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 6 \\ 7 & 6 & 10 & 8 & 11 \\ 8 & 5 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix};$$

$$3) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 & 5 & 6 \\ 2 & -5 & 3 & 2 & 4 & -2 \\ 5 & 6 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & -5 & 6 \\ 7 & -4 & 5 & 2 & 7 & 8 \end{pmatrix}; \; 4) \begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 & 8 & 2 & -5 \\ 4 & 5 & 3 & 3 & 2 & 6 \\ -2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & -1 & -4 \\ 5 & 7 & -2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix};$$

$$5)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 6 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & -1 & -1 & 2 & -2 \\ 6 & 7 & 3 & 8 & 5 & 3 \end{pmatrix};\ 6)\begin{pmatrix} 5 & -8 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 & -1 & 4 & -1 \\ 2 & 6 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & 6 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix};$$

$$7)\quad \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 6 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 5 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & -1 & 6 & 7 & -1 \\ 2 & 5 & 0 & -1 & 8 & -2 \\ 4 & 3 & -4 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

<u>O2.</u> Розв'язати матричні ігри, задані платіжними матрицями, звівши їх до пар двоїстих задач лінійного програмування:

$$1)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix};\ 2)\begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix};\ 3)\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 12 & 1 \\ 9 & 6 \end{pmatrix};$$

$$4)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix};\ 5)\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix};$$

$$6)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix};\ 7)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix};\ 8)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$9)\begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 7 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix};\ 10)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

<u>C1.</u> Гравець A може записати одну з цифр: або 2, або 4, або 7; гравець B може записати одну з цифр: або 1, або 3, або 4, або 8. Якщо обидві цифри однакової парності, то їхню суму виграє гравець A, якщо різної парності, то їхню суму виграє гравець B. Скласти платіжну матрицю гри, знайти нижню і верхню чисті ціни гри, мінімаксні стратегії гравців.

С2. Для ігор із заданою платіжною матрицею визначити змішані стратегії:

$$1)\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 & -2 \end{pmatrix};\quad 2)\ \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 8 & 3 \end{pmatrix};$$

$$3)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix};\quad 4)\ \begin{pmatrix} 0 & -2 & 7 & 4 \\ -1 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Домашнє завдання

Д1. Знайти сідлові точки матричних ігор

$$1)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 & 8 & -5 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 0 & 7 & -2 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & -1 & 5 & -3 & 2 & 7 \end{pmatrix};\ 2)\begin{pmatrix} 2 & 10 & 3 & 14 & 5 \\ 8 & 9 & 5 & 6 & 7 \\ 10 & 8 & 4 & 8 & 12 \end{pmatrix};$$

$$3)\begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 & -3 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 4 & -2 & 5 & 5 \\ 7 & -1 & 3 & 0 & 4 & 6 \\ 5 & 4 & 8 & 3 & 5 & 5 \\ 4 & 3 & 9 & 3 & 9 & 9 \end{pmatrix};\ 4)\begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 & 4 & 5 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 6 & -2 & 0 & 2 & 5 & 1 \\ -4 & 3 & -1 & 5 & -6 & 8 \\ 3 & 4 & 2 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix};$$

$$5)\ \begin{pmatrix} 5 & -6 & 7 & 8 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 14 & 6 & 7 & 6 \\ 8 & 6 & 7 & 8 & 8 & 6 \\ -2 & 3 & -8 & 5 & -2 & 5 \\ -5 & 4 & 6 & -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Д2. Розв'язати матричні ігри, задані відповідними платіжними матрицями, звівши їх до пари двоїстих задач лінійного програмування:

1) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 9 \\ 7 & 7 & 8 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 8 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 10 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 9) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Відповіді

О1. 1) $v=\alpha=\beta=3, (A_4,B_1), (A_4,B_3)$; 2) $v=\alpha=\beta=6$, (A_3,B_2); 3) $v=\alpha=\beta=3$, (A_3,B_4); 4) $v=\alpha=\beta=2$, (A_2,B_5); 5) $v=\alpha=\beta=3$, (A_3,B_3), (A_3,B_6), (A_5,B_3), (A_5,B_6); 6) $v=\alpha=\beta=2$, (A_4,B_4), (A_4,B_6), (A_5,B_4), (A_5,B_6); 7) $v=\alpha=\beta=1$, (A_1,B_3), (A_1,B_6). **О2.** 1) $v=2/3$, $U^*=(1/3;2/3;0)$, $Z^*=(0;1/3;2/3)$; 2) $v=1/11$, $U^*=(5/11;0;6/11)$, $Z^*=(0;9/11;2/11)$; 3) $v=27/4$, $U^*=(3/8;0;5/8)$, $Z^*=(1/4;3/4)$; 4) $v=1/5$, $U^*=(3/5;2/5)$, $Z^*=(3/5;2/5;0)$; 5) $v=0$, $U^*=(0;3/5;2/5;0)$, $Z^*=(0;3/5;2/5;0)$; 6) $v=1/2$, $U^*=(1/2;1/2;0)$, $Z^*=(0;3/4;0;1/4)$; 7) $v=3$, $U^*=(0;1)$, $Z^*=(0;1)$; 8) $v=1/3$, $U^*=(1/3;1/3;1/3)$, $Z^*=(1/3;1/3;1/3)$; 9) $v=5$, $U^*=(0;0;1)$, $Z^*=(0;1;0)$; 10) $v=1/2$, $U^*=(0;1/4;3/4)$, $Z^*=(1/2;1/2;0)$. **С2.** 1) $v=1/5$, $U^*=(2/5;3/5;0)$, $Z^*=(0;3/5;0;2/5)$; 2) $v=5$, $U^*=(1/2;1/2)$, $Z^*=(2/5;3/5)$; 3) $v=1/3$, $U^*=(0;1/3;2/3)$, $Z^*=(0;5/6;1/6;0)$; 4) $v=1/4$, $U^*=(0;1/4;3/4)$, $Z^*=(0;3/4;0;1/4)$. **Д1.** 1) $v=\alpha=\beta=2$, (A_2,B_2); 2) $v=\alpha=\beta=5$, (A_3,B_3); 3) $v=\alpha=\beta=3$, (A_4,B_4), (A_5,B_4); 4) $v=\alpha=\beta=2$, (A_2,B_3), (A_5,B_3); 5) $v=\alpha=\beta=6$, (A_2,B_6), (A_3,B_6). **Д2.** 1) $v=23/5$, $U^*=(3/5;2/5)$, $Z^*=(1/5;0;4/5)$; 2) $v=7$, $U^*=(0;0;1)$, $Z^*=(0;1;0)$; 3) $v=5$, $U^*=(1/2;0;1/2)$, $Z^*=(1/2;1/2;0)$; 4) $v=24/7$, $U^*=(3/7;4/7;0)$, $Z^*=(6/7;1/7;0;0)$; 5) $v=1/2$, $U^*=(1/2;0;1/2)$, $Z^*=(0;1/2;1/2;0)$; 6) $v=5/3$, $U^*=(1/3;0;2/3)$, $Z^*=(1/3;0;0;2/3)$; 7) $v=1/2$, $U^*=(1/2;1/2)$, $Z^*=(1/2;1/2;0)$; 8) $v=1$, $U^*=(1;0;0)$, $Z^*=(0;1)$; 9) $v=4/7$, $U^*=(1/7;6/7;0)$, $Z^*=(3/7;4/7;0)$.

Тема 12. Графічний метод розв'язування задач нелінійного програмування

У загальному вигляді задача нелінійного програмування полягає у відшуканні максимального (мінімального) значення функції

$$f = f(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{1}$$

за умови, що її аргументи задовольняють співвідношення

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \leq b_i, & i \in \{1, 2, ..., k\}, \\ g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = b_i, & i \in \{k+1, ..., m\}, \end{cases} \tag{2}$$

де f, g_i, $i \in \{1, ..., m\}$, – деякі відомі функції n змінних, а b_i, $i \in \{1, ..., m\}$, – задані числа.

Крім умов (2), можуть ще задаватися додаткові обмеження невід'ємності або цілочисловості змінних.

За своїми загальними властивостями задачі нелінійного програмування істотно відрізняються від лінійних. Наприклад, область допустимих розв'язків не обов'язково опукла, а екстремум цільової функції може досягатися у будь-якій точці області допустимих розв'язків. Відмінними є і методи розв'язування нелінійних задач.

Якщо функції f, g_i, $i \in \{1, ..., m\}$ залежать від двох змінних, то можна застосувати при розв'язуванні задачі (1), (2) графічний метод. Для цього спочатку будуємо область допустимих розв'язків, а далі з допомогою ліній рівня цільової функції f $(f = h)$ знаходимо оптимальний розв'язок.

Приклад 1. На виробництво певного продукту витрачається два види ресурсів. Треба знайти оптимальний розподіл величин ресурсів, які витрачаються, якщо ціна ресурсу першого виду – 3 грн., другого – 4 грн., а всього виділено на виробництво 12 грн. Відомо, що з кількості x_1 першого ресурсу і x_2 другого ресурсу можна одержати $2\sqrt{x_1 x_2}$ одиниць продукції.

⊲ Оскільки ми повинні виробити найбільше одиниць продукції, то

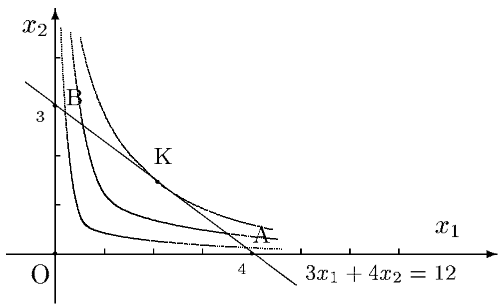
$$f = 2\sqrt{x_1 x_2} \to \max,$$

при обмеженнях

$$3x_1 + 4x_2 \leq 12,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Множиною допустимих планів є множина точок відрізка AB, а лініями рівня – гіперболи $4x_1x_2 = h^2$, $\quad x_2 = \frac{h^2}{4x_1}$, $\quad h \in \mathbb{R}$.



Якщо збільшувати h, то лінія рівня матиме спільну точку з відрізком AB у точці K. Для знаходження координат точки K скористаємось тим, що пряма $3x_1 + 4x_2 = 12$ є дотичною до лінії $x_2 = \frac{h^2}{4x_1}$, тобто кутовий коефіцієнт прямої $k_1 = -3/4$ дорівнює $x_2' = -\frac{h^2}{4x_1^2}$ – кутовому коефіцієнту дотичної до лінії рівня. Отже, $-\frac{h^2}{4x_1^2} = -\frac{3}{4}; x_1^2 = \frac{h^2}{3}; x_1 = \frac{h}{\sqrt{3}}$. Підставивши дане x_1 в рівняння лінії рівня, одержимо $\frac{h}{\sqrt{3}}x_2 = \frac{h^2}{4}; x_2 = \frac{h\sqrt{3}}{4}$. Знайдемо h, задовольняючи цими значеннями x_1 і x_2 рівняння прямої $3x_1 + 4x_2 = 12$;

$$3\frac{h}{\sqrt{3}} + 4\frac{h\sqrt{3}}{4} = 12; \quad \sqrt{3}h = 6; \quad h = \frac{6}{\sqrt{3}}.$$

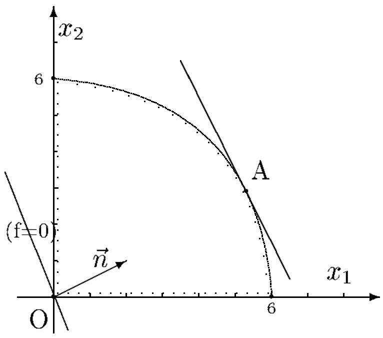
Тому $x_1 = \frac{6}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = 2; \quad x_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{3}{2}$.

Таким чином, K має координати $x_1 = 2, x_2 = 3/2$, а $f_{\max} = f(2; 3/2) = 2\sqrt{2 \cdot \frac{3}{2}} = 2\sqrt{3}$. ⊳

Приклад 2. Розв'язати задачу

$$f = 2x_1 + x_2 \to \max(\min);$$
$$x_1^2 + x_2^2 \le 36,$$
$$x_1 > 0, x_2 \ge 0.$$

◁ Очевидно, що область допустимих розв'язків є частиною круга з центром у початку координат і радіуса 6, яка лежить у першій чверті.



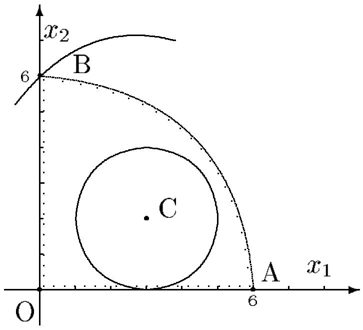
Лінії рівня $2x + y = h$, $h \in \mathbb{R}$, – це прямі з кутовим коефіцієнтом $k = -2$. Якщо рухати будь-яку з цих прямих у напрямку вектора $\vec{n} = (2;1)$, то вона є опорною до області допустимих значень у точці A. Отже, в цій точці цільова функція досягає свого максимуму. Очевидно, що свого мінімуму функція f досягає в точці $O(0;0)$, $f_{\min} = f(0;0) = 0$.

Знайдемо координати точки A. Оскільки кутовий коефіцієнт дотичної до кола $x_2' = -\frac{x_1}{x_2}$ збігається з кутовим коефіцієнтом цільової функції $k = -2$, то $x_1 = 2x_2$. Тоді $4x_2^2 + x_2^2 = 36, 5x_2^2 = 36$ або $x_2 = \frac{6}{\sqrt{5}}$. Таким чином, точка $A(\frac{12}{\sqrt{5}}; \frac{6}{\sqrt{5}})$, а $f_{\max} = f(\frac{12}{\sqrt{5}}; \frac{6}{\sqrt{5}}) = \frac{24}{\sqrt{5}} + \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{30}{\sqrt{5}} = 6\sqrt{5}$. ▷

Приклад 3. Знайти розв'язок задачі

$$f = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 \to \max(\min);$$
$$x_1^2 + x_2^2 \le 36,$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

◁ Областю допустимих розв'язків є, як і в попередньому прикладі, чверть круга радіуса 6 з центром у початку координат. Лініями рівня є кола з центром у точці $C(3;2)$ $\quad (x_1-3)^2+(x_2-2)^2=h^2$, $h\geq 0$.



З рисунку видно, що глобального мінімуму функція f досягає в точці C, а глобального максимуму – в точці $B(0;6)$. Очевидно, що $f_{\min}=f(C)=(3-3)^2+(2-2)^2=0$; $f_{\max}=f(B)=(0-3)^2+(6-2)^2=9+16=25$. ▷

Вправи

О1. Знайти максимальне значення функції

$$f=x_2-x_1^2+6x_1,$$

якщо

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2\leq 24,\\ x_1+2x_2\leq 15,\\ 3x_1+2x_2\leq 24,\\ x_2\leq 4;\end{cases}$$
$$x_1\geq 0,\quad x_2\geq 0.$$

О2. Знайти максимальне і мінімальне значення функції

$$f=(x_1-3)^2+(x_2-4)^2$$

за умови, що

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 7, \\ 10x_1 - x_2 \leq 8, \\ -18x_1 + 4x_2 \leq 12; \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

О3. Знайти максимальне і мінімальне значення функції

$$f = x_1^2 + x_2^2,$$

якщо

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 \leq 4, \\ x_1 + x_2 \geq 5, \\ x_1 \leq 7, \\ x_2 \leq 6; \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

О4. Знайти максимальне і мінімальне значення функції

$$f = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2,$$

якщо

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 18, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8; \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

О5. Розв'язати задачі

$$1)\ f = -x_1^2 + x_2 \to \max;$$
$$x_1^2 - 6x_1 + x_2^2 - 4x_2 + 4 \leq 0,$$
$$x_1 \geq 2, \quad x_2 \geq 0;$$

$$2)\ f = 10(x_1 - 2)^2 + 20(x_2 - 3)^2 \to \min;$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 - x_2 \leq 1, \\ 2x_1 + x_2 \geq 6, \\ \frac{1}{2}x_1 - x_2 \geq -4; \end{cases}$$

3) $f = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \to \max;$
$$3x_1 + 4x_2 \le 24,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$$

4) $f = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 3)^2 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 14, \\ x_1 + x_2 \le 9, \\ 3x_1 + x_2 \le 21; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$$

5) $f = -x_1^2 + 4x_1 + x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 14, \\ x_1 + x_2 \le 8; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$$

6) $f = 10x_1 + 20x_2 + x_1x_2 -$
$-2x_1^2 - 2x_2^2 \to \max;$
$$\begin{cases} 7 - x_1 \ge 0, \\ 8 - x_2 \ge 0, \\ 10 - x_1 - x_2 \ge 0; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

C1. Знайти глобальні екстремуми наведених нижче функцій, якщо незалежні змінні x_1 і x_2 задовольняють відповідні умови:

1) $f = x_1 - x_2 - 5;$
$$\begin{cases} (x_1 - 1)x_2 \le 1, \\ x_1 + x_2 \ge 7/2, \\ 0 \le x_1 \le 5, \\ 0 \le x_2 \le 5; \end{cases}$$

2) $f = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2;$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 12, \\ x_1 + x_2 \le 9; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$$

3) $f = (x_1 - 7)(x_2 - 1);$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 12, \\ x_1 + x_2 \le 9; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$$

4) $f = 2x_1 - x_1^2 + x_2;$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 12, \\ x_2 \le 3; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

C2. Розв'язати подані задачі нелінійного програмування:

1) $f = x_1^2 + x_2^2 \to \min;$
$$x_1 + x_2 = 2;$$

2) $f = x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 - 6x_2 + 13 \to \min;$
$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 10, \\ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

3) $f = 2x_1 - x_1^2 + x_2 \to \max;$
$$2x_1 + x_2 = 4;$$

4) $f = 3x_1 + 2x_2 \to \max;$
$$(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \le 9,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Домашнє завдання

Д1. Розв'язати графічно задачі нелінійного програмування.

1) $f = x_1 x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \geq 12, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 24, \\ -3x_1 + 4x_2 \leq 12; \end{cases}$$
$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$

2) $f = 9(x_1 - 5)^2 + 4(x_2 - 6)^2 \to \min;$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 12, \\ x_1 - x_2 \leq 6, \\ x_2 \leq 4; \end{cases}$$
$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$

3) $f = (x_1 - 2)^2 +$
$+(x_2 - 3)^2 \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 7, \\ x_2 \geq 0, \\ 0 \leq x_1 \leq 5; \end{cases}$$

4) $f = 10(x_1 - 3,5)^2 + 20(x_2 - 4)^2 \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 - x_2 \geq 1, \\ 2x_1 + x_2 \geq 6, \\ \frac{1}{2}x_1 - x_2 \geq -4; \end{cases}$$
$x_1 \geq 1, \quad x_2 \geq 0;$

5) $f = 2x_1 - x_1^2 + x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + x_2 \leq 4; \end{cases}$$
$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$

6) $f = x_1 + x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} (x_1 - 2)(x_2 + 2) \leq 16, \\ 0 \leq x_2 \leq 6; \end{cases}$$
$x_1 \geq 0;$

7) $f = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2$
$\to \max(\min);$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ 0 \leq x_1 \leq 4; \end{cases}$$
$x_2 \geq 0;$

8) $f = 3x_1 + 4x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 25, \\ x_1 x_2 \geq 4; \end{cases}$$
$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$

9) $f = x_1^2 + x_2^2 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 3, \\ 2x_1 + x_2 \leq 9, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8; \end{cases}$$
$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$

10) $f = x_1 \cdot x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 - 14 \geq 0, \\ 2x_1 + x_2 \leq 10; \end{cases}$$
$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$

Відповіді

О1. $X^* = (3;4), f_{\max} = 13$. **О2.** $X_1^* = (\frac{123}{101}; \frac{422}{101}), f_{\min} = \frac{324}{101}$; $X_2^* = (2;12), f_{\min} = 65$. **О3.** $X_1^* = (1;4)$, $X_2^* = (4;1)$, $f_{\min} = f(X_1^*) = f(X_2^*) = 17$; $X_3^* = (7;4/7), f_{\max} = f(X_3^*) = 2417/49$. **О4.** $X_1^* = (4;3), f_{\min} = 0, X_2^* = (13;10,5), f_{\max} = 137,25$. **О5.** 1) $X^* = (2;2+\sqrt{8})$, $f_{\max} = \sqrt{8}-2$; 2) $X^* = (2;3)$, $f_{\min} = 0$; 3) $X^* = (8;0)$, $f_{\max} = 8$; 4) $X^* = (7;0)$, $f_{\max} = 36$; 5) $X^* = (2;6)$, $f_{\max} = 40$; 6) $X^* = (4;6)$, $f_{\max} = 80$. **С1.** 1) $X_1^* = (5;0)$, $f_{\max} = 0$, $X_2^* = (0;5)$, $f_{\min} = -10$; 2) $X_1^* = (2;3)$, $f_{\min} = 0$, $X_2^* = (9;0)$, $f_{\max} = 58$; 3) $X_1^* = (7;1)$, $f_{\min} = 0$, $X_2^* = (0;0)$, $f_{\max} = 7$; 4) $X^* = (1;3)$, $f_{\max} = 4$. **С2.** 1) $X^* = (1;1)$, $f_{\min} = 2$; 2) $X^* = (2;3)$, $f_{\min} = 0$; 3) $X^* = (0;4)$, $f_{\max} = 4$; 4) $X^* = (2+\frac{9}{\sqrt{3}}; 1+\frac{6}{\sqrt{3}})$, $f_{\max} = 8+3\sqrt{13}$. **Д1.** 1) $X^* = (6;4)$, $f_{\max} = 24$; 2) $X^* = (5;4)$, $f_{\min} = 16$; 3) $X^* = (2;3)$, $f_{\min} = 0$; 4) $X^* = (3,5;2,5)$, $f_{\min} = 15$; 5) $X^* = (2/3;14/9)$, $f_{\max} = 22/9$; 6) $X^* = (4;6)$, $f_{\max} = 10$; 7) $X^* = (3;3)$, $f_{\min} = 0$, $X_1^* = (0;0)$, $X_2^* = (0;6)$, $f_{\max} = 18$; 8) $X^* = (3;4)$, $f_{\max} = 25$; 9) $X^* = (2;5)$, $f_{\max} = 29$; 10) $X^* = (5/2;5)$, $f_{\max} = 25/2$.

Тема 13. Задачі нелінійного програмування без обмежень і з обмеженнями-рівностями. Метод множників Лагранжа

Розглянемо спочатку задачу про знаходження екстремуму функції багатьох змінних $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, коли на ці змінні не накладено ніяких обмежень. Таку задачу називають **задачею нелінійного програмування без обмежень**.

Вияснимо, як можна знайти найбільше і найменше значення функції $f = f(x_1, ..., x_n)$, яка є двічі неперервно диференційовною.

Відомо, що необхідною умовою екстремуму функції багатьох змінних є рівність нулю частинних похідних першого порядку

$$\frac{\partial f(x_1, ..., x_n)}{\partial x_1} = 0, \; ..., \; \frac{\partial f(x_1, ..., x_n)}{\partial x_n} = 0. \qquad (1)$$

Позначатимемо розв'язки системи (1) $X^* = (x_1^*, ...x_n^*)$. Серед них можуть бути як точки екстремуму, так і точки, які не є оптимальними. Щоб визначити характер оптимальності точки X^*, недостатньо частинних похідних 1-го порядку, необхідно обчислити частинні похідні вищих порядків.

Для оптимальності точки X^* достатньо, щоб в околі даної точки виконувалася умова або $f(x_1, ..., x_n) \geq f(x_1^*, ..., x_n^*)$ у випадку мінімуму, або $f(x_1, ..., x_n) \leq f(x_1^*, ..., x_n^*)$ у випадку максимуму.

Це в свою чергу залежить від знака квадратичної форми

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x_1^*, ..., x_n^*)}{\partial x_i \partial x_j}(x_i - x_i^*)(x_j - x_j^*). \qquad (2)$$

Для його визначення введемо матрицю, складену з частинних похідних 2-го порядку:

$$H_f(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Якщо матриця H_f додатно (від'ємно) визначена в точці X^*, то і квадратична форма (2) є додатно (від'ємно) визначеною.

Найпростішими умовами додатної (від'ємної) визначенності матриці є умови Рауса-Гурвіца. Це визначається за допомогою головних мінорів

$$M_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, M_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix},$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{vmatrix}, ..., M_n = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}.$$

Відомо,
що коли головні мінори матриці $H_f(X^*)$ задовольняють умови: 1) $M_1 > 0, M_2 > 0, ..., M_n > 0$, то в точці X^* функція f має мінімум; 2) $M_1 < 0, M_2 > 0, M_3 < 0, ..., (-1)^n M_n > 0$, то в точці X^* функція f має максимум.

У випадку 1) функція f є строго вгнутою в певному околі точки X^*, а у випадку 2) – строго опуклою в певному околі точки X^*.

Якщо f строго опукла (вгнута) функція на $\mathbb{R}^n$, то f має лише один відносний мінімум (максимум), який є і абсолютним.

Приклад 1. Дослідити на екстремум функцію $f = x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 + 3$.

◁ Маємо $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 + 2, \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2 - 2$. Тоді, скориставшись необхідними умовами екстремуму, одержимо

$$\begin{cases} 2x_1 + 2 = 0, & x_1 = -1, \\ 2x_2 - 2 = 0, & x_2 = 1, \end{cases} \quad \text{тобто } X^* = (-1; 1).$$

Оскільки $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 2, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 2$, то матриця H_f для даної функції має вигляд

$$H_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Головними мінорами даної матриці є $M_1 = 2 > 0$ і $M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$, а це означає, що в точці $X^* = (-1; 1)$ функція f має мінімум і $f_{\min} = (-1)^2 + 2(-1) + 1^2 - 2 \cdot 1 + 3 = 1$. ▷

Розглянемо загальну задачу нелінійного програмування

$$f = f(x_1, ..., x_n) \to \text{extr}; \tag{3}$$

$$\begin{cases} g_1(x_1, ..., x_n) = 0, \\ g_2(x_1, ..., x_n) = 0, \\ \quad \dots \\ g_m(x_1, ..., x_n) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

де f і g_i, $i \in \{1, ..., m\}$, двічі неперервно диференційовні функції. Для розв'язування цієї задачі використовують **метод множників Лагранжа**, що дозволяє звести задачу (3),(4) до задачі без обмежень.

Введемо **функцію Лагранжа**

$$L(x_1, ..., x_n; \lambda_1, ..., \lambda_m) = f(X) + \lambda_1 g_1(X) + ... + \lambda_m g_m(X), \tag{5}$$

де $X = (x_1, ..., x_n)$.

Очевидно, що при виконанні (4) $L(X, \Lambda) = f(X)$ і $\text{extr} f(X) = \text{extr} L(X, \Lambda)$, $\Lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m)$. Необхідні умови оптимальності точки X^* функції $L(X, \Lambda)$ мають вигляд

$$
\begin{cases}
\frac{\partial L}{\partial x_1} \equiv \frac{\partial f}{\partial x_1} + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_1} = 0, \\
\quad ... \\
\frac{\partial L}{\partial x_n} \equiv \frac{\partial f}{\partial x_n} + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_n} = 0, \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} \equiv g_1(X) = 0, \\
\quad ... \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda_m} \equiv g_m(X) = 0.
\end{cases} \tag{6}
$$

З цієї системи знаходимо $X^* = (x_1^*, ..., x_n^*)$ і $\Lambda^* = (\lambda_1^*, ..., \lambda_m^*)$.

Характер оптимальності точки X^* визначаємо за допомогою достатніх умов, причому застосовуємо їх лише до функції f, оскільки $g_i(X^*) = 0$, $i \in \{1, ..., m\}$.

Приклад 2. Знайти оптимальні значення функції

$$f = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1 - 4x_2 \text{ за умови, що } x_1 + x_2 = 2.$$

◁ Запишемо функцію Лагранжа

$$L(x_1, x_2; \lambda) = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1 - 4x_2 + \lambda(x_1 + x_2 - 2).$$

Необхідні умови екстремуму

$$
\begin{cases}
\frac{\partial L}{\partial x_1} \equiv 4x_1 + x_2 + 2 + \lambda = 0, \\
\frac{\partial L}{\partial x_2} \equiv x_1 + 2x_2 - 4 + \lambda = 0, \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} \equiv x_1 + x_2 - 2 = 0.
\end{cases}
$$

Якщо виключити з перших двох рівнянь λ, то дістанемо систему

$$
\begin{cases}
3x_1 - x_2 + 6 = 0, \\
x_1 + x_2 - 2 = 0,
\end{cases}
$$

з якої одержуємо, що $x_1 = -1, x_2 = 3$.

Отже, підозрілою на екстремум є точка $X^* = (-1; 3)$. Для визначення типу екстремуму обчислимо матрицю $H_f(X^*)$: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 2$; $H_f(X^*) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $M_1 = 4 > 0, M_2 = 7 > 0$.

Отже, в точці $X^* = (-1; 3)$ функція f має мінімум, а саме,

$$f_{\min} = 2(-1)^2 + (-1) \cdot 3 + 3^2 + 2(-1) - 4 \cdot 3 = -6. \quad \triangleright$$

Зауваження. Оскільки при обчисленні координат оптимальної точки нас конкретне значення λ не цікавить, то там, де це можливо, множники Лагранжа треба виключити, що дозволить знизити порядок системи рівнянь.

Вправи

О1. Згідно з планом виробництва продукції підприємству необхідно виготовити 180 виробів. Ці вироби можна виготовляти двома технологічними способами. При виробництві першим способом x_1 виробів витрати складають $4x_1 + x_1^2$ грн., а при виготовленні x_2 виробів другим способом вони складають $8x_2+x_2^2$ грн. Знайти, скільки виробів треба виготовити кожним способом, щоб витрати виробництва були мінімальними.

О2. Знайти умовні екстремуми функцій
1) $f = x_1^2 + x_2^2$, якщо $x_1 + x_2 = 5$;
2) $f = x_1x_2x_3$ за умов, що $2x_1x_2 + x_2x_3 = 12, 2x_1 - x_2 = 8$;
3) $f = \frac{x-y-4}{\sqrt{2}}$, якщо $x^2 + y^2 = 1$;
4) $f = x_1x_2^2$, якщо $x_1 + 2x_2 = 1$;
5) $f = 2x_1 + x_2 - 2x_3$, якщо $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 36$.

О3. Знайти екстремуми функцій
1) $f = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1 - 6x_2$; 2) $f = x_1^3 + 3x_1x_2^2 - 15x_1 - 12x_2$;
3) $f = 2x_1^3 - x_1x_2^2 + 5x_1^2 + x_2^2$; 4) $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1 + 6x_2 - 2x_3$;
5) $f = 10x_1 + 20x_2 + x_1x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2$.

С1. З допомогою функції Лагранжа знайти оптимальні значення функцій
1) $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, якщо $\frac{x_1^2}{16} + \frac{x_2^2}{9} + \frac{x_3^2}{4} = 1$;
2) $f = x_1x_2^2x_3^3$, якщо $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 12, x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0$.

С2. Знайти екстремуми функцій
1) $f = x_1x_2 + \frac{50}{x_1} + \frac{20}{x_2}$, $x_1 > 0, x_2 > 0$;
2) $f = x_1^2 + x_2^2 - 2\ln x_1 - 18\ln x_2$, $x_1 > 0, x_2 > 0$;

3) $f = x_1 + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \frac{2}{x_3}$.

Домашнє завдання

Д1. Знайти умовні екстремуми функцій
1) $f = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 + x_1 + x_2 - 4$, якщо $x_1 + x_2 + 3 = 0$;
2) $f = 2x_1 + x_2$, якщо $x_1^2 + x_2^2 = 1$;
3) $f = x_1^2 + x_2^2 + 3$ за умов, що $x_1 + x_2 + x_3 = 4, 2x_1 - 3x_2 = 12$;
4) $f = x_1x_2 + x_2x_3$ за умов, що $x_1 + x_2 = 4, x_2 + x_3 = 4$;
5) $f = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$, якщо $x_1 + x_2 = 2$.
Д2. Знайти екстремуми функцій
1) $f = 3x_1^2 - x_1^3 + 3x_2^2 + 4x_2$;
2) $f = x_1x_2^2x_3^3(1 - x_1 - 2x_2 - 3x_3)$, $x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0$; 3) $f = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 + 9x_1 - 6x_2 + 20$; 4) $f = x_1^3 + 8x_2^3 - 6x_1x_2 + 1$.

Відповіді

О1. $X^* = (91; 89)$, $f_{\min} = 17278$. **О2.** 1) $X^* = (5/2; 5/2)$, $f_{\min} = 25/2$; 2) $X_1^* = (-1/3; -26/3; -28/39)$, $f_{\min} = -56/27$, $X_2^* = (3; -2; -12)$, $f_{\max} = 72$; 3) $X_1^* = (-1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2})$, $f_{\min} = -1 - 2\sqrt{2}$, $X_2^* = (1/\sqrt{2}; -1/\sqrt{2})$, $f_{\max} = 1 - 2\sqrt{2}$; 4) $X_1^* = (1; 0)$, $f_{\min} = 0$, $X_2^* = (1/3; 1/3)$, $f_{\max} = 1/27$; 5) $X_1^* = (-4; -2; 4)$, $f_{\min} = -18$, $X_2^* = (4; 2; -4)$, $f_{\max} = 18$. **О3.** 1) $X^* = (0; 3)$, $f_{\min} = -9$; 2) $X_1^* = (2; 1)$, $f_{\min} = -28$; $X_2^* = (-2; -1)$, $f_{\max} = 28$; у стаціонарних точках $(1; 2)$, $(-1; -2)$ екстремумів немає; 3) $X^* = (0; 0)$, $f_{\min} = 0$; у стаціонарних точках $(-5/3; 0)$, $(1; 4)$, $(1; -4)$ екстремумів немає; 4) $X^* = (2; -3; 1)$, $f_{\min} = -14$; 5) $X^* = (4; 6)$, $f_{\max} = 80$. **С1.** 1) $X_1^* = (0; 0; \pm 2)$, $f_{\min} = 4$, $X_2^* = (\pm 4; 0; 0)$, $f_{\max} = 16$, у точці $X_3^* = (0; \pm 3; 0)$ екстремуму немає; 2) $X^* = (2; 2; 2)$, $f_{\max} = 2^6$. **С2.** 1) $X^* = (5; 2)$, $f_{\min} = 30$; 2) $X^* = (1; 3)$, $f_{\min} = 10 - 18\ln 3$; 3) $X^* = (2^{1/4}; 2^{1/2}; 2^{3/4})$, $f_{\min} = 2^{9/4}$. **Д1.** 1) $X^* = (-3/2; -3/2)$, $f_{\min} = -19/4$; 2) $X_1^* = (-2/\sqrt{5}; -1/\sqrt{5})$, $f_{\min} = -\sqrt{5}$, $X_2^* = (2/\sqrt{5}; 1/\sqrt{5})$, $f_{\max} = \sqrt{5}$; 3) $X^* = (27/8; -7/4; 19/8)$, $f_{\min} = 1077/64$; 4) $X^* = (2; 2; 2)$, $f_{\max} = 8$; 5) $X^* = (1; 1)$, $f_{\min} = 2$. **Д2.** 1) $X^* = (0; -2/3)$, $f_{\min} = -4/3$; у стаціонарній точці $(2; -2/3)$ екстремуму немає; 2) $X^* = (1/7; 1/7; 1/7)$, $f_{\max} = \frac{1}{7^7}$; 3) $X^* = (-4; 1)$, $f_{\min} = -1$; 4) $X^* = (1; 1/2)$, $f_{\min} = 0$.

Тема 14. Задачі дробово-лінійного програмування

Задачею дробово-лінійного програмування називається задача нелінійного програмування вигляду

$$f = \frac{c_1x_1 + ... + c_nx_n + c_0}{d_1x_1 + ... + d_nx_n + d_0} \to \text{extr}; \tag{1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases} \tag{2}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, ..., n\}. \tag{3}$$

До такого типу математичних моделей приводять економічні задачі, в яких необхідно оптимізувати питомі економічні показники, наприклад, собівартість, рентабельність тощо.

Якщо система умов (2), (3) сумісна, то вона визначає в просторі $\mathbb{R}^n$ опуклий многогранник Ω.

Чисельник цільової функції (1) позначимо φ_1, а знаменник – φ_2. Вважаємо, що в допустимій області Ω знаменник $\varphi_2 > 0$, бо у випадку від'ємності φ_2 знак $" - "$ можна віднести до чисельника φ_1.

Перепишемо задачу (1)–(3) у нових змінних, які позначимо $y_0, y_1, ..., y_n$. Для цього покладемо

$$\varphi_2 \equiv d_1x_1 + ... + d_nx_n + d_0 = \frac{1}{y_0} \tag{4}$$

і

$$y_j = y_0x_j, \quad j \in \{1, ..., n\}. \tag{5}$$

Тоді в нових змінних задача (1)–(3) набуде вигляду

$$f = c_1y_1 + ... + c_ny_n + c_0y_0 \to \text{extr}; \tag{6}$$

$$
\left\{
\begin{array}{c}
a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n - b_1 y_0 = 0, \\
a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n - b_2 y_0 = 0, \\
... \\
a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + ... + a_{mn}y_n - b_m y_0 = 0, \\
d_1 y_1 + ... + d_n y_n + d_0 y_0 = 1;
\end{array}
\right. \tag{7}
$$

$$
y_0 > 0, \quad y_j \geq 0, \quad j \in \{1, ..., n\}. \tag{8}
$$

Задача (6)–(8) є задачею лінійного програмування, яку можна розв'язувати симплексним методом. Якщо $Y^* = (y_0^*, y_1^*, ..., y_n^*)$ є оптимальним розв'язком даної задачі, то оптимальний розв'язок задачі (1)–(3) $X^* = (x_1^*, ..., x_n^*)$, де $x_j^* = \frac{y_j^*}{y_0^*}$, $j \in \{1, ..., n\}$.

Зауважимо, що коли $y_0^* = 0$, то це означає, що задача (1)–(3) не має оптимального розв'язку, оскільки цільова функція необмежена на Ω.

Приклад 1. Знайти максимальне значення функції $f = \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + 2x_2 + 1}$ на множині розв'язків системи обмежень

$$
\left\{
\begin{array}{l}
x_1 - 2x_2 + x_3 \quad\;\; = 2, \\
2x_1 + x_2 \quad\; + x_4 = 6;
\end{array}
\right.
$$
$$
x_j \geq 0, j \in \{1, ..., 4\}.
$$

◁ Введемо позначення

$$
y_0 = \frac{1}{x_1 + 2x_2 + 1} > 0; x_1 y_0 = y_1, x_2 y_0 = y_2, x_3 y_0 = y_3, x_4 y_0 = y_4.
$$

Тоді $f = 2x_1 y_0 - x_2 y_0$, а система обмежень, після множення на y_0, набуде вигляду

$$
\left\{
\begin{array}{l}
x_1 y_0 - 2x_2 y_0 + x_3 y_0 \quad\;\; = 2y_0, \\
2x_1 y_0 + x_2 y_0 \quad\; + x_4 y_0 = 6y_0.
\end{array}
\right.
$$

Якщо скористатися нашим позначенням, то одержимо задачу лінійного програмування

$$
f = 2y_1 - y_2 \to \max;
$$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
-2y_0 + y_1 - 2y_2 + y_3 \quad\;\; = 0, \\
-6y_0 + 2y_1 + y_2 \quad\; + y_4 = 0, \\
\quad y_0 + y_1 + 2y_2 \qquad\quad = 1;
\end{array}
\right.
$$
$$
y_0 > 0, \quad y_j \geq 0, \; j \in \{1, ..., 4\}.
$$

Якщо помножити третє рівняння системи обмежень спочатку на 6 і додати до другого, а потім на 2 і додати до першого, то система рівнянь – обмежень набуде базисної форми. Тоді задача лінійного програмування матиме вигляд

$$f = 2y_1 - y_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 3y_1 + 2y_2 + y_3 = 2, \\ 8y_1 + 13y_2 + y_4 = 6, \\ y_0 + y_1 + 2y_2 = 1; \end{cases}$$
$$y_0 > 0, \quad y_j \geq 0, \ j \in \{1, \ldots, 4\}.$$

Розв'язкемо дану задачу за допомогою симплексного методу

i	Б	$C_б$	B	$\frac{0}{A_0}$	$\frac{2}{A_1}$	$\frac{-1}{A_2}$	$\frac{0}{A_3}$	$\frac{0}{A_4}$
1	A_3	0	2	0	$\boxed{3}$	2	1	0
2	A_4	0	6	0	8	13	0	1
3	A_0	0	1	1	1	2	0	0
$m+1$			0	0	-2	1	0	0
1	A_1	2	$2/3$	0	1	$2/3$	$1/3$	0
2	A_4	0	$2/3$	0	0	$23/3$	$-8/3$	1
3	A_0	0	$1/3$	1	0	$4/3$	$-1/3$	0
$m+1$			$4/3$	0	0	$7/3$	$2/3$	0

Маємо, що $f_{\max} = 4/3$ при $y_0^* = 1/3, y_1^* = 2/3, y_2^* = 0, y_3^* = 0, y_4^* = 2/3$. Тоді $x_1^* = \frac{y_1^*}{y_0^*} = 2, x_2^* = \frac{y_2^*}{y_0^*} = 0, x_3^* = \frac{y_3^*}{y_0^*} = 0, x_4^* = \frac{y_4^*}{y_0^*} = 2$. Отже, $f_{\max} = 4/3$ досягається в точці $X^* = (2; 0; 0; 2)$. ◁

Якщо $n = 2$, то задача (1)–(3) має вигляд

$$f = \frac{c_1x_1 + c_2x_2 + c_0}{d_1x_1 + d_2x_2 + d_0} \to \text{extr}; \tag{9}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m; \end{cases} \tag{10}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \tag{11}$$

і її можна розв'язати графічно.

Розглянемо спочатку випадок, коли $c_0 = 0, d_0 = 0$. Область допустимих розв'язків, як відомо є многокутником. З'ясуємо, як поводить себе цільова функція $f = \frac{c_1x_1+c_2x_2}{d_1x_1+d_2x_2}$ залежно від x_1 та x_2. Нехай f фіксоване, тоді за умови $d_1x_1 + d_2x_2 \neq 0$, одержуємо, що $f(d_1x_1 + d_2x_2) = (c_1x_1 + c_2x_2)$. Розв'язавши це рівняння відносно x_2, матимемо

$$x_2 = \frac{c_1 - fd_1}{fd_2 - c_2} \cdot x_1 \equiv kx_1. \qquad (12)$$

Рівняння (12) задає пряму, яка проходить через початок координат. При деякому фіксованому значенні f, кутовий коефіцієнт k прямої також фіксований, і пряма займе певне положення. Якщо змінювати значення f, то пряма $x_2 = kx_1$ буде повертатися навколо початку координат.

З'ясуємо, як поводитиме себе кутовий коефіцієнт k при монотонному зростанні f. Оскільки $\frac{dk}{df} = \frac{c_2d_1-c_1d_2}{(fd_2-c_2)^2}$, то одержуємо, що ця похідна має сталий знак, і при збільшенні f кутовий коефіцієнт буде тільки зростати або тільки спадати, а пряма буде обертатися в один бік. Навпаки, при обертанні прямої в одному напрямку функція f або тільки зростає, або тільки спадає. Очевидно, що коли $c_2d_1 - c_1d_2 > 0$, то f зростає при обертанні проти годинникової стрілки, а при $c_2d_1 - c_1d_2 < 0$, – за годинниковою стрілкою.

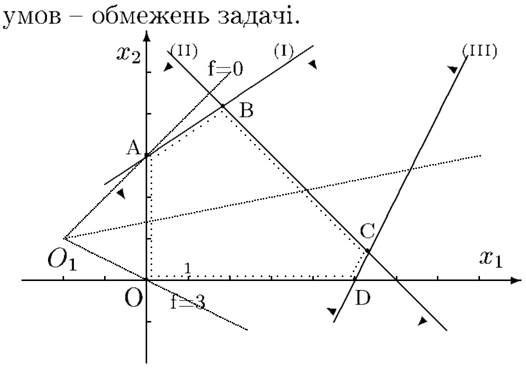
Якщо $c_0 \neq 0, d_0 \neq 0$, то замість рівняння (12) матимемо рівняння $x_2 - x_2^0 = k_1(x_1 - x_1^0)$, яке визначає прямі, що проходять через точку $O_1(x_1^0, x_2^0)$, де x_1^0 і x_2^0 визначаються з системи рівнянь

$$\begin{cases} c_1x_1 + c_2x_2 + c_0 = 0, \\ d_1x_1 + d_2x_2 + d_0 = 0. \end{cases} \qquad (13)$$

Приклад 2. Розв'язати графічно задачу

$$f = \frac{x_1-x_2+3}{2x_1+3x_2+1} \to \text{extr};$$
$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \leq 9, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ 2x_1 - x_2 \leq 10; \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

◁ Область допустимих розв'язків є п'ятикутник $OABCD$, що випливає з умов – обмежень задачі.



Згідно з (13) центр пучка прямих (ліній рівня) визначаємо з системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 1 = 0. \end{cases}$$

Звідси одержуємо $x_1^0 = -2, x_2^0 = 1$. Отже, центром пучка є точка $O_1(-2;1)$. Напрям зростання цільової функції визначаємо за знаком виразу $c_2d_1 - c_1d_2 = -1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = -5 < 0$, що означає зростання ліній рівня при русі за годинниковою стрілкою. З рисунку бачимо, що максимум досягається в точці $O(0;0)$, причому $f_{\max} = 3$, а мінімум – у точці $A(0;3)$, в якій $f_{\min} = 0$. Зауважимо, що в області допустимих розв'язків $2x_1 + 3x_2 + 1 \neq 0$, оскільки лінія $2x_1 + 3x_2 + 1 = 0$ проходить поза п'ятикутником $OABCD$. ▷

Вправи

О1. Розв'язати задачі дробово-лінійного програмування графічно або симплексним методом:

1) $f = \frac{3x_1+x_2}{x_1+x_2} \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 15; \end{cases}$$
$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$

2) $f = \frac{3x_1+4x_2}{2x_1+x_2} \to \max;$
$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \leq -3, \\ x_1 - x_2 \leq 8, \\ x_2 \leq 6; \end{cases}$$
$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$

3) $f = \frac{x_1-2x_2+6}{x_1+x_2+3} \to \min;$
$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \le -3, \\ x_2 \le 6, \\ x_1 - x_2 \le 8; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$

4) $f = \frac{3x_1+4x_2+7}{2x_1+x_2+2} \to \max;$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 - x_2 \le 5; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$

5) $f = \frac{x_1-2x_2}{3x_1+x_2+2} \to \min;$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 7, \\ -x_1 + 4x_2 \le 5, \\ 4x_1 - 3x_2 \le 17; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$

6) $f = \frac{-x_1+3x_2-6}{x_1+x_2+2} \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 9, \\ x_1 - x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 2, \\ 0 \le x_2 \le 10; \end{cases}$$

7) $f = \frac{x_1-x_2+2}{3x_1+2x_2+4} \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4, \\ -2x_1 + 5x_2 \le 10; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$

8) $f = \frac{3x_1-3x_2+9}{3x_1+x_2+1} \to \max;$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 4, \\ -x_1 + 4x_2 \ge 4; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$

9) $f = \frac{2x_1+x_2}{x_1+x_2} \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 11, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 8, \\ -x_1 + 3x_2 + x_5 = 9; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, ..., 5\}.$

O2. Розв'язати симплексним методом задачі

1) $f = \frac{x_1-x_2+x_3}{2x_1+x_3+1} \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 8, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 4; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, 2, 3\};$

2) $f = \frac{2x_1-3x_2}{3x_1+x_2} \to \max;$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 6; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, ..., 4\};$

3) $f = \frac{2x_1-x_2}{x_1+2x_2+1} \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 6; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, ..., 4\}.$

C1. Розв'язати графічно задачі дробово-лінійного програмування

1) $f = \frac{3x_1-x_2}{x_1+x_2} \to \max;$
$$\begin{cases} 9x_1 + 6x_2 \le 54, \\ -2x_1 + 9x_2 \ge 19, \\ -3x_1 + 10x_2 \le 54; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$

2) $f = \frac{x_1-2x_2}{x_1+5x_2} \to \max;$
$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \le 4, \\ -x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ x_1 + x_2 \le 13; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$

3) $f = \frac{x_1+2x_2-1}{3x_1-x_2+4} \to \max;$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 8, \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 27, \\ x_1 - x_2 \leq 3, \\ x_1 + 2x_2 \geq 6; \end{cases}$$
$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$

4) $f = \frac{x_1-2x_2+6}{x_1+x_2+3} \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 8, \\ x_2 \leq 10, \\ x_1 - x_2 \leq 8; \end{cases}$$
$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$

Домашнє завдання

Д1. Розв'язати дані задачі симплексним методом. Результат перевірити графічно.

1) $f = \frac{x_1+2x_2}{3x_1+2x_2} \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 + 8x_2 \leq 8, \\ x_1 \geq 1; \end{cases}$$
$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$

2) $f = \frac{-x_1+3x_2-6}{x_1+x_2+2} \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 6, \\ x_1 + 3x_2 \geq 9, \\ x_1 \geq 2; \end{cases}$$
$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$

3) $f = \frac{5x_1-x_2+4}{x_1+2x_2+3} \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 6, \\ -3x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 + x_2 \leq 7; \end{cases}$$
$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$

4) $f = \frac{x_1-x_2+1}{2x_1+x_2+4} \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq -4, \\ x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1 - 4x_2 \leq -8; \end{cases}$$
$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$

Д2. Розв'язати графічно задачі

1) $f = \frac{2x_1-x_2}{x_1+2} \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 5, \\ 2x_1 - x_2 \geq 1, \\ x_1 - x_2 \leq 1; \end{cases}$$
$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$

2) $f = \frac{4x_1+2x_2}{x_1+x_2+1} \to \max;$
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \leq 9, \\ 3x_1 - x_2 \leq 15; \end{cases}$$
$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$

3) $f = \frac{x_1-2x_2}{x_2+3} \to \max;$
$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_1 - 4x_2 \leq 2, \\ x_1 - x_2 \leq 5; \end{cases}$$
$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$

4) $f = \frac{2x_1+3x_2}{x_1-x_2} \to \max;$
$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_1 - 4x_2 \leq 2, \\ x_1 - x_2 \leq 5; \end{cases}$$
$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$

5) $f = \frac{3x_1 - x_2}{x_1 + x_2} \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 7, \\ 3x_1 - x_2 + x_5 = 11; \end{cases}$$
$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, ..., 5\};$

6) $f = \frac{-2x_1 + x_2}{x_1 + 2x_2 + 1} \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 6; \end{cases}$$
$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, 2, 3\}.$

Д3. Розв'язати симплексним методом задачі

1) $f = \frac{-2x_1 - x_2 + x_3}{3x_2 + x_3} \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 6; \end{cases}$$
$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, ..., 4\};$

2) $f = \frac{2x_1 + 3x_2 - x_3}{x_1 + x_3} \to \max;$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 2; \end{cases}$$
$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, ..., 5\}.$

Відповіді

О1. 1) $X^* = (3; 0)$, $f_{\max} = 3$; 2) $X^* = (3; 6)$, $f_{\max} = 33/12$; 3) $X^* = (3; 6)$, $f_{\min} = -1/4$; 4) $X^* = (0; 1)$, $f_{\max} = 11/3$; 5) $X^* = (4,6; 2,4)$, $f_{\min} = -1/91$; 6) $X^* = (2; 10)$, $f_{\max} = 11/7$; 7) $X^* = (0; 2)$, $f_{\min} = 0$; 8) $X^* = (0; 1)$, $f_{\max} = 3$; 9) $X^* = (9; 1; 0; 0; 15)$, $f_{\max} = 19/10$. **О2.** 1) $X^* = (20; 12; 0)$, $f_{\max} = 8/41$; 2) $X^* = (2; 0; 0; 4)$, $f_{\max} = 2/3$; 3) $X^* = (14/5; 2/5; 0; 0)$, $f_{\max} = 26/23$. **С1.** 1) $X^* = (4; 3)$, $f_{\max} = 9/7$; 2) $X^* = (8; 5)$, $f_{\max} = -2/33$; 3) $X^* = (1; 5)$, $f_{\max} = 5$; 4) $X^* = (8; 0)$, $f_{\max} = 14/11$. **Д1.** 1) $X^* = (1; 7/8)$, $f_{\max} = 11/19$; 2) $X^* = (27/4; 3/4)$, $f_{\min} = -21/19$; 3) $X^* = (6; 0)$, $f_{\max} = 34/9$; 4) $X^* = (32/5; 18/5)$, $f_{\max} = 19/102$. **Д2.** 1) Розв'язку немає; 2) $X^* = (5; 0), f_{\max} = 10/3$; 3) $X^* = (6; 1)$, $f_{\max} = 1$; 4) розв'язку немає; 5) $X^* = (4; 1; 0; 8; 0)$, $f_{\max} = 11/5$; 6) $X^* = (2; 0)$, $f_{\min} = -4/3$. **Д3.** 1) $X^* = (8/3; 2/3; 0; 0), f_{\max} = -3$; 2) $X^* = (3/2; 1/2; 2; 0; 0), f_{\max} = 5/7$.

Тема 15. Задачі опуклого і квадратичного програмування

Розглянемо задачу нелінійного програмування

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max; \tag{1}$$

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i, \quad i \in \{1, ..., m\}; \tag{2}$$

$$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, ..., n\}, \tag{3}$$

де f і g_i, $i \in \{1, ..., m\}$, – певні функції n змінних $x_1, ..., x_n$.

Не існує універсального методу розв'язання задачі (1)–(3) у загальній постановці, але у випадку, коли f опукла (вгнута) і область допустимих розв'язків опукла, задача (1)–(3) розв'язується зведенням до задачі лінійного програмування.

Вважатимемо, що функція f є опуклою (вгнутою), функції g_i, $i \in \{1, ..., m\}$ – опуклими, а множина допустимих розв'язків задачі (1)–(3) задовольняє **умову регулярності**, тобто існує принаймні одна точка X^0, яка належить області допустимих розв'язків і така, що $g_i(X^0) < b_i$, $i \in \{1, ..., m\}$. У цьому випадку задача (1)–(3) називається **задачею опуклого програмування**.

Для задач опуклого програмування локальний екстремум одночасно є і глобальним.

Функцією Лагранжа задачі опуклого програмування (1)–(3) називається функція

$$L(x_1, ..., x_n; \lambda_1, ..., \lambda_m) = f(x_1, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - g_i(x_1, ..., x_n)), \tag{4}$$

де $\lambda_1, ..., \lambda_m$ – множники Лагранжа.

Точка $(X^0, \Lambda^0) = (x_1^0, ..., x_n^0; \lambda_1^0, ..., \lambda_m^0)$ називається **сідловою точкою** функції Лагранжа, якщо

$$L(x_1, ..., x_n; \lambda_1^0, ..., \lambda_m^0) \le L(x_1^0, ..., x_n^0; \lambda_1^0, ..., \lambda_m^0) \le$$
$$\le L(x_1^0, ..., x_n^0; \lambda_1, ..., \lambda_m) \tag{5}$$

для всіх $x_j \geq 0$, $j \in \{1, ..., n\}$; $\lambda_i \geq 0$, $i \in \{1, ..., m\}$.

Теорема Куна-Таккера. *Точка* $X^0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$ *є оптимальним планом задачі опуклого програмування (1)–(3) тоді і тільки тоді, коли існує* $\Lambda^0 = (\lambda_1^0, ..., \lambda_m^0), \lambda_i^0 \geq 0$, $i \in \{1, ..., m\}$, *таке, що* (X^0, Λ^0) *є сідловою точкою функції Лагранжа.*

Якщо припустити, що цільова функція f і функції g_i, $i \in \{1, ..., m\}$, є неперервно диференційовними, то дану теорему можна доповнити аналітичними виразами, які визначають необхідні і достатні умови того, щоб точка (X^0, Λ^0) була сідловою точкою функції Лагранжа. Вони мають вигляд:

$$\frac{\partial L_0}{\partial x_j} \leq 0, \quad j \in \{1, ..., n\}; \tag{6}$$

$$x_j^0 \frac{\partial L_0}{\partial x_j} = 0, \quad j \in \{1, ..., n\}; \tag{7}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, ..., n\}; \tag{8}$$

$$\frac{\partial L_0}{\partial \lambda_i} \geq 0, \quad i \in \{1, ..., m\}; \tag{9}$$

$$\lambda_i^0 \frac{\partial L_0}{\partial \lambda_i} = 0, \quad i \in \{1, ..., m\}; \tag{10}$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad i \in \{1, ..., m\}, \tag{11}$$

де $\frac{\partial L_0}{\partial x_j}, \frac{\partial L_0}{\partial \lambda_i}$ – значення відповідних похідних від функції Лагранжа, обчислені у сідловій точці.

Задачею, для якої виконуються умови, при яких можна записати (6)–(11), є задача **квадратичного програмування**

$$f = \sum_{j=1}^{n} d_j x_j + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_k x_j \to \max(\min); \tag{12}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i \in \{1, ..., m\}; \tag{13}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in \{1, ..., n\}, \tag{14}$$

де
$\sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} c_{kj} x_k x_j$ – від'ємно (додатно) напіввизначена квадратична форма.

Функція Лагранжа для задачі (12)–(14) записується у вигляді

$$L = \sum_{j=1}^{n} d_j x_j + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_k x_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j).$$

Запишемо співвідношення (6)–(11) для цієї функції і введемо додаткові змінні v_j, $j \in \{1, ..., n\}$, і w_i, $i \in \{1, ..., m\}$, які перетворюють нерівності (6), (9) у рівності. Тоді одержимо

$$\frac{\partial L_0}{\partial x_j} + v_j = 0, \quad j \in \{1, ..., n\}; \tag{15}$$

$$\frac{\partial L_0}{\partial \lambda_i} - w_i = 0, \quad i \in \{1, ..., m\}; \tag{16}$$

$$x_j^0 v_j = 0, \quad j \in \{1, ..., n\}; \tag{17}$$

$$\lambda_i^0 w_i = 0, \quad i \in \{1, ..., m\}; \tag{18}$$

$$x_j^0 \geq 0,\ v_j \geq 0,\ \lambda_i^0 \geq 0,\ w_i \geq 0,\ j \in \{1, ..., n\},\ i \in \{1, ..., m\}. \tag{19}$$

Таким чином, щоб знайти розв'язок задачі квадратичного програмування (12)–(14), треба знайти невід'ємний розв'язок системи лінійних рівнянь (15), (16), який задовольняє умови (17), (18). Цей розв'язок можна знайти за допомогою методу штучного базису, застосованого для знаходження максимального значення функції $F = -\sum\limits_{i} My_i$ за умов (15), (16), (19) з врахуванням рівностей (17), (18). Тут y_i, $i \geq 1$, – штучні змінні, які введено у рівняння (15), (16).

Використовуючи метод штучного базису, після скінченного числа кроків або встановимо нерозв'язність, або одержимо оптимальний план вихідної задачі.

Приклад 1. Розв'язати задачу

$$\begin{gathered} f = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 \to \max; \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 2x_1 - x_2 \le 12; \end{cases} \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{gathered} \tag{20}$$

$\triangleleft$ Маємо задачу квадратичного програмування. Функція Лагранжа

$$L(x_1, x_2; \lambda_1, \lambda_2) = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 + \lambda_1(8 - x_1 - 2x_2) + \lambda_2(12 - 2x_1 + x_2),$$

а локальні умови Куна-Таккера

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 2 - 2x_1 - \lambda_1 - 2\lambda_2 \le 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 4 - 4x_2 - 2\lambda_1 + \lambda_2 \le 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 8 - x_1 - 2x_2 \ge 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 12 - 2x_1 + x_2 \ge 0; \end{cases} \tag{21}$$

$$\begin{cases} x_1 \frac{\partial L}{\partial x_1} = x_1(2 - 2x_1 - \lambda_1 - 2\lambda_2) = 0, \\ x_2 \frac{\partial L}{\partial x_2} = x_2(4 - 4x_2 - 2\lambda_1 + \lambda_2) = 0, \\ \lambda_1 \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \lambda_1(8 - x_1 - 2x_2) = 0, \\ \lambda_2 \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \lambda_2(12 - 2x_1 + x_2) = 0; \end{cases} \tag{22}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \lambda_1 \ge 0, \lambda_2 \ge 0. \tag{23}$$

Перепишемо систему (21) у вигляді

$$\begin{cases} 2x_1 \qquad + \lambda_1 + 2\lambda_2 \ge 2, \\ \qquad 4x_2 + 2\lambda_1 - \lambda_2 \ge 4, \\ x_1 + 2x_2 \qquad\qquad \le 8, \\ 2x_1 - x_2 \qquad\qquad \le 12. \end{cases}$$

Ввівши додаткові невід'ємні змінні v_1, v_2, w_1, w_2, дістанемо рівності

$$\begin{cases} 2x_1 \qquad + \lambda_1 + 2\lambda_2 - v_1 = 2, \\ \qquad 4x_2 + 2\lambda_1 - \lambda_2 - v_2 = 4, \\ x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + w_1 = 8, \\ 2x_1 - x_2 \qquad\qquad + w_2 = 12. \end{cases} \tag{24}$$

Якщо врахувати (24), то (22) можна подати у вигляді

$$x_1 v_1 = 0, x_2 v_2 = 0, \lambda_1 w_1 = 0, \lambda_2 w_2 = 0. \tag{25}$$

Знайшовши невід'ємний розв'язок системи (24), який задовольняє (25), дістанемо сідлову точку функції Лагранжа, а отже, оптимальний розв'язок вихідної задачі (20).

Для знаходження даного розв'язку скористаємося методом штучного базису. У перше і друге рівняння системи (24) введемо додаткові невід'ємні змінні y_1, y_2 і розглянемо задачу лінійного програмування

$$F = -My_1 - My_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 \quad + \lambda_1 + 2\lambda_2 - v_1 + y_1 = 2, \\ \quad 4x_2 + 2\lambda_1 - \lambda_2 - v_2 + y_2 = 4, \\ x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + w_1 \quad = 8, \\ 2x_1 - x_2 \qquad\qquad + w_2 \quad = 12, \end{cases} \tag{26}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, v_1 \geq 0, v_2 \geq 0,$$

$$w_1 \geq 0, w_2 \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0.$$

Розв'яжемо задачу (26) методом штучного базису, а знайшовши її розв'язок, перевіримо, чи він задовольняє умови (25).

i		C_δ	A_0	$\frac{0}{A_{x_1}}$	$\frac{0}{A_{x_2}}$	$\frac{0}{A_{\lambda_1}}$	$\frac{0}{A_{\lambda_2}}$	$\frac{0}{A_{v_1}}$	$\frac{0}{A_{v_2}}$	$\frac{0}{A_{w_1}}$	$\frac{0}{A_{w_2}}$	$\frac{-M}{A_{y_1}}$	$\frac{-M}{A_{y_2}}$
1	A_{y_1}	-M	2	2	0	1	2	-1	0	0	0	1	0
2	A_{y_2}	-M	4	0	$\boxed{4}$	2	-1	0	-1	0	0	0	1
3	A_{w_1}	0	8	1	2	0	0	0	0	1	0	0	0
4	A_{w_2}	0	12	2	-1	0	0	0	0	0	1	0	0
$m+1$			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$m+2$			-6	-2	-4	-3	-1	1	1	0	0	0	0
1	A_{y_1}	-M	2	$\boxed{2}$	0	1	2	-1	0	0	0	1	
2	A_{x_2}	0	1	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{4}$	0	$\frac{-1}{4}$	0	0	0	
3	A_{w_1}	0	6	1	0	-1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	0	
4	A_{w_2}	0	13	2	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{4}$	0	$\frac{-1}{4}$	0	1	0	
$m+1$			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
$m+2$			-2	-2	0	-1	-2	1	0	0	0	0	

i		C_δ	A_0	$\frac{0}{A_{x_1}}$	$\frac{0}{A_{x_2}}$	$\frac{0}{A_{\lambda_1}}$	$\frac{0}{A_{\lambda_2}}$	$\frac{0}{A_{v_1}}$	$\frac{0}{A_{v_2}}$	$\frac{0}{A_{w_1}}$	$\frac{0}{A_{w_2}}$	$\frac{-M}{A_{y_1}}$	$\frac{-M}{A_{y_2}}$
1	A_{x_1}	0	1	1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{-1}{2}$	0	0	0		
2	A_{x_2}	0	1	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{4}$	0	$\frac{-1}{4}$	0	0		
3	A_{w_1}	0	5	0	0	$\frac{-3}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0		
4	A_{w_2}	0	11	0	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-9}{4}$	1	$\frac{-1}{4}$	0	1		
$m+1$			0	0	0	0	0	0	0	0	0		

Отже, $x_1^0 = 1, x_2^0 = 1, w_1^0 = 5, w_2^0 = 11, \lambda_1^0 = 0,\ \lambda_2^0 = 0, v_1^0 = 0, v_2^0 = 0$. Оскільки $x_1^0 v_1^0 = 0, x_2^0 v_2^0 = 0, \lambda_1^0 w_1^0 = 0, \lambda_2^0 w_2^0 = 0$, то $(X^0, \Lambda^0) = (1; 1; 0; 0)$ є сідловою точкою функції Лагранжа. Таким чином, оптимальним розв'язком задачі (20) є $X^* = (1; 1)$ і $f_{\max} = 3$. $\triangleright$

Приклад 2. Розв'язати задачу

$$f = 5(x_1 - 3)^2 + 10(x_2 - 4)^2 \to \min;$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 \ge 15; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

$\triangleleft$ Складемо функцію Лагранжа

$$L(x_1, x_2; \lambda_1, \lambda_2) = 5(x_1 - 3)^2 + 10(x_2 - 4)^2 + \lambda_1(8 - x_1 - x_2) +$$
$$+ \lambda_2(-15 + x_1 + 3x_2)$$

і запишемо систему (7), (10)

$$\begin{array}{ll} x_1(10(x_1 - 3) - \lambda_1 + \lambda_2) = 0, & \lambda_1(8 - x_1 - x_2) = 0, \\ x_2(20(x_2 - 4) - \lambda_1 + 3\lambda_2) = 0, & \lambda_2(-15 + x_1 + 3x_2) = 0. \end{array}$$

При розв'язуванні цієї системи треба розглянути ряд варіантів значень невідомих: $x_1 > 0, x_2 > 0$; $x_1 > 0, x_2 = 0$ і т. д. Візьмемо випадок $x_1 > 0, x_2 > 0$. Виразимо з першого рівняння x_1, а з другого x_2:

$$x_1 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{10} + 3, \quad x_2 = \frac{\lambda_1 - 3\lambda_2}{20} + 4$$

і підставимо їх у третє і четверте рівняння. Тоді одержимо, що $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, x_1 = 3, x_2 = 4$ і $\lambda_1 = -110/7, \lambda_2 = -50/7, x_1 = 15/7, x_2 = 30/7$.

Оскільки вектор $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ повинен бути невід'ємним, залишається перший розв'язок $(X^0, \Lambda^0) = (3; 4; 0; 0)$. Перевіримо, чи є дана точка (X^0, Λ^0) сідловою для функції L. Поклавши $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$, дістанемо функцію $L(x_1, x_2, 0, 0) = 5(x_1 - 3)^2 + 10(x_2 - 4)$, яка при $x_1 = 3, x_2 = 4$ досягає мінімуму. Взявши $x_1 = 3, x_2 = 4$, матимемо функцію $L(3, 4, \lambda_1, \lambda_2) = -\lambda_1$, яка досягає при $\lambda_1 = 0$ максимуму. Отже, точка $(X^0, \Lambda^0) = (3; 4; 0; 0)$ є сідловою, а розв'язок $X^0 = (3; 4)$ є оптимальним і $f_{\min} = f(3; 4) = 0$. ▷

Вправи

О1. Розв'язати задачі квадратичного програмування

1) $f = -2x_1 + 8x_2 - x_1^2 - x_2^2 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 12, \\ -x_1 + x_2 \ge -8; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$

2) $f = -x_1^2 - x_2^2 + 10x_1 + 15x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 13, \\ 2x_1 + x_2 \le 10; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$

3) $f = -x_1^2 - 4x_2^2 + 2x_1 \to \max;$
$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \le 80, \\ 2x_1 + x_2 \le 34; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$

4) $f = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 \to \min;$
$x_1 - 2x_2 + x_3 = 6;$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, 2, 3\};$

5) $f = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 \to \min;$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + 2x_2 \le 6; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$

6) $f = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_2 \to \min;$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 5, \\ x_1 + 2x_2 \le 4; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$

7) $f = 32x_1 + 120x_2 - 4x_1^2 - 15x_2^2 \to \max;$
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 20, \\ 2x_1 - x_2 \le 8; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

С1. Розв'язати задачі квадратичного програмування, використовуючи симплексний метод:

1) $f = 9x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_1 - 4x_2 \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ x_1 + x_2 \le 10; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$

2) $f = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 8x_1 - 2x_2 \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ 2x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + 2x_2 \le 6; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$

3) $f = -2x_1^2 - x_2^2 + x_1 - 4x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10, \\ -x_1 + x_2 \ge -4; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$

4) $f = -2x_1^2 - 2x_2^2 + 5x_1 + 8x_2 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 12; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

Домашнє завдання

Д1. Розв'язати задачі квадратичного програмування

1) $f = x_1 + 4x_2 + x_1x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 12, \\ 3x_1 + x_2 \le 15; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$

2) $f = -x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_2 + 3x_3 \to \max;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 18, \\ \quad\;\; +x_2 \qquad \le 12, \\ x_1 \qquad + 2x_3 \le 14; \end{cases}$$
$x_j \ge 0, \quad j \in \{1, 2, 3\};$

3) $f = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 6x_2 \to \min;$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 7, \\ x_1 \qquad \le 5; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 > 0;$

4) $f = 4x_1^2 + 9x_2^2 + 8x_1 + 4 \to \min;$
$x_1 + 2x_2 \le 2;$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$

5) $f = 10x_1 + 20x_2 + x_1x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 \to \max;$
$$\begin{cases} 8 - x_2 \ge 0, \\ 10 - x_1 - x_2 \ge 0; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

Відповіді

О1. 1) $X^* = (0;4)$, $f_{\max} = 16$; 2) $X^* = (2;3)$, $f_{\max} = 52$; 3) $X^* = (1;0)$, $f_{\max} = 1$; 4) $X^* = (0;0;6)$, $f_{\min} = 0$; 5) $X^* = (1;1)$, $f_{\min} = -2$; 6) $X^* = (0;2)$, $f_{\min} = -4$; 7) $X^* = (5/2;3)$, $f_{\max} = 440$. **С1.** 1) $X^* = (0;1)$, $f_{\min} = 0$; 2) $X^* = (1/8;9/8)$, $f_{\min} = 47/8$; 3) $X^* = (1/4;0)$, $f_{\max} = 1/8$; 4) $X^* = (5/4;2)$, $f_{\max} = 89/8$. **Д1.** 1) $X^* = (8/15;17/15)$, $f_{\max} = 38/15$; 2) $X^* = (0;1;3/4)$, $f_{\max} = 17/8$; 3) $X^* = (2;2)$, $f_{\min} = -12$; 4) $X^* = (2;0)$, $f_{\max} = 36$; 5) $X^* = (4;6)$, $f_{\max} = 80$.

Тема 16. Динамічне програмування

До задач, які розв'язуються методом динамічного програмування, належать задачі, що пов'язані з оптимальним розподілом капіталовкладень, організацією збуту продукції між різними регіонами, визначенням найкоротшого шляху завезення товарів споживачам, задачі заміни обладнання, задачі оптимального керування запасами та інші.

Особливістю динамічного програмування є те, що визначення оптимального плану розбивається (розчленовується) на декілька етапів або кроків, для кожного з яких шукається оптимальний план.

Як конкретний приклад застосування методу динамічного програмування розглянемо задачу про розподіл капіталовкладень. Припустимо, що у нас є певні ресурси в обсязі k грошових одиниць. Ці ресурси треба розподілити між двома підприємствами – Π_1 і Π_2. Нехай першому виділено x грошових одиниць, а другому – $(k-x)$ грошових одиниць. За певний період, наприклад, рік, капіталовкладення в обсязі x дають доход $g(x)$, а в обсязі $k-x$ – доход $h(k-x)$. Загальний доход від усіх вкладень ресурсів складає

$$R_1(k,x) = g(x) + h(k-x).$$

Позначимо через $F_1(k)$ найбільший доход, що можуть дати ресурси в обсязі k грошових одиниць при їхньому оптимальному розподілі між підприємствами Π_1 і Π_2. Тоді

$$F_1(k) = \max_{0\le x\le k}(g(x) + h(k-x)). \tag{1}$$

Тепер розглянемо двокроковий процес, який складається з двох етапів. Оскільки одержання доходу, що є наслідком випуску або реалізації продукції, зв'язано з певними витратами, то до початку другого періоду сума x зменшиться до величини ax, $0 \le a < 1$, а сума $k-x$ – до величини $b(k-x)$, $0 \le b < 1$. Найбільший доход, який можна одержати від сумарного залишку $ax + b(k-x)$ на другому етапі, дорівнює $F_1(ax + b(k-x))$.

Якщо $F_2(k)$ є найбільший доход, який можна одержати від суми k за обидва періоди, то

$$F_2(k) = \max_{0 \le x \le k} (g(x) + h(k-x) + F_1(ax + b(k-x))). \qquad (2)$$

Ця рівність встановлює зв'язок між функціями F_1 і F_2.

Розглядаючи n-кроковий процес, одержимо основне функціональне рівняння Беллмана

$$F_n(k) = \max_{0 \le x \le k} (g(x) + h(k-x) + F_{n-1}(ax + b(k-x)), \qquad (3)$$

яке встановлює зв'язок між $F_n(k)$ і $F_{n-1}(k)$.

Визначивши з допомогою рівності (1) $F_1(k)$, далі знаходимо $F_2(k)$ згідно з (2), потім $F_3(k)$ і т.д. Значення $F_n(k)$ і дає доход від n-крокового процесу.

Очевидно, що доход, який одержується на кожному кроці, визначається в основному двома факторами, а саме: наявністю ресурсів на початку етапу, що характеризує **стан** деякої системи параметрів; їхнім розподілом, що визначає нашу **поведінку**.

Рівняння Беллмана (6) описує один з важливих принципів динамічного програмування, який називається **принципом оптимальності**: оптимальна поведінка володіє тією властивістю, що якими б не були початковий стан і роз'язок у початковий момент, наступні розв'язки повинні бути оптимальними відносно стану, який одержується як результат першого розв'язку.

Приклад. Капіталовкладення у сумі 210 тис. грн. треба розподілити між чотирма підприємствами так, щоб загальний доход був максимальним. Функції доходу кожного підприємства задано таблицею

Капіталовкладення, x тис. грн.	Приріст випуску продукції			
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	0	0
42	2	3	5	4
84	6	5	7	6
126	9	8	9	7
168	12	10	11	9
210	14	13	12	12

$\triangleleft$ Розрахунки проведемо за такою схемою: спочатку (на першому кроці) розглянемо найкращий ефект від одного підприємства, далі від двох, трьох і нарешті (на останньому кроці) від чотирьох підприємств разом.

Згідно з рівнянням Беллмана матимемо, що

$$F_1(0) = f_1(0) = 0, \qquad F_1(42) = f_1(42) = 2,$$
$$F_1(84) = f_1(84) = 6, \qquad F_1(126) = f_1(126) = 9,$$
$$F_1(168) = f_1(168) = 12, \quad F_1(210) = f_1(210) = 14.$$

Тепер проведемо оптимальний розподіл капіталовкладень, якщо вони виділяються першому та другому підприємствам. При цьому використовуватимемо рівняння

$$F_2(c) = \max_{0 \le x \le c} (f_2(x) + F_1(c - x)).$$

Отже, $F_2(0) = 0$,
$F_2(42) = \max\limits_{0 \le x \le 42} (f_2(x) + F_1(42 - x)) = \max(f_2(0) + F_1(42); f_2(42)+$
$+F_1(0)) = \max(0 + 2; 3 + 0) = 3;$
$F_2(84) = \max(f_2(0) + F_1(84); f_2(42) + F_1(42); f_2(84) + F_1(0)) =$
$= \max(0 + 6; 3 + 2; 5 + 0) = 6;$
$F_2(126) = \max(f_2(0) + F_1(126); f_2(42) + F_1(84); f_2(84) + F_1(42);$
$f_2(126) + F_1(0)) = \max(0 + 9; 3 + 6; 5 + 2; 8 + 0) = 9;$
$F_2(168) = \max(f_2(0) + F_1(168); f_2(42) + F_1(126); f_2(84) + F_1(84);$
$f_2(126) + F_1(42); f_2(168) + F_1(0)) = \max(0 + 12; 3 + 9; 5 + 6; 8 + 2;$
$10 + 0) = 12;$
$F_2(210) = \max(f_2(0) + F_1(210); f_2(42) + F_1(168); f_2(84) + F_1(126);$
$f_2(126) + F_1(84); f_2(168) + F_1(42); f_2(210) + F_1(0)) =$
$= \max(0 + 14; 3 + 12; 5 + 9; 8 + 6; 10 + 2; 13) = 15.$

Отже, у тому разі, коли першим двом підприємствам виділено 42 тис. грн., то їх слід віддати другому підприємству; якщо ж виділяється 84 тис. грн., то їх треба виділити першому підприємству і т.д.; у випадку, коли виділяється 210 тис. грн., то їх треба розподілити так, щоб першому дісталося 168 тис. грн., а другому – 42 тис. грн.

У випадку, коли гроші виділяються трьом підприємствам, маємо:
$F_3(0) = 0$,
$F_3(42) = \max(f_3(0) + F_2(42); f_3(42) + F_2(0)) = \max(0 + 3; 5 + 0) = 5;$
$F_3(84) = \max(f_3(0) + F_2(84); f_3(42) + F_2(42); f_3(84) + F_2(0)) =$
$= \max(0 + 6; 5 + 3; 7 + 0) = 8;$
$F_3(126) = \max(f_3(0) + F_2(126); f_3(42) + F_2(84); f_3(84) + F_2(42);$
$f_3(126) + F_2(0)) = \max(0 + 9; 5 + 6; 7 + 3; 9 + 0) = 11;$
$F_3(168) = \max(f_3(0) + F_2(168); f_3(42) + F_2(126); f_3(84) + F_2(84);$
$f_3(126) + F_2(42); f_3(168) + F_2(0)) = \max(0 + 12; 5 + 9; 7 + 6; 9 + 3;$

$11 + 0) = 14;$

$F_3(210) = \max(f_3(0) + F_2(210); f_3(42) + F_2(168); f_3(84) + F_2(126);$
$f_3(126) + F_2(84); f_3(168) + F_2(42); f_3(210) + F_2(0)) =$
$= \max(0 + 15; 5 + 12; 7 + 9; 9 + 6; 11 + 3; 12 + 0) = 17.$

Отже, якщо треба розподілити оптимально 210 тис. грн. між трьома підприємствами, то слід третьому виділити 42 тис. грн., а першим двом – 168 тис. грн. З попереднього випливає, що 168 тис. грн. між двома підприємствами треба розподілити так, щоб першому дісталося 126 тис. грн., а другому – 42 тис. грн., або ж усі 168 тис. грн. віддати першому підприємству.

Розглянемо останній етап, коли необхідно оптимально розподілити капіталовкладення між усіма чотирма підприємствами. При цьому досить знайти $F_4(210)$, оскільки під знаком максимуму у формулі для $F_4(210)$ відсутні $F_4(168)$, $F_4(124)$, $F_4(84)$ і $F_4(42)$.

Маємо $F_4(210) = \max(f_4(0) + F_3(210); f_4(42) + F_3(168); f_4(84) +$
$+ F_3(126); f_4(126) + F_3(84); f_4(168) + F_3(42); f_4(210) + F_3(0)) =$
$= \max(0 + 17; 4 + 14; 6 + 11; 7 + 8; 9 + 5; 12 + 0) = 18.$

Звідси випливає, що між чотирма підприємствами 210 тис. грн. слід розподілити так, щоб четверте підприємство дістало 42 тис. грн., а 168 тис. грн. розподілити між іншими трьома підприємствами. Останнє можна зробити таким чином, щоб третьому дісталося 42 тис. грн., а першому і другому разом – 126 тис. грн. З попереднього відомо, що 126 тис. грн. можна розподілити двома способами між першим і другим підприємствами: 1) усі 126 тис. грн. віддати першому; 2) першому виділити 84 тис. грн., а другому – 42 тис. грн.

Отже, одержали два варіанти розподілу 210 тис. грн. між чотирма підприємствами, що дає один і той самий доход у розмірі 18 тис. грн.: $X_1^* = (84; 42; 42; 42)$, $X_2^* = (126; 0; 42; 42)$. ▷

Вправи

О1. Сума коштів S розподіляється між N підприємствами. Виділені k-му підприємству кошти у розмірі x дають доход $f_k(x)$, $k \in \{1, 2, ..., N\}$. Знайти, які кошти слід виділити кожному підприємству, щоб сумарний доход всіх підприємств був максимальним:

1) $S = 4$ млн. грн., $N = 4$. Кошти підприємствам розподіляються у кількостях, кратних 1 млн. грн. Функції f_k,

$k \in \{1, 2, 3\}$, задані таблицею

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	0	0	0
1	5	4	7
2	9	8	9
3	11	12	10
4	12	14	11

;

2) $S = 5$ млн. грн., $N = 4$. Кошти підприємствам розподіляються у кількостях, кратних 1 млн. грн. Функції f_k, $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, задані таблицею

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	0	0
1	$1,5$	3	4	2
2	2	$4,5$	5	3
3	$3,5$	$5,5$	$5,5$	4
4	$5,5$	$6,5$	6	$6,5$
5	9	$7,5$	9	8

;

3) $S = 100$ тис. грн., $N = 4$. Кошти кожному підприємству виділяються у кількостях, кратних 25 тис. грн. Функції f_k, $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, задані таблицею

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	0	0
25	12	12	12	8
50	14	18	16	12
75	20	24	24	16
100	28	30	30	24

.

<u>O2.</u> Розв'язати методом динамічного програмування задачі

1)

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	0	0	0
1	1	2	3
2	3	4	5
3	4	6	7
4	5	7	8
5	6	8	10

,

2)

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	0	0	0
1	10	12	15
2	11	16	20
3	12	17	21
4	13	22	23
5	14	24	25

,

3)

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	0	0	0
1	1500	1200	1800
2	2400	2000	2300
3	3000	3100	2900
4	3700	3800	3500
5	4100	4200	3900

.

С1. Кошти в сумі S тис. грн. виділяються підприємству протягом N років. Прибуток від виділених коштів у сумі x тис. грн. за k-й рік складає $f_k(x)$, $k \in \{1, 2, ..., N\}$, тис. грн. Треба розподілити кошти за роками так, щоб сумарний прибуток підприємства за N років був максимальним:

1) $S = 500$ тис. грн., $N = 4$. Кошти, які виділяються протягом кожного року, кратні 100 тис. грн. Функції f_k, $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, наведені в таблиці:

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	0	0
100	40	50	34	60
200	70	80	76	90
300	104	96	100	100
400	120	112	110	110
500	136	124	120	136

;

2) Знайти розв'язок попередньої задачі, якщо початкова сума S: а) зменшена на 100 тис. грн.; б) збільшена на 100 тис. грн., якщо

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
600	146	132	130	144

.

Домашнє завдання

Д1. Розв'язати методом динамічного програмування подані нижче задачі:

1)

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	0	0	0
1	2	3	4
2	7	8	9
3	10	11	12
4	12	13	14
5	15	16	17

, 2)

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	0	0	0
1	17	11	8
2	18	15	10
3	20	19	12
4	21	25	14
5	22	27	16

,

3)

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	0	0	0
1	20	27	22
2	22	28	26
3	23	29	27
4	24	32	28
5	25	33	29

, 4)

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	0	0	0
1	25	15	10
2	30	20	20
3	40	30	30
4	45	40	40
5	50	45	50

,

5)

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	0	0	0
1	80	90	100
2	82	92	102
3	84	94	104
4	89	99	106
5	90	101	108

.

Відповіді

О1. 1) $X_1^* = (1;2;1)$, $X_2^* = (2;1;1)$, $J^* = 20$; 2) $X^* = (1;2;1;1)$, $J^* = 12$; 3) $X^* = (25;25;25;25)$, $J^* = 44$. **О2.** 1) $X_1^* = (0;2;3)$, $X_2^* = (0;3;2)$, $J^* = 11$; 2) $X^* = (1;2;2)$, $J^* = 46$; 3) $X^* = (1;3;1)$, $J^* = 6400$.
С1. 1) $X^* = (100;100;200;100)$, $J^* = 226$;
2) а) $X^* = (100;100;200;0)$, $J^* = 186$; б) $X^* = (100;100;300;100)$.
Д1. 1) $X^* = (0;2;3)$, $J^* = 20$; 2) $X^* = (1;3;1)$, $J^* = 44$;
3) $X^* = (2;1;2)$, $J^* = 75$; 4) $X^* = (1;1;3)$, $J^* = 70$;
5) $X_1^* = (1;1;3)$, $X_2^* = (1;2;2)$, $X_3^* = (1;3;1)$, $X_4^* = (2;1;2)$, $X_5^* = (2;2;1)$, $X_6^* = (3;1;1)$, $J^* = 274$.

Література

1. *Акулич И.Л.* Математическое программирование в примерах и задачах: Учебн. пособие для студентов экономических специальностей вузов. – М.: Высш. шк., 1986. – 319 с.

2. *Барковський В.В., Барковська Н.В.* Математика для економістів. Вища математика. – К.: Національна академія управління, 1999. – 399 с.

3. *Барковський В.В., Барковська Н.В., Лопатін О.К.* Математика для економістів. Теорія ймовірностей та математична статистика. – К.: Національна академія управління, 1999. – 447 с.

4. *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1969. – 440 с.

5. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей. – М.: Высш. шк., 2001. – 575 с.

6. Высшая математика для экономистов: Учебн. пособие для вузов / *Н.Ш.Кремер, Б.А.Путко, И.М.Тришин, М.Н.Фридман*; Под ред. проф. *Н.Ш.Кремера.* – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 439 с.

7. Вища математика: лінійна алгебра, аналітична геометрія, математичний аналіз. Навч. посібник / Укл.: *Лавренчук В.П., Веренич І.І., Готинчан Т.І., Дронь В.С., Кондур О.С.* – Чернівці: Рута, 1999. – 167 с.

8. *Вітлінський В.В., Наконечний С.І., Терещенко Т.О.* Математичне програмування: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. – К.: КНЕУ, 2001. – 248 с.

9. *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в примерах и задачах, Ч.1. – М.: Высшая школа, 1998. – 320 с., Ч.2. – М.: Высшая школа, 1999. – 365 с.

10. *Гетманцев В.Д.* Лінійна алгебра і лінійне програмування: Навч. посібник. – К.: Либідь, 2001. – 256 с.

11. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высш. школа, 1978. – 368 с.

12. *Григоркiв В.С., Бойчук М.В.* Практикум з математичного програмування: Учбовий посібник для студентів економічних спеціальностей вузів. – Чернівці: Прут, 1995. – 244 с.

13. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1968. – 232 с.

14. *Жлуктенко В.I., Наконечний С.I., Савiна С.С.* Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч.-метод. посібник: У 2-х ч. Ч.1. Теорія ймовірностей – К.: КНЕУ, 2001. – 301 с., Ч.2. Математична статистика. – К.: КНЕУ, 2001. – 336 с.

15. *Зингвилл У.* Нелинейное программирование. Единый подход. – М.: Советское радио, 1973. – 312 с.

16. Исследование операций в экономике /*Кремер Н.Ш. и др.* – М.: ЮНИТИ, 2001. – 407 с.

17. *Зайченко Ю.П.* Исследования операций: Учебн. пособие для студентов вузов. – Киев: Вища школа, 1979. – 392 с.

18. *Карасёв А.И., Аксютина З.М., Савельева Т.И.* Курс высшей математики для экономических вузов, ч.1. – М.: Высшая школа, 1982. – 272 с.

19. *Клетеник Д.В.* Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1986. – 224 с.

20. *Колемаев В.А., Староверов О.В., Турундалевский В.Б.* Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высш. школа, 1991. – 400 с.

21. *Колесников А.Н.* Краткий курс математики для экономистов: Учебн. пособие. – М.: ИНФРА-М, 1997. – 208 с.

22. *Красс М.Н.* Математика для экономических специальностей: Учебник. – М.: ИНФРА-М, 1998. – 464 с.

23. *Красс М.Н., Чупрынов Б.П.* Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: Учеб. – М.: Дело, 2000. – 688 с.

24. *Кудрявцев В.А., Демидович Б.П.* Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1989. – 656 с.

25. *Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.Б.* Математическое программирование. – М.: Высш. шк., 1980. – 300 с.

26. *Кузнецов А.В., Новикова Г.И., Холод Н.И.* Сборник задач по математическому программированию: Для экономических специальностей вузов. – Минск: Вышэйш. шк., 1985. – 143 с.

27. *Кулініч Г.Л., Максименко Л.О., Плахотник В.В., Призва Г.Й.* Вища математика: основні означення, приклади і задачі, ч.1. – К.: Либідь, 1992. – 228 с.

28. Математичне програмування: Навчальний посібник / *Богаєнко Ш.М., Григорків В.С., Бойчук М.В., Рюмшин М.О.* – К.: Логос, 1996. – 266 с.

29. Математичне програмування: Методичний посібник для студентів економічних спеціальностей / Укл.: *Лавренчук В.П., Веренич І.І., Готинчан Т.І., Дронь В.С., Кондур О.С.* – Чернівці: Рута, 1998. – 168 с.

30. *Мацкевич И.П., Свирид Г.П.* Высшая математика: Теория вероятностей и математическая статистика. – Мн.: Выш. школа, 1993. – 269 с.

31. *Мацкевич И.П., Свирид Г.П., Булдык Г.М.* Сборник задач и упражнений по высшей математике: Теория вероятностей и математическая статистика. – Мн.: Выш. школа, 1996. – 318 с.

32. *Минорский В.П.* Сборник задач по высшей математике. – М.: Наука, 1971. – 352 с.

33. Справочник по математике для экономистов / *Барбаумов В.Е., Ермаков В.И. и др.* – М.: Высш. шк., 1987. – 336 с.

34. *Тевяшев А.Д., Литвин О.Г.* Вища математика. Загальний курс: Збірник задач та вправ. – Харків: Рубікон, 1999. – 320 с.

35. Теорія ймовірностей та елементи математичної статистики: Навчальний посібник для студентів економічних спеціальностей – Укл.: Лавренчук В.П., Веренич І.І., Готинчан Т.І.,
Дронь В.С., Кондур О.С. – Чернівці: Рута, 1998. – 176 с.

36. *Ульянченко О.В.* Дослідження операцій в економіці. – Харків: Гриф, 2002. – 580 с.

37. *Христиановський В.В., Єрин В.Г., Ткаченко О.В.* Збірник задач з математичного програмування. На допомогу студентам-економістам: Навч. посібник. – К.: НМКВО, 1992. – 328 с.

38. *Шефтель З.Г.* Теорія ймовірностей. – К.: Вища школа, 1994. – 192 с.

39. *Шипачев В.С.* Высшая математика: Учебник для немат. спец. вузов – М.: Высш. шк., 1985. – 471 с.

40. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учебн. пособие для вузов / *В.В.Федосеев, А.Н.Гармаш, Д.М.Дайнтбегов* и др.; Под. ред. *В.В.Федосеева.* – М.: ЮНИТИ, 1999. – 391 с.

41. *Fabijanczyk A.* Matematyka. Podrecznik dla studiow ekonomicznych. – Lodz, 1999. – 360 s.

42. *Fabijanczyk A.* Zadania z matematyki wraz z wybranymi rozwiazaniami. – Lodz, 2001. – 440 s.

Таблиці

Таблиця 1. Значення функції $\varphi\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}, \quad \chi \in R$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.3989	0.3989	0.3989	0.3988	0.3986	0.3984	0.3982	0.3980	0.3977	0.3973
0.1	0.3970	0.3965	0.3961	0.3956	0.3951	0.3945	0.3939	0.3932	0.3925	0.3918
0.2	0.3910	0.3902	0.3894	0.3885	0.3876	0.3867	0.3857	0.3847	0.3836	0.3825
0.3	0.3814	0.3802	0.3790	0.3778	0.3765	0.3752	0.3739	0.3725	0.3712	0.3697
0.4	0.3683	0.3668	0.3653	0.3637	0.3621	0.3605	0.3589	0.3572	0.3555	0.3538
0.5	0.3521	0.3503	0.3485	0.3467	0.3448	0.3429	0.3410	0.3391	0.3372	0.3352
0.6	0.3332	0.3312	0.3292	0.3271	0.3251	0.3230	0.3209	0.3187	0.3166	0.3144
0.7	0.3123	0.3101	0.3079	0.3056	0.3034	0.3011	0.2989	0.2966	0.2943	0.2920
0.8	0.2897	0.2874	0.2850	0.2827	0.2803	0.2780	0.2756	0.2732	0.2709	0.2685
0.9	0.2661	0.2637	0.2613	0.2589	0.2565	0.2541	0.2516	0.2492	0.2468	0.2444
1.0	0.2420	0.2396	0.2371	0.2347	0.2323	0.2299	0.2275	0.2251	0.2227	0.2203
1.1	0.2179	0.2155	0.2131	0.2107	0.2083	0.2059	0.2036	0.2012	0.1989	0.1965
1.2	0.1942	0.1919	0.1895	0.1872	0.1849	0.1826	0.1804	0.1781	0.1758	0.1736
1.3	0.1714	0.1691	0.1669	0.1647	0.1626	0.1604	0.1582	0.1561	0.1539	0.1518
1.4	0.1497	0.1476	0.1456	0.1435	0.1415	0.1394	0.1374	0.1354	0.1334	0.1315
1.5	0.1295	0.1276	0.1257	0.1238	0.1219	0.1200	0.1182	0.1163	0.1145	0.1127
1.6	0.1109	0.1092	0.1074	0.1057	0.1040	0.1023	0.1006	0.0989	0.0973	0.0957
1.7	0.0940	0.0925	0.0909	0.0893	0.0878	0.0863	0.0848	0.0833	0.0818	0.0804
1.8	0.0790	0.0775	0.0761	0.0748	0.0734	0.0721	0.0707	0.0694	0.0681	0.0669
1.9	0.0656	0.0644	0.0632	0.0620	0.0608	0.0596	0.0584	0.0573	0.0562	0.0551
2.0	0.0540	0.0529	0.0519	0.0508	0.0498	0.0488	0.0478	0.0468	0.0459	0.0449
2.1	0.0440	0.0431	0.0422	0.0413	0.0404	0.0396	0.0387	0.0379	0.0371	0.0363
2.2	0.0355	0.0347	0.0339	0.0332	0.0325	0.0317	0.0310	0.0303	0.0297	0.0290
2.3	0.0283	0.0277	0.0270	0.0264	0.0258	0.0252	0.0246	0.0241	0.0235	0.0229
2.4	0.0224	0.0219	0.0213	0.0208	0.0203	0.0198	0.0194	0.0189	0.0184	0.0180
2.5	0.0175	0.0171	0.0167	0.0163	0.0158	0.0154	0.0151	0.0147	0.0143	0.0139

Продовження таблиці 1

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2.6	0.0136	0.0132	0.0129	0.0126	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110	0.0107
2.7	0.0104	0.0101	0.0099	0.0096	0.0093	0.0091	0.0088	0.0086	0.0084	0.0081
2.8	0.0079	0.0077	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0067	0.0065	0.0063	0.0061
2.9	0.0060	0.0058	0.0056	0.0055	0.0053	0.0051	0.0050	0.0048	0.0047	0.0046
3.0	0.0044	0.0043	0.0042	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036	0.0035	0.0034
3.1	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026	0.0025	0.0025
3.2	0.0024	0.0023	0.0022	0.0022	0.0021	0.0020	0.0020	0.0019	0.0018	0.0018
3.3	0.0017	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014	0.0013	0.0013
3.4	0.0012	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010	0.0010	0.0009	0.0009
3.5	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007	0.0007	0.0007	0.0006
3.6	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004
3.7	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003
3.8	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
3.9	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001
4.0	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
4.1	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
4.2	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4.3	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Таблиця 2. Значення функції $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz, \quad \chi \in R$

x	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*
0.00	0.0000	0.32	0.1255	0.64	0.2389	0.96	0.3315
0.01	0.0040	0.33	0.1293	0.65	0.2422	0.97	0.3340
0.02	0.0080	0.34	0.1331	0.66	0.2454	0.98	0.3365
0.03	0.0120	0.35	0.1368	0.67	0.2486	0.99	0.3389
0.04	0.0160	0.36	0.1406	0.68	0.2517	1.00	0.3413
0.05	0.0199	0.37	0.1443	0.69	0.2549	1.01	0.3438
0.06	0.0239	0.38	0.1480	0.70	0.2580	1.02	0.3461
0.07	0.0279	0.39	0.1517	0.71	0.2611	1.03	0.3485
0.08	0.0319	0.40	0.1554	0.72	0.2642	1.04	0.3508
0.09	0.0359	0.41	0.1591	0.73	0.2673	1.05	0.3531
0.10	0.0398	0.42	0.1628	0.74	0.2704	1.06	0.3554
0.11	0.0438	0.43	0.1664	0.75	0.2734	1.07	0.3577
0.12	0.0478	0.44	0.1700	0.76	0.2764	1.08	0.3599
0.13	0.0517	0.45	0.1736	0.77	0.2794	1.09	0.3621
0.14	0.0557	0.46	0.1772	0.78	0.2823	1.10	0.3643
0.15	0.0596	0.47	0.1808	0.79	0.2852	1.11	0.3665
0.16	0.0636	0.48	0.1844	0.80	0.2881	1.12	0.3686
0.17	0.0675	0.49	0.1879	0.81	0.2910	1.13	0.3708
0.18	0.0714	0.50	0.1915	0.82	0.2939	1.14	0.3729
0.19	0.0753	0.51	0.1950	0.83	0.2967	1.15	0.3749
0.20	0.0793	0.52	0.1985	0.84	0.2995	1.16	0.3770
0.21	0.0832	0.53	0.2019	0.85	0.3023	1.17	0.3790
0.22	0.0871	0.54	0.2054	0.86	0.3051	1.18	0.3810
0.23	0.0910	0.55	0.2088	0.87	0.3078	1.19	0.3830
0.24	0.0948	0.56	0.2123	0.88	0.3106	1.20	0.3849
0.25	0.0987	0.57	0.2157	0.89	0.3133	1.21	0.3869
0.26	0.1026	0.58	0.2190	0.90	0.3159	1.22	0.3888
0.27	0.1064	0.59	0.2224	0.91	0.3186	1.23	0.3907
0.28	0.1103	0.60	0.2257	0.92	0.3212	1.24	0.3925
0.29	0.1141	0.61	0.2291	0.93	0.3238	1.25	0.3944
0.30	0.1179	0.62	0.2324	0.94	0.3264		
0.31	0.1217	0.63	0.2357	0.95	0.3289		

Продовження таблиці 2

x	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*
1.26	0.3962	1.59	0.4441	1.92	0.4726	2.50	0.4938
1.27	0.3980	1.60	0.4452	1.93	0.4732	2.52	0.4941
1.28	0.3997	1.61	0.4463	1.94	0.4738	2.54	0.4945
1.29	0.4015	1.62	0.4474	1.95	0.4744	2.56	0.4948
1.30	0.4032	1.63	0.4484	1.96	0.4750	2.58	0.4951
1.31	0.4049	1.64	0.4495	1.97	0.4756	2.60	0.4953
1.32	0.4066	1.65	0.4505	1.98	0.4761	2.62	0.4956
1.33	0.4082	1.66	0.4515	1.99	0.4767	2.64	0.4959
1.34	0.4099	1.67	0.4525	2.00	0.4772	2.66	0.4961
1.35	0.4115	1.68	0.4535	2.02	0.4783	2.68	0.4963
1.36	0.4131	1.69	0.4545	2.04	0.4793	2.70	0.4965
1.37	0.4147	1.70	0.4554	2.06	0.4803	2.72	0.4967
1.38	0.4162	1.71	0.4564	2.08	0.4812	2.74	0.4969
1.39	0.4177	1.72	0.4573	2.10	0.4821	2.76	0.4971
1.40	0.4192	1.73	0.4582	2.12	0.4830	2.78	0.4973
1.41	0.4207	1.74	0.4591	2.14	0.4838	2.80	0.4974
1.42	0.4222	1.75	0.4599	2.16	0.4846	2.82	0.4976
1.43	0.4236	1.76	0.4608	2.18	0.4854	2.84	0.4977
1.44	0.4251	1.77	0.4616	2.20	0.4861	2.86	0.4979
1.45	0.4265	1.78	0.4625	2.22	0.4868	2.88	0.4980
1.46	0.4279	1.79	0.4633	2.24	0.4875	2.90	0.4981
1.47	0.4292	1.80	0.4641	2.26	0.4881	2.92	0.4982
1.48	0.4306	1.81	0.4649	2.28	0.4887	2.94	0.4984
1.49	0.4319	1.82	0.4656	2.30	0.4893	2.96	0.4985
1.50	0.4332	1.83	0.4664	2.32	0.4898	2.98	0.4986
1.51	0.4345	1.84	0.4671	2.34	0.4904	3.00	0.498650
1.52	0.4357	1.85	0.4678	2.36	0.4909	3.20	0.499313
1.53	0.4370	1.86	0.4686	2.38	0.4913	3.40	0.499663
1.54	0.4382	1.87	0.4693	2.40	0.4918	3.60	0.499841
1.55	0.4394	1.88	0.4699	2.42	0.4922	3.80	0.499928
1.56	0.4406	1.89	0.4706	2.44	0.4927	4.00	0.499968
1.57	0.4418	1.90	0.4713	2.46	0.4931	4.50	0.499997
1.58	0.4429	1.91	0.4719	2.48	0.4934	5.00	0.500000

Таблиця 3. Таблиця розподілу Пуассона $P(k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k\ge 0$

k \ λ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0	0.904837	0.818731	0.740818	0.670320	0.606531	0.548812
1	0.090484	0.163746	0.222245	0.268128	0.303265	0.329287
2	0.004524	0.016375	0.033337	0.053626	0.075816	0.098786
3	0.000151	0.001092	0.003334	0.007150	0.012636	0.019757
4	0.000004	0.000055	0.000250	0.000715	0.001580	0.002964
5	0.000000	0.000002	0.000015	0.000057	0.000158	0.000356
6	0.000000	0.000000	0.000001	0.000004	0.000013	0.000036
7	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000001	0.000003

k \ λ	0.7	0.8	0.9	1.0	2.0	3.0
0	0.496585	0.449329	0.406570	0.367879	0.135335	0.049787
1	0.347610	0.359463	0.365913	0.367879	0.270671	0.149361
2	0.121663	0.143785	0.164661	0.183940	0.270671	0.224042
3	0.028388	0.038343	0.049398	0.061313	0.180447	0.224042
4	0.004968	0.007669	0.011115	0.015328	0.090224	0.168031
5	0.000696	0.001227	0.002001	0.003066	0.036089	0.100819
6	0.000081	0.000164	0.000300	0.000511	0.012030	0.050409
7	0.000008	0.000019	0.000039	0.000073	0.003437	0.021604
8	0.000001	0.000002	0.000004	0.000009	0.000859	0.008102
9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000001	0.000191	0.002701
10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000038	0.000810
11	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000007	0.000221
12	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000001	0.000055
13	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000013
14	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000003
15	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000001

Продовження таблиці 3

λ / k	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
0	0,018316	0,006738	0,002479	0,000912	0,000335	0,000123	0,000045
1	0,073263	0,033690	0,014873	0,006383	0,002684	0,001111	0,000454
2	0,146525	0,084224	0,044618	0,022341	0,010735	0,004998	0,002270
3	0,195367	0,140374	0,089235	0,052129	0,028626	0,014994	0,007567
4	0,195367	0,175467	0,133853	0,091226	0,057252	0,033737	0,018917
5	0,156293	0,175467	0,160623	0,127717	0,091604	0,060727	0,037833
6	0,104196	0,146223	0,160623	0,149003	0,122138	0,091090	0,063055
7	0,059540	0,104445	0,137677	0,149003	0,139587	0,117116	0,090079
8	0,029770	0,065278	0,103258	0,130377	0,139587	0,131756	0,112599
9	0,013231	0,036266	0,068838	0,101405	0,124077	0,131756	0,125110
10	0,005292	0,018133	0,041303	0,070983	0,099262	0,118580	0,125110
11	0,001925	0,008242	0,022529	0,045171	0,072190	0,097020	0,113736
12	0,000642	0,003434	0,011264	0,026350	0,048127	0,072765	0,094780
13	0,000197	0,001321	0,005199	0,014188	0,029616	0,050376	0,072908
14	0,000056	0,000472	0,002228	0,007094	0,016924	0,032384	0,052077
15	0,000015	0,000157	0,000891	0,003311	0,009026	0,019431	0,034718
16	0,000004	0,000049	0,000334	0,001448	0,004513	0,010930	0,021699
17	0,000001	0,000014	0,000118	0,000596	0,002124	0,005786	0,012764
18	0,000000	0,000004	0,000039	0,000232	0,000944	0,002893	0,007091
19	0,000000	0,000001	0,000012	0,000085	0,000397	0,001370	0,003732
20	0,000000	0,000000	0,000004	0,000030	0,000159	0,000617	0,001866
21	0,000000	0,000000	0,000001	0,000010	0,000061	0,000264	0,000889
22	0,000000	0,000000	0,000000	0,000003	0,000022	0,000108	0,000404
23	0,000000	0,000000	0,000000	0,000001	0,000008	0,000042	0,000176
24	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000003	0,000016	0,000073
25	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000001	0,000006	0,000029
26	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000002	0,000011
27	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000001	0,000004

Таблиця 4. Розподіл Пуассона. Таблиця значень $\sum_{k=m}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $m \geq 0$

λ / m	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
1	0.095163	0.181269	0.259182	0.329680	0.393469
2	0.004679	0.017523	0.036936	0.061552	0.090204
3	0.000155	0.001148	0.003599	0.007926	0.014388
4	0.000004	0.000057	0.000266	0.000776	0.001752
5	0.000000	0.000002	0.000016	0.000061	0.000172

λ / m	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
1	0.451188	0.503415	0.550671	0.593430	0.632121
2	0.121901	0.155805	0.191208	0.227518	0.264241
3	0.023115	0.034142	0.047423	0.062857	0.080301
4	0.003358	0.005753	0.009080	0.013459	0.018988
5	0.000394	0.000786	0.001411	0.002344	0.003660
6	0.000039	0.000090	0.000184	0.000343	0.000594

λ / m	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
1	0.698806	0.753403	0.798103	0.834701	0.864665
2	0.337373	0.408167	0.475069	0.537163	0.593994
3	0.120513	0.166502	0.216642	0.269379	0.323324
4	0.033769	0.053725	0.078813	0.108708	0.142877
5	0.007746	0.014253	0.023682	0.036407	0.052653
6	0.001500	0.003201	0.006040	0.010378	0.016564
7	0.000251	0.000622	0.001336	0.002569	0.004534
8	0.000037	0.000107	0.000260	0.000562	0.001097
9	0.000005	0.000016	0.000045	0.000110	0.000237

Продовження таблиці 4

λ / m	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	4.0
0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
1	0.889197	0.909282	0.925726	0.939190	0.950213	0.981684
2	0.645430	0.691559	0.732615	0.768922	0.800852	0.908422
3	0.377286	0.430291	0.481570	0.530546	0.576810	0.761897
4	0.180648	0.221277	0.263998	0.308063	0.352768	0.566530
5	0.072496	0.095869	0.122577	0.152324	0.184737	0.371163
6	0.024910	0.035673	0.049037	0.065110	0.083918	0.214870
7	0.007461	0.011594	0.017170	0.024411	0.033509	0.110674
8	0.001978	0.003339	0.005334	0.008131	0.011905	0.051134
9	0.000470	0.000862	0.001487	0.002433	0.003803	0.021363
10	0.000101	0.000202	0.000376	0.000660	0.001102	0.008132
11	0.000020	0.000043	0.000087	0.000164	0.000292	0.002840
12	0.000004	0.000008	0.000018	0.000037	0.000071	0.000915

λ / m	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
1	0.993262	0.997521	0.999088	0.999665	0.999877	0.999955
2	0.959572	0.982649	0.992705	0.996981	0.998766	0.999501
3	0.875348	0.938031	0.970364	0.986246	0.993768	0.997231
4	0.734974	0.848796	0.918235	0.957620	0.978774	0.989664
5	0.559507	0.714943	0.827008	0.900368	0.945036	0.970747
6	0.384039	0.554320	0.699292	0.808764	0.884309	0.932914
7	0.237817	0.393697	0.550289	0.686626	0.793219	0.869859
8	0.133372	0.256020	0.401286	0.547039	0.676103	0.779779
9	0.068094	0.152763	0.270909	0.407453	0.544347	0.667180
10	0.031828	0.083924	0.169504	0.283376	0.412592	0.542070
11	0.013695	0.042621	0.098521	0.184114	0.294012	0.416960
12	0.005453	0.020092	0.053350	0.111924	0.196992	0.303224
13	0.002019	0.008827	0.027000	0.063797	0.124227	0.208444
14	0.000698	0.003628	0.012811	0.034181	0.073851	0.135536

Продовження таблиці 4

λ / m	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
15	0.000226	0.001400	0.005717	0.017257	0.041466	0.083458
16	0.000069	0.000509	0.002407	0.008231	0.022036	0.048740
17	0.000020	0.000175	0.000958	0.003718	0.011106	0.027042
18	0.000005	0.000057	0.000362	0.001594	0.005320	0.014278
19	0.000001	0.000018	0.000130	0.000650	0.002426	0.007187
20	0.000000	0.000005	0.000044	0.000253	0.001056	0.003454
21	0.000000	0.000001	0.000014	0.000094	0.000439	0.001588
22	0.000000	0.000000	0.000005	0.000033	0.000175	0.000700

Таблиця 5. Розподіл Стьюдента. Таблиця значень $t_\beta = t(\beta,\ n)$

β / n	0.95	0.99	0.999	β / n	0.95	0.99	0.999
5	2.78	4.60	8.61	20	2.093	2.861	3.883
6	2.47	4.03	6.86	25	2.064	2.797	3.745
7	2.45	3.71	5.96	30	2.045	2.756	3.659
8	2.37	3.50	5.41	35	2.032	2.729	3.600
9	2.31	3.36	5.04	40	2.023	2.708	3.558
10	2.26	3.25	4.78	45	2.016	2.692	3.527
11	2.23	3.17	4.59	50	2.009	2.679	3.502
12	2.20	3.11	4.44	60	2.001	2.662	3.464
13	2.18	3.06	4.32	70	1.996	2.649	3.439
14	2.16	3.01	4.22	80	1.991	2.640	3.418
15	2.15	2.98	4.14	90	1.987	2.633	3.403
16	2.13	2.95	4.07	100	1.984	2.627	3.392
17	2.12	2.92	4.02	120	1.980	2.617	3.374
18	2.11	2.90	3.97	∞	1.960	2.576	3.291
19	2.10	2.88	3.92				

Таблиця 6. Таблиця значень $P(\chi^2 > \chi^2_{сп.})$

$\chi^2_{сп.}$ \ k	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.3173	0.6065	0.8013	0.9098	0.9626	0.9856	0.9948	0.9982
2	0.1573	0.3679	0.5724	0.7358	0.8491	0.9197	0.9598	0.9810
3	0.0833	0.2231	0.3916	0.5578	0.7000	0.8088	0.8850	0.9344
4	0.0455	0.1353	0.2615	0.4060	0.5494	0.6767	0.7798	0.8571
5	0.0253	0.0821	0.1718	0.2873	0.4159	0.5438	0.6600	0.7576
6	0.0143	0.0498	0.1116	0.1991	0.3062	0.4232	0.5397	0.6472
7	0.0082	0.0302	0.0719	0.1359	0.2206	0.3208	0.4289	0.5366
8	0.0047	0.0183	0.0460	0.0916	0.1562	0.2381	0.3326	0.4335
9	0.0027	0.0111	0.0293	0.0611	0.1091	0.1736	0.2527	0.3423
10	0.0016	0.0067	0.0186	0.0404	0.0752	0.1247	0.1886	0.2650
11	0.0009	0.0041	0.0117	0.0266	0.0514	0.0884	0.1386	0.2017
12	0.0005	0.0025	0.0074	0.0174	0.0348	0.0620	0.1006	0.1512
13	0.0003	0.0015	0.0046	0.0113	0.0234	0.0430	0.0721	0.1118
14	0.0002	0.0009	0.0029	0.0073	0.0156	0.0296	0.0512	0.0818
15	0.0001	0.0006	0.0018	0.0047	0.0104	0.0203	0.0360	0.0591
16	0.0001	0.0003	0.0011	0.0030	0.0068	0.0138	0.0251	0.0424
17	0.0000	0.0002	0.0007	0.0019	0.0045	0.0093	0.0174	0.0301
18	0.0000	0.0001	0.0004	0.0012	0.0029	0.0062	0.0120	0.0212
19	0.0000	0.0001	0.0003	0.0008	0.0019	0.0042	0.0082	0.0149
20	0.0000	0.0000	0.0002	0.0005	0.0012	0.0028	0.0056	0.0103
21	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0008	0.0018	0.0038	0.0071
22	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0005	0.0012	0.0025	0.0049
23	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0008	0.0017	0.0034
24	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0005	0.0011	0.0023
25	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0003	0.0008	0.0016
26	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0005	0.0011
27	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0003	0.0007
28	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0005
29	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0003
30	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002

Таблиця 7. Таблиця значень $q = q(\gamma,\ n)$

γ / n	0.95	0.99	0.999	γ / n	0.95	0.99	0.999
5	1.37	2.67	5.64	20	0.37	0.58	0.88
6	1.09	2.01	3.88	25	0.32	0.49	0.73
7	0.92	1.62	2.98	30	0.28	0.43	0.63
8	0.80	1.38	2.42	35	0.26	0.38	0.56
9	0.71	1.20	2.06	40	0.24	0.35	0.50
10	0.65	1.08	1.80	45	0.22	0.32	0.46
11	0.59	0.98	1.60	50	0.21	0.30	0.43
12	0.55	0.90	1.45	60	0.188	0.269	0.38
13	0.52	0.83	1.33	70	0.174	0.245	0.340
14	0.48	0.78	1.23	80	0.161	0.226	0.310
15	0.46	0.73	1.15	90	0.151	0.211	0.290
16	0.44	0.70	1.07	100	0.143	0.198	0.270
17	0.42	0.66	1.01	150	0.115	0.160	0.221
18	0.40	0.63	0.96	200	0.099	0.136	0.185
19	0.39	0.60	0.92	250	0.089	0.120	0.162

Таблиця 8. Таблиця значень функції y=ln(x)

x	ln(x)	x	ln(x)	x	ln(x)	x	Ln(x)	x	Ln(x)	x	ln(x)
1.0	0.0000	2.5	0.9163	4.0	1.3863	5.5	1.7047	7.0	1.9459	8.5	2.1401
1.1	0.0953	2.6	0.9555	4.1	1.4110	5.6	1.7228	7.1	1.9601	8.6	2.1518
1.2	0.1823	2.7	0.9933	4.2	1.4351	5.7	1.7405	7.2	1.9741	8.7	2.1633
1.3	0.2624	2.8	1.0296	4.3	1.4586	5.8	1.7579	7.3	1.9879	8.8	2.1748
1.4	0.3365	2.9	1.0647	4.4	1.4816	5.9	1.7750	7.4	2.0015	8.9	2.1861
1.5	0.4055	3.0	1.0986	4.5	1.5041	6.0	1.7918	7.5	2.0149	9.0	2.1972
1.6	0.4700	3.1	1.1314	4.6	1.5261	6.1	1.8083	7.6	2.0281	9.1	2.2083
1.7	0.5306	3.2	1.1632	4.7	1.5476	6.2	1.8245	7.7	2.0412	9.2	2.2192
1.8	0.5878	3.3	1.1939	4.8	1.5686	6.3	1.8405	7.8	2.0541	9.3	2.2300
1.9	0.6419	3.4	1.2238	4.9	1.5892	6.4	1.8563	7.9	2.0669	9.4	2.2407
2.0	0.6931	3.5	1.2528	5.0	1.6094	6.5	1.8718	8.0	2.0794	9.5	2.2513
2.1	0.7419	3.6	1.2809	5.1	1.6292	6.6	1.8871	8.1	2.0919	9.6	2.2618
2.2	0.7885	3.7	1.3083	5.2	1.6487	6.7	1.9021	8.2	2.1041	9.7	2.2721
2.3	0.8329	3.8	1.3350	5.3	1.6677	6.8	1.9169	8.3	2.1163	9.8	2.2824
2.4	0.8755	3.9	1.3610	5.4	1.6864	6.9	1.9315	8.4	2.1282	9.9	2.2925

Таблиця 9. Експоненціальні функції

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
0.00	1.0000	1.0000	1.90	6.6859	0.1496	4.9	134.2898	0.0074
0.05	1.0513	0.9512	2.00	7.3891	0.1353	5.0	148.4132	0.0067
0.10	1.1052	0.9048	2.2	9.0250	0.1108	5.1	164.0219	0.0061
0.15	1.1618	0.8607	2.3	9.9742	0.1003	5.2	181.2722	0.0055
0.20	1.2214	0.8187	2.4	11.0232	0.0907	5.3	200.3368	0.0050
0.25	1.2840	0.7788	2.5	12.1825	0.0821	5.4	221.4064	0.0045
0.30	1.3499	0.7408	2.6	13.4637	0.0743	5.5	244.6919	0.0041
0.35	1.4191	0.7047	2.7	14.8797	0.0672	5.6	270.4264	0.0037
0.40	1.4918	0.6703	2.8	16.4446	0.0608	5.7	298.8674	0.0033
0.45	1.5683	0.6376	2.9	18.1741	0.0550	5.8	330.2996	0.0030
0.50	1.6487	0.6065	3.0	20.0855	0.0498	5.9	365.0375	0.0027
0.55	1.7333	0.5769	3.1	22.1980	0.0450	6.0	403.4288	0.0025
0.60	1.8221	0.5488	3.2	24.5325	0.0408	6.1	445.8578	0.0022
0.65	1.9155	0.5220	3.3	27.1126	0.0369	6.2	492.7490	0.0020
0.70	2.0138	0.4966	3.4	29.9641	0.0334	6.3	544.5719	0.0018
0.75	2.1170	0.4724	3.5	33.1155	0.0302	6.4	601.8450	0.0017
0.80	2.2255	0.4493	3.6	36.5982	0.0273	6.5	665.1416	0.0015
0.85	2.3396	0.4274	3.7	40.4473	0.0247	6.6	735.0952	0.0014
0.90	2.4596	0.4066	3.8	44.7012	0.0224	6.7	812.4058	0.0012
0.95	2.5857	0.3867	3.9	49.4024	0.0202	6.8	897.8473	0.0011
1.00	2.7183	0.3679	4.0	54.5982	0.0183	6.9	992.2747	0.0010
1.10	3.0042	0.3329	4.1	60.3403	0.0166	7.0	1096.6332	0.0009
1.20	3.3201	0.3012	4.2	66.6863	0.0150	7.25	1408.1048	0.0007
1.30	3.6693	0.2725	4.3	73.6998	0.0136	7.5	1808.0424	0.0006
1.40	4.0552	0.2466	4.4	81.4509	0.0123	7.75	2321.5724	0.0004
1.50	4.4817	0.2231	4.5	90.0171	0.0111	8.0	2980.9580	0.0003
1.60	4.9530	0.2019	4.6	99.4843	0.0101	8.5	4914.7688	0.0002
1.70	5.4739	0.1827	4.7	109.9472	0.0091	9.0	8103.0839	0.0001
1.80	6.0496	0.1653	4.8	121.5104	0.0082	10.0	22026.4658	0.0000

Таблиця 10. Критичні точки розподілу χ^2

Число ступенів свободи k	Рівень значущості α					
	0.01	0.025	0.05	0.95	0.975	0.99
1	6.63489	5.02390	3.84146	0.00393	0.00098	0.00016
2	9.21035	7.37778	5.99148	0.10259	0.05064	0.02010
3	11.34488	9.34840	7.81472	0.35185	0.21579	0.11483
4	13.27670	11.14326	9.48773	0.71072	0.48442	0.29711
5	15.08632	12.83249	11.07048	1.14548	0.83121	0.55430
6	16.81187	14.44935	12.59158	1.63538	1.23734	0.87208
7	18.47532	16.01277	14.06713	2.16735	1.68986	1.23903
8	20.09016	17.53454	15.50731	2.73263	2.17972	1.64651
9	21.66605	19.02278	16.91896	3.32512	2.70039	2.08789
10	23.20929	20.48320	18.30703	3.94030	3.24696	2.55820
11	24.72502	21.92002	19.67515	4.57481	3.81574	3.05350
12	26.21696	23.33666	21.02606	5.22603	4.40378	3.57055
13	27.68818	24.73558	22.36203	5.89186	5.00874	4.10690
14	29.14116	26.11893	23.68478	6.57063	5.62872	4.66042
15	30.57795	27.48836	24.99580	7.26093	6.26212	5.22936
16	31.99986	28.84532	26.29622	7.96164	6.90766	5.81220
17	33.40872	30.19098	27.58710	8.67175	7.56418	6.40774
18	34.80524	31.52641	28.86932	9.39045	8.23074	7.01490
19	36.19077	32.85234	30.14351	10.11701	8.90651	7.63270
20	37.56627	34.16958	31.41042	10.85080	9.59077	8.26037
21	38.93223	35.47886	32.67056	11.59132	10.28291	8.89717
22	40.28945	36.78068	33.92446	12.33801	10.98233	9.54249
23	41.63833	38.07561	35.17246	13.09051	11.68853	10.19569
24	42.97978	39.36406	36.41503	13.84842	12.40115	10.85635
25	44.31401	40.64650	37.65249	14.61140	13.11971	11.52395
26	45.64164	41.92314	38.88513	15.37916	13.84388	12.19818
27	46.96284	43.19452	40.11327	16.15139	14.57337	12.87847
28	48.27817	44.46079	41.33715	16.92788	15.30785	13.56467
29	49.58783	45.72228	42.55695	17.70838	16.04705	14.25641
30	50.89218	46.97922	43.77295	18.49267	16.79076	14.95346

Таблиця 11. Критичні точки розподілу Стьюдента

Число ступенів свободи k	Рівень значущості α (двобічна критична область)					
	0.1	0.05	0.02	0.01	0.002	0.001
1	6.31	12.71	31.82	63.66	318.29	636.58
2	2.92	4.30	6.96	9.92	22.33	31.60
3	2.35	3.18	4.54	5.84	10.21	12.92
4	2.13	2.78	3.75	4.60	7.17	8.61
5	2.02	2.57	3.36	4.03	5.89	6.87
6	1.94	2.45	3.14	3.71	5.21	5.96
7	1.89	2.36	3.00	3.50	4.79	5.41
8	1.86	2.31	2.90	3.36	4.50	5.04
9	1.83	2.26	2.82	3.25	4.30	4.78
10	1.81	2.23	2.76	3.17	4.14	4.59
11	1.80	2.20	2.72	3.11	4.02	4.44
12	1.78	2.18	2.68	3.05	3.93	4.32
13	1.77	2.16	2.65	3.01	3.85	4.22
14	1.76	2.14	2.62	2.98	3.79	4.14
15	1.75	2.13	2.60	2.95	3.73	4.07
16	1.75	2.12	2.58	2.92	3.69	4.01
17	1.74	2.11	2.57	2.90	3.65	3.97
18	1.73	2.10	2.55	2.88	3.61	3.92
19	1.73	2.09	2.54	2.86	3.58	3.88
20	1.72	2.09	2.53	2.85	3.55	3.85
21	1.72	2.08	2.52	2.83	3.53	3.82
22	1.72	2.07	2.51	2.82	3.50	3.79
23	1.71	2.07	2.50	2.81	3.48	3.77
24	1.71	2.06	2.49	2.80	3.47	3.75
25	1.71	2.06	2.49	2.79	3.45	3.73
26	1.71	2.06	2.48	2.78	3.43	3.71
27	1.70	2.05	2.47	2.77	3.42	3.69
28	1.70	2.05	2.47	2.76	3.41	3.67
29	1.70	2.05	2.46	2.76	3.40	3.66
30	1.70	2.04	2.46	2.75	3.39	3.65
40	1.68	2.02	2.42	2.70	3.31	3.55
60	1.67	2.00	2.39	2.66	3.23	3.46
120	1.66	1.98	2.36	2.62	3.16	3.37
∞	1.64	1.96	2.33	2.58	3.09	3.29
	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
	Рівень значущості α (однобічна критична область)					

Таблиця 12. Критичні точки розподілу F Фішера-Снедекора

k_1 – число ступенів свободи більшої дисперсії,

k_2 – число ступенів свободи меншої дисперсії.

Рівень значущості $\alpha = 0.01$

k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4052	4999	5404	5624	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6083	6107
2	98.50	99.00	99.16	99.25	99.30	99.33	99.36	99.38	99.39	99.40	99.41	99.42
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.34	27.23	27.13	27.05
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.45	14.37
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.96	9.89
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.79	7.72
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.54	6.47
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.73	5.67
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.18	5.11
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.77	4.71
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.46	4.40
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.22	4.16
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	4.02	3.96
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.86	3.80
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.73	3.67
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.62	3.55
17	8.40	6.11	5.19	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.52	3.46
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.43	3.37
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.36	3.30
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.29	3.23
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.18	3.12
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.09	3.03
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	3.02	2.96
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.96	2.90
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.91	2.84
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.73	2.66
50	7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.19	3.02	2.89	2.78	2.70	2.63	2.56
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.56	2.50
70	7.01	4.92	4.07	3.60	3.29	3.07	2.91	2.78	2.67	2.59	2.51	2.45
80	6.96	4.88	4.04	3.56	3.26	3.04	2.87	2.74	2.64	2.55	2.48	2.42
90	6.93	4.85	4.01	3.53	3.23	3.01	2.84	2.72	2.61	2.52	2.45	2.39
100	6.90	4.82	3.98	3.51	3.21	2.99	2.82	2.69	2.59	2.50	2.43	2.37

Продовження таблиці 12. Рівень значущості $\alpha = 0.01$

k_1 k_2	14	16	18	20	30	40	50	60	70	80	90	100
1	6143	6170	6191	6209	6260	6286	6302	6313	6321	6326	6331	6334
2	99.43	99.44	99.44	99.45	99.47	99.48	99.48	99.48	99.48	99.48	99.49	99.49
3	26.92	26.83	26.75	26.69	26.50	26.41	26.35	26.32	26.29	26.27	26.25	26.24
4	14.25	14.15	14.08	14.02	13.84	13.75	13.69	13.65	13.63	13.61	13.59	13.58
5	9.77	9.68	9.61	9.55	9.38	9.29	9.24	9.20	9.18	9.16	9.14	9.13
6	7.60	7.52	7.45	7.40	7.23	7.14	7.09	7.06	7.03	7.01	7.00	6.99
7	6.36	6.28	6.21	6.16	5.99	5.91	5.86	5.82	5.80	5.78	5.77	5.75
8	5.56	5.48	5.41	5.36	5.20	5.12	5.07	5.03	5.01	4.99	4.97	4.96
9	5.01	4.92	4.86	4.81	4.65	4.57	4.52	4.48	4.46	4.44	4.43	4.41
10	4.60	4.52	4.46	4.41	4.25	4.17	4.12	4.08	4.06	4.04	4.03	4.01
11	4.29	4.21	4.15	4.10	3.94	3.86	3.81	3.78	3.75	3.73	3.72	3.71
12	4.05	3.97	3.91	3.86	3.70	3.62	3.57	3.54	3.51	3.49	3.48	3.47
13	3.86	3.78	3.72	3.66	3.51	3.43	3.38	3.34	3.32	3.30	3.28	3.27
14	3.70	3.62	3.56	3.51	3.35	3.27	3.22	3.18	3.16	3.14	3.12	3.11
15	3.56	3.49	3.42	3.37	3.21	3.13	3.08	3.05	3.02	3.00	2.99	2.98
16	3.45	3.37	3.31	3.26	3.10	3.02	2.97	2.93	2.91	2.89	2.87	2.86
17	3.35	3.27	3.21	3.16	3.00	2.92	2.87	2.83	2.81	2.79	2.78	2.76
18	3.27	3.19	3.13	3.08	2.92	2.84	2.78	2.75	2.72	2.70	2.69	2.68
19	3.19	3.12	3.05	3.00	2.84	2.76	2.71	2.67	2.65	2.63	2.61	2.60
20	3.13	3.05	2.99	2.94	2.78	2.69	2.64	2.61	2.58	2.56	2.55	2.54
22	3.02	2.94	2.88	2.83	2.67	2.58	2.53	2.50	2.47	2.45	2.43	2.42
24	2.93	2.85	2.79	2.74	2.58	2.49	2.44	2.40	2.38	2.36	2.34	2.33
26	2.86	2.78	2.72	2.66	2.50	2.42	2.36	2.33	2.30	2.28	2.26	2.25
28	2.79	2.72	2.65	2.60	2.44	2.35	2.30	2.26	2.24	2.22	2.20	2.19
30	2.74	2.66	2.60	2.55	2.39	2.30	2.25	2.21	2.18	2.16	2.14	2.13
40	2.56	2.48	2.42	2.37	2.20	2.11	2.06	2.02	1.99	1.97	1.95	1.94
50	2.46	2.38	2.32	2.27	2.10	2.01	1.95	1.91	1.88	1.86	1.84	1.82
60	2.39	2.31	2.25	2.20	2.03	1.94	1.88	1.84	1.81	1.78	1.76	1.75
70	2.35	2.27	2.20	2.15	1.98	1.89	1.83	1.78	1.75	1.73	1.71	1.70
80	2.31	2.23	2.17	2.12	1.94	1.85	1.79	1.75	1.71	1.69	1.67	1.65
90	2.29	2.21	2.14	2.09	1.92	1.82	1.76	1.72	1.68	1.66	1.64	1.62
100	2.27	2.19	2.12	2.07	1.89	1.80	1.74	1.69	1.66	1.63	1.61	1.60

Продовження таблиці 12.   Рівень значущості $\alpha = 0.05$

k_1 / k_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	199	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.40	19.41
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.76	8.74
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.94	5.91
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.70	4.68
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03	4.00
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.60	3.57
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.31	3.28
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.10	3.07
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.94	2.91
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.82	2.79
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.72	2.69
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.63	2.60
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.57	2.53
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.51	2.48
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.46	2.42
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.41	2.38
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.37	2.34
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.34	2.31
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.31	2.28
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.26	2.23
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.22	2.18
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.18	2.15
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.15	2.12
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.13	2.09
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.04	2.00
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.03	1.99	1.95
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.95	1.92
70	3.98	3.13	2.74	2.50	2.35	2.23	2.14	2.07	2.02	1.97	1.93	1.89
80	3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	2.00	1.95	1.91	1.88
90	3.95	3.10	2.71	2.47	2.32	2.20	2.11	2.04	1.99	1.94	1.90	1.86
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.97	1.93	1.89	1.85

Продовження таблиці 12. Рівень значущості $\alpha = 0.05$

k_2 \ k_1	14	16	18	20	30	40	50	60	70	80	90	100
1	245	246	247	248	250	251	252	252	252	253	253	253
2	19.42	19.43	19.44	19.45	19.46	19.47	19.48	19.48	19.48	19.48	19.48	19.49
3	8.71	8.69	8.67	8.66	8.62	8.59	8.58	8.57	8.57	8.56	8.56	8.55
4	5.87	5.84	5.82	5.80	5.75	5.72	5.70	5.69	5.68	5.67	5.67	5.66
5	4.64	4.60	4.58	4.56	4.50	4.46	4.44	4.43	4.42	4.41	4.41	4.41
6	3.96	3.92	3.90	3.87	3.81	3.77	3.75	3.74	3.73	3.72	3.72	3.71
7	3.53	3.49	3.47	3.44	3.38	3.34	3.32	3.30	3.29	3.29	3.28	3.27
8	3.24	3.20	3.17	3.15	3.08	3.04	3.02	3.01	2.99	2.99	2.98	2.97
9	3.03	2.99	2.96	2.94	2.86	2.83	2.80	2.79	2.78	2.77	2.76	2.76
10	2.86	2.83	2.80	2.77	2.70	2.66	2.64	2.62	2.61	2.60	2.59	2.59
11	2.74	2.70	2.67	2.65	2.57	2.53	2.51	2.49	2.48	2.47	2.46	2.46
12	2.64	2.60	2.57	2.54	2.47	2.43	2.40	2.38	2.37	2.36	2.36	2.35
13	2.55	2.51	2.48	2.46	2.38	2.34	2.31	2.30	2.28	2.27	2.27	2.26
14	2.48	2.44	2.41	2.39	2.31	2.27	2.24	2.22	2.21	2.20	2.19	2.19
15	2.42	2.38	2.35	2.33	2.25	2.20	2.18	2.16	2.15	2.14	2.13	2.12
16	2.37	2.33	2.30	2.28	2.19	2.15	2.12	2.11	2.09	2.08	2.07	2.07
17	2.33	2.29	2.26	2.23	2.15	2.10	2.08	2.06	2.05	2.03	2.03	2.02
18	2.29	2.25	2.22	2.19	2.11	2.06	2.04	2.02	2.00	1.99	1.98	1.98
19	2.26	2.21	2.18	2.16	2.07	2.03	2.00	1.98	1.97	1.96	1.95	1.94
20	2.22	2.18	2.15	2.12	2.04	1.99	1.97	1.95	1.93	1.92	1.91	1.91
22	2.17	2.13	2.10	2.07	1.98	1.94	1.91	1.89	1.88	1.86	1.86	1.85
24	2.13	2.09	2.05	2.03	1.94	1.89	1.86	1.84	1.83	1.82	1.81	1.80
26	2.09	2.05	2.02	1.99	1.90	1.85	1.82	1.80	1.79	1.78	1.77	1.76
28	2.06	2.02	1.99	1.96	1.87	1.82	1.79	1.77	1.75	1.74	1.73	1.73
30	2.04	1.99	1.96	1.93	1.84	1.79	1.76	1.74	1.72	1.71	1.70	1.70
40	1.95	1.90	1.87	1.84	1.74	1.69	1.66	1.64	1.62	1.61	1.60	1.59
50	1.89	1.85	1.81	1.78	1.69	1.63	1.60	1.58	1.56	1.54	1.53	1.52
60	1.86	1.82	1.78	1.75	1.65	1.59	1.56	1.53	1.52	1.50	1.49	1.48
70	1.84	1.79	1.75	1.72	1.62	1.57	1.53	1.50	1.49	1.47	1.46	1.45
80	1.82	1.77	1.73	1.70	1.60	1.54	1.51	1.48	1.46	1.45	1.44	1.43
90	1.80	1.76	1.72	1.69	1.59	1.53	1.49	1.46	1.44	1.43	1.42	1.41
100	1.79	1.75	1.71	1.68	1.57	1.52	1.48	1.45	1.43	1.41	1.40	1.39

Таблиця 13. Біномний розподіл. Таблиця значень $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

		p						
n	k	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5		
	0	0.34868	0.10737	0.02825	0.00605	0.00098	10	
	1	0.38742	0.26844	0.12106	0.04031	0.00977	9	
	2	0.19371	0.30199	0.23347	0.12093	0.04395	8	
	3	0.05740	0.20133	0.26683	0.21499	0.11719	7	
	4	0.01116	0.08808	0.20012	0.25082	0.20508	6	
10	5	0.00149	0.02642	0.10292	0.20066	0.24609	5	10
	6	0.00014	0.00551	0.03676	0.11148	0.20508	4	
	7	0.00001	0.00079	0.00900	0.04247	0.11719	3	
	8	0.00000	0.00007	0.00145	0.01062	0.04395	2	
	9	0.00000	0.00000	0.00014	0.00157	0.00977	1	
	10	0.00000	0.00000	0.00001	0.00010	0.00098	0	
	0	0.20589	0.03518	0.00475	0.00047	0.00003	15	
	1	0.34315	0.13194	0.03052	0.00470	0.00046	14	
	2	0.26690	0.23090	0.09156	0.02194	0.00320	13	
	3	0.12851	0.25014	0.17004	0.06339	0.01389	12	
	4	0.04284	0.18760	0.21862	0.12678	0.04166	11	
	5	0.01047	0.10318	0.20613	0.18594	0.09164	10	
	6	0.00194	0.04299	0.14724	0.20660	0.15274	9	
15	7	0.00028	0.01382	0.08113	0.17708	0.19638	8	15
	8	0.00003	0.00345	0.03477	0.11806	0.19638	7	
	9	0.00000	0.00067	0.01159	0.06121	0.15274	6	
	10	0.00000	0.00010	0.00298	0.02449	0.09164	5	
	11	0.00000	0.00001	0.00058	0.00742	0.04166	4	
	12	0.00000	0.00000	0.00008	0.00165	0.01389	3	
	13	0.00000	0.00000	0.00001	0.00025	0.00320	2	
	14	0.00000	0.00000	0.00000	0.00002	0.00046	1	
	15	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00003	0	
		0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	k	n
		p						

Продовження таблиці 13

n	k	p: 0.1	0.2	0.3	0.4	0.5		
20	0	0.12158	0.01153	0.00080	0.00004	0.00000	20	20
	1	0.27017	0.05765	0.00684	0.00049	0.00002	19	
	2	0.28518	0.13691	0.02785	0.00309	0.00018	18	
	3	0.19012	0.20536	0.07160	0.01235	0.00109	17	
	4	0.08978	0.21820	0.13042	0.03499	0.00462	16	
	5	0.03192	0.17456	0.17886	0.07465	0.01479	15	
	6	0.00887	0.10910	0.19164	0.12441	0.03696	14	
	7	0.00197	0.05455	0.16426	0.16588	0.07393	13	
	8	0.00036	0.02216	0.11440	0.17971	0.12013	12	
	9	0.00005	0.00739	0.06537	0.15974	0.16018	11	
	10	0.00001	0.00203	0.03082	0.11714	0.17620	10	
	11	0.00000	0.00046	0.01201	0.07099	0.16018	9	
	12	0.00000	0.00009	0.00386	0.03550	0.12013	8	
	13	0.00000	0.00001	0.00102	0.01456	0.07393	7	
	14	0.00000	0.00000	0.00022	0.00485	0.03696	6	
	15	0.00000	0.00000	0.00004	0.00129	0.01479	5	
	16	0.00000	0.00000	0.00001	0.00027	0.00462	4	
	17	0.00000	0.00000	0.00000	0.00004	0.00109	3	
	18	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00018	2	
	19	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00002	1	
	20	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0	
		0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	k	n
		p						

Зміст

Частина I

Частина II

Частина III

Навчальне видання

Лавренчук Володимир Петрович,
Готинчан Тетяна Іванівна,
Дронь Віталій Сільвестрович,
Кондур Оксана Созонтівна

Математика для економістів:

теорія та застосування

Навчальний підручник

Комп'ютерний набір, верстка: *Готинчан Т. І.,*
Дронь В.С.