Частина II

Тема 1. Елементи комбінаторики

Сукупність, зібрання, система об'єктів певної природи називається **множиною**. Самі об'єкти називаються **елементами множини**. Множини є **скінченні і нескіченні**, що визначається кількістю елементів даної множини. Позначатимемо множини великими латинськими буквами: $A, B, C, \ldots$, їхні елементи - малими: a, b, c, ... **Об'єднання**, **переріз** і **різницю** множин A, B позначатимемо відповідно $A \bigcup B, A \cdot B$ (або $A \bigcap B$) та $A \setminus B$; $\emptyset$ - порожня множина. Якщо a є елементом множини A, то використовують запис $a \in A$. Якщо ж елемент b не належить множині B, то пишуть $b \notin B$. Якщо множина A скінченна, то через $N(A)$ позначатимемо число її елементів.

Часто виникають задачі, коли треба знайти число можливих розміщень заданих предметів, число способів, якими можна здійснити деякий вибір, тощо. Ці задачі вивчає галузь математики, яка називається **комбінаторикою**.

Багато теорем і формул комбінаторики ґрунтуються на двох правилах, які називаються правилами суми і добутку.

Правило суми. Якщо деякий елемент a можна вибрати m способами, а елемент b - n способами, причому ніякий вибір a не збігається з жодним з виборів b, то один з об'єктів a або b можна вибрати $n+m$ способами. У термінах множин це виглядає так: якщо $N(A)=m$, $N(B)=n$, $AB=\emptyset$, то $N(A \bigcup B)=m+n$.

Правило добутку. Якщо деякий елемент a можна вибрати m способами і при кожному виборі елемента a елемент b можна вибрати n способами, то вибір пари (a, b) можна здійснити nm способами.

Приклад 1. Нехай з пункту A до пункту B є m доріг, з A до C - n доріг, з B до D - k доріг, з C до D - l доріг; B і C дорогами між собою не сполучені. Скількома дорогами можна потрапити з A до D?

$\triangleleft$ Згідно з правилом добутку з A до D через B є mk доріг, а через C

- nl доріг; тому за правилом суми число всіх доріг з A до D є $mk + nl$. ▷

Множину M називають **упорядкованою**, якщо в ній встановлено відношення $\prec$, що має такі властивості: а) для будь-яких $\{a, b\} \subset M$ або $a \prec b$ (a передує b) або $b \prec a$; б) якщо $a \prec b$, $b \prec c$, то $a \prec c$. Вибір відношення порядку в даній множині називають її впорядкуванням. Так, наприклад, множина натуральних чисел стає впорядкованою, якщо впорядкувати числа за величиною, тобто вважати $m \prec n$, тоді і тільки тоді, коли $m < n$. Для впорядкування скінченної множини A з $N(A) = n$ (n-множини) досить кожному її елементу приписати один з номерів $1, 2, \ldots, n$ або записати її елементи в певному порядку.

Очевидно, що дану множину можна впорядкувати по-різному. Наприклад, множину $\{a, b, c\}$ можна впорядкувати так:

$$(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a).$$

Дві впорядковані множини вважаються рівними, якщо вони складаються з тих самих елементів і однаково впорядковані. Наприклад, $(a, b, c), (a, c, b)$ - це різні впорядковані множини.

Розміщенням з n елементів по k називають будь-яку впорядковану $k-$підмножину $n-$множини M. Число розміщень з n елементів по k позначається A_n^k.

З цього означення випливає, що два розміщення вважаються різними не тільки тоді, коли вони відрізняються деякими елементами, але й тоді, коли складаються з однакових елементів, але відрізняються їх порядком.

Для будь-яких натуральних чисел n і $k \, (k \leq n)$ – правильна формула:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1). \tag{1}$$

<u>**Приклад 2.**</u> Правління фірми складається з 7 осіб. Скількома способами з їхнього числа можна обрати президента, директора та комерційного директора?

◁ Скористаємось формулою (1), де $n = 7$, $k = 3$:

$$A_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210. \ \triangleright$$

Розміщення з n елементів по n називаються **перестановками** з n елементів, і їхня кількість позначається P_n.

Очевидно, що P_n - це число різних способів, якими можна впорядкувати $n-$множину, і, отже, $P_n = A_n^n$. З формули (1) випливає, що

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n! \qquad (2).$$

<u>**Приклад 3.**</u> Скількома способами можна скласти список з 8 студентів?

◁ Оскільки складання списку є певним упорядкуванням множини з 8 осіб, то маємо

$$P_8 = 8! = 40320.$$

Отже, список можна скласти 40320 способами. ▷

Комбінацією з n елементів по k називається будь-яка k-підмножина n-множини M. Число всіх комбінацій з n елементів по k позначається C_n^k.

Для будь-яких натуральних чисел n і $k\,(k \le n)$ правильна формула:

$$C_n^k = \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}{k!}. \qquad (3)$$

<u>**Приклад 4.**</u> Агрохімік перевіряє 6 типів мінеральних добрив, для чого йому треба провести декілька дослідів, щоб вивчити сумісність будь-якої трійки добрив. Для кожного досліду беруть ділянку 0,25 га. На якій площі проводяться всі досліди?

◁ Знайдемо спочатку число дослідів, які слід провести. Скористаємось формулою (3), де $n = 6$, $k = 3$:

$$C_6^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20.$$

Оскільки на кожний дослід виділяється 0,25 га, то на всі досліди треба виділити $20 \cdot 0,25 = 5$ га. ▷

Формулу (3) можна записати у вигляді:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad (4)$$

Якщо вважати, що $0! = 1$, то формула (4) буде правильна і для $n = k$.

Для будь-яких натуральних чисел n і $k\,(k \leq n)$ правильні формули:

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \tag{5}$$

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}. \tag{6}$$

Оскільки $C_n^n = 1$, то можна вважати, що $C_n^0 = 1$, і тоді (5) у цьому випадку є тотожністю $1 = 1$. Можна довести, що число всіх підмножин $n-$множини дорівнює 2^n, а тому

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n. \tag{7}$$

Вправи

О1. В їдальні є 3 перші, 5 других і 2 треті страви. Скількома способами можна скласти з них обід?

О2. У розиграшу першості країни з футболу беруть участь 16 команд. Скількома способами можуть бути розподілені золота і срібна медалі?

О3. Скільки існує телефонних номерів, які складаються з шести різних цифр?

О4. Для визначення швидкості росту бактерій треба вибрати чотири штами бактерій з наявних восьми. Скількома способами це можна зробити?

О5. Скількома способами можна розсадити 8 глядачів у ряду з 8 місць?

О6. У 6 студентів і 11 студенток є ознаки певного інфекційного захворювання. Щоб перевірити наявність цього захворювання, треба зробити вибірковий аналіз крові у двох студентів і двох студенток. Скількома способами це можна зробити?

O7. Спростити вираз

$$\frac{P_{2x+1}}{A_{2x-1}^{n-1} P_{2x-n}}.$$

O8. Розв'язати рівняння

$$\frac{A_{x+2}^{n+2} P_{x-n}}{P_x} = 110.$$

O9. Число комбінацій з n елементів по 3 у 5 разів менше, ніж число комбінацій з $n+2$ елементів по 4. Знайти n.

O10. Скільки є можливих способів для утворення дозору з 3 солдатів і офіцера, якщо є 80 солдатів і 3 офіцери?

O11. Скільки є можливих способів розподілу 6 різних предметів між 3 особами так, щоб кожна з них одержала по два предмети?

O12. Збори з 80 осіб обирають голову, секретаря і трьох членів ревізійної комісії. Скількома способами це можна зробити?

O13. Скількома способами з 20 шахістів можна утворити 2 команди з 10 осіб?

O14. Кожного з семи студентів можна направити для проходження практики на одне з двох підприємств. Скількома різними способами це можна зробити?

O15. У лабораторній клітці є 8 білих і 6 коричневих кроликів. Знайти число способів вибору п'яти кроликів, якщо: 1) вони можуть бути будь-якого кольору; 2) три з них повинні бути білими; 3) вони повинні бути одного кольору.

O16. Скільки можна скласти п'ятизначних чисел так, щоб дві сусідні цифри були різними?

C1. Замок відкривається лише в тому випадку, коли набрано певний тризначний код з п'яти цифр. Спроба полягає в тому, що набирають навмання три цифри. Вгадати номер вдалося лише в останній з усіх можливих спроб. Скільки спроб передувало вдалій?

C2. На книжковій полиці розміщено 30 томів. Скількома способами їх можна розставити, щоб при цьому перший і другий томи не знаходились поруч?

C3. Поїзд метро робить 16 зупинок, на яких виходять усі пасажири. Скількома способами можуть розподілитися між цими зупинками 100 пасажирів, які ввійшли в поїзд на кінцевій зупинці?

C4. Скільки треба мати словників, щоб можна було безпосередньо робити переклади з будь-якої із п'яти мов: російської, української, англійської, німецької, французької будь-якою іншою з них?

C5. З 10 різних квіток треба скласти букет так, щоб у ньому було не менше двох квіток. Скількома способами можна скласти такий букет?

C6. Скількома способами k пасажирів можуть розподілитися по n вагонах, якщо для кожного пасажира істотним є тільки номер вагона, а не місце у вагоні?

Домашнє завдання

Д1. Скільки чотиризначних чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, якщо: а) жодна з цифр не повторюється; б) цифри можуть повторюватись?

Д2. У класі 10 навчальних предметів і 5 різних уроків на день. Скількома способами можна розподілити уроки на день?

Д3. Скількома способами збори, що складаються з 40 осіб, можуть обрати зі свого складу голову зборів, його заступника і секретаря?

Д4. Число перестановок з n букв відноситься до числа перестановок з $n+2$ букв, як 0,1 до 3. Знайти n.

Д5. 8 студентів подорожували у двох човнах, у меншому з яких могло вміститись не більше 4 осіб, а в більшому - не більше 6 осіб. Скількома способами вони можуть розміститись у цих човнах?

Д6. У шаховому турнірі два учасники вибули, зігравши по три партії кожний (не зігравши між собою), і тому на турнірі було зіграно всього 84 партії. Скільки було учасників спочатку?

Д7. Скільки можна утворити п'яти буквених слів, використовуючи алфавіт з 26 букв?

Д8. На вечірці присутні 12 дівчат і 15 юнаків. Скількома способами можна вибрати з них 4 пари для танців?

Д9. Збори з 60 осіб обирають голову, секретаря, трьох членів редакційної комісії. Скількома способами це можна зробити?

Д10. Скількома способами можна 15 шахістів поділити на три команди з 5 осіб?

Д11. Комітет складається з 12 членів. Мінімальний кворум на засіданнях цього комітету повинен нараховувати 8 членів. Скількома способами можна досягти: а) мінімального кворуму; б) будь-якого кворуму?

Д12. У деякого захворювання є шість відомих симптомів. Захворювання діагнозується, якщо у хворого проявляється не менше чотирьох симптомів. Скільки різних комбінацій симптомів приводять до правильного діагнозу?

Відповіді

О1. 30. **О2.** $16 \cdot 15 = 240$. **О3.** 151200. **О4.** $C_8^4 = 70$.
О5. $P_8 = 40320$. **О6.** $C_6^2 \cdot C_{11}^2 = 825$. **О7.** $2x(2x+1)$. **О8.** $x = 9$.
О9. $n_1 = 14, n_2 = 3$. **О10.** $3C_{80}^3 = 246480$. **О11.** $P_3 \cdot C_6^2 = 90$.
О12. $A_{80}^2 \cdot C_{78}^3 = \dfrac{80!}{3!\,75!}$. **О13.** C_{20}^{10}. **О14.** $\sum\limits_{k=0}^{7} C_7^k = 2^7 = 128$.
О15. 1) $C_{14}^5 = 2002$; 2) $C_8^3 \cdot C_6^2 = 840$; 3) $C_8^5 + C_6^5 = 62$. **О16.** 9^5.
С1. $5^3 - 1 = 124$. **С2.** $P_{30} - 2P_{29} = 30! - 2 \cdot 29!$. **С3.** 16^{100}.
С4. $A_5^2 = 20$. **С5.** $2^{10} - C_{10}^0 - C_{10}^1 = 1013$. **С6.** n^k.
Д1. а) $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$; б) $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1080$. **Д2.** $A_{10}^5 = 30240$.
Д3. $A_{40}^3 = 59280$. **Д4.** $n = 4$. **Д5.** $C_8^2 + C_8^3 + C_8^4 = 154$.
Д6. $C_{x-2}^2 + 6 = 84$, $x = 15$. **Д7.** $26^5 = 11881376$. **Д8.** $A_{12}^4 \cdot A_{15}^4$
Д9. $A_{60}^2 \cdot C_{58}^3$. **Д10.** $C_{15}^5 \cdot C_{10}^5$. **Д11.** а) $C_{12}^8 = 495$;
б) $\sum\limits_{k=8}^{12} C_{12}^k = 794$. **Д12.** $\sum\limits_{k=4}^{6} C_6^k = 22$.

Тема 2. Випадкові події. Дії над подіями. Ймовірність події

Випадковою подією називається все те, що при виконанні деякої сукупності умов S може відбутися або не відбутися.

Під **елементарними подіями,** пов'язаними з певним випробуванням, розуміють усі нерозкладні результати цього випробування. Кожну подію можна розглядати як деяку множину елементарних подій.

Елементарні події можуть бути об'єктами найрізноманітнішої природи, тому домовляються під **простором елементарних подій** розуміти певну множину (скінченну або нескінченну).

Позначатимемо простір елементарних подій буквою Ω, а його елементи (точки), тобто елементарні події,– буквами ω_i або ω. Підмножини простору елементарних подій називаються **подіями** (подія A настає, якщо настає яка-небудь з елементарних подій $\omega \in A$). Сама множина Ω називається **вірогідною** подією, порожня множина $\emptyset$ - **неможливою** подією.

Сумою подій A і B називається подія, яка настане при появі або події A, або події B, або обох подій разом. Іншими словами, це подія, яка складається з елементарних подій, що входять до складу хоча б однієї з подій A, B. Суму подій позначають $A+B$ або $A\bigcup B$.

Добутком подій A і B називають подію, яка відбувається при одночасному настанні обох подій, тобто вона складається з елементарних подій, що входять в обидві події A, B. Її позначають AB або $A\bigcap B$.

Кажуть, що подія A є окремим випадком події B (або B є наслідком A), якщо елементарні події, які входять в A, входять також у B, тобто при настанні події A настає також подія B. Позначають цей факт $A \subset B$ або $B \supset A$. Якщо одночасно $A \subset B$ та $B \subset A$, то події називаються **рівносильними** і цей факт записують так: $A = B$.

Протилежною подією $\overline{A}$ до події A називається теоретико-множинне доповнення $\Omega \setminus A$, тобто подія, що складається з усіх елементарних подій, які не входять в A. Це означає, що подія $\overline{A}$

настає тоді і тільки тоді, коли не настає подія A.

Події A і B називаються несумісними, якщо $AB = \emptyset$.

Легко доводяться такі властивості операцій над подіями:

1) $A + B = B + A$; $AB = BA$ (комутативні закони для додавання і множення);

2) $(A+B)+C = A+(B+C)$, $(AB)C = A(BC)$ (асоціативні закони додавання і множення);

3) $(A + B)C = AC + BC$ (дистрибутивний закон множення відносно додавання);

4) $AB+C = (A+C)(B+C)$ (дистрибутивний закон додавання відносно множення);

5) $\overline{A+B} = \overline{A}\ \overline{B}$, $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$ (закони де Моргана);

6) $A + \overline{A} = \Omega$, $A\overline{A} = \emptyset$.

Приклад 1. Стрілець двічі стріляє по мішені: подія A - влучення при першому пострілі, подія B - при другому. Описати простір елементарних подій. Записати подію, яка полягає в тому, що: а) стрілець влучив у мішень принаймні один раз (подія C); б) стрілець влучив рівно один раз (подія D); в) стрілець не влучив у мішень (подія E).

$\triangleleft$ Простір елементарних подій складається з таких чотирьох подій: AB, $A\overline{B}$, $\overline{A}B$, $\overline{AB}$, тобто $\Omega = \{AB, A\overline{B}, \overline{A}B, \overline{AB}\}$.

Опишемо тепер події C, D і E .

а) Якщо стрілець влучив принаймні один раз, то це означає, що він влучив або при першому пострілі, або при другому, або при обох, тобто $C = A\overline{B} + \overline{A}B + AB = A + B$.

б) Рівно одне влучення може бути тільки тоді, коли стрілець при першому пострілі влучив, а при другому - ні, або при першому не влучив, а при другому - влучив, тобто $D = A\overline{B} + \overline{A}B$.

в) Якщо стрілець не влучив у мішень, то це означає, що він не влучив при обох пострілах, тобто $E = \overline{A} \cdot \overline{B}$, або $E = \overline{A+B}$. $\triangleright$

Нехай простір елементарних подій Ω є скінченною множиною, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$, тобто є тільки N можливих результатів випробування. Очевидно, що елементарні події $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N$ є попарно несумісними, тобто $\omega_i\omega_j = \emptyset, i \neq j$, $\{i, j\} \subset \{1, \ldots, N\}$. Крім того, ми вважатимемо, що вони є рівноможливими, тобто у даному процесі кожна з них має однакову можливість настати.

Розглянемо подію A, тобто підмножину Ω. **Імовірністю події A** називається відношення числа результатів випробування, сприятливих до події A, до числа всіх рівноможливих і попарно несумісних результатів випробування. Позначається дана ймовірність символом $P(A)$ і згідно з означенням

$$P(A) = \frac{N(A)}{N}, \tag{1}$$

де N - число елементів множини Ω, а $N(A)$ - число елементів множини A.

З означення імовірності події випливає, що: 1) $0 \leq P(A) \leq 1$; 2)$P(\Omega) = 1$; 3) $P(\emptyset) = 0$.

Приклад 2. Навмання взятий телефонний номер складається з 5 цифр. Яка ймовірність того, що в ньому: а) всі цифри різні (подія A); б) всі цифри непарні (подія B) ?

$\triangleleft$ а) Оскільки на кожному з п'яти місць у п'ятизначному номері може стояти будь-яка з цифр 0, 1, 2,..., 9, то всіх різних п'ятизначних номерів буде $N = 10^5$. Номери, в яких всі цифри різні, - це розміщення з 10 елементів по 5, тому $N(A) = A_{10}^5 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$. Отже, згідно з формулою (1)

$$P(A) = \frac{A_{10}^5}{10^5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{10^5} = 0,3024.$$

б) З 5 непарних цифр (1, 3, 5, 7, 9) можна утворити 5^5 різних п'ятизначних номерів, тобто $N(B) = 5^5$. Оскільки всіх рівноможливих випадків буде $N = 10^5$, то

$$P(B) = \frac{5^5}{10^5} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} = 0,03125. \triangleright$$

Приклад 3. Група, яка складається з 8 осіб, займає місця за круглим столом у випадковому порядку. Яка ймовірність того, що при цьому дві певні особи сидітимуть поруч (подія A) ?

$\triangleleft$ Оскільки впорядковується множина з 8 елементів, то $N = 8! =$ $= 40320$. Події A сприяють такі розміщення, коли дві відзначені особи сидять поруч: всього 8 різних сусідніх пар місць за круглим столом, на кожну з яких можуть сісти відзначені особи двома способами, при цьому решта 6 осіб розміщуються на решті місць довільно, тому за формулою про число елементів прямого добутку множин (правило добутку) одержуємо

$$N(A) = 2 \cdot 8 \cdot 6!$$

Отже, згідно з формулою (1), маємо:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{2 \cdot 8 \cdot 6!}{8!} = \frac{2}{7}. \triangleright$$

Приклад 4. На складі готової продукції знаходиться n виробів, з яких m - першого ґатунку, решта - вироби другого ґатунку. Робиться вибірка без повернення обсягу k. Яка ймовірність того, що у вибірці буде точно k_1 виробів першого ґатунку $(0 \le k_1 \le k)$?

$\triangleleft$ Число N усіх можливих випадків вибору з n виробів по k виробів - це число комбінацій з n елементів по k елементів, а, отже, $N = C_n^k$. Число $N(A)$ випадків, які сприяють настанню події A (серед k виробів буде k_1 виробів першого гатунку), визначається формулою

$$N(A) = C_m^{k_1} C_{n-m}^{k-k_1}.$$

Тому шукана ймовірність, згідно з формулою (1), дорівнює

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_m^{k_1} C_{n-m}^{k-k_1}}{C_n^k}. \triangleright$$

Вправи

О1. Для яких подій A і B можлива рівність $A + B = A$?

О2. Подія A - принаймні один з чотирьох виробів бракований, подія B - бракованих виробів серед них не менше 2. Що означають протилежні події $\overline{A}$ і $\overline{B}$?

О3. Довести, що $\overline{\overline{A}\ \overline{B}} = A + B$ і $\overline{\overline{C} + \overline{D}} = CD$.

О4. Знайти випадкову подію X з рівності

$$\overline{X + A} + \overline{X + \overline{A}} = B.$$

О5. При перевезенні ящика, в якому містилося 21 стандартна і 10 нестандартних деталей, загублено одну деталь, невідомо яку. Навмання взята із ящика деталь (після перевезення) виявилась

стандартною. Знайти ймовірність того, що було загублено:
а) стандартну деталь; б) нестандартну деталь.

О6. У 25 екзаменаційних білетах міститься по два питання, які не повторюються. Студент знає відповіді лише на 45 питань. Яка ймовірність того, що вибраний білет містить питання, які студент знає ?

О7. У групі – 12 студентів, серед яких – 8 відмінників. За списком навмання відібрано 9 студентів. Знайти ймовірність того, що серед відібраних студентів буде 5 відмінників.

О8. З 5 букв A, K, I, P, T навмання вибирають 3. Знайти ймовірність події A, яка полягає в тому, що при цьому вийде:
1) одне із слів, які можна утворити, переставляючи букви в слові "КІТ "; 2) слово "КІТ ".

О9. З колоди в 36 карт навмання витягують три карти. Знайти ймовірність того, що сума очок цих карт дорівнює 21, якщо валет складає 2 очки, дама - три, король - чотири, туз - одинадцять, а решта карт - відповідно шість, сім, вісім, дев'ять і десять очок.

О10. У ліфт дев'ятиповерхового будинку на першому поверсі ввійшло п'ятеро пасажирів, кожний з яких з однаковою ймовірністю може вийти на будь-якому з поверхів, починаючи з другого. Знайти ймовірність того, що всі пасажири вийдуть: а) на одному і тому ж поверсі; б) на шостому поверсі; в) на різних поверхах.

О11. Яка ймовірність того, що, взявши навмання 3 карти з колоди в 52 карти, ми дістанемо: а) карти однієї масті; б) одного значення; в) трьох тузів ?

О12. В урні – 5 білих, 7 червоних і 8 чорних куль. Яка ймовірність того, що, взявши навмання 3 кулі, дістанемо кулі всіх кольорів ?

О13. Із 20 осіб, які одночасно захворіли на грип, 15 одужали повністю за 6 днів. Припустимо, що з цих 20 осіб випадковим чином вибрали п'ятьох. Яка ймовірність того, що: 1) всі п'ять одужали за шість днів; 2) одужали лише чотири особи; 3) жодна особа не одужала за шість днів?

О14. Деяка популяція рослин складається з особин трьох видів, помічених AA, Aa, aa. Чисельність кожного виду відповідно дорівнює 200, 600 і 50. Припустимо, що з цієї популяції випадково вибирають одну рослину. Знайти ймовірність того, що ця рослина виду : 1) AA; 2)AA або Aa?

О15. Десять книг навмання розкладають на книжковій поличці. Яка ймовірність того, що три конкретні з цих десяти книг стоятимуть поруч?

О16. Монету підкидають десять разів. Яка ймовірність того, що герб при цьому випаде 7 разів?

С1. Збори, на яких присутні 25 осіб, у тому числі 5 жінок, вибирають делегацію з 3 осіб. Вважаючи, що кожний із присутніх з однаковою ймовірністю може бути вибраним, знайти ймовірність того, що до складу делегації ввійдуть дві й жінки один чоловік.

С2. Колода з 36 карт поділена навмання на дві рівні частини. Яка ймовірність того, що кожна з частин буде однієї масті ?

С3. З партії, в якій 31 деталь без дефектів і 6 з дефектами, беруть навмання 3 деталі. Чому дорівнює імовірність у наступних випадках: а) всі три деталі без дефектів; б) принаймні одна деталь без дефектів?

С4. Знайти ймовірність того, що дні народження 12 осіб випадають на різні місяці року.

С5. Нехай A - множина коренів рівняння $6x^3+1 = 7x$. Знайти AB і $B \setminus A$, якщо $B = \{1, 2\}$.

С6. Слово "економіст"складено з букв розрізної абетки. Потім картки з буквами перемішуються і з них за чергою беруть чотири картки. Яка ймовірність того, що ці чотири картки в порядку їх надходження складуть слово "міст"?

С7. Студент забув три останні цифри потрібного номера телефону, але пам'ятає, що всі вони різні, і набирає їх навмання. Знайти ймовірність того, що набрані цифри правильні.

Домашнє завдання

Д1. Що означають події $A + A$ і AA ?

Д2. Коли можлива рівність $AB = A$?

Д3. Спростити вираз $A = (B + C)(B + \overline{C})(\overline{B} + C)$.

Д4. У колоді – 36 карт чотирьох мастей. Після виймання і повернення однієї карти колода перемішується і знову виймається одна карта. Знайти ймовірність того, що обидві витягнуті карти однієї масті.

Д5. У гаманці лежать три монети вартістю по 10 коп. і сім монет по 1 коп. Навмання береться одна монета, а потім виймається друга монета, яка виявляється монетою вартістю 10 коп. Знайти ймовірність того, що і перша монета була вартістю у 10 коп.

Д6. На восьми однакових картках написані відповідно числа 2, 4, 6, 7, 8, 11, 12 і 13. Навмання беруть дві картки. Знайдіть імовірність того, що утворений з двох одержаних чисел дріб є скоротним.

Д7. З десяти білетів лотереї виграшними є два. Знайти ймовірність того, що серед взятих на щастя п'яти білетів: а) один виграшний; б) два виграшні; в) принаймні один виграшний.

Д8. З колоди карт (52 карти) навмання витягують три карти. Знайти ймовірність того, що це буде трійка, сімка і туз.

Д9. Чому дорівнює імовірність того, що, поділивши колоду з 36 карт пополам, у кожній пачці одержимо по два тузи ?

Д10. Нехай A - множина коренів рівняння $9x^2 + 4 = 20x$. Знайти AB і $B \setminus A$, якщо $B = \{1, 2\}$.

Д11. Кинули два гральні кубики. Знайти ймовірність того, що сума очок на верхніх гранях дорівнює 7.

Д12. Для успішного складання колоквіуму студент повинен відповісти на одне з двох питань, запропонованих викладачем. Студент не знає відповідей на вісім питань з тих сорока, які йому можуть задати. Яка ймовірність того, що студент складе колоквіум?

Д13. З семи однакових білетів лотереї один виграшний. Семеро осіб почергово виймають по одному білету (не повертаючи його). Чи залежить ймовірність виграшу від місця в черзі?

Д14. Кинули дві монети. Яка ймовірність того, що випадуть два герби?

Д15. В урні є 15 червоних, 9 синіх і 6 зелених куль. Яка ймовірність того, що серед взятих навмання 6 куль буде одна зелена, дві синіх і три червоних?

Д16. Кубик, усі грані якого пофарбовано, розрізали на 125 кубиків однакового розміру. Всі кубики перемішано. Знайти ймовірність того, що взятий навмання кубик матиме 3 пофарбовані грані.

Відповіді

О1. $B \subset A$.**О2.** $\overline{A}$ - бракованих виробів немає; $\overline{B}$ - є один бракований виріб або немає жодного. **О4.** $X = \overline{B}$. **О5.** а) $\dfrac{2}{3}$; б)$\dfrac{1}{3}$.

О6. $\dfrac{C_{45}^2}{C_{50}^2} = 0,8$. **О7.** $\dfrac{C_8^5 C_4^4}{C_{12}^9}$. **О8.** 1) $\dfrac{P_3}{A_5^3}$; $\dfrac{1}{A_5^3}$.

О9. $\dfrac{C_4^3 + 2C_4^2 C_4^1 + 8C_4^1 C_4^1 C_4^1}{C_{36}^3}$. **О10.** а)$\dfrac{8}{8^5} = \dfrac{1}{8^4}$; б)$\dfrac{1}{8^5}$; в)$\dfrac{5! C_8^5}{8^5}$.

О11. а)$\dfrac{4C_{13}^3}{C_{52}^3}$; б)$\dfrac{13C_4^3}{C_{52}^3}$; в)$\dfrac{C_4^3}{C_{52}^3}$. **О12.** $\dfrac{C_5^1 C_7^1 C_8^1}{C_{20}^3} = 0,25$.

О13. 1) $\dfrac{C_{15}^5}{C_{20}^5}$; 2) $\dfrac{C_{15}^4 \cdot C_5^1}{C_{20}^5}$; 3) $\dfrac{C_5^5}{C_{20}^5}$. **О14.** 1) 4/17;

2) 200/850 + 600/850 = 16/17. **О15.** $\dfrac{8! \cdot 3!}{10!}$. **О16.** $\dfrac{C_{10}^3}{2^{10}} = 15/128$.

С1. $\dfrac{C_5^2 C_{20}^1}{C_{25}^3}$. **С2.** $\dfrac{2}{C_{36}^{18}}$. **С3.** а)$\dfrac{C_{31}^3}{C_{37}^3} = 0,579$;

б)$\dfrac{C_{31}^3 + C_6^1 C_{31}^2 + C_6^2 C_{31}^1}{C_{37}^3} = 0,9973$. **С4.** $\dfrac{12!}{12^{12}}$. С5. $AB = \{1\}$,

$B \setminus A = \{2\}$. **С6.** $\dfrac{1}{A_9^4}$. **С7.** 1/720.

Д1. $A + A = A$; $AA = A$. **Д2.** $A \subset B$. **Д3.** $A = BC$. **Д4.** $0,25$.

Д5. $\dfrac{2}{9}$. **Д6.** $\dfrac{C_5^2}{C_8^2} = \dfrac{A_5^2}{A_8^2}$. **Д7.** а)$\dfrac{C_2^1 C_8^4}{C_{10}^5} = \dfrac{5}{9}$; б)$\dfrac{C_2^2 C_8^3}{C_{10}^5} = \dfrac{2}{9}$; в)$\dfrac{7}{9}$.

Д8. $\dfrac{C_4^1 C_4^1 C_4^1}{C_{52}^3} = 0,0029$. **Д9.** $\dfrac{C_{32}^{16} C_4^2}{C_{36}^{18}}$. **Д10.** $AB = \{2\}$, $B \setminus A = \{1\}$.

Д11. 1/6. **Д12.** 0,9641. **Д13.** Не залежить і $P(A_k) = 1/7$, $k \in \{1, \ldots, 7\}$. **Д14.** 1/4. **Д15.** $\dfrac{C_6^1 C_9^2 C_{15}^3}{C_{30}^6} \approx 0,17$. **Д16.** 8/125.

Тема 3. Геометричні ймовірності

Формула класичної ймовірності відповідним чином узагальнюється на випадок, коли простір елементарних подій Ω є неперервною множиною.

Нехай Ω - квадровна область на площині, тобто область, яка має скінченну площу. Розглянемо систему S квадровних підмножин множини Ω. Вони, як відомо, утворюють σ - алгебру. Нехай умови досліду такі, що ймовірність попадання в довільну квадровну підобласть ω області Ω пропорційна площі цієї області і не залежить від її розташування в Ω. За цих умов для ймовірності настання будь-якої події $A = \{(x, y) \in \omega \mid \omega \in S\}$, можливої в даному експерименті, правильна **формула геометричної ймовірності** :

$$P(A) = P\{(x, y) \in \omega \mid \omega \in S\} = \frac{\text{пл.}\omega}{\text{пл.}\Omega}. \tag{1}$$

Формулу (1) можна поширити на випадок простору довільної розмірності:

$$P(A) = P\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \omega \mid \omega \in S\} = \frac{mes(\omega)}{mes(\Omega)},$$

де $mes(\Omega)$ - міра множини Ω, тобто довжина, площа, об'єм тощо в залежності від розмірності того простору, в якому розглядаються дані множини.

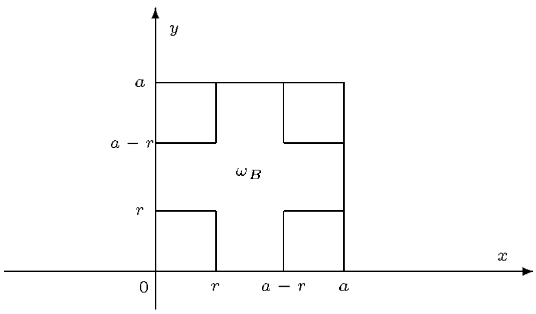
Приклад 1. На нескінченну шахову дошку зі стороною квадрата a навмання кидають монету радіуса $r < \frac{a}{2}$. Знайти ймовірність таких подій:
1) $A = \{$ монета попаде повністю всередину одного квадрата $\}$;
2) $B = \{$ монета перетне не більше однієї сторони квадрата $\}$.

$\triangleleft$ Нехай (x, y) - координати центра монети, що впала на шахову дошку. Оскільки шахова дошка є нескінченною, то можна вважати, що елементарні результати даного експерименту повністю визначаються положенням центра монети відносно вершин квадрата, що містить цей центр. Розміщуючи початок координат в одній з вершин вказаного квадрата, можемо записати множину елементарних подій $\Omega = \{(x, y) \in$

$\in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x, y \le a\}$. Множина ω_A, що відповідає події A, має вигляд $\omega_A = \{(x,y) \in \Omega \mid r \le x, y \le a - r\}$, тобто є квадратом зі стороною $a - 2r$. Згідно з формулою (1)

$$P(A) = \frac{\text{пл.}\omega_A}{\text{пл.}\Omega} = \frac{(a-2r)^2}{a^2}.$$

Множина ω_B має складнішу структуру, яка зображена на рисунку

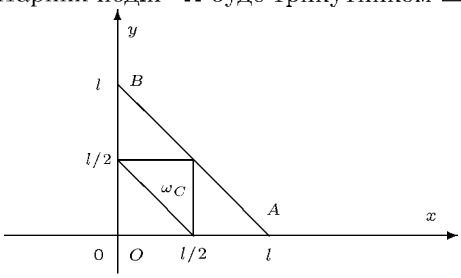


Оскільки площа ω_B дорівнює $a^2 - 4r^2$, то

$$P(B) = \frac{\text{пл.}\omega_B}{\text{пл.}\Omega} = \frac{a^2 - 4r^2}{a^2} = 1 - 4\frac{r^2}{a^2}. \ \triangleright$$

Приклад 2. Відрізок завдовжки l розділили на три частини, вибираючи дві точки поділу навмання. Знайти ймовірність того, що з утворених трьох відрізків можна скласти трикутник.

$\triangleleft$ Позначимо довжини частин відрізка через $x, y, l - x - y$. Усі можливі способи поділу відрізка на три частини характеризуються значеннями x, y, для яких $0 < x + y < l, x > 0, y > 0$. Якщо x, y розглядати як прямокутні декартові координати на площині, то простір елементарних подій Ω буде трикутником $\triangle OAB$.



Для того щоб з відрізків $x, y, l - x - y$ можна було скласти трикутник, необхідно і достатньо, щоб кожний з цих відрізків був меншим від суми двох інших, тобто $x < y+(l-x-y)$, $y < x+(l-x-y)$, $l - x - y < x + y$. Звідси $x < \frac{l}{2}$, $y < \frac{l}{2}$, $x + y > \frac{l}{2}$; остання система нерівностей описує трикутник ω_C. Тому

$$P(C) = \frac{\text{пл.}\omega_C}{\text{пл.}\Omega} = \frac{l^2/4}{l^2} = \frac{1}{4}. \triangleright$$

<u>Вправи</u>

<u>О1.</u> У квадрат вписано круг. Яка ймовірність, що кинута навмання в квадрат точка попаде в круг?

<u>О2.</u> Протягом 30 хв – від 12 години до 12 години 30 хвилин – повинен надійти телефонний дзвінок. Яка ймовірність того, що дзвінок надійде в останні 10 хвилин указаного проміжку часу, якщо момент початку дзвінка випадковий?

<u>О3.</u> На горизонтальній площині проведено паралельні прямі, що розташовані одна від одної на відстані $2a$. На площину навмання кидають тонку голку завдовжки $2l(l \leq a)$. Знайти ймовірність того, що голка перетне яку-небудь пряму.

<u>О4.</u> У сигналізатор поступають сигнали від двох пристроїв, причому надходження кожного з сигналів рівноможливе в довільний момент проміжку часу T. Сигналізатор спрацьовує, якщо різниця між моментами надходження сигналів менша $t(t < T)$. Знайти ймовірність того, що сигналізатор спрацює за час T, якщо кожний з пристроїв посилає по одному сигналу.

<u>О5.</u> Яка ймовірність того, що сума двох навмання взятих додатних чисел, кожне з яких не більше одиниці, не перевищить одиниці, а їх добуток буде не більший $\frac{2}{9}$?

<u>О6.</u> На площині проведено паралельні прямі на відстані $2a$ одна від одної. На цю площину навмання кидають монету радіуса $r < a$. Знайти ймовірність того, що монета не перетне жодної з прямих.

<u>О7.</u> На відрізку OA завдовжки l числової осі Ox навмання поставлено дві точки $B(x)$ і $C(y)$, причому $y > x$(координату точки C позначено через y для зручності). Знайти ймовірність того, що довжина відрізка BC буде меншою від довжини відрізка OB. Припускається, що ймовірність попадання точки на відрізок пропорційна довжині цього відрізка і не залежить від його розміщення на числовій осі.

С1. Знайти ймовірність того, що точка, кинута у будь-яке місце всередині круга, потрапить у вписані в цей круг: а) правильний трикутник; б) квадрат.

С2. Стержень завдовжки l розламали на дві частини. Знайти ймовірність того, що довжина меншої частини не перевищуватиме $\frac{l}{3}$.

С3. Дві особи A і B домовились зустрітися в певному місці, причому кожна з них приходить туди незалежно від другої у випадковий момент між 12 і 13 год. Той, хто приходить першим, чекає α ($\alpha < 60$) хвилин, і якщо другий за цей час не приходить, перший покидає місце зустрічі. Знайти ймовірність того, що зустріч відбудеться.

С4. З відрізка $[-1, 2]$ навмання взято два числа. Яка ймовірність того, що їх сума більша від одиниці, а добуток менший від одиниці ?

Домашнє завдання

Д1. У точці C, положення якої на телефонній лінії AB завдовжки L рівноможливе, відбувся розрив. Знайти ймовірність того, що точка C віддалена від точки A не менше, ніж на l.

Д2. На відрізку AB довжиною l навмання поставлено дві точки L і M. Знайти ймовірність того, що точка L буде ближче до точки M, ніж до точки A.

Д3. До автобусної зупинки через кожні чотири хвилини підходить автобус лінії A, і через кожні шість хвилин - автобус лінії B. Інтервали часу між моментами приходу автобуса лінії A і найближчого наступного автобуса лінії B рівноможливі в межах від нуля до чотирьох хвилин.

Знайти ймовірність того, що: а) перший автобус, який прибуде, буде автобусом лінії A; б) автобус будь-якої лінії підійде впродовж двох хвилин.

Д4. На паркетну підлогу кидають монету діаметром d. Паркет складений з квадратів із стороною $a\,(d < a)$. Знайти ймовірність того, що монета не перетне жодної зі сторін квадратів паркету.

Д5. У круг радіуса R кидають точку. Знайти ймовірність того, що відстань від цієї точки до центра круга не перевищує r.

Д6. Проводиться постріл по диску, який швидко обертається. Диск поділено на 20 рівних секторів, пофарбованих почергово в чорний і білий колір. Яка ймовірність того, що куля влучить в один з чорних секторів?

Д7. На відрізку довжиною l навмання вибираються дві точки. Знайти ймовірність того, що відстань між цими точками буде не менша від $l/2$.

Відповіді

О1. $\frac{\pi}{4}$. **О2.** $\frac{1}{3}$. **О3.** $\frac{2l}{\pi a}$. **О4.** $\frac{t(2T-t)}{T^2}$. **О5.** $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}\cdot ln2 \approx \approx 0,487$. **О6.** $\frac{a-r}{a}$. **О7.** $\frac{1}{4}$.

С1. а) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$; б) $\frac{2}{\pi}$. **С2.** $\frac{2}{3}$. С3. $(60^2-(60-\alpha)^2)/60^2$. **С4.** $\frac{1}{6}+\frac{2}{9}\cdot ln2 \approx \approx 0,32034$.

Д1. 1 - $\frac{l}{L}$. **Д2.** $\frac{3}{4}$. Слід взяти $x = AL$, $y = AM$, де $0 \le x \le l$, $0 \le \le y \le l$; сприятливі значення: $|y-x| \le x$. **Д3.** x - довільний момент часу, $0 \le x \le 12$хв. Моменти приходу автобуса лінії $A : x = 0; 4; 8;$ моменти приходу автобуса лінії $B : y; y+6$, де $0 \le y \le 4$. а) Сприятливі значення: при $0 < y \le 2$ $y < x \le 4$, $6+y < x \le 12$; при $y > 0$ $y < x \le 8$, або $y+6 < x < 12$; $p = \frac{2}{3}$. б) Сприятливі значення: $2 \le x \le 4$, $6 \le \le x \le 8$, $10 \le x \le 12$, $4+y \le x \le 6+y$; при $y < 2$ $0 < x \le y$, а при $y > 2$ $y-2 \le x \le y$; $p = \frac{2}{3}$. **Д4.** $\frac{(a-d)^2}{a^2}$. **Д5.** $\frac{r^2}{R^2}$. **Д6.** 1/2. **Д7.** 1/4.

Тема 4. Теореми додавання і множення ймовірностей

Якщо події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ попарно несумісні, тобто $A_iA_j = \emptyset$, $i \neq j$, $\{i, j\} \subset \{1, \ldots, n\}$, то ймовірність суми цих подій дорівнює сумі їх ймовірностей:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots P(A_n). \qquad (1)$$

Формулу (1) називають **теоремою додавання ймовірностей** попарно несумісних подій.

Якщо події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ довільні, то формула (1) набуває значно складнішого вигляду. Запишемо її у випадку $n = 2$ і $n = 3$

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2);$$

$$P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) -$$
$$-P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3).$$

Приклад 1. У крамницю надійшли капронові панчохи, 60% яких постачає перша фабрика, 25% - друга і 15% - третя. Яка ймовірність того, що куплені навмання панчохи виготовлені на першій або третій фабриці?

$\triangleleft$ Введемо позначення. Нехай A, B, C - події, які відбудуться, коли навмання куплені панчохи вироблені відповідно на першій, другій або третій фабриці. Подія, яка полягає в тому, що куплені навмання панчохи виготовлені на першій або третій фабриці - $A + C$. Оскільки події несумісні, то згідно з формулою (1)

$$P(A + C) = P(A) + P(C) = 0,6 + 0,15 = 0,75,$$

бо $P(A) = 0,6$, $P(C) = 0,15$. $\triangleright$

Приклад 2. Знайти ймовірність того, що навмання взяте двозначне число буде кратним або 2, або 5, або одному і другому одночасно.

$\triangleleft$ Нехай A - подія, що взяте навмання число кратне 2, а B - подія, що це число кратне 5. Треба знайти $P(A + B)$. Оскільки A і B сумісні події, то $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Двозначні числа - це 10, 11, ..., 98, 99. Всіх їх є 90. Очевидно, що 45 з них кратні 2 (сприяють появі події A), 18 кратні 5 (сприяюь появі події AB) і 9 кратні 2 та 5 одночасно (сприяють появі події AB).

Тому $P(A)=\dfrac{45}{90}=0,5,\ P(B)=\dfrac{18}{90}=0,2,\ P(AB)=\dfrac{9}{90}=0,1$ і, отже, $P(A+B)=0,5+0,2-0,1=0,6.$ ▷

Імовірність настання події A за умови, що подія B уже відбулася, називається **умовною** і позначається $P(A/B)$.

Імовірність добутку двох подій дорівнює добутку ймовірності однієї з цих подій на умовну ймовірність другої за умови, що перша відбулася, тобто

$$P(AB)=P(A)P(B/A), P(AB)=P(B)P(A/B). \tag{2}$$

Формули (2) називають **теоремою множення ймовірностей**.

Якщо $P(A/B)=P(A)$, то кажуть, що подія A не залежить від події B. Властивість незалежності подій взаємна: якщо $P(A/B)=$ $=P(A)$, то і $P(B/A)=P(B)$. Для незалежних подій A і B формули (2) набувають вигляду

$$P(AB)=P(A)P(B).$$

У випадку трьох подій A,B,C

$$P(ABC)=P(A)P(B/A)P(C/AB).$$

Якщо A,B,C - взаємно незалежні події, то

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C).$$

Якщо події $A_1,A_2,\ldots,A_n$ незалежні в сукупності, то ймовірність настання принаймні однієї з них, визначається за формулою

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=1-P(\overline{A_1+A_2+\ldots A_n})=$$
$$=1-P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdots P(\overline{A_n}). \tag{3}$$

Приклад 3. У цеху два мотори працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що протягом години перший мотор не потребує уваги майстра, дорівнює 0,9, для другого мотора ця ймовірність дорівнює 0,85. Знайти ймовірність того, що впродовж години жоден з моторів не потребуватиме уваги майстра.

$\triangleleft$ Нехай A - подія, яка настане, коли перший мотор не потребує уваги протягом години, а B - подія, яка настане, коли уваги не потебує другий мотор. Оскільки події A і B є незалежними, то

$$P(AB) = P(A)P(B) = 0,9 \cdot 0,85 = 0,765. \triangleright$$

Приклад 4. У продукції заводу брак складає 5 % від загальної кількості випущених деталей. Для контролю відібрано 20 деталей. Яка ймовірність того, що серед них є принаймні одна бракована ?

$\triangleleft$ Для будь-якої деталі з продукції заводу ймовірність бути бракованою дорівнює за умовою $p = 0,05 = P(A_k), k \in \{1, 2, \ldots, 20\}$, де подія $A_k = \{$ k-та за порядком взята деталь є бракованою $\}$. Очевидно, нас цікавить подія $A_1 + A_2 + \ldots + A_{20}$. Якщо процес технологічно відлагоджений, то можна вважати, що події $A_1, A_2, \ldots, A_{20}$ незалежні в сукупності. За формулою (3) дістаємо

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_{20}) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A_{20}}) =$$

$$= 1 - 0,95^{20} \approx 0,64$$

бо $P(\overline{A_k}) = 1 - P(A_k) = 1 - 0,05 = 0,95. \triangleright$

Вправи

О1. В урні – 15 червоних, 10 синіх і 5 білих куль. З урни навмання виймається одна куля. Знайти ймовірність того, що ця куля буде червоною або білою.

О2.

На стелажі бібліотеки у випадковому порядку розкладено 15 підручників, причому 5 з них у палітурках. Бібліотекар бере навмання 3 підручники. Знайти ймовірність того, що принаймні один із взятих підручників виявиться в палітурці.

О3. У першому ящику – 2 білі і 10 чорних куль. У другому ящику 8 білих і 4 чорні кулі. З кожного ящика вийняли по кулі. Яка ймовірність того, що: 1) обидві кулі білі; 2) одна куля біла, а друга чорна?

О4. Три стрільці стріляють у ціль. Ймовірність попадання в ціль для першого стрільця – 0,75, для другого – 0,8, для третього – 0,9. Знайти ймовірність того, що в ціль попаде принаймні один стрілець.

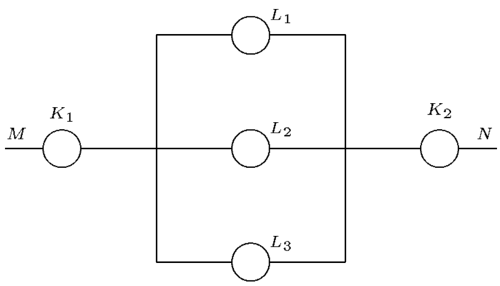
О5. На тепловій електростанції– 15 змінних інженерів, з них 3 жінки. Протягом зміни зайнято 3 особи. Знайти ймовірність того, що у випадково вибраній зміні чоловіків виявиться не менше двох.

О6. Партія із 100 деталей підлягає вибірковому контролю. Умовою непридатності всієї партії є наявність принаймні однієї бракованої деталі серед 5 деталей, що перевіряються. Яка ймовірність для даної партії бути не прийнятою, якщо вона містить 5% бракованих деталей?

О7. У цеху працює 7 чоловіків і 3 жінки. За табельними номерами відібрано навмання трьох осіб. Знайти ймовірність того, що всі відібрані особи є чоловіками?

О8. З повної колоди карт (52 карти) виймають одночасно чотири карти. Розглядаються події: A - серед вийнятих карт буде принаймні одна бубнова; B - серед вийнятих карт буде принаймні одна чирвова. Знайти ймовірність події $C = A + B$.

О9. Електричне коло між M і N складено за схемою



Вихід з ладу за час T різних елементів кола - незалежні події, які мають ймовірності: $P(K_1) = 0,6$, $P(K_2) = 0,5$, $P(L_1) = 0,4$, $P(L_2) = 0,7$, $P(L_3) = 0,9$. Знайти ймовірність розриву кола за вказаний проміжок часу.

О10. Два мисливці стріляють одночасно і незалежно один від одного в зайця. Заєць вбитий, якщо: 1) попали обидва; 2) попав принаймні один з мисливців. Яка ймовірність того, що заєць вбитий, якщо перший мисливець попадає з ймовірністю 0,8, а другий - з ймовірністю 0,75 ?

О11. З двох гармат зроблено одночасно постріл по мішені. Ймовірність попадання з першої гармати дорівнює 0,85, з другої - 0,91. Знайти ймовірність влучення у ціль.

О12. Дано значення: $P(\bar{A}\bar{B}) = 0,3$; $P(A\bar{B}) = 0,4$; $P(\bar{A}B) = 0,2$. З'ясувати, чи залежні події A і B. Обчислити $P(A/B)$ і $P(B/A)$.

О13. Три клієнти зайшли до банку. Імовірність того, що перший клієнт зажадає певної послуги, дорівнює $p_1 = 0,32$, другий - $p_2 = 0,41$, а третій - $p_3 = 0,37$. Знайти ймовірність того, що послуги зажадає принаймні один клієнт.

О14. Кинули два гральні кубики. Знайти ймовірність події A - випадання принаймні на одному кубикові не більше двох очок.

О15. Є дві урни. В першій є 1 біла куля, 3 чорних і 4 червоних, у другій - 3 білих, 2 чорних і 3 червоних. З кожної урни навмання виймають по одній кулі, після чого порівнюють їх кольори. Знайти ймовірність того, що кольори куль однакові.

О16. Навмання береться число з сукупності чисел від 100 до 999. Яка ймовірність того, що принаймні дві його цифри однакові?

О17. Є по 10 карток білого, червоного, зеленого і жовтого кольорів. На картках кожного кольору нанесено цифри від 1 до 10. Навмання вибирається одна картка. Знайти ймовірність того, що ця картка буде білою і матиме на собі одну з цифр 5, 6 або 7.

О18. В урні знаходяться 10 виграшних білетів і 15 білетів без виграшу. Один за одним (без повернення) виймаються 4 білети. Знайти ймовірність того, що всі вийняті білети будуть виграшними.

С1. Абонент забув останню цифру номера телефону і тому набирає її навмання. Знайти ймовірність того, що йому доведеться дзвонити не більше, ніж у три місця. Як зміниться ймовірність, якщо остання цифра непарна?

С2. Верстат-автомат штампує деталі, 96% з яких стандартні, причому 90% стандартних деталей - це деталі першого ґатунку. Знайти ймовірність того, що навмання взята деталь виявиться деталлю першого ґатунку.

С3. Імовірність покращення спортсменом особистого досягнення із стрибків у довжину дорівнює p. Чому дорівнює ймовірність того, що він покращив свій результат, якщо йому дана можливість стрибати 3 рази?

С4. Робітник обслуговує 4 верстати. Ймовірність того, що впродовж певної години перший верстат не вимагатиме уваги робітника, дорівнює 0,7, для другого верстата ця ймовірність дорівнює 0,8, для третього - 0,9 і для четвертого - 0,85. Знайти ймовірність того, що протягом деякої години принаймні один верстат потребуватиме уваги робітника.

С5. Імовірність того, що в результаті чотирьох незалежних випробувань подія настане принаймні один раз, дорівнює 0,59. Знайти ймовірність настання події при одному випробуванні, якщо вона під час усіх випробувань однакова.

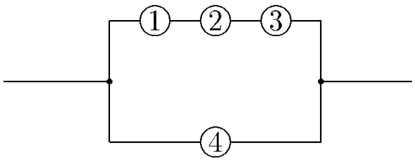
Домашнє завдання

Д1. Виконується один постріл по мішені, яка складається з яблука і двох концентричних кілець. Імовірність влучення при одному пострілі в яблуко і в кільця відповідно дорівнює 0,11; 0,24; 0,35. Знайти ймовірність промаху.

Д2. В урні – a білих і b чорних куль. З урни виймають (одночасно або послідовно) дві кулі. Знайти ймовірність того, що обидві кулі будуть білими.

Д3. Два стрільці, для яких ймовірності влучення у мішень дорівнюють відповідно 0,7 і 0,8, роблять по одному пострілу. Знайти ймовірність того, що: а) обидва стрільці влучають у мішень; б) жодний із стрільців не влучить у мішень; в) хоча б один із стрільців влучить у мішень (обчислити двома способами); г) лише один із стрільців влучить у мішень.

Д4. Розглянемо роботу електричного кола, поданого на рисунку



Елементи 1, 2, 3 з'єднані послідовно, а до них паралельно підключено елемент 4. Ймовірність безвідмовної роботи кожного елемента дорівнює відповідно 0,6, 0,7, 0,8 і 0,9. Знайти ймовірність безвідмовної роботи електричного кола.

Д5. В урні – a білих і b чорних куль. З урни у випадковому порядку, одну за одною, виймають всі кулі. Знайти ймовірність того, що другою за порядком буде витягнуто білу кулю.

Д6. Підкидають дві монети. Розглядаються події: A - випадання герба на першій монеті: B - випадання герба на другій монеті. Знайти ймовірність події $C = A + B$.

Д7. При прийманні партї товару перевіряється половина виробів. Умовами перевірки допускається не більше 2% браку. Знайти ймовірність того, що партія із 100 виробів, яка містить 5% браку, буде прийнята.

Д8. Прилад складається з чотирьох блоків. Імовірність того, що кожний блок буде працювати впродовж T годин дорівнює 0,9. Яка ймовірність того, що прилад працюватиме ці T годин, якщо вихід з ладу кожного блоку означає вихід з ладу приладу і відомо, що блоки виходять з ладу незалежно один від одного?

Д9. Чому дорівнює ймовірність того, що при n підкиданнях грального кубика випаде хоча б один раз одиниця?

Д10. В урні – 5 білих і 3 чорні кулі. Знайти ймовірність того, що 3 навмання взятих кулі будуть білими.

Д11. Дано значення: $P(\bar{A}B) = 0,6$; $P(A) = 0,3$; $P(B) = 0,8$. З'ясувати, чи залежні події A і B. Обчислити $P(A/B)$ і $P(B/A)$.

Д12. Три клієнти зайшли до банку. Імовірність того, що перший клієнт зажадає певної послуги, дорівнює $p_1 = 0,21$, другий - $p_2 = 0,61$, а третій - $p_3 = 0,57$. Знайти ймовірність того, що послуги зажадають не менше двох клієнтів.

Д13. Яка ймовірність того, що вибраний навмання виріб виявиться першого ґатунку, якщо відомо, що 3% всієї продукції складають нестандартні вироби, 75% стандартних виробів є першого ґатунку.

Д14. У майстерні працює три верстати. За зміну перший верстат потребуватиме уваги з ймовірністю 0,15. Для другого верстата ця ймовірність дорівнює 0,1 і для третього - 0,12. Вважаючи, що верстати не потребуватимуть одночасно уваги, знайти ймовірність того, що за зміну принаймні один верстат потребуватиме уваги майстра.

Д15. Деталь послідовно і незалежно обробляється чотирма робітниками. Ймовірність браку для кожного робітника дорівнює 0,01. Яка ймовірність випуску небракованої деталі?

Д16. На десяти картках нанесено цифри від 0 до 9. Яка ймовірність того, що цифри на трьох навмання взятих картках складуть число 250?

Д17. Імовірність того, що в магазині чоловічого взуття черговою буде продана пара взуття 44-го розміру, дорівнює 0,01. Скільки треба продати пар взуття, щоб з імовірністю не меншою, ніж 0,9, можна було очікувати, що буде продана принаймні одна пара взуття 44-го розміру?

Відповіді

О1. $\frac{2}{3}$. **О2.** $\frac{67}{91}$. **О3.** 1)$\frac{1}{9}$; 2)$\frac{11}{18}$. **О4.** 0,995. **О5.** 0,9187. **О6.** 0,23. **О7.** $\frac{7}{24}$. **О8.** 0,945. **О9.** 0,85. **О10.** 1) 0,6. 2) 0,95. **О11.** 0,9865. **О12.** A і B залежні, $P(A/B) = 1/3$; $P(B/A) = 1/5$. **О13.** 0,7472. **О14.** $\frac{5}{9}$. **О15.** $\frac{21}{64}$. **О16.** 0,28. **О17.** $\frac{3}{40}$. **О18.** $\frac{21}{1265}$.
С1. 0,3; 0,6. **С2.** 0,864. **С3.** $3p - 3p^2 + p^3$. **С4.** 0,5716. **С5.** 1-$\sqrt[4]{0,41}$. **Д1.** 0,3. **Д2.** $\frac{a}{a+b} \cdot \frac{a-1}{a+b-1}$.
Д3. а) 0,56; б) 0,06; в) 0,94; г) 0,38. **Д4.** 0,9336. **Д5.** $\frac{a}{a+b}$. **Д6.** $\frac{3}{4}$. **Д7.** $\frac{C_{95}^{50}}{C_{100}^{50}} + \frac{C_5^1 C_{95}^{49}}{C_{100}^{50}} = 0,18$.
Д8. $(0,9)^4$. **Д9.** $1 - (5/6)^n$. **Д10.** $\frac{5}{28} = 0,1785$.
Д11. A і B залежні, $P(A/B) = 1/4$; $P(B/A) = 2/3$.
Д12. 0,449466. **Д13.** 0,7275. **Д14.** 0,3268.
Д15. 0,96. **Д16.** 1/720. **Д17.** $n \geq 228$.

Тема 5. Формула повної ймовірності та формули Байєса

Нехай A -довільна подія, $H_1, H_2, \ldots, H_n$ - попарно несумісні події ($H_iH_j = \emptyset, i \neq j$, $\{i,j\} \subset \{1, \ldots, n\}$) такі, що $P(H_i) > 0$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, і $A \subset H_1 + H_2 + \ldots + H_n$. Тоді має місце формула **повної ймовірності**:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i). \tag{1}$$

Приклад 1. Штампувальний цех направив у відділ технічного контролю дві партії деталей. Перша партія містить 20000 деталей, 5 % з яких браковані. Друга партія містить 10000 деталей з 1 % браку. Деталі обох партій перемішали, після чого контролер навмання взяв деталь. Яка ймовірність того, що ця деталь буде бракованою?

◁ Нехай подія A - вибір бракованої деталі, H_1 - подія, яка полягає в тому, що деталь з першої партії, H_2 - деталь з другої партії. Тоді

$$P(H_1) = \frac{20000}{20000 + 10000} = \frac{2}{3};\ P(H_2) = \frac{10000}{20000 + 10000} = \frac{1}{3};$$

$$P(A/H_1) = 0,05;\ P(A/H_2) = 0,01.$$

Тому, згідно з формулою (1), шукана ймовірність

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 0,05 + \frac{1}{3} \cdot 0,01 = 0,037. \triangleright$$

Якщо події $A, H_1, H_2, \ldots, H_n$ - такі самі, як і в формулі (1), і, крім того, $P(A) > 0$, то правильні **формули Байєса**:

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}, k \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{2}$$

Приклад 2. Нехай є 12 урн, з них у шести урнах (тип H_1) по 3 білі і 4 чорні кулі, в трьох урнах (тип H_2) по 2 білі і 8 чорних куль, у двох урнах (тип H_3) по 6 білих і 1 чорній кулі, в одній урні (тип H_4) – 4 білі і 3 чорні кулі. З навмання вибраної урни взято кулю. Чому дорівнює ймовірність того, що кулю взято з урни складу H_3, якщо вона виявилася білою?

◁ Нехай подія A - взята куля виявилася білою. Згідно з умовою

$$P(H_1) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2};\ P(H_2) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4};\ P(H_3) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6};$$

$$P(H_4) = \frac{1}{12};\ P(A/H_1) = \frac{3}{3+4} = \frac{3}{7};\ P(A/H_2) = \frac{2}{2+8} = \frac{1}{5};$$

$$P(A/H_3) = \frac{6}{6+1} = \frac{6}{7};\ P(A/H_4) = \frac{4}{4+3} = \frac{4}{7}.$$

За формулою Байєса (2) знаходимо шукану ймовірність:

$$P(H_3/A) =$$

$$= \frac{P(H_3)P(A/H_3)}{P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + \ldots + P(H_4)P(A/H_4)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{6}{7}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{7} + \frac{1}{12} \cdot \frac{4}{7}} = 0,314. \ \triangleright$$

Приклад 3. Два стрільці незалежно один від одного стріляють по одній мішені, роблячи кожний по одному пострілу. Ймовірність попадання в мішень для першого стрільця дорівнює 0,8, для другого - 0,4. Після стрільби в мішені виявлено одну пробоїну. Знайти ймовірність того, що ця пробоїна зроблена: а) першим стрільцем; б) другим стрільцем.

◁ До досліду можливі такі гіпотези:
$H_1 = \{$ обидва стрільці не попадуть $\}$;
$H_2 = \{$ обидва стрільці попадуть $\}$;
$H_3 = \{$ перший стрілець попадає, а другий - ні $\}$;
$H_4 = \{$ перший стрілець не попадає, а другий попадає $\}$.

Маємо,
$P(H_1) = 0,2 \cdot 0,6 = 0,12;\ P(H_2) = 0,8 \cdot 0,4 = 0,32;$
$P(H_3) = 0,8 \cdot 0,6 = 0,48;\ P(H_4) = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08.$

Нехай подія А$=\{$ в мішені одна пробоїна $\}$. Тоді $P(A/H_1) = 0$; $P(A/H_2) = 0$ (випадок, що обидві пробоїни збіглися, вважається неможливою подією); $P(A/H_3) = 1;\ P(A/H_4) = 1.$

Після досліду гіпотези H_1 і H_2 стають неможливими, а ймовірності гіпотез H_3 і H_4 згідно з фомулами Байєса (2) такі:

$$P(H_3/A) = \frac{0,48 \cdot 1}{0,48 \cdot 1 + 0,08 \cdot 1} = \frac{6}{7};$$

$$P(H_4/A) = 1 - P(H_3/A) = 1 - \frac{6}{7} = \frac{1}{7}. \triangleright$$

Вправи

О1. В урну, що містить 2 кулі, опущено білу кулю, після чого з урни навмання взято одну кулю. Знайти ймовірність того, що вийнята куля буде білою, якщо рівноможливими є будь-які припущення про початковий склад куль за кольором.

О2. По повітряній цілі проводиться стрільба з двох різних ракетних установок. Ймовірність влучення в ціль першої установки дорівнює 0,85, другої – 0,9. Знайти ймовірність влучення в ціль, якщо відомо, що перша установка спрацьовує з ймовірністю 0,8, а друга - з імовірністю 0,7.

О3. Робітник обслуговує 3 верстати, на яких обробляються однотипні деталі. Імовірність браку для першого верстата дорівнює 0,02, для другого – 0,03, для третього – 0,04. Оброблені деталі складають в один ящик. Продуктивність першого верстата в 3 рази більша, ніж другого, а третього в 2 рази менша, ніж другого. Знайти ймовірність того, що взята навмання деталь буде бракованою.

О4. Нехай є чотири урни. У першій урні – 1 біла та 1 чорна кулі, у другій – 2 білі і 3 чорні кулі, в третій – 3 білі і 5 чорних куль, у четвертій – 4 білі і 7 чорних куль. Подія H_i - вибір і-ої урни, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Дано, що ймовірність вибору і-ої урни дорівнює $\frac{i}{10}$. Вибирають навмання одну з урн і виймають з неї кулю. Яка ймовірність того, що ця куля біла?

О5. Група студентів складається із a відмінників, b добре встигаючих і c, які вчаться посередньо. Відмінники на екзамені можуть одержати тільки відмінні оцінки, добре встигаючі студенти – з однаковою ймовірністю як добру, так і відмінну оцінки,а решта – з однаковою ймовірністю добру, задовільну і незадовільну оцінки. Для складання іспиту викликається навмання один студент. Знайти ймовірність того, що він одержить добру або відмінну оцінку.

О6. Виріб перевіряється на стандартність одним із трьох товарознавців. Імовірність того, що виріб потрапить до першого товарознавця, дорівнює 0,25, до другого - 0,26 і до третього - 0,49. Імовірність того, що виріб буде визнано стандартним першим товарознавцем, дорівнює 0,95, другим - 0,98, третім - 0,97. Знайти ймовірність того, що стандартний виріб перевірено другим товарознавцем.

О7. Телеграфне повідомлення складається із сигналів "крапка"і "тире". Статистичні властивості перешкод такі, що спотворюється в середньому 2/5 повідомлень "крапка"і 1/3 повідомлень "тире". Відомо, що серед сигналів, які передаються, "крапка"і "тире"зустрічаються у відношенні 5:3. Знайти ймовірність того, що прийнято сигнал, який передавався, якщо: а) прийнято сигнал "крапка"; б) прийнято сигнал "тире".

О8. Два автомати виробляють однакові деталі, які йдуть на спільний конвейєр. Продуктивність 1-го автомата удвічі більша від продуктивності другого. Перший автомат виробляє в середньому 60 % деталей відмінної якості, а другий - 84 %. Навмання взята з конвейєра деталь виявилась відмінної якості. Знайти ймовірність того, що деталь вироблена першим автоматом.

О9. У групі з 10 студентів, що приходять на іспит, 3 підготовлені на відмінно, 4 - на добре, 2 - на посередньо і 1 підготовлений погано. В екзаменаційних білетах є 20 питань. Відмінно підготовлений студент може відповісти на всі 20 питань, добре підготовлений - на 16, посередньо - на 10, погано - на 5. Викликаний навмання студент відповів на три довільно заданих питання. Знайти ймовірність того, що цей студент підготовлений: а) відмінно; б) погано.

О10. Нехай є дві партії деталей, причому відомо, що в одній партії всі деталі задовольняють технічні умови, а в другій партії 1/4 частина деталей неякісна. Деталь, взята з навмання вибраної партії, виявилась якісною. Знайти ймовірність того, що друга деталь з цієї ж партії виявиться неякісною, якщо перша деталь після перевірки повертається в партію.

<u>О11.</u> Пасажир може звернутися для придбання квитка в одну з трьох кас. Ймовірність звертання в кожну касу залежить від її місцезнаходження і дорівнює відповідно p_1, p_2, p_3. Ймовірність того, що до моменту приходу пасажира наявні в касі квитки будуть розпродані, дорівнює для першої каси P_1, для другої - P_2, для третьої - P_3. Пасажир направився за квитком в одну із кас і купив квиток. Знайти ймовірність того, що це буде перша каса.

<u>О12.</u> На деяку посаду претендують 30% жінок і 70% чоловіків. Серед жінок 60% мають університетську освіту, а серед чоловіків - 30%. Яка ймовірність того, що вибрана навмання заява буде від: 1) жінки з університетською освітою; 2) чоловіка без університетської освіти?

<u>О13.</u> Для сівби заготовлено насіння пшениці сорту S_1, яке містить невелику кількість домішок сортів S_2, S_3 і S_4. Навмання взято одну зернину. Відомо, що ймовірність взятій зернині бути сорту S_1 - 0,96, сорту S_2 - 0,01, сорту S_3 - 0,02, сорту S_4 - 0,01, а ймовірності того, що з цієї зернини виросте колосок, у якому буде не менше, ніж 50 зернин, дорівнюють відповідно 0,5; 0,15; 0,2 і 0,05. Знайти ймовірність того, що колосок міститиме не менше, ніж 50 зернин.

<u>О14.</u> При обстеженні хворого виникла підозра про одне з трьох захворювань: X_1, X_2, X_3. У даних умовах їхні ймовірності дорівнюють відповідно $p_1 = 1/2$, $p_2 = 1/6$, $p_3 = 1/3$. Для уточнення діагнозу зроблено додатковий аналіз, який дає позитивний результат з імовірністю 0,1 у випадку захворювання X_1, з імовірністю 0,2 у випадку захворювання X_2 і з імовірністю 0,9 у випадку захворювання X_3. Аналіз проведено 5 разів, і він дав 4 рази позитивний результат і один раз негативний. Знайти ймовірність кожного захворювання згідно з проведеним аналізом.

<u>С1.</u> Прилад складається з двох дублюючих один одного вузлів і може працювати в одному з двох режимів: нормальному і несприятливому. Нормальний режим спостерігається у 80 % випадків експлуатації приладу, несприятливий - у 20 % випадків. Надійність (ймовірність безвідмовної роботи) кожного з вузлів у нормальному режимі дорівнює 0,9, у несприятливому

- 0,6. При відмові вузла відбувається автоматичне і безвідмовне переключення на дублера. Знайти повну ймовірність безвідмовної роботи приладу.

С2. По літаку проводиться 3 однакові постріли. Ймовірність попадання при першому пострілі дорівнює 0,5, при другому – 0,6, при третьому – 0,8. Виведення літака з ладу при трьох влученнях є вірогідною подією. При одному влученні літак виходить з ладу з ймовірністю 0,3; при двох влученнях - з імовірністю 0,6. Знайти ймовірність того, що після трьох пострілів літак буде збито.

С3. Нехай є дві урни: у першій a білих і b чорних куль, у другій - c білих і d чорних куль. Вибирається навмання одна із урн і з неї виймається одна куля. Ця куля виявилася білою. Знайти ймовірність того, що наступна куля, яка виймається з тієї ж урни, буде також біла.

С4. З партії, яка складається з п'яти виробів, навмання взято один з виробів, який виявився бракованим. Кількість бракованих виробів є рівноможливо будь-якою. Яке з припущень про кількість бракованих виробів є найімовірнішим?

Домашнє завдання

Д1. Є два набори інструментів. Імовірність того, що інструмент з першого набору є стандартним, дорівнює 0,8, а з другого – 0,9. Знайти ймовірність того, що випадково вибраний інструмент є стандартний.

Д2. Три групи студентів складали екзамен з вищої математики. У першій групі – 32 студенти, з яких 8 склали іспит на відмінно, у другій – 25 студентів, з них – 5 на відмінно, а в третій – 30 студентів, і з них – 10 на відмінно. З'ясувалось, що навмання взятий за списком студент склав іспит на відмінно. Яка ймовірність того, що він з першої групи?

Д3. У першій урні міститься 10 куль, з них 8 білих, у другій урні – 20 куль, з них – 4 білі. З кожної урни навмання витягнули по одній кулі, а потім з цих двох куль довільним чином взято одну кулю. Знайти ймовірність того, що взято білу кулю.

Д4. Гарматна батарея складається з чотирьох гармат: дві гармати попадають в ціль при одному пострілі з імовірністю 0,6, а дві інші - з імовірністю 0,7. Для знищення цілі досить двох попадань, а при одному попаданні ймовірність знищення цілі дорівнює 0,8. Одна із гармат вистрілила двічі. Знайти ймовірність знищення цілі.

Д5. Лічильник реєструє частинки трьох типів: A, B, C. Ймовірність появи цих частинок P(A)=0,2, P(B)=0,5, P(C)=0,3. Частинки кожного з цих типів лічильник вловлює з імовірностями $p_1 = 0,8$, $p_2 = 0,2$, $p_3 = 0,4$. Лічильник зафіксував частинку. Знайти ймовірність того, що це була частинка типу B.

Д6. На склад надходить продукція з трьох фабрик, причому продукція першої фабрики складає 20 %, другої - 46 % і третьої - 34%. Відомо також, що середній процент нестандартних виробів для першої фабрики дорівнює 3 %, для другої - 2 %, а для третьої - 1 %. Знайти ймовірність того, що навмання взятий виріб виготовлено на першій фабриці, якщо він виявився нестандартним.

Д7. Заблукавши в лісі, студент вийшов на галявину, звідки виходило 5 доріг. Відомо, що ймовірності виходу з лісу за годину для різних доріг рівні відповідно: 0,6; 0,3; 0,2; 0,1; 0,1. Чому дорівнює ймовірність того, що студент пішов першою дорогою, якщо відомо, що він вийшов з лісу через годину ?

Д8. Нехай є три урни: у першій з них – a білих і b чорних куль, у другій – c білих і d чорних куль, у третій – тільки k білих. Вибирають навмання урну і з неї виймають кулю. Ця куля виявилася білою. Знайти ймовірність того, що ця куля вийнята з першої, другої або третьої урни.

Д9. Два мисливці одночасно стріляють у ціль. Відомо, що ймовірність попадання у першого мисливця дорівнює 0,2, а в другого – 0,6. У результаті першого залпу виявилося одне попадання у ціль. Чому дорівнює ймовірність того, що промахнувся перший мисливець?

Д10. Деталі надходять на перевірку до двох контролерів. Імовірність того, що деталь потрапить на перевірку до першого контролера, дорівнює 0,6, до другого - 0,4. Ймовірність того, що стандартна деталь при перевірці буде визнана стандартною першим контролером дорівнює 0,94, а другим - 0,98. Яка ймовірність того, що деталь, яку визнано стандартною, перевіряв перший контролер?

Д11. Відомо, що в деякій великій групі осіб, де чоловіків і жінок порівно, 5% чоловіків і $0,25\%$ жінок є дальтоніками. Випадково вибирають одну особу, яка виявилась дальтоніком. Яка ймовірність, що це: 1) чоловік; 2) жінка?

Д12. Двадцять п'ять екзаменаційних білетів містять по два питання, які не повторюються. Студент може відповісти тільки на 40 питань. Знайти ймовірність того, що екзамен буде складено, якщо для цього досить відповісти на два питання з одного білета або на одне питання з білета і на вказане додаткове питання з другого білета.

Д13.
Імовірність того, що при налагодженому технологічному процесі виріб є стандартним, дорівнює 0,94. Завод випускає виріб лише тоді, коли він двічі пройшов спрощене випробування. Кожне таке випробування дає позитивний результат для стандартних виробів з імовірністю 0,96, а для нестандартних з імовірністю 0,08. Знайти ймовірність того, що випущений заводом виріб є стандартний.

Відповіді

О1. $\frac{2}{3}$. **О2.** 0,8844. **О3.** 0,024. **О4.** 0,388. **О5.** $\dfrac{a+b+\frac{c}{3}}{a+b+c}$.
О6. 0,26. **О7.** $P(H_1/A)=\frac{3}{4}$; $P(H_2/B)=\frac{1}{2}$. **О8.** $P(H_1/A)=\frac{10}{17}$;
О9. $P(H_1/A)=0,58$; $P(H_4/A)=0,002$. **О10.** $P(B)=\frac{3}{28}$.
О11. $P(H_1/A)=\dfrac{p_1(1-P_1)}{p_1(1-P_1)+p_2(1-P_2)+p_3(1-P_3)}$.

О12. 1) 0,461; 2) 0,803. **О13.** 0,486, **О14.** $P(H_1/A)=0,002$; $P(H_2/A)=0,01$; $P(H_3/A)=0,988$.

С1. 0,96. Вказівка. $P(H_1)=0,8$; $P(H_2)=0,2$; $P(A/H_1)=$ $=1-(1-0,9)^2=0,99$; $P(A/H_2)=1-(1-0,6)^2=0,84$.

С2. 0,594. Вказівка. Літак може бути збитий (подія A), якщо відбулося одне попадання (подія H_1), два попадання (подія H_2), три попадання (подія H_3);
$P(H_1)=0,5\cdot 0,4\cdot 0,2+0,5\cdot 0,6\cdot 0,2+0,5\cdot 0,4\cdot 0.8=0,26$,

$P(H_2) = 0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,2 + 0,5 \cdot 0,4 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 0,6 \cdot 0.8 = 0,46$,
$P(H_3) = 0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,8 = 0,24$, $P(A/H_1) = 0,3$;
$P(A/H_2) = 0,6$, $P(A/H_3) = 1$. **С3.** $P(B/A) =$
$= \dfrac{1}{\dfrac{a}{a+b} + \dfrac{c}{c+d}} \left[\dfrac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)} + \dfrac{c(c-1)}{(c+d)(c+d-1)}\right].$
Вказівка. H_1 - вибрана перша урна; H_2 - вибрана друга урна; A -поява перший раз білої кулі; B - поява другий раз білої кулі.

$P(H_1) = P(H_2) = \dfrac{1}{2}$; $P(H_1/A) = \dfrac{\dfrac{a}{a+b}}{\dfrac{a}{a+b} + \dfrac{c}{c+d}}$;

$P(H_2/A) = \dfrac{\dfrac{c}{c+d}}{\dfrac{a}{a+b} + \dfrac{c}{c+d}}$; $P(B/A) = P(H_1/A)P(B/H_1A) +$

$+ P(H_2/A) \times P(B/H_2A)$; $P(B/H_1A) = \dfrac{a-1}{a+b-1}$; $P(B/H_2A) =$

$= \dfrac{c-1}{c+d-1}$. **С4.** Гіпотези: $H_k(k \in \{0,1,2,3,4,5\})$ - k бракованих виробів. Подія A - взято бракований виріб.
$P(H_0) = P(H_1) = \ldots = P(H_5) = \dfrac{1}{6}$, $P(A/H_k) = \dfrac{k}{5}$, $P(H_k/A) =$
$= \dfrac{P(H_k)P(A/H_k)}{P(A)}$ $(k \in \{0,1,2,3,4,5\})$. Найімовірнішою є гіпотеза H_5, тобто п'ять бракованих виробів.

Д1. 0,85. **Д2.** 0,319. **Д3.** $\dfrac{1}{2}$. **Д4.** 0,785. Вказівка. Події: H_1 - двічі вистрілила гармата, яка влучає з імовірністю 0,6; H_2 - двічі вистрілила гармата, яка влучає з імовірністю 0,7; A - знищення цілі.
$P(H_1) = P(H_2) = \dfrac{1}{2}$, $P(A/H_1) = 0,6 \cdot 0,6 + (0,6 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,6) \cdot 0,8 =$
$= 0,744$, $P(A/H_2) = 0,7 \cdot 0,7 + (0,7 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,7) \cdot 0,8 =$
$= 0,826$. **Д5.** $\dfrac{5}{19}$. **Д6.** 0,322. **Д7.** $\dfrac{6}{13}$.

Д8. $P(H_1/A) = \dfrac{\dfrac{a}{a+b}}{\dfrac{a}{a+b} + \dfrac{c}{c+d} + 1}$; $P(H_2/A) = \dfrac{\dfrac{c}{c+d}}{\dfrac{a}{a+b} + \dfrac{c}{c+d} + 1}$;
$P(H_3/A) = \dfrac{1}{\dfrac{a}{a+b} + \dfrac{c}{c+d} + 1}$. **Д9.** $\dfrac{6}{7}$. **Д10.** 0,59.

Д11. 1) 0,9524; 2) 0,0476. **Д12.** 0,904. **Д13.** 0,99956.

Тема 6. Повторення незалежних дослідів. Формула Бернуллі. Теорема Пуассона

Нехай відбуваються послідовні випробування, при кожному з яких може настати або не настати певна подія A; настання події A надалі називатимемо "успіхом"; при цьому ймовірність успіху при кожному випробуванні одна й та сама і дорівнює $p\,(0 < p < 1)$. Такі випробування називають **послідовними незалежними випробуваннями** (**дослідами**) або **випробуваннями Бернуллі**.

Позначимо через μ число успіхів у серії з n послідовних незалежних випробувань, при кожному з яких ймовірність успіху дорівнює p; треба знайти ймовірністиь того, що $\mu = k$. Цю ймовірність позначають $P\{\mu = k\}$, або $P_n(k)$, або P_{nk}. Таким чином, $P_n(k)$ - це ймовірність того, що при n випробуваннях буде k успіхів. Обчислюється дана ймовірність за формулою

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \tag{1}$$

де $q = 1 - p$, $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Набір чисел $P_n(k)$, $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, називають **біномінальним розподілом**, а саму формулу (1) - **біномною формулою**.

Відомо, що

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = 1.$$

Число k_0 настання події називається **найімовірнішим**, якщо ймовірність настання події k_0 разів у цій серії випробувань найбільша в порівнянні з імовірностями інших результатів. Якщо n - число незалежних випробувань, p - ймовірність настання події в окремому випробуванні, то найімовірніше число настання події k_0 задовольняє нерівність

$$pn - q \le k_0 \le pn + p. \tag{2}$$

Оскільки $np + p - (pn - q) = p + q = 1$, то завжди існує ціле число k_0, яке задовольняє нерівність (2). При цьому, якщо $np - p$ - ціле число, то найімовірніших чисел два: $np - q$, $np + p$.

Якщо p одного порядку з $1/n$ при великих n або $p < 0,1$, то користуються не формулою (1), а такою

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \tag{3}$$

де $\lambda = np$.

Формулу (1) називають **формулою Бернуллі**, а (3) - **формулою Пуассона**. Набір чисел $P_n(k)$, $k \in \{0, 1 \ldots, n\}$, де $P_n(k)$ обчислюються за формулою (3), називається **розподілом Пуассона** і для нього складено таблиці (див. таблицю 3).

Послідовність подій, які з'являються у випадкові моменти часу, називається **потоком подій.** Вважатимемо, що потік подій є **пуассоновим,** тобто виконуються умови:

1) середнє число подій, які з'являються за одиницю часу, є сталим і дорівнює a (інтенсивність потоку);

2) події з'являються поодинці, а не групами;

3) відсутня післядія, тобто ймовірність появи події не залежить від появи або не появи події раніше та не впливає на найближче майбутнє.

Якщо потік подій є пуассоновим, то ймовірність появи події A k разів за час t знаходимо за формулою

$$P_t(k) = \frac{(at)^k}{k!} e^{-at}. \tag{4}$$

Приклад 1. В урні – 20 білих і 10 чорних куль. Вийнято підряд 4 кулі, причому кожну вийняту кулю повертають в урну назад перед тим, як брати наступну. Яка ймовірність того, що з 4 вийнятих куль 2 будуть білими?

◁ Імовірність вийняти білу кулю $p = 20/30 = 2/3$ можна вважати однаковою в усіх 4 випробуваннях; $q = 1 - p = 1 - 2/3 = 1/3$. Скориставшись формулою Бернуллі (1), дістаємо

$$P_4(2) = C_4^2 p^2 q^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}. \triangleright$$

Приклад 2. Частка виробів вищого ґатунку на даному підприємстві складає 31 % . Чому дорівнює найімовірніше число виробів вищого ґатунку у випадково відібраній партії з 75 виробів?

$\triangleleft$ Маємо, що $p = 0,31$, $n = 75$, а $q = 1 - p = 0,69$.

Згідно з (2) одержуємо

$$75 \cdot 0,31 - 0,69 \le k_0 \le 75 \cdot 0,31 + 0,31,$$

$$22,56 \le k_0 \le 23,56.$$

Звідси випливає, що $k_0 = 23$. $\triangleright$

Приклад 3. Скільки разів треба підкинути гральний кубик, щоб найімовірніше число випадання двійки дорівнювало 32?

$\triangleleft$ У даному випадку $p = 1/6, k_0 = 32$. Треба знайти число незалежних випробувань n. З формули (2) одержуємо

$$n \cdot \frac{1}{6} - \frac{5}{6} \le 32; \quad n \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \ge 32.$$

З першої нерівності випливає, що $n \le 197$, а з другої - $n \ge 191$. Таким чином, треба провести від 191 до 197 незалежних випробувань. $\triangleright$

Приклад 4. На факультеті 730 студентів. Яка ймовірність того, що 1 вересня є днем народження одночасно трьох студентів?

$\triangleleft$ Імовірність того, що днем народження окремого студента є 1 вересня, дорівнює $p = 1/365$. Застосовуючи формулу (3), де $n = 730$, $p = 1/365$, $k = 3$, $\lambda = np = 730 \cdot 1/365 = 2$, дістаємо

$$P_{730}(3) \approx \frac{2^3 e^{-2}}{3!} = 0,18045.$$

Таким чином, в середньому у 18 випадках із 100 на 1 вересня припадає день народження 3 студентів факультету. $\triangleright$

Вправи

О1. Двоє рівносильних шахістів грають у шахи. Що ймовірніше: виграти дві партії з чотирьох чи три партії з шести (нічиї до уваги не беруться)?

<u>О2.</u> Імовірність виготовлення стандартного виробу дорівнює 0,95. Яка ймовірність того, що серед десяти виробів є не більше одного нестандартного?

<u>О3.</u> Відомо, що на кожну тисячу новонароджених припадає в середньому 515 хлопчиків і 485 дівчаток. В одній сім'ї – 6 дітей. Знайти ймовірність того, що серед них не більше 2 дівчаток.

<u>О4.</u> Довільно вибрана особа з імовірністю $p = 3/5$ виконує певне завдання за 1 хв. Нехай завдання виконується 10 особами. Яка ймовірність виконання даного завдання сімома з них?

<u>О5.</u> Подія B настає тоді, коли подія A настане не менше 4 разів. Знайти ймовірність настання події B, якщо здійснюється 5 незалежних випробувань, у кожному з яких імовірність настання події A дорівнює 0,8.

<u>О6.</u> Імовірність виготовлення нестандартної деталі дорівнює 0,05. Скільки деталей повинно бути в партії, щоб найімовірніше число нестандартних деталей у ній дорівнювало 55?

<u>О7.</u> Яка ймовірність настання події A у кожному випробуванні, якщо найімовірніше число настання події A у 120 дослідах дорівнює 32?

<u>О8.</u> Оптова база постачає 10 магазинів, від кожного з яких може надійтити заявка на черговий день з імовірністю 0,4 незалежно від заявок інших магазинів. Знайти найімовірніше число заявок у день та ймовірність одержання цього числа заявок.

<u>О9.</u> Підручник видано тиражем 90 000 екземплярів. Імовірність того, що підручник зброшуровано неправильно, дорівнює 0,0001. Знайти ймовірність того, що тираж містить точно 5 бракованих книг.

<u>О10.</u> Імовірність того, що висіяне в ґрунт зерно не зійде, дорівнює 0,01. Чому дорівнює ймовірність того, що з 400 висіяних насінин не зійде 3?

<u>О11.</u> З умов випуску лотереї відомо, що виграє $1/20$ усіх випущених білетів. Скільки треба купити білетів, щоб імовірність виграшу була не меншою, ніж 0,99? Яка ймовірність того, що з 200 білетів виграє не менше 5?

<u>О12.</u> Автоматична телефонна станція одержує в середньому за годину 300 викликів. Яка ймовірність того, що за дану хвилину вона матиме точно два виклики?

<u>О13.</u> Книга в 1000 сторінок має 100 помилок. Яка ймовірність того, що на випадково вибраній сторінці є не менше 4 помилок?

<u>О14.</u> Середня кількість замовлень, які надходять до магазину кожну годину, дорівнює 3. Знайти ймовірність того, що за дві години надійде: 1) 5 замовлень; 2) менше 5 замовлень; 3) не менше 5 замовлень.

<u>О15.</u> Імовірність того, що витрати води на деякому підприємстві будуть нормальними (не більшими певного числа літрів за добу), дорівнює $3/4$. Знайти ймовірність того, що в найближчі 6 днів витрати води будуть нормальними протягом 1, 2, 3, 4, 5, 6 днів.

<u>О16.</u> Завод відправив на базу 4000 якісних виробів. Імовірність того, що в дорозі виріб пошкодиться, дорівнює 0,00025. Знайти ймовірність того, що на базу надійде 5 пошкоджених виробів.

<u>С1.</u> Висіяно 28 зерен ячменю з однаковою ймовірністю схожості. Якою є ця ймовірність, якщо найімовірніші числа позитивних результатів 17 і 18?

<u>С2.</u> Серед виробів деякого цеху брак зустрічається з імовірністю 0,015. Знайти ймовірність того, що серед 200 виробів бракованих виявиться 5.

<u>С3.</u> Імовірність народження хлопчика і дівчинки можна вважати рівними 0,5. Яка ймовірність того, що серед $2n$ навмання відібраних новонароджених буде принаймні один хлопчик (подія A); число хлопчиків і дівчаток однакове (подія B)?

<u>С4.</u> Імовірність відмови кожного приладу при випробуванні дорівнює 0,2. Скільки таких приладів треба випробувати, щоб з імовірністю, не меншою 0,9, дістати не менше трьох відмов?

Домашнє завдання

Д1. Що ймовірніше виграти у рівносильного суперника: 1) три партії з чотирьох чи п'ять з восьми; 2) не менше трьох партій з чотирьох чи не менше п'яти партій з восьми?

Д2. Проводиться стрільба по цілі 3 снарядами. Снаряди попадають у ціль незалежно один від одного. Для кожного снаряду ймовірність попадання в ціль дорівнює 0,4. Якщо в ціль попав один снаряд, то він знищує ціль з імовірністю 0,3; якщо два снаряди - з імовірністю 0,7; якщо три снаряди - з імовірністю 0,9 Знайти повну ймовірність знищення цілі.

Д3. Товарознавець оглядає 24 зразки товару. Імовірність, що взятий зразок буде визнано придатним до продажу, дорівнює 0,6. Знайти найімовірніше число зразків, які товарознавець визнає придатними до продажу.

Д4. Імовірність появи деякої події в кожному з вісімнадцяти незалежних дослідів дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що подія з'явиться принаймні три рази.

Д5. Імовірність виграшу по облігації позики за весь час її дії дорівнює 0,25. Яка ймовірність того, що, придбавши 8 облігацій, можна виграти по 6 з них?

Д6. Імовірність влучення снаряда в ціль дорівнює 0,3. Скільки треба зробити незалежних пострілів, щоб ймовірність хоча б одного влучення в ціль була більшою за 0,9?

Д7. Радіоапаратура містить 1000 незалежно працюючих елементів. Імовірність того, що елемент відмовить у роботі за добу, стала і дорівнює 0,0002. Знайти ймовірність того, що за добу відмовили в роботі: 1) 3 мікроелементи; 2) не більше 3 мікроелементів; 3) не менше 3 мікроелементів.

Д8. Для кожного абонента ймовірність зателефонувати на комутатор впродовж однієї години дорівнює 0,01. Комутатор обслуговує 300 абонентів. Знайти ймовірність того, що протягом однієї години зателефонують: а) 4 абоненти; б) не більше 4 абонентів.

Д9. Коректура обсягом 500 сторінок містить 500 помилок. Знайти ймовірність того, що на сторінці є не менше 3 помилок.

Д10. На автоматичну телефонну станцію надходить простий потік викликів з інтенсивністю $a = 0,8($ викл./хв $)$. Знайти ймовірність того, що за дві хвилини: а) не надійде жодного виклику;
б) надійде точно один виклик; в) надійде хоча б один виклик.

Д11. Потік вантажних поїздів, які прибувають на сортувальну гірку, можна вважати простим з інтенсивністю $a = 4$ (поїзди/год). Знайти ймовірність того, що за півгодини на гірку прибуде:
а) точно один поїзд; б) хоча б один поїзд; в) не менше трьох поїздів.

Д12. Серед деталей, які виробляються робітником, буває в середньому 3% нестандартних. Знайти ймовірність того, що серед відібраних на випробування 6 деталей 2 деталі будуть нестандартними. Яке найімовірніше число нестандартних деталей у даній вибірці з 6 виробів і яка його ймовірність?

Д13. Прядильниця обслуговує 1000 веретен. Імовірність обриву нитки на одному веретені протягом 1 хв. дорівнює 0,004. Знайти ймовірність того, що протягом 1 хв. обрив станеться на 5 веретенах.

Д14. Імовірність того, що лампа залишиться справною (неушкодженою) після 1000 годин роботи, дорівнює 0,2. Яка ймовірність того, що з 5 ламп не менше 3 залишаться справними після 1000 годин роботи?

Д15. Середня кількість замовлень таксі, що надходить до диспетчерського пункту щохвилини, дорівнює 3. Знайти ймовірність того, що за 2 хвилини надійде: 1) 4 замовлення; 2) менше 4 замовлень; 3) не менше 4 замовлень.

Відповіді

О1. $P_4(2) > P_6(3)$. **О2.** $P(A) = P_{10}(0) + P_{10}(1) = 0,914$.
О3. 0,37. **О4.** 0,215. **О5.** $P(B) = 0,73728$. **О6.** $1099 \leq n \leq 1119$.

О7. $32/121 \le p \le 33/121$. **О8.** $k_0 = 4$; $P_{10}(4) = 0,251$.

О9. $P_{90000}(5) = 0,0607$. **О10.** $P_{400}(3) = 0,195$. **О11.** а) $n \ge 100$; б) $\sum\limits_{k=5}^{200} P_{200}(k) \approx 0,971$. **О12.** $P_1(2) \approx \dfrac{5^2 e^{-5}}{2!} \approx 0,084$. (Скориститись (4) з $a = 300/60 = 5$, $t = 1$.)

О13. $1 - (P_{1000}(0) + P_{1000}(1) + P_{1000}(2) + P_{1000}(3)) = 0,000004$.

О14. Скористаємось (4) з $a = 3$, $t = 2$, $k = 5$. Маємо: 1) $P_2(5) = \dfrac{6^5 e^{-6}}{5!}$; 2) $P_2(k < 5) = 115e^{-6}$; 3) $P_2(k \ge 5) = 1 - 115e^{-6}$.

О15. Скористаємось формулою Бернуллі: $P_6(1) \approx 0$; $P_6(2) \approx 0,03$; $P_6(3) \approx 0,13$; $P_6(4) \approx 0,3$; $P_6(5) \approx 0,36$; $P_6(6) \approx 0,18$. **О16.** $P_{4000}(5) \approx 0,003$.

С1. 18/29. **С2.** 0,101. **С3.** $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P_{2n}(0) = 1 - C_{2n}^0\,(1/2)^{2n}$; $P(B) = P_{2n}(n) = C_{2n}^n\,(1/2)^{2n}$.

С4. З умови $0,1 \ge (0,8)^n \left(1 + \dfrac{n}{4} + \dfrac{n(n-1)}{32}\right)$ знаходимо, що $n \ge 25$.

Д1. 1) $P_4(3) = 1/4$; $P_8(5) = 7/32$; $P_4(3) > P_8(5)$; 2) $R_4(3) = P_4(3) + P_4(4) = 5/16$; $R_8(5) = P_8(5) + P_8(6) + P_8(7) + P_8(8) = 93/256$; $R_8(5) > R_4(3)$. **Д2.** P(A) = 0,389. Вказівка. Гіпотези: H_i–в ціль влучило i снарядів, $i \in \{1, 2, 3\}$; $P(H_1) = P_3(1)$, $P(H_2) = P_3(2)$, $P(H_3) = P_3(3)$. **Д3.** $k_0' = 14$, $k_0'' = 15$. **Д4.** $R_{18}(3) = 1 - P_{18}(0) - P_{18}(1) - P_{18}(2) \approx 0,73$. **Д5.** 0,0038. **Д6.** $n \ge 7$. Шукане n знаходиться з нерівності $1 - (0,7)^n \ge 0,9$. **Д7.** 1) $P_{1000}(3) \approx 0,18$; 2) 0,86; 3) 0,14.

Д8. а) 0,168; б) 0,815. **Д9.** $\sum\limits_{m=3}^{500} \dfrac{e^{-1}}{m!} \approx 1 - \sum\limits_{m=0}^{2} \dfrac{e^{-1}}{m!} \approx 0,08$.

Д10. а) $P_2(0) \approx 0,202$; б) $P_2(1) \approx 0,323$, в) $R_2(1) = P_2(k \ge 1) = 1 - P_2(0) \approx 0,798$. Вказівка. Скористатися (4) з $a = 0,8$, $t = 2$.

Д11. а) $P_{0,5}(1) = 2 \cdot e^{-2} = 0,27$; б) $P_{0,5}(1) = 1 - P_{0,5}(0) = 0,865$; в) $P_{0,5}(3) = 1 - (P_{0,5}(0) + P_{0,5}(1) + P_{0,5}(2)) \approx 0,323$. **Д12.** $P_6(2) \approx 0,011$; $k_0 = 0$; $P_6(0) \approx 0,81$. **Д13.** $P_{1000}(5) \approx 0,1562$. **Д14.** 0,05792.

Д15. 1) 0,133853; 2) 0,151205; 3) 0,848795.

Тема 7. Локальна та інтегральна теореми Муавра - Лапласа

Якщо добуток npq великий, то для обчислення $P_n(k)$ використовують локальну теорему Муавра - Лапласа.

Нехай у кожному з n незалежних випробувань ймовірність настання події A однакова і дорівнює p $(0 < p < 1)$, тоді

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{npq}P_n(k)}{\varphi(x)} = 1,$$

де

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

При зроблених припущеннях відносно p, якщо n достатньо велике, має місце наближена рівність

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Приклад 1. Імовірність виготовлення деталі вищого гатунку на даному верстаті дорівнює 0,4. Знайти наближено ймовірність того, що серед навмання взятих 26 деталей половина виявиться вищого гатунку.

$\triangleleft$ Маємо

$$p = 0,4; \quad q = 1 - 0,4 = 0,6; \quad n = 26, \quad k = 13;$$

$$np = 26 \cdot 0,4 = 10,4; \quad npq = 10,4 \cdot 0,6 = 6,24;$$

$$\sqrt{npq} = \sqrt{6,24} \approx 2,5; \quad k - np = 13 - 10,4 = 2,6;$$

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{2,6}{2,5} = 1,04; \quad \varphi(x) = \varphi(1,04) = 0,2323$$

(значення $\varphi(x)$ при $x = 1,04$ знаходимо з таблиці 1).

Тоді

$$P_{26}(13) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}} = \frac{0,2323}{2,50} = 0,093. \triangleright$$

Для обчислення при великих n ймовірності того, що число успіхів в n дослідах Бернуллі μ знаходяться між k_1 і k_2, використовують інтегральну теорему Муавра - Лапласа

$$P\{k_1 \le \mu \le k_2\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{x_1}^{x_2} e^{-t^2/2} dt, \qquad (1)$$

де

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Функція

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{x} e^{-t^2/2} dt, \, x \ge 0, \qquad (2)$$

називається **функцією Лапласа** або інтегралом імовірності. Вона має такі властивості: 1) $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, $x \ge 0$; 2) $\Phi(0) = 0$; 3) Φ - зростаюча функція; 4) $\Phi(+\infty) = 1/2$, тобто $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x) = 1/2$.

Якщо скористатися (2), то формулу (1) можна записати у вигляді

$$P\{k_1 \le \mu \le k_2\} \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Дану формулу можна записати і так:

$$P\left\{a \le \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} \le b\right\} \approx \Phi(b) - \Phi(a). \qquad (3)$$

Зокрема,

$$P\left\{\left|\frac{\mu}{n} - p\right| \le \varepsilon\right\} \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right), \;\; \varepsilon > 0. \qquad (4)$$

Приклад 2. При усталеному технологічному процесі фабрика випускає в середньому 70 відсотків продукції першого ґатунку. Чому дорівнює ймовірність того, що в партії з 1000 виробів число виробів першого ґатунку міститься між 625 і 760?

$\triangleleft$ Маємо $n = 1000$, $p = 0,7$, $q = 1 - 0,7 = 0,3$, $k_1 = 652$, $k_2 = 760$, а тому

$$\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{760 - 1000 \cdot 0,7}{\sqrt{1000 \cdot 0,7 \cdot 0,3}} = \frac{60}{\sqrt{210}} = 4,1405,$$

$$\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{652 - 700}{\sqrt{210}} = \frac{-48}{\sqrt{210}} = -3,3124.$$

Із таблиці 2 для функції Φ знаходимо, що

$$\Phi(4,1405) = 0,4999; \quad \Phi(-3,3124) = -\Phi(3,3124) = -0,4954.$$

Таким чином,

$$P\{652 \le \mu \le 760\} = \Phi(4,1405) - \Phi(-3,3124) = 0,4999 + 0,4954 =$$
$$= 0,9953. \triangleright$$

Приклад 3. Посіяно 600 насінин гороху з імовірністю проростання 0,9 для кожної насінини. Знайти межу абсолютної величини відхилення частоти пророслих насінин від ймовірності $p = 0,9$, якщо ця межа повинна гарантуватися з ймовірністю $P = 0,995$.

$\triangleleft$ Відомо, що коли n - число незалежних випробувань і p - імовірність настання події в окремому випробуванні, то при довільному $\varepsilon > 0$ правильна рівність (4), де $q = 1 - p$. У нашому випадку $n = 600$, $p = 0,9$, $q = 1 - 0,9 = 0,1$, $P = 0,995$. Тоді за формулою (4)

$$P\left\{\left|\frac{\mu}{n} - 0,9\right| \le \varepsilon\right\} \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right),$$

$$2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{600}{0,9 \cdot 0,1}}\right) = 0,995.$$

Із таблиці значень функції Φ знаходимо, що $2\Phi(x) = 0,995$ для $x = 2,81$, і, отже,

$$\varepsilon = 2,81 \cdot \sqrt{\frac{0,09}{600}} = \frac{2,81 \cdot 0,3}{10 \cdot \sqrt{6}} = 0,034. \triangleright$$

Приклад 4. Ймовірність настання події в кожному з незалежних випробувань стала і дорівнює 0,6. Скільки випробувань треба провести, щоб імовірність відхилення частоти від $p = 0,6$ в один або другий бік, менше ніж на 0,01, дорівнювала 0,995?

$\triangleleft$ З умови $2\Phi(x) = 0,995$ знаходимо, що $x = 2,81$, тому

$$\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} = 2,81; \quad 0,01\sqrt{\frac{n}{0,6\cdot 0,4}} = 2,81; \quad \sqrt{n} = 281\cdot\sqrt{0,6\cdot 0,4};$$

$$n = (281\cdot 0,4899)^2 = (137,662)^2 \approx 18951.$$

Отже, $n = 18951$. $\triangleright$

Вправи

О1. Знайти ймовірність того, що подія A настане 70 разів у серії з 243 випробувань, якщо ймовірність настання цієї події у кожному випробуванні дорівнює 0,25.

О2. Серед виробів певного підприємства брак зустрічається з імовірністю 0,015. Знайти ймовірність того, що серед 200 виробів бракованих буде 5 виробів.

О3. Знайти ймовірність того, що подія A настане 1400 разів у 2400 дослідах, якщо ймовірність появи цієї події у кожному досліді дорівнює 0,6.

О4.
При усталеному технологічному процесі 60 відсотків усього числа виробів випускається вищим ґатунком. Приймальник навмання бере 200 виробів. Чому дорівнює ймовірність того, що серед них виробів вищого ґатунку буде від 120 до 150 штук ?

О5. Гральний кубик кидають 800 разів. Яка ймовірність того, що число очок, кратне трьом, випаде не менше 280 і не більше 284 разів?

О6. Ймовірність появи події у кожному зі 100 незалежних випробувань стала і дорівнює $p = 0,8$. Знайти ймовірність того, що подія з'явиться:
а) не менше 75 разів і не більше 90 разів; б) не менше 75 разів;
в) не більше 74 разів.

О7. Імовірність появи події у кожному з незалежних випробувань дорівнює 0,8. Скільки треба зробити випробувань, щоб з імовірністю $P = 0,9$ можна було очікувати, що подія з'явиться не менше 75 разів ?

<u>O8.</u> Імовірність появи події у кожному з 625 незалежних дослідів дорівнює $p = 0,8$. Знайти ймовірність того, що відносна частота появи події відхилиться від її ймовірності за абсолютною величиною не більше, ніж на 0,04.

<u>O9.</u> Імовірність появи події у кожному з незалежних випробувань $p = 0,5$. Знайти число дослідів n, при якому з імовірністю $P = 0,7698$ можна стверджувати, що відносна частота появи події відхилиться від її ймовірності за абсолютною величиною не більше, ніж на 0,02.

<u>O10.</u> Імовірність появи події у кожному з 400 незалежних випробувань $p = 0,8$. Знайти таке додатне ε, що з імовірністю $P = 0,9876$ абсолютна величина відхилення відносної частоти появи події від її ймовірності не перевищить ε.

<u>O11.</u> У книгарні 10000 книг. Імовірність продажу кожної з них протягом дня дорівнює 0,8. Яке максимальне число книг буде продано за день з імовірністю 0,999 ?

<u>O12.</u> Імовірність прийому певного сигналу дорівнює $p = 0,72$. Знайти, скільки треба прийняти сигналів, щоб частота прийому цього сигналу відрізнялась від імовірності його прийому не більше, ніж на $\varepsilon = 0,1$, з надійністю $P = 0,95$?

<u>C1.</u> На факультеті навчається 1095 студентів. Імовірність народження кожного студента в певний день дорівнює 1/365. Знайти: а) найімовірніше число студентів, що народилися 1 січня; б) ймовірність того, що 1 січня народилося рівно 3 студенти; в) ймовірність того, що знайдеться не більше трьох студентів, які народилися 1 січня.

<u>C2.</u> Візуальне спостереження штучного супутника Землі можливе у даному пункті з імовірністю $p = 0,1$ (відсутність хмарності) кожного разу, коли він пролітає над цим пунктом. Скільки разів повинен пролетіти супутник над пунктом спостереження, щоб з імовірністю, не меншою від 0,997 (тобто практично вірогідно), його можна було спостерігати не менше п'яти разів ?

<u>C3.</u> Дослід повторили незалежним чином n разів. Подія A у цьому досліді настає з імовірністю p. Яка ймовірність того, що $|k - np| \leq 3\sqrt{npq}$, де k - число дослідів, у яких настала подія A, $q = 1 - p$?

<u>С4.</u> На склад магазину надходять вироби, 80 відсотків яких – першого ґатунку. Скільки виробів треба взяти зі складу, щоб з імовірністю 0,997 можна було стверджувати, що частота виробів першого ґатунку знаходиться між 0,75 і 0,85 ?

<u>С5.</u> Дві монети підкидають 1000 разів. Нехай μ - число випадань комбінації герб-герб. Знайти ймовірність того, що число комбінацій герб-герб міститься між 236 і 264.

<u>С6.</u> Імовірність того, що покупцеві крамниці чоловічого взуття необхідне взуття 43-го розміру, дорівнює 0,3. Яка ймовірність того, що серед 500 покупців частота тих, хто потребує такого взуття, відхилиться від імовірності 0,3 за абсолютною величиною не більше, ніж на 0,04 ?

<u>С7.</u> Частота важких часток у космічному випромінюванні складає в середньому 15%. Яке найменше число космічних часток повинно бути зареєстроване приладом, щоб з імовірністю 0,996 відхилення частоти появи важких часток від їхньої імовірності не перевищувало за абсолютною величиною 0,04 ?

<u>Домашнє завдання</u>

<u>Д1.</u> Відомо, що 4/5 робітників фабрики мають середню освіту. Для анкетування вибрано 400 робітників. Яка ймовірність того, що: 1) 300 робітників мають середню освіту; 2) 320 робітників мають середню освіту?

<u>Д2.</u> Гральний кубик кидають 800 разів. Яка ймовірність того, що число очок, кратне трьом, випаде 267 разів?

<u>Д3.</u> Імовірність народження хлопчика дорівнює 0,51 . Знайти ймовірність того, що серед 100 новонароджених буде 50 хлопчиків.

<u>Д4.</u> Монету кинуто $2N$ разів (N велике). Знайти ймовірність того, що герб випаде рівно N разів.

<u>Д5.</u> Імовірність виходу з ладу за час T одного конденсатора дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що за час T з 100 конденсаторів вийдуть з ладу: а) не менше 20 конденсаторів; б) менше 28 конденсаторів; в) від 14 до 26 конденсаторів.

<u>Д6.</u> Досліджують 500 проб руди. Ймовірність промислового вмісту заліза у кожній пробі дорівнює 0,8. Знайти ймовірність

того, що кількість проб з промисловим вмістом заліза буде між 300 і 400.

Д7. При усталеному технологічному процесі ймовірність бракованого виробу $p = 0,015$. Знайти ймовірність того, що частота бракованих виробів серед 1000 виготовлених буде відрізнятися від імовірності виготовлення бракованого виробу не більше, ніж на 0,005 у той або інший бік. Як зміниться результат, якщо замість 1000 виробів взяти 625 ?

Д8. Відділ технічного контролю перевіряє 900 деталей на стандартність. Імовірність того, що деталь стандартна, дорівнює 0,9. Знайти з ймовірністю 0,9544 межі, в яких буде міститися число k стандартних деталей серед перевірених.

Д9. Імовірність появи події в кожному з 900 незалежних випробувань дорівнює 0,5. Знайти таке додатне число ε, що з імовірністю 0,7698 абсолютна величина відхилення відносної частоти появи події від її ймовірності 0,5 не перевищить ε.

Д10. Чому повинно дорівнювати число n кидань грального кубика, щоб імовірність нерівності $|\mu/n - 1/6| \le 0,01$ була не менша, ніж ймовірність протилежної нерівності, де μ - число появи одного очка при n киданнях грального кубика.

Д11. З конвейєра сходить у середньому 85 відсотків виробів першого ґатунку. Скільки виробів треба взяти, щоб з імовірністю 0,997 відхилення частоти виробів першого ґатунку в них від 0,85 за абсолютною величиною не перевищувало 0,01?

Відповіді

О1. 0,0231. **О2.** 0,1185. **О3.** 0,0041. **О4.** 0,48. **О5.** 0,06.
О6. а) 0,8882; б) 0,8944; в) 0,1056. **О7.** $n = 100$. **О8.** 0,9876.
О9. $n = 900$. **О10.** $\varepsilon = 0,05$. **О11.** 8124. **О12.** 78.

С1. а) 3; б) 0,2306; в) 0,5. **С2.** $n \ge 152$. **С3.** 0,9973 (частинний випадок правила "трьох сигм"). **С4.** 576. **С5.** 0,69228. **С6.** 0,94882. **С7.** $n = 661$.

Д1. 1) 0,0022; 2) 0,05. **Д2.** 0,03. **Д3.** 0,0782. **Д4.** $P_{2N}(N) = 0,5641/\sqrt{N}$. **Д5.** а) $P\{k \ge 20\} = 0,50$; б) $P\{k < 28\} = 0,98$; в) $P\{14 \le k \le 26\} = 0,8664$. **Д6.** 0,5. **Д7.** $P = 0,807$; $P_1 = 0,697$.
Д8. $792 \le k \le 828$. **Д9.** $\varepsilon = 0,02$. **Д10.** $n \ge 632$. **Д11.** $n \approx 11247$.

Тема 8. Випадкові величини. Функція та ряд розподілу дискретної випадкової величини

Нехай задано ймовірнісний простір (Ω, S, P). Задамо на Ω дійсну числову функцію $\xi = \xi(\omega)$. Говорять, що ξ є **випадковою величиною**, якщо для довільного дійсного x виконується умова

$$\{\omega \in \Omega \,|\, \xi(\omega) < x\} \in S. \tag{1}$$

Множину $\{\omega \in \Omega \,|\, \xi(\omega) < x\}$ будемо надалі для скорочення позначати $\{\xi < x\}$, аналогічний зміст мають записи $\{x_1 \leq \xi \leq x_2\}$,
$\{\xi > x\}$, $\{\xi \leq x\}$ тощо. Згідно з умовою (1) існує $P\{\xi < x\}$, яку позначають символом F_ξ, тобто

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\},\, x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Цю функцію називають **функцією розподілу** випадкової величини ξ.

Функція розподілу випадкової величини ξ має такі властивості:
1) $\forall \{x_1, x_2\} \subset \mathbb{R}: \; P\{x_1 \leq \xi < x_2\} = F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1)$;
2) $F_\xi(x_1) \leq F_\xi(x_2)$, якщо $x_1 < x_2$, $\{x_1, x_2\} \subset \mathbb{R}$;
3) функція розподілу неперервна зліва:
$F_\xi(x - 0) = F_\xi(x)$, $x \in \mathbb{R}$;
4) $\lim\limits_{x \to +\infty} F_\xi(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 0$.

Випадкова величина ξ називається **дискретною**, якщо значення, яких вона може набувати, утворюють скінченну або зліченну множину. Для того щоб задати таку випадкову величину, досить для кожного з її можливих значень задати ймовірність набування нею цього значення

$$p_k = P\{\xi = x_k\},\; k \in \mathbb{N}.$$

Таблиця вигляду

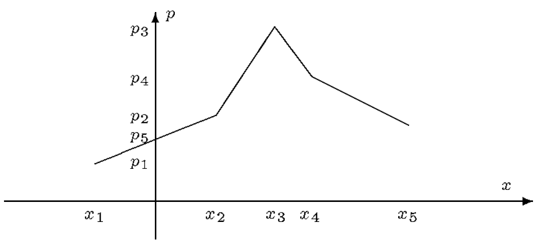
ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

називається **рядом розподілу випадкової величини** ξ.

Значення $x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots$ випадкової величини можуть бути будь-якими, щодо ймовірностей p_k, $k \geq 1$, то вони всі додатні і, згідно з аксіомою адитивності, задовольняють умову

$$\sum_k p_k = 1.$$

Візьмемо прямокутну систему координат. На осі абсцис відкладемо значення випадкової величини ξ, а на осі ординат - імовірності цих значень. Сусідні точки (x_i, p_i) з'єднаємо відрізками, тоді дістанемо фігуру, яка називається **полігоном розподілу випадкової величини** ξ.



Таким чином, **закон розподілу** дискретної випадкової величини ξ можна подати за допомогою функції розподілу або за допомогою ряду розподілу. Якщо ξ задано за допомогою ряду розподілу, то функція розподілу визначається рівністю

$$F_\xi(x) = \sum_{x_i < x} p_i, \; x \in \mathbb{R},$$

де сумування в правій частині поширюється на всі ті індекси i, для яких $x_i < x$. Це східчаста функція, яка набуває стале значення на будь-якому інтервалі, що не містить значень випадкової величини ξ. Її точки розриву - це можливі значення ξ, а стрибки в точках розриву - відповідні ймовірності

$$p_i = F_\xi(x_i + 0) - F_\xi(x_i).$$

Приклад 1. Розглядається робота трьох технічних пристроїв, що працюють незалежно. Імовірність нормальної роботи першого пристрою дорівнює 0,2, другого – 0,4, третього – 0,5. Випадкова величина ξ – число пристроїв, що працюють. Побудувати ряд розподілу випадкової величини ξ.

$\triangleleft$ Можливі значення випадкової величини ξ : 0, 1, 2, 3. Відповідні їм ймовірності знайдемо, користуючись правилами додавання і множення. Якщо позначити через A_i подію, що i-ий пристрій працюватиме нормально, то $\overline{A_i}$ означає відмову працювати нормально i-му пристрою. Очевидно, що

$$P(A_1) = 0,2,\ P(A_2) = 0,4,\ P(A_3) = 0,5,\ P(\overline{A_1}) = 1 - P(A_1) = 0,8,$$

$$P(\overline{A_2}) = 1 - P(A_2) = 0,6,\ P(\overline{A_3}) = 1 - P(A_3) = 0,5.$$

Тому

$$p_1 = P\{\xi = 0\} = P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}) = 0,8 \cdot 0,6 \cdot 0,5 \cdot = 0,24;$$

$$p_2 = P\{\xi = 1\} = P(A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}) + P(\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3}) + P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3) =$$

$$= 0,2 \cdot 0,6 \cdot 0,5 + 0,8 \cdot 0,4 \cdot 0,5 + 0,8 \cdot 0,6 \cdot 0,5 = 0,06 + 0,16 + 0,24 = 0,46;$$

$$p_3 = P\{\xi = 2\} = P(\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3) + P(A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3) + P(A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3}) =$$

$$= 0,8 \cdot 0,4 \cdot 0,5 + 0,2 \cdot 0,6 \cdot 0,5 + 0,2 \cdot 0,4 \cdot 0,5 = 0,16 + 0,06 + 0,04 = 0,26;$$

$$p_4 = P\{\xi = 3\} = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = 0,2 \cdot 0,4 \cdot 0,5 = 0,04.$$

Як і слід було очікувати, $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$. Отже, ряд розподілу випадкової величини ξ має вигляд:

ξ	0	1	2	3
p	0,24	0,46	0,26	0,04

. $\triangleright$

Приклад 2. Побудувати функцію розподілу випадкової величини ξ з прикладу 1.

$\triangleleft$ Розглядатимемо різні значення x і будемо знаходити для них $F_\xi(x) = P\{\xi < x\}$, $x \in \mathbb{R}$:

1) нехай $x \leq 0$; оскільки від'ємних числових значень випадкова величина ξ не має, то $F_\xi(x) = 0$;

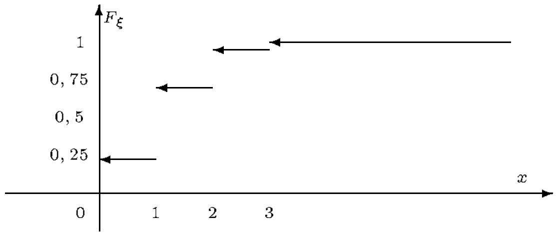
2) нехай $0 < x \leq 1$, тоді $F_\xi(x) = P\{\xi = 0\} = 0,24$;

3) якщо $1 < x \leq 2$, то $F_\xi(x) = P\{\xi = 0\} + P\{\xi = 1\} =$
$= 0,46 + 0,24 = 0,70$. Очевидно, що і $F_\xi(2) = 0,70$;

4) нехай $2 < x \leq 3$, тоді $F_\xi(x) = P\{\xi = 0\} + P\{\xi = 1\} +$
$+ P\{\xi = 2\} = 0,24 + 0,46 + 0,26 = 0,96$;

5) якщо $x > 3$, то $F_\xi(x) = P\{\xi = 0\} + P\{\xi = 1\} +$
$+ P\{\xi = 2\} + P\{\xi = 3\} = 1$.

Зобразимо функцію F_ξ на графіку.



$\triangleright$

Індикатором події A називається випадкова величина η, яка дорівнює одиниці, якщо в результаті досліду подія настала, і нулю - якщо не настала:

$$\eta = \begin{cases} 1, & \text{якщо } A \text{ настала,} \\ 0, & \text{якщо } A \text{ не настала.} \end{cases}$$

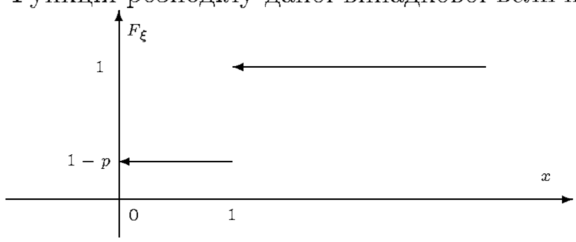
Ряд розподілу випадкової величини η має вигляд:

η	0	1
p	$1-p$	p

,

де p - імовірність події A в даному досліді.

Функція розподілу даної випадкової величини має вигляд:



Вправи

О1. Випадкова величина ξ має закон розподілу

ξ	0	-3	0	1	-3	0	-3
p	0,15	0,1	0,07	0,2	0,2	0,08	α

.

Знайти α і записати закон розподілу випадкової величини так, щоб у першому рядку всі числа були різні.

О2. Імовірність того, що виріб не є стандартним, дорівнює 0,06. Контролер відбирає з кожної партії 5 виробів і проводить перевірку кожного з них. Якщо трапиться виріб, який не відповідає нормі, перевірка припиняється і вся партія затримується. Знайти розподіл випадкової величини ξ - кількості виробів, які підлягають контролю, а також функцію розподілу цієї випадкової величини.

О3. Випадкова величина ξ має закон розподілу

ξ	-2	-1	0	1	2
p	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1

.

Знайти: 1) функцію розподілу та побудувати її графік;
2) ймовірність $P\{|\xi| \leq 1\}$.

О4. З партії, що містить 100 виробів, серед яких є 10 дефектних, відібрано випадково п'ять виробів для перевірки їх якості. Побудувати ряд розподілу випадкової величини ξ – числа дефектних виробів, які містяться серед відібраних.

О5. Пристрій складається з трьох елементів, які незалежно працюють . Імовірність неспрацювання кожного елемента в одному досліді дорівнює 0,1. Скласти закон розподілу випадкової величини ξ – числа елементів, що відмовили в одному досліді, та знайти функцію розподілу цієї випадкової величини.

О6. Мисливець стріляє по дичині до першого влучення, але встигає зробити не більше чотирьох пострілів. Знайти закон і функцію розподілу випадкової величини ξ - числа пострілів, зроблених мисливцем, якщо ймовірність влучення в ціль при одному пострілі дорівнює 0,7.

О7. Автомобіль повинен проїхати по вулиці, на якій встановлено три світлофори, які діють незалежно один від одного; при цьому зелений сигнал горить протягом 1,5 хв., жовтий - 0,3 хв., червоний - 1,2 хв. Знайти закон розподілу випадкової величини ξ - числа зупинок автомобіля на даній вулиці.

О8. У партії з шести деталей є 4 стандартні. Навмання відібрано 3 деталі. Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини ξ - числа стандартних деталей серед відібраних.

О9. Дослід складається з трьох незалажних кидань монети, при кожному з яких герб випадає з імовірністю 0,5. Для випадкового числа появи герба побудувати: а) ряд розподілу; б) многокутник (полігон) розподілу; в) функцію розподілу.

О10. Екзаменатор задає студентові додаткові питання. Імовірність того, що студент відповість на довільне задане питання, дорівнює 0,9. Викладач припиняє опитування студента, як тільки той не знає відповіді на чергове питання. Треба:

а) скласти закон розподілу дискретної випадкової величини ξ - числа додаткових питань, які задасть викладач студенту;

б) знайти найімовірніше число заданих студентові додаткових питань.

С1. Здійснюються послідовні незалежні випробування, при кожному з яких імовірність успіху (настання події A) дорівнює p. Випробування проводяться до першого успіху. Показати, що випадкова величина ξ (число випробувань, здійснених до першої появи події A) розподілена за законом

$$p_k = P\{\xi = k\} = (1-p)^k \cdot p,\ k = 0,\, 1,\, 2, \ldots.$$

Цей розподіл називають **геометричним розподілом** з параметром p.

С2. Випадкова величина ξ розподілена за геометричним законом із параметром p (див. С1.). Знайти $P\{\xi < 2\}$ і $P\{\xi \geq 2\}$.

С3. Стрілець на змаганнях має 4 патрони і стріляє в ціль до першого влучення. Ймовірність влучення при одному пострілі $p = 0,7$. Нехай ξ - число промахів. Знайти розподіл випадкової величини ξ. Обчислити $P\{\xi \leq 3\}$ і $P\{2 < \xi \leq 4\}$. Записати вираз функції розподілу та побудувати її графік.

С4. Кидають два гральні кубики. Нехай ξ - сума очок, які випадають на їх верхніх гранях. Знайти закон розподілу та функцію розподілу випадкової величини ξ.

Домашнє завдання

Д1. Випадкова величина ξ має закон розподілу

ξ	-1	0	2	0	-1	2	-1
p	0,2	0,1	0,21	β	0,23	0,14	0,08

.

Знайти β і записати закон розподілу випадкової величини так, щоб у першому рядку всі числа були різні.

Д2. Випадкова величина ξ має закон розподілу

ξ	-1	1	2	4	6
p	0,1	$2{,}5a^2$	a	a	0,4

.

Знайти: 1) a; 2) $P\{\xi > 2\}$; 3) $P\{\xi < 4\}$.

Д3. Розглядають роботу трьох незалежних пристроїв. Імовірність відмови першого пристрою дорівнює 0,8, другого - 0,6, третього - 0,5. Побудувати ряд розподілу випадкової величини ξ - числа працюючих пристроїв.

Д4. У першій урні – 4 кулі, а в другій – 3 кулі. На кожній кулі першої урни нанесено число очок від 1 до 4, а на кожній кулі другої урни - число очок від 1 до 3. Нехай ξ - сума очок, які випали на обох кулях. Для випадкової величини ξ знайти: 1) закон розподілу; 2) функцію розподілу та побудувати її графік.

Д5. Два стрільці стріляють кожний по своїй мішені, роблячи незалежно один від одного по одному пострілу. Ймовірність попадання в мішень для першого стрільця – p_1, для другого – p_2. Розглядаються дві випадкові величини: ξ_1 - число попадань першого стрільця; ξ_2 - число попадань другого стрільця та їхня різниця $\xi = \xi_1 - \xi_2$. Побудувати ряд розподілу випадкової величини ξ.

Д6. Проводяться послідовні незалежні випробування п'яти приладів на надійність. Кожний наступний прилад випробовується лише в тому випадку, коли попередній виявився надійним. Побудувати ряд розподілу та знайти функцію розподілу випадкового числа випробовуваних приладів, якщо ймовірність витримати випробовування для кожного з них дорівнює 0,9.

Д7. У партії з 10 деталей є 8 стандартних. Навмання відібрано 2 деталі. Скласти закон розподілу числа стандартних деталей серед відібраних та побудувати многокутник розподілу і графік функції розподілу.

Д8. Проводяться незалежні тестування великих інтегральних схем (ВІС) до тих пір, поки не буде виявлено першу несправну

ВІС, після чого тестування припиняється. Ймовірність того, що тестування довільної ВІС закінчиться успішно, дорівнює p. Побудувати ряд розподілу випадкової величини ξ - числа тестів, які слід провести.

Д9. Ймовірність того, що стрілець влучить в мішень при одному пострілі, дорівнює 0,8. Стрільцеві послідовно видаються патрони до тих пір, поки він не промахнеться. Треба:

а) скласти закон розподілу дискретної випадкової величини ξ - числа патронів, виданих стрільцеві;

б) знайти найімовірніше число виданих стрільцеві патронів.

Д10. Двоє баскетболістів почергово кидають м'яч в кошик до тих пір, поки один з них не попаде. Побудувати ряд розподілу випадкового числа кидків, що здійснюються кожним з баскетболістів, якщо ймовірність попадання для першого дорівнює 0,4, а для другого - 0,6.

Відповіді

О1. $\alpha = 0,2,$

ξ	-3	0	1
p	0,5	0,3	0,2

.

О2.

ξ	1	2	3	4	5
p	0,06	0,056	0,053	0,050	0,781

,

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ 0,06, & 1 < x \le 2, \\ 0,116, & 2 < x \le 3, \\ 0,169, & 3 < x \le 4, \\ 0,219, & 4 < x \le 5, \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

О3. 1)

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2, \\ 0,1, & -2 < x \le -1, \\ 0,3, & -1 < x \le 0, \\ 0,5, & 0 < x \le 1, \\ 0,9, & 1 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases} \qquad 2)\ 0,8.$$

О4.

ξ	0	1	2	3	4	5
p	0,583	0,340	0,070	0,007	0	0

.

O5.

ξ	0	1	2	3
p	0,729	0,243	0,027	0,001

,

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 0,729, & 0 < x \le 1, \\ 0,972, & 1 < x \le 2, \\ 0,999, & 2 < x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

O6.

ξ	1	2	3	4
p	0,7	0,21	0,063	0,027

,

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ 0,7, & 1 < x \le 2, \\ 0,91, & 2 < x \le 3, \\ 0,973, & 3 < x \le 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

O7.

ξ	0	1	2	3
p	0,125	0,375	0,375	0,125

.

O8.

ξ	0	1	2	3
p	0	1/5	3/5	1/5

.

O9.

ξ	0	1	2	3
p	0,125	0,375	0,375	0,125

,

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 0,125, & 0 < x \le 1, \\ 0,500, & 1 < x \le 2, \\ 0,875, & 2 < x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

O10. а)

ξ	1	2	3	$\cdots$	k	$\cdots$
p	0,1	0,09	0,081	$\cdots$	$(0,9)^{k-1} \cdot 0,1$	$\cdots$

,

б) $k_0 = 1$.

C2.

$P\{\xi < 2\} = p_0 + p_1 = 2p - p^2$, $P\{\xi \ge 2\} = 1 - P\{\xi < 2\} = (1-p)^2$.

C3.

ξ	0	1	2	3	4
p	p	qp	q^2p	q^3p	q^4

, $q = 1 - p$;

$P\{\xi \le 3\} = p(1 + q + q^2 + q^3)$, $P\{2 < \xi \le 4\} = q^3(p+1)$.

C4.

ξ	2	3	4	5	6
p	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36

7	8	9	10	11	12
6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

,

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ 1/36, & 2 < x \le 3, \\ 3/36, & 3 < x \le 4, \\ 6/36, & 4 < x \le 5, \\ 10/36, & 5 < x \le 6, \\ 15/36, & 6 < x \le 7, \\ 21/36, & 7 < x \le 8, \\ 26/36, & 8 < x \le 9, \\ 30/36, & 9 < x \le 10, \\ 33/36, & 10 < x \le 11, \\ 35/36, & 11 < x \le 12, \\ 1, & x > 12. \end{cases}$$

Д1. $\beta = 0,04$,

ξ	-1	0	2
p	0,51	0,14	0,35

. **Д2.** 1) 0,2; 2) 0,6; 3) 0,4.

Д3.

ξ	0	1	2	3
p	0,24	0,46	0,26	0,04

.

Д4.

ξ	2	3	4	5	6	7
p	1/12	2/12	3/12	3/12	2/12	1/12

,

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ 1/12, & 2 < x \le 3, \\ 3/12, & 3 < x \le 4, \\ 6/12, & 4 < x \le 5, \\ 9/12, & 5 < x \le 6, \\ 11/12, & 6 < x \le 7, \\ 1, & x > 7. \end{cases}$$

Д5.

ξ	-1	0	1
p	q_1p_2	$q_1q_2 + p_1p_2$	p_1q_2

, $q_1 = 1 - p_1,\ q_2 = 1 - p_2$.

Д6.

ξ	1	2	3	4	5
p	0,1	0,09	0,081	0,0729	0,6561

.

Д7.

ξ	0	1	2
p	1/45	16/45	28/45

.

Д8.

ξ	1	2	$\cdots$	k	$\cdots$
p	q	pq	$\cdots$	$p^{k-1}q$	$\cdots$

, $q = 1 - p$.

Д9. а)

ξ	1	2	3	$\cdots$	k	$\cdots$
p	0,2	0,16	0,128	$\cdots$	$(0,8)^{k-1} \cdot 0,2$	$\cdots$

б) $k_0 = 1$.

Д10. ξ_1 - випадкове число кидків для баскетболіста, що розпочинає кидки; ξ_2 - те ж саме для другого баскетболіста;
$P\{\xi_1 = m\} = (0,6 \cdot 0,4)^{m-1} \cdot (0,4 + 0,6^2)$; $P\{\xi_2 = 0\} = 0,4$;
$P\{\xi_2 = m\} = 0,6 \cdot (0,4 \cdot 0,6)^{m-1} \cdot (0,6 + 0,4^2)$, $m \ge 1$.

Тема 9. Неперервна випадкова величина. Щільність розподілу ймовірностей

Випадкова величина ξ називається **неперервною (абсолютно неперервною)**, якщо існує невід'ємна функція p_ξ така, що для довільних $x \in \mathbb{R}$ функцію розподілу F_ξ можна подати у вигляді

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p_\xi(t)dt,\ x \in \mathbb{R}.$$

Розглядатимемо такі випадкові величини, для яких p_ξ є неперервною скрізь, крім, можливо, скінченного числа точок.

Функція p_ξ називається **щільністю розподілу ймовірностей** або **щільністю розподілу**. Неперервна випадкова величина може набувати будь-яких значень з деякого інтервалу на відміну від дискретної випадкової величини, яка може набувати лише ізольованих значень. Щільність розподілу ймовірностей володіє такими властивостями:

1)$p_\xi(x) \geq 0,\ x \in \mathbb{R}$;

2)$P\{x_1 \leq \xi < x_2\} = \int\limits_{x_1}^{x_2} p_\xi(x)dx,\ \{x_1,\, x_2\} \subset \mathbb{R}$;

3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(x)dx = 1$;

4) якщо в точці x функція p_ξ неперервна, то
$F'_\xi(x) = p_\xi(x),\ x \in \mathbb{R}$.

Імовірність того, що неперервна випадкова величина набуде конкретного значення, дорівнює нулеві, тобто $P\{\xi = a\} = 0$, а тому

$$P\{x_1 < \xi < x_2\} = P\{x_1 \leq \xi < x_2\} =$$
$$= P\{x_1 < \xi \leq x_2\} = P\{x_1 \leq \xi \leq x_2\}.$$

Функція розподілу випадкової величини будь-якому значенню x_p ставить у відповідність імовірність $p = F_\xi(x_p) = P\{\xi < x_p\}$.

Інколи виникає обернена задача: за заданим значенням p знайти таке x_p, щоб

$$F_\xi(x_p) = p. \tag{1}$$

Точка x_p, для якої виконується (1), називається **квантиллю**, що відповідає заданому рівню p, або **квантиллю порядку** p.

Квантиль, яка відповідає значенню $p = \frac{1}{2}$, називається **медіаною розподілу**. Медіана є однією з характеристик центру розподілу ймовірностей. Випадкова величина з однаковою ймовірністю може набувати значення як менші, так і більші від медіани.

У випадку неперервного розподілу випадкової величини ξ з щільністю p_ξ значення x_0, при якому p_ξ набуває найбільшого значення, називають **модою** розподілу. Якщо щільність p_ξ має одну моду, то розподіл називається **унімодальним**.

Якщо ж щільність розподілу p_ξ має мінімум всередині області можливих значень ξ і монотонно зростає при наближенні до межі області, то розподіл називається **антимодальним**.

Приклад 1. Дано функцію

$$p(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ Cxe^{-x} \text{ при } x \geq 0. \end{cases}$$

Для яких значень параметра C ця функція є щільністю розподілу деякої неперервної випадкової величини ξ? Знайти функцію розподілу даної величини.

$\lhd$ Для того щоб функція p була щільністю розподілу, повинні виконуватися дві умови:

1)$p(x) \geq 0$ при всіх $x \in \mathbb{R}$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1.$

З періої умови маємо $C \geq 0$. За другою умовою інтеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \int\limits_{0}^{+\infty} Cxe^{-x}dx = -C\int\limits_{0}^{+\infty} Cxde^{-x} =$$

$$= -Cxe^{-x}\Big|_0^{+\infty} + C\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = C(-e^{-x})\Big|_0^{+\infty} = C$$

повинен дорівнювати одиниці. Звідси $C = 1$. Таким чином, функція p є щільністю розподілу деякої випадкової величини ξ, якщо вона має вигляд

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ xe^{-x} \text{ при } x \geq 0. \end{cases}$$

Функція розподілу випадкової величини ξ має вигляд

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(x)dx = \begin{cases} 0 \quad \text{при } x < 0, \\ \int_0^x xe^{-x}dx = 1 - e^x(x+1) \text{ при } x \geq 0. \end{cases} \rhd$$

Приклад 2. Нехай випадкова величина ξ має щільність розподілу

$$p_\xi(x) = |x|\exp\{-x^2\},\ x \in \mathbb{R}.$$

Чому дорівнюватиме ймовірність того, що дана випадкова величина набуде значення з інтервалу $(0; 1)$?

$\lhd$ Шукану ймовірність $P\{0 < \xi < 1\}$ можна знайти за допомогою властивості 2) щільності розподілу

$$P\{x_1 < \xi < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} p_\xi(x)dx = \int_0^1 |x|e^{-x^2}dx = \int_0^1 xe^{-x^2}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 de^{-x^2} = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1 - e^{-1}) = \frac{1}{2}(1 - 0,3679) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 0,6321 = 0,31605. \rhd$$

Приклад 3. Функція розподілу випадкової величини ξ визначається формулою

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ 0,5(1 - \cos x) & \text{при } 0 < x \leq \pi, \\ 1 & \text{при } x > \pi. \end{cases}$$

Знайти квантилі $x_{0,25}$, $x_{0,50}$, $x_{0,75}$.

◁ Маємо $F_\xi(x_p) = p$. Покладемо в цій рівності p послідовно 0,25; 0,50; 0,75. Тоді дістанемо:

$$F_\xi(x_{0,25}) = 0,25,\ 0,5(1 - \cos x_{0,25}) = 0,25,\ \cos x_{0,25} = 0,5,\ x_{0,25} = \frac{\pi}{3};$$

$$F_\xi(x_{0,50}) = 0,50,\ 0,5(1 - \cos x_{0,50}) = 0,5,\ \cos x_{0,50} = 0,\ x_{0,50} = \frac{\pi}{2};$$

$$F_\xi(x_{0,75}) = 0,75,\ 0,5(1 - \cos x_{0,75}) = 0,75,\ \cos x_{0,75} = -0,5,\ x_{0,75} = \frac{2\pi}{3}.$$

▷

Вправи

О1. Функція розподілу неперервної випадкової величини ξ задана виразом

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ ax^2 \text{ при } 0 < x \le 1, \\ 1 \text{ при } x > 1. \end{cases}$$

Знайти: 1) коефіцієнт a; 2) щільність розподілу p_ξ і побудувати її графік; 3) $P\{0,25 < \xi < 0,5\}$.

О2. Функція розподілу неперервної величини ξ задана формулою

$$F_\xi(x) = a + b \cdot arctgx,\ \ x \in \mathbb{R}.$$

Знайти: 1) сталі a і b; 2) щільність розподілу p_ξ; 3) $P\{-1 \le \xi \le 1\}$.

О3. Щільність розподілу p_ξ випадкової величини задана формулою

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0\ ,\ \ x \le 0, \\ ae^{-x}\ ,\ \ x > 0. \end{cases}$$

Знайти: 1) коефіцієнт a; 2) функцію розподілу; 3) $P\{1 < \xi < 2\}$.

O4. Неперервна випадкова величина має щільність

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0 \ , \ -\infty < x \le -\dfrac{\pi}{2}, \\ a\cos x \ , \ -\dfrac{\pi}{2} < x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 \ , \ \dfrac{\pi}{2} < x < +\infty. \end{cases}$$

Треба: 1) знайти коефіцієнт a; 2) побудувати криву розподілу випадкової величини; 3) знайти $P\{0 < \xi < \pi/4\}$; 4) знайти функцію розподілу F_ξ та побудувати її графік.

O5. Випадкова величина має щільність розподілу

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0 \ , \ x \le 1, \\ a\dfrac{\ln x}{x^3} \ , \ x > 1. \end{cases}$$

Знайти a і функцію розподілу.

O6. Випадкова величина задана функцією розподілу

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 \ , \ x \le 2, \\ 0,5x - 1 \ , \ 2 < x \le 4, \\ 1 \ , \ x > 4. \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що в результаті випробування ξ набуде значення: а) менше 0,2; б) менше трьох; в) не менше трьох; г) не менше п'яти.

O7. Дано щільність розподілу неперервної випадкової величини ξ:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0 \ , \ x \le 0, \\ \cos x \ , \ 0 < x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 \ , \ x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу F_ξ.

O8. Щільність розподілу випадкової величини ξ

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0 \ , \ x \le -\dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{2}{\pi}\cos^2 x \ , \ -\dfrac{\pi}{2} < x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 \ , \ x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що у трьох незалежних дослідах ξ набуде двох значень з інтервалу $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

О9. Випадкова величина ξ має щільність розподілу

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0 \ , \ x \le 1, \\ \dfrac{A}{x^2} \ , \ x > 1. \end{cases}$$

Знайти: 1) коефіцієнт A; 2) функцію розподілу F_ξ; 3) $P\{2 < < \xi < 3\}$; 4) імовірність того, що при чотирьох незалежних випробуваннях величина ξ жодного разу не попаде в інтервал (2, 3).

О10. Тривалість життя рослин даного виду в певному середовищі є неперервною випадковою величиною ξ з щільністю розподілу

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0 \ , \ x \le 0, \\ \frac{1}{120} exp\{-x/120\}, \ x \in (0, +\infty). \end{cases}$$

1) Знайти функцію розподілу. 2) Яка частка рослин даного виду гине за 100 днів? 3) Якщо деяка рослина живе протягом 100 днів, то яка ймовірність того, що вона проживе ще 100 днів?

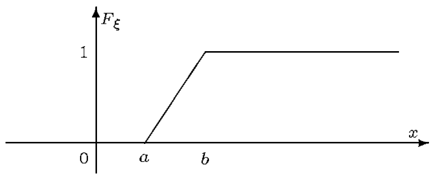
С1. Проекція ξ радіуса-вектора випадкової точки кола радіуса a на діаметр має функцію розподілу (закон арксинуса)

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 \ , \ x \le -a, \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi} arcsin \dfrac{x}{a} \ , \ -a < x \le a, \\ 1 \ , \ x > a. \end{cases}$$

Знайти: 1) ймовірність того, що $-\frac{a}{2} < \xi < \frac{a}{2}$; 2) квантиль $x_{0,75}$; 3) щільність розподілу p_ξ; 4) моду і медіану розподілу.

С2. Імовірність події A залежить від випадкової величини ξ, розподіленої зі сталою щільністю $p_\xi(x) = 1$, $x \in (0,1)$. Умовна ймовірність події A при $\xi = x$ дорівнює $P(A/x) = x^2, 0 < x < 1$. Знайти повну ймовірність події A.

С3. На рисунку наведено графік функції розподілу випадкової величини ξ



Знайти: 1) щільність розподілу p_ξ; 2) функцію розподілу F_ξ; 3)$P\left\{\dfrac{a+b}{2} \le \xi \le \dfrac{3b+a}{4}\right\}$.

С4. Дано щільність розподілу неперервної випадкової величини $p_\xi(x) = e^{2x-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Знайти моду цієї випадкової величини.

С5. Щільність розподілу випадкової величини ξ задана формулою

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0 \ , \ x \le 1, \\ Cx^{-3/2} \ , \ x > 1. \end{cases}$$

Знайти C і функцію розподілу F_ξ.

Домашнє завдання

Д1. Функція розподілу випадкової величини ξ має вигляд

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 \ , \ x \le 0, \\ ax^3 \ , \ 0 < x \le 1, \\ 1 \ , \ x > 1. \end{cases}$$

Знайти коефіцієнт a та щільність розподілу величини ξ.

Д2. Випадкова величина ξ задана функцією розподілу

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 \ , \ x \le -1, \\ \frac{3}{4}(x+1) \ , \ -1 < x \le 1/3, \\ 1 \ , \ x > 1/3. \end{cases}$$

Знайти $P\{0 < \xi < 1/3\}$.

Д3. Випадкова величина ξ задана функцією розподілу

$$F_\xi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctg \frac{x}{2}, \; x \in \mathbb{R}.$$

Знайти можливе значення x_1, яке задовольняє умову: з імовірністю $\frac{1}{4}$ випадкова величина ξ в результаті випробування набуде значення, більшого за x_1.

Д4. Неперервна випадкова величина ξ задана щільністю розподілу $p_\xi(x) = \frac{2}{3}\sin 3x$ в інтервалі $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$ і $p_\xi(x) = 0$ поза цим інтервалом. Знайти $P\left\{\frac{\pi}{6} < \xi < \frac{\pi}{4}\right\}$.

Д5. Випадкова величина ξ задана функцією розподілу

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 \;, & x \le 2, \\ (x-2)^2 \;, & 2 < x \le 3, \\ 1 \;, & x > 3. \end{cases}$$

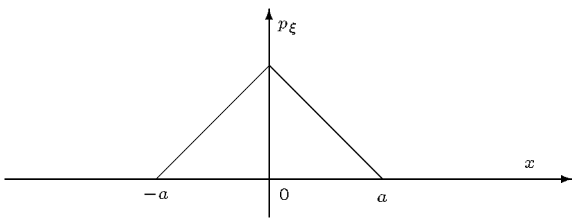
Знайти: 1) щільність розподілу p_ξ; 2) $P\{1 < \xi < 2,5\}$, $P\{2,5 < \xi < 3,5\}$.

Д6. Дано щільність розподілу неперервної випадкової величини ξ:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0 \;, & x \le 1, \\ x - \frac{1}{2} \;, & 1 < x \le 2, \\ 0 \;, & x > 2. \end{cases}$$

Знайти F_ξ.

Д7. Випадкова величина ξ розподілена за законом Сімпсона (графік її щільності ймовірностей наведено на рисунку).



Знайти: 1) ординату вершини трикутника на рисунку; 2) записати формулу для p_ξ і F_ξ; 3) $P\left\{-\frac{3}{2}a < \xi \le \frac{a}{3}\right\}$, $P\left\{\xi > -\frac{a}{2}\right\}$.

Д8. Випадкова величина ексцентриситета деталі ξ характеризується функцією розподілу Релея $F_\xi(x) = 1 - exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}$, $x \ge 0$. Знайти: а) p_ξ; б) медіану розподілу; в) моду розподілу.

Д9. Випадкова величина ξ задана щільністю розподілу

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0\ , & x \le 0, \\ 4e^{-4x}\ , & x > 0. \end{cases}$$

Знайти: 1) функцію розподілу F_ξ; 2) $P\{0 < \xi < 1\}$.

Д10. Дано функцію $f(x) = Ax^2e^{-2x}$, $x \ge 0$. Визначити: 1) при якому значенні A функція f є щільністю розподілу деякої неперервної величини ξ; 2) функцію розподілу F_ξ; 3) $P\{0 \le \xi \le 1/2\}$.

Відповіді

О1. 1) $a = 1$; 2) $p_\xi(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ 2x \text{ при } 0 < x \le 1, \\ 0 \text{ при } x > 1; \end{cases}$
3) $P\{0,25 < \xi < 0,5\} = 0,1875$.

О2. 1) $a = 1/2, b = 1/\pi$; $p_\xi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$; 3) $1/2$.

О3. 1) $a = 1$; 2) $F_\xi(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ 1 - e^{-ax} \text{ при } x > 0; \end{cases}$
3) $P\{1 \le \xi < 2\} = e^{-1} - e^{-2}$.

О4. 1) $a = \frac{1}{2}$; 3) $P\{0 \le \xi < \frac{\pi}{4}\} = \frac{\sqrt{2}}{4}$;

$$4)\ F_\xi(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le -\frac{\pi}{2}, \\ \frac{\sin x + 1}{2} \text{ при } -\frac{\pi}{2} < x \le \frac{\pi}{2}, \\ 1 \text{ при } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

О5. $a = 4$; $F_\xi(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 1, \\ 1 - \dfrac{1 + 2lnx}{x^2} \text{ при } x > 1. \end{cases}$

О6. а) $P\{\xi < 0,2\} = 0$; б) $P\{\xi < 3\} = 0,5$; в) $P\{\xi \ge 3\} = 0,5$; г) $P\{\xi \ge 5\} = 0$.

О7. $F_\xi(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ \sin x \text{ при } 0 < x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 1 \text{ при } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

О8. $p = P\left\{0 < \xi < \dfrac{\pi}{4}\right\} = \dfrac{\pi + 2}{4\pi}$, $P_3(2) = 3\left(\dfrac{\pi+2}{4\pi}\right)^2 \dfrac{3\pi - 2}{4\pi}$.

О9. 1) $A = 1$; 2) $F_\xi(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 1, \\ \dfrac{x-1}{x} \text{ при } x > 1; \end{cases}$

3) $P\{2 < \xi < 3\} = 1/6$; 4) 0,48.

О10. 1) $F_\xi(x) = 1 - exp\{-x/120\}$, $x \in [0, +\infty)$.
$P\{0 \le \xi \le 100\} \approx 0,5639$; 3) $P\{\xi \ge 200 \big/ \xi \ge 100\} \approx 0,4361$.

С1. 1) $P\{-\dfrac{a}{2} < \xi < \dfrac{a}{2}\} = \dfrac{1}{3}$; 2) $x_{0,75} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$;

3) $p_\xi(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le -a, \\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}} \text{ при } -a < x < a, \\ 0 \text{ при } x \ge a; \end{cases}$

4) мода відсутня, а медіана $x_{0,5} = 0$.

С2. $P(A) = \dfrac{1}{3}$. (Треба скористатись інтегральною формулою повної ймовірності

$$P(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(A/x) p_\xi(x) dx\,).$$

С3. 1) $p_\xi(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \notin [a, b], \\ \dfrac{1}{b-a} \text{ при } x \in [a, b]; \end{cases}$

2) $F_\xi(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} \text{ при } a < x \le b, \\ 1 \text{ при } x > b; \end{cases}$

3) $P\left\{\dfrac{a+b}{2} < \xi < \dfrac{3b+a}{4}\right\} = 0,25$.

С4. $x_0 = 1$.

С5. $C = 1/2$; $\quad F_\xi(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 1, \\ 1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}} \text{ при } x > 1. \end{cases}$

Д1. $a = 1$; $\quad p_\xi(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ 3x^2 \text{ при } 0 < x \le 1, \\ 0 \text{ при } x > 1. \end{cases}$

Д2. 1/4. **Д3.** $x_1 = 2$. **Д4.** $P\left\{\dfrac{\pi}{6} < \xi < \dfrac{\pi}{4}\right\} = \dfrac{\sqrt{2}}{9}$.

Д5. 1) $p_\xi(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 2, \\ 2(x-2) \text{ при } 2 < x \le 3, \\ 0 \text{ при } x > 3; \end{cases}$

2) $P\{1 < \xi < 2,5\} = 0,25$, $P\{2,5 < \xi < 3,5\} = 0,75$.

Д6. $F_\xi(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 1, \\ \dfrac{x^2 - x}{2} \text{ при } 1 < x \le 2, \\ 1 \text{ при } x > 2. \end{cases}$.

Д7. 1) $\dfrac{1}{a}$; 2) $p_\xi(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \notin [-a, a], \\ -\dfrac{|x|}{a^2} + \dfrac{1}{a} \text{ при } x \in [-a, a]; \end{cases}$

3) $F_\xi(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le -a, \\ \dfrac{(x+a)^2}{2a^2} \text{ при } -a < x \le 0, \\ 1 - \dfrac{(x-a)^2}{2a^2} \text{ при } 0 < x \le a, \\ 1 \text{ при } x > a. \end{cases}$

4) $P\left\{-\dfrac{3}{2}a < \xi \le \dfrac{a}{3}\right\} = \dfrac{7}{9}$, $P\left\{\xi > -\dfrac{a}{2}\right\} = \dfrac{7}{8}$.

Д8. а) $p_\xi(x) = \dfrac{x}{\sigma^2} \exp\left\{-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right\}$, $x \ge 0$;

б) $\sigma \cdot \sqrt{\dfrac{2lg2}{lge}} \approx 1,18\sigma$; в) σ.

Д9. 1) $F_\xi(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ 1 - e^{-4x} \text{ при } x \ge 0; \end{cases}$ $\quad$ 2) $P\{0 < \xi < 1\} \approx 0,98$.

Д10. 1) $A = 4$; 2) $F_\xi(x) = 1 - 2(x^2 + x + 1/2)e^{-2x}$, $x \ge 0$; 3) 0,0803.

Тема 10. Числові характеристики випадкових величин

Нехай ξ - дискретна випадкова величина з законом розподілу

ξ	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
p	p_1	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$

.

Математичним сподіванням $M\xi$ $(M(\xi))$ цієї випадкової величини називають суму ряду

$$x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} x_np_n,$$

якщо останній збігається абсолютно. Отже,

$$M\xi = \sum_{n=1}^{+\infty} x_np_n. \tag{1}$$

Якщо ξ - неперервна випадкова величина зі щільністю ймовірності p_ξ, то математичним сподіванням називається число

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xp_\xi(x)dx, \tag{2}$$

за умови, що інтеграл збігається абсолютно, тобто збігається інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|p_\xi(x)dx.$$

Математичне сподівання має такі властивості:

1) Якщо ξ - неперевна випадкова величина зі щільністю розподілу p_ξ, f - функція, неперервна на множині значень ξ, то

$$Mf(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)p_\xi(x)dx. \tag{3}$$

У випадку дискретної випадкової величини ξ формула (3) набуває вигляду

$$Mf(\xi) = \sum_k f(x_k)p_k. \tag{4}$$

2) $Mc = c$, c - стала.

3) $M(c\xi) = cM\xi$, c - стала.

4) $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$, ξ і η - довільні випадкові величини.

5) Якщо ξ і η - незалежні випадкові величини, то

$$M\xi\eta = M\xi \cdot M\eta.$$

6) $M(\xi - M\xi) = 0$.

Математичне сподівання - це середнє значення даної випадкової величини, центр її розподілу.

Другою важливою числовою характеристикою випадкової величини ξ є її **дисперсія** $D\xi$, яка служить мірою розсіювання даної випадкової величини щодо її математичного сподівання.

Дисперсією $D\xi$ випадкової величини ξ називають математичне сподівання квадрата відхилення цієї величини від її математичного сподівання $M\xi$

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2. \tag{5}$$

Дисперсія випадкової величини має такі властивості:

1) дисперсія сталої величини дорівнює нулю:

$$Dc = 0, \qquad c = \text{стала};$$

2) сталий множник можна виносити за знак дисперсії, піднісши його до квадрата:

$$D(c\xi) = c^2 D\xi;$$

3) якщо ξ і η - незалежні випадкові величини, то

$$D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta;$$

4) дисперсія випадкової величини дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрата цієї величини і квадратом її математичного сподівання:

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2.$$

Для обчислення дисперсії за формулою (5) треба скористатися формулами (3) або (4), що у випадку дискретної випадкової величини дає

$$D\xi = \sum_{k=1}^{+\infty}(x_k - M\xi)^2 p_k, \tag{6}$$

а у випадку неперервної випадкової величини

$$D\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x - M\xi)^2 p_\xi(x)dx. \tag{7}$$

Корінь квадратний з дисперсії називають **середнім квадратичним відхиленням** або **стандартом**

$$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}.$$

Приклад 1. Знайти математичне сподівання і моду дискретної випадкової величини ξ, яка має ряд розподілу

ξ	0	1	2	3
p	$0,1$	$0,3$	$0,5$	$0,1$

.

◁ Згідно з формулою (1) одержуємо, що

$$M\xi = 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,1 = 1,6.$$

Модою випадкової величини ξ є $x_0 = 2$, тобто її найімовірніше значення. ▷

Приклад 2. Випадкова величина ξ задана щільністю розподілу

$$p_\xi(x) = \begin{cases} c \cdot \sin x & \text{при} \quad x \in (0; \pi/2]; \\ 0 & \text{при} \quad x \notin (0; \pi/2]. \end{cases}$$

Знайти коефіцієнт c і математичне сподівання випадкової величини ξ.

◁ Оскільки $p_\xi(x) = 0$ при $x \notin (0; \pi/2]$, то з умови

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(x)dx = 1$$

випливає, що

$$\int_0^{\pi/2} c \sin x dx = 1, \qquad -c \cos x \Big|_0^{\pi/2} = 1, \quad c = 1.$$

Тоді за формулою (2) маємо

$$M\xi = \int_0^{\pi/2} x \sin x dx = -\int_0^{\pi/2} x d \cos x = -x \cdot \cos x \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x dx =$$

$$= \sin x \Big|_0^{\pi/2} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1. \quad \triangleright$$

Приклад 3. Знайти дисперсію випадкової величини ξ - числа очок, що випадає на гральному кубику при одному киданні.

◁ У нас ξ набуває значень : 1,2,3,4,5,6, з однаковою ймовірністю $p = 1/6$.

Спочатку знайдемо $M\xi$:

$$M\xi = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} =$$

$$= \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3,5.$$

Шукана дисперсія, згідно з формулою (6),

$$D\xi = (1 - 3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (2 - 3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (3 - 3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (4 - 3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} +$$

$$+ (5 - 3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (6 - 3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{17,5}{6} = \frac{35}{12}. \triangleright$$

Приклад 4. Випадкова величина ξ має щільність розподілу

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le -2, \\ h & \text{при} \quad -2 < x \le 3, \\ 0 & \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$$

Знайти h, $M\xi$ і $D\xi$.
$\triangleleft$ Для знаходження h скористаємося тим, що

$$1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{-2} 0dx + \int\limits_{-2}^{3} hdx + \int\limits_{3}^{+\infty} 0dx = hx\Big|_{-2}^{3} = 5h.$$

Таким чином, $5h = 1$ і $h = 0,2$. Знаходимо математичне сподівання за формулою (2):

$$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xp_\xi(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{-2} x \cdot 0dx + \int\limits_{-2}^{3} x \cdot 0,2dx +$$

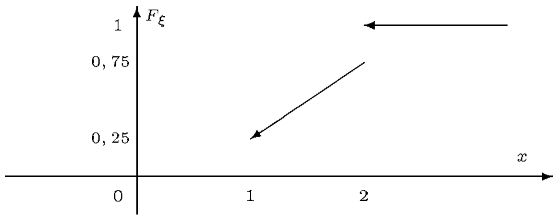
$$+ \int\limits_{3}^{+\infty} x \cdot 0dx = 0,2 \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{3} = 0,5.$$

Для обчислення дисперсії скористаємося формулою (7):

$$D\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-0,5)^2 p_\xi(x)dx = \int\limits_{-2}^{3} (x-0,5)^2 \cdot 0,2dx =$$

$$= 0,2 \cdot \frac{(x-0,5)^3}{3}\Big|_{-2}^{3} = \frac{6,25}{3} \approx 2,1. \quad \triangleright$$

Приклад 5. Змішана випадкова величина ξ має функцію розподілу, задану графічно



Знайти $M\xi$ і $D\xi$, якщо відомі ймовірності $P\{\xi = 1\} = 0,25$, $P\{\xi = 2\} = 0,25$.

◁ Очевидно, що при $x \leq 1$ $F_\xi(x) = 0$, а при $x > 2$ $F_\xi(x) = 1$.

Для знаходження виразу $F_\xi(x)$ при $1 < x \leq 2$ запишемо рівняння прямої, що проходить через точки $(1; 0,25)$ і $(2; 0,75)$:

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{F_\xi(x) - 0,25}{0,75 - 0,25}; \quad F_\xi(x) = \frac{x}{2} - 0,25.$$

Відомо, що для змішаної випадкової величини

$$M\xi = \sum_i x_i p_i + \int_I x F'_\xi(x) dx,$$

де сумування поширюється на всі значення x_i, ймовірності яких відмінні від нуля, а інтеграл - на всі проміжки, де F_ξ неперервна; I - множина проміжків неперервності функції F_ξ;

$$D\xi = \sum_i (x_i - M\xi)^2 p_i + \int_I (x - M\xi)^2 F'_\xi(x) dx.$$

Маємо

$$M\xi = 1 \cdot 0,25 + 2 \cdot 0,25 + \int_1^2 \frac{x}{2} dx = 0,75 + \left.\frac{x^2}{4}\right|_1^2 = 0,75 + 0,75 = 1,5;$$

$$M\xi^2 = 1^2 \cdot 0,25 + 2^2 \cdot 0,25 + \int_1^2 \frac{x^2}{2} dx = 0,25 + 1 + \left.\frac{x^3}{6}\right|_1^2 = 1,25 + \frac{7}{6} = \frac{29}{12}.$$

Тоді

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{29}{12} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{29}{12} - \frac{9}{4} = \frac{1}{6}. \triangleright$$

Вправи

О1. Дано перелік можливих значень дискретної випадкової величини ξ: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, а також дано математичні сподівання цієї випадкової величини та її квадрата: $M\xi = 0,1$, $M\xi^2 = 0,9$. Знайти ймовірності p_1, p_2, p_3, з якими набуваються значення x_1, x_2, x_3.

О2. Знайти $M\xi$, $D\xi$ та σ_ξ дискретної випадкової величини, що розподілена за законом

ξ	5	9	11	18	22
p	$0,3$	$0,1$	$0,3$	$0,2$	$0,1$

.

О3. Дискретна випадкова величина ξ має тільки два можливі значення x_1 і x_2, причому $x_2 > x_1$. Імовірність того, що ξ набуде значення x_1, дорівнює 0,6. Знайти закон розподілу випадкової величини ξ, якщо $M\xi = 1,4$; $D\xi = 0,24$.

О4. Кидають n гральних кубиків. Знайти математичне сподівання і дисперсію суми числа очок, які випадуть на всіх гранях.

О5. Знайти математичне сподівання дискретної випадкової величини ξ - числа таких кидань п'яти гральних кубиків, у кожному з яких на двох кубиках випаде по одному очку, якщо загальна кількість кидань дорівнює двадцяти.

О6. У технічному пристрої працюють незалежно два блоки. Імовірність безвідмовної роботи першого блоку дорівнює $p_1 = 0,4$, другого - $p_2 = 0,7$. Випадкова величина ξ - число працюючих блоків. Знайти її математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення.

О7. Випадкова величина ξ задана щільністю розподілу

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{c^2 - x^2}}, & x \in (-c, c), \\ 0, & x \notin (-c, c). \end{cases}$$

Знайти $M\xi$.

О8. Знайти математичне сподівання випадкової величини ξ, яка задана функцією розподілу

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \le 0, \\ x/4, & \text{при} \quad 0 < x \le 4, \\ 1, & \text{при} \quad x > 4. \end{cases}$$

<u>O9.</u> Випадкова величина ξ задана щільністю розподілу

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0, \pi), \\ 1/2 \sin x, & x \in (0, \pi). \end{cases}$$

Знайти $D\xi$.

<u>O10.</u> Для деякого обладнання час (в годинах) до першого ремонту є випадковою величиною ξ з щільністю розподілу

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \le 0, \\ 2x exp\{-x^2\}, & \text{при} \quad x > 0. \end{cases}$$

Знайти: 1) середній час до першого ремонту; 2) ймовірність того,
що впродовж перших двох років обладнання не потребуватиме ремонту.

<u>O11.</u> Випадкова величина ξ задана щільністю розподілу

$$p_\xi(x) = \begin{cases} a, & x \in (-2, 3], \\ 0, & x \notin (-2, 3]. \end{cases}$$

Знайти: 1) коефіцієнт a; 2) функцію розподілу F_ξ; 3) $M\xi$, $D\xi$; 4) $P\{1 < \xi < 5\}$.

<u>O12.</u> Випадкова величина ξ має функцію розподілу

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x^2/16, & 0 < x \le 2, \\ x - 7/4, & 2 < x \le 11/4, \\ 1, & x > 11/4. \end{cases}$$

Треба: 1) знайти щільність розподілу p_ξ; 2) побудувати графіки функцій F_ξ і p_ξ; 3) знайти $M\xi$, $D\xi$ і σ_ξ; 4) знайти $P\{1 \le \xi \le 1,5\}$.

<u>O13.</u> Тривалість життєвого циклу (в днях) для деякої рослини є випадковою величиною ξ зі щільністю розподілу

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x/20000, & 0 < x \le 200, \\ 0, & x > 200. \end{cases}$$

1) Яка середня тривалість життєвого циклу в цієї рослини? 2) Чому дорівнює ймовірність того, що рослина загине впродовж перших 30 днів? 3) Якщо рослина виживає впродовж 100 днів, то

з якою ймовірністю вона загине у наступні 30 днів?

<u>О14.</u> В експерименті з розселення популяцій комах у заданому місці була випущена велика кількість мурашок. Спостереження показали, що після 1 хв частина мурашок, які знаходяться від місця, де вони були випущені, на відстані не меншій, ніж x метрів, приблизно дорівнює e^{-2x}.

1) Яка частина мурашок, що пройшли більше одного метра від даного місця? 2) На яку середню відстань віддаляються мурашки від місця, де вони були випущені?

<u>С1.</u> Знайти дисперсію дискретної випадкової величини ξ, розподіленої за законом Пуассона

ξ	0	1	2	...	k	...
p	$e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!}$	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$	...	$\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	...

.

<u>С2.</u> Щільність розподілу p_ξ випадкової величини ξ визначається формулою (закон Лапласа)

$$p_\xi(x) = ae^{-|x|}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Знайти коефіцієнт a, $M\xi$ і $D\xi$.

<u>С3.</u> У шафі є 9 приладів ; з них 5 нових і 4 старі. З шафи навмання беруть 4 прилади; випадкова величина ξ - число нових приладів серед взятих. Побудувати ряд розподілу випадкової величини ξ. Обчислити математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення.

<u>С4.</u> Рівномірно розподілена випадкова величина ξ задана щільністю розподілу

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 1/(2l), & x \in (a-l; a+l) \\ 0, & x \notin (a-l; a+l). \end{cases}$$

Знайти математичне сподівання і дисперсію ξ.

<u>С5.</u> Двоє гравців укладають парі. Перший каже: "Ставлю 10 гривень проти трьох, що ти не влучиш у мішень."Другий, знаючи, що влучає в мішень з імовірністю $p = 0,3$, приймає парі. Чи має рацію другий гравець ?

<u>С6.</u> На заводі виготовлено 50 партій виробів, кожна з яких складається зі 100 однотипних виробів. Ймовірність, що кожний виріб потребує регулювання, не залежить від стану інших виробів і дорівнює 0,05. З кожної партії для контролю беруть 10 виробів. Якщо серед них є хоч один бракований, то вся партія повертається на доопрацювання, при цьому собівартість партії зростає на 500 гривень. Собівартість кондиційної партії складає 3000 гривень. Знайти середню собівартість цієї продукції та її середнє квадратичне відхилення.

C7. Одночасно і незалежно кинуто чотири гральні кубики. Випадкова величина ξ набуває значення 0, якщо хоч на одному кубику випала двійка; набуває значення 1, якщо двійка не випала ні разу, але хоч на одному кубику випала трійка, і набуває значення 2 в решті випадків. Знайти $M\xi$ і $D\xi$.

C8. Випадкова величина ξ задана своєю щільністю розподілу p_ξ :

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2, \\ kx^2, & -2 < x \le 4, \\ 0, & x > 4. \end{cases}$$

Знайти: 1) сталу k, функцію розподілу F_ξ, $M\xi$, $D\xi$; 2) ймовірність того, що $2 < \xi < 5$.

C9. Дитині дають шість предметів, з яких лише один проходить через отвір рамки. Дитина пробує просунути предмет через отвір. Яке очікуване число предметів, що їх випробує дитина, якщо :
1) один і той самий предмет не береться двічі; 2) у кожній спробі з однаковою ймовірністю може бути вибраним будь-який предмет?

Домашнє завдання

Д1. Випадкова величина ξ набуває три значення : $x_1 = 4$ з імовірністю $p_1 = 0,5$; $x_2 = 6$ з імовірністю $p_2 = 0,3$ і x_3 з імовірністю p_3. Знайти x_3 і p_3, знаючи, що $M\xi = 8$.

Д2. Число білетів у безпрограшній лотереї дорівнює 1000, а виграші розподіляються так: 500 білетів по 10 грн., 300 білетів по 20 грн., 150 білетів по 50 грн., 40 білетів по 100 грн., 10 білетів по 200 грн. Яка середня величина виграшу?

Д3. Проводяться незалежні випробування, в кожному з яких із ймовірністю 0,8 може відбутися якась подія A. Випробування проводяться до першої появи події A, а загальне число випробувань не перевищує чотирьох. Знайти середнє число здійснених випробувань.

Д4. Знайти $D\xi$ і σ_ξ випадкової величини ξ, заданої законом розподілу:

ξ	-5	2	3	4
p	$0,4$	$0,3$	$0,1$	$0,2$

.

Д5. Дискретна випадкова величина має тільки два значення x_1 і x_2, причому рівноможливих. Довести, що $D\xi = ((x_2 - x_1)/2)^2$.

Д6. З урни, що містить 4 білі і 6 чорних куль, випадковим чином і без повернення виймають 3 кулі. Випадкова величина ξ - число білих куль серед вийнятих. Описати закон розподілу і знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини ξ.

Д7. Щільність розподілу випадкової величини ξ задана виразом

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ a\cos x, & 0 < x \le \pi/2, \\ 0, & x > \pi/2. \end{cases}$$

Знайти коефіцієнт a, $M\xi$ і $D\xi$.

Д8. Щільність розподілу випадкової величини ξ має вигляд

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ ax^2, & 0 < x \le 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Знайти коефіцієнт a і $P\{|\xi - M\xi| \le 1/2\}$.

Д9. Випадкова величина ξ задана щільністю розподілу

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ -3x^2/4 + 9x/2 - 6, & 2 < x \le 4, \\ 0, & x > 4. \end{cases}$$

Знайти: 1) $M\xi$; 2) моду; 3) медіану.

Д10. В урні міститься 101 куля, які пронумеровані числами $0, 1, 2, \ldots, 100$. З урни навмання беруть кулю. Знайти дисперсію та стандарт випадкової величини ξ - числа очок на взятій кулі.

Д11. Знайти закон розподілу випадкової величини ξ, якщо вона може набувати лише два значення – x_1 і x_2, $x_2 > x_1$, і відомо, що $P\{\xi = x_1\} = 0,3$; $M\xi = 2,2$; $D\xi = 7,56$.

Д12. Випадкова величина ξ, щільність розподілу якої p_ξ, задана своєю функцією розподілу F_ξ :

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2, \\ \dfrac{\sqrt{x+2}}{2}, & -2 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Знайти: 1) p_ξ, $M\xi$, $D\xi$; 2) імовірність того, що $0 < \xi < 5$.

Д13. Знайти дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини ξ, заданої функцією розподілу

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2, \\ x/4 + 1/2, & -2 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Відповіді

О1. $p_1 = 0,4$, $p_2 = 0,1$, $p_3 = 0,5$.
О2. $M\xi = 11,5$; $D\xi = 32,85$; $\sigma_\xi = 5,7315$.
О3.

ξ	1	2
p	0,6	0,4

.

О4. $M\xi = M(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n) = nM\xi_1 = 7n/2$,
$D\xi = D(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n) = nD\xi_1 = 35n/12$.
О5. $M\xi = 20 \cdot P_5(2) = 3,215$. **О6.** $M\xi = 1,1$, $D\xi = 0,45$,
$\sigma_\xi = \sqrt{0,45} = 0,67$.
О7. $M\xi = 0$. **О8.** $M\xi = 2$. **09.** $D\xi = (\pi^2 - 8)/4$.
О10. 1) $\sqrt{\pi}/2$ (скористатись тим, що $\int\limits_0^{+\infty} exp\{-x^2\}dx = \sqrt{\pi}/2$);
2) $P\{\xi \ge 2\} = e^{-4}$.

О11. $a = 1/5$; $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < -2, \\ (x+2)/5, & -2 \le x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$

3) $M\xi = 1/2$, $D\xi = 25/12$; 4) $2/5$.

О12. 1) $p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x/8, & 0 \le x \le 2, \\ 1, & 2 < x \le 11/4, \\ 0, & x > 11/4. \end{cases}$

3) $M\xi \approx 2,1$, $D\xi \approx 1,2$, $\sigma_\xi \approx 1,0954$; 4) 0,078.
О13. 1) $M\xi \approx 133,3$; 2) $P\{\xi < 30\} = 0,0225$;

3) $1 - P\{\xi \geq 130 \big/ \xi \geq 100\} = 0,23$.

О14. 1) $F_\xi(x) = 1 - e^{-2x}$, $x \in \mathbb{R}$, $P\{\xi \geq 1\} = 1 - F_\xi(1) \approx 0,1353$; 2) $M\xi = 1/2$.

С1. $M\xi = \lambda$, $D\xi = \lambda$. **С2.** $a = 1/2$, $M\xi = 0$, $D\xi = 2$.

С3.

ξ	0	1	2	3	4
p	0,008	0,159	0,476	0,317	0,040

, $M\xi = 2,222$,

$$D\xi = 0,619.$$

С4. $M\xi = a$, $D\xi = l^2/3$. **С5.** Так (треба знайти математичні сподівання виграшів першого і другого гравців і порівняти їх).

С6. $M\xi = 160000$; $\sigma_\xi = 1735$. **С8.** 1) $k = 1/24$;

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2, \\ \dfrac{x^3+8}{72}, & -2 < x \leq 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

$M_\xi = 5/2$, $D_\xi = 31/20$; 2) $P\{2 < \xi < 5\} = 7/9$.

С9. 1) $M\xi = 3,5$; 2) $M\xi = 1/6$.

Д1. $x_3 = 21$, $p_3 = 0,2$. **Д2.** $M\xi = 24,5$. **Д3.** 1,248.

Д4. $M\xi = -0,3$, $D\xi = 15,21$, $\sigma_\xi = 3,9$.

Д6.

ξ	0	1	2	3
p	1/6	1/2	3/10	1/30

, $M\xi = 6/5$, $D\xi = 14/25$.

Д7. $a = 1$, $M\xi = (\pi/2) - 1$, $D\xi = \pi - 3$. **Д8.** $a = 3/8$, $P\{|\xi - M\xi| \leq 1/2\} = P\{1 \leq \xi \leq 2\} = 7/8$.

Д9. 1) $M\xi = 3$, 2) мода $x_0 = 3$, 3) медіана $x_{0,5} = 3$. **Д10.** $D\xi = 850$; $\sigma_\xi \approx 29,15$. **Д11.**

ξ	0,87	2,87
p	0,3	0,7

.

Д12. 1) $p_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\sqrt{x+2}}, & x \in (-2; 2), \\ 0, & x \notin (-2; 2); \end{cases}$

$M\xi = -2/3$; $D_\xi \approx 1,42$; 2) $P\{0 < \xi < 5\} \approx 0,293$.

Д13. $M\xi = 0$; $D\xi = 4/3$; $\sigma_\xi = 2/\sqrt{3}$.

Тема 11. Багатовимірні випадкові величини (випадкові вектори)

Нехай є впорядкована система n випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Називатимемо її **випадковим вектором** або n - **вимірною випадковою величиною** і позначатимемо так:

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n).$$

Тоді ξ_i - це i-та випадкова координата вектора ξ. Упорядковану систему з n випадкових величин можна розглядати й як випадкову точку з координатами ξ_1, $\xi_2, \ldots$, ξ_n у n - вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$.

Щоб задати випадковий вектор, треба вказати всі ті значення, яких він може набувати, і ймовірності, з якими ці значення набуваються. Універсальним способом задання випадкового вектора є задання його функції розподілу, яка визначається рівністю

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_n < x_n\},$$

$$(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Зупинимося детальніше на двовимірному випадку. При цьому нехай $\xi_1 = \xi$, а $\xi_2 = \eta$. Властивості функції розподілу двовимірної випадкової величини аналогічні властивостям функції розподілу випадкової величини. Перерахуємо їх.

1) $0 \le F(x, y) \le 1, (x,\, y) \in \mathbb{R}^2$.

2) F є неспадна функція з кожної із змінних.

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x, y) = 0,\ y \in \mathbb{R}$,

$\lim\limits_{y \to -\infty} F(x, y) = 0,\ x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} F(x, y) = 1$.

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x, y) = \lim\limits_{x \to +\infty} P\{\xi < x, \eta < y\} = P\{\eta < y\} =$
$= F_\eta(y),\ y \in \mathbb{R}$;

$\lim\limits_{y \to +\infty} F(x, y) = \lim\limits_{y \to +\infty} P\{\xi < x, \eta < y\} = P\{\xi < x\} = F_\xi(x)$,
$x \in \mathbb{R}$.

Двовимірну випадкову величину називають **дискретною**, якщо множина значень, яких вона може набути, є скінченною або зліченною. Для задання такої величини досить задати її можливі значення (x_i, y_k) і ймовірності кожного з них: $p_{ik} = P\{\xi = x_i, \eta = = y_k\}$. Закон розподілу такої величини може бути виражений у вигляді таблиці з двома входами

$\eta \setminus \xi$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	$\sum$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$	$p_{\cdot 1}$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$	$p_{\cdot 2}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
y_k	p_{1k}	p_{2k}	$\cdots$	p_{ik}	$\cdots$	$p_{\cdot k}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\sum$	$p_{1\cdot}$	$p_{2\cdot}$	$\cdots$	$p_{i\cdot}$	$\cdots$	1

Табл. 1.

Тут використано позначення: $p_{i\cdot} = \sum\limits_k p_{ik}, \quad p_{\cdot k} = \sum\limits_i p_{ik}$.

З аксіоми адитивності випливає, що

$$p_{i\cdot} = \sum_k p_{ik} = \sum_k P\{\xi = x_i, \eta = y_k\} = P\{\xi = x_i\};$$

аналогічно

$$p_{\cdot k} = P\{\eta = y_k\}.$$

Таким чином, імовірності $\{p_{i\cdot}, i \geq 1\}$ задають розподіл випадкової величини ξ, а $\{p_{\cdot k}, k \geq 1\}$ - розподіл випадкової величини η. При цьому

$$\sum_{i,k} p_{ik} = \sum_i p_{i\cdot} = \sum_k p_{\cdot k} = 1.$$

Функція розподілу випадкового вектора (ξ, η) визначається рівністю

$$F(x, y) = \sum_i \sum_k p_{ik},\ (x,\ y) \in \mathbb{R}^2,$$

де сумування поширюється на всі i, для яких $x_i < x$, а k набуває усіх значень, для яких $y_k < y$.

Приклад 1. Якість продукції характеризується двома випадковими параметрами ξ і η. Закон розподілу двовимірної випадкової величини (ξ, η) задано таблицею (виділена)

$\eta \setminus \xi$	5	6	7	$\sum$
0	0,2	0	0	0,2
0,1	0,1	0,15	0	0,25
0,2	0,05	0,15	0,1	0,3
0,3	0,05	0,1	0,1	0,25
$\sum$	0,4	0,4	0,2	1

.

Знайти закони розподілу випадкових величин ξ і η.

$\triangleleft$ Доповнимо таблицю рядком і стовпчиком зі знаком $\sum$, провівши сумування величин p_{ik} відповідно по рядках і стовпчиках. Тоді очевидно, що закони розподілу випадкових величин ξ і η мають вигляд:

ξ	5	6	7
p	0,4	0,4	0,2

,

η	0	0,1	0,2	0,3
p	0,2	0,25	0,3	0,25

. $\triangleright$

Двовимірну випадкову величину (ξ, η) називають **неперервною**, якщо існує така функція p, що функція розподілу F даної випадкової величини може бути подана у вигляді

$$F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \left(\int\limits_{-\infty}^{y} p(u,v)dv \right) du, \ (x,\, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Функцію p називають **щільністю розподілу випадкового вектора** (ξ, η). При цьому

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = p(x,y)$$

у точках неперервності функції p.

Щільність розподілу має такі властивості:

1) $p(x,y) \geq 0$, $(x,\, y) \in \mathbb{R}^2$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(u,v)dv \right) du = 1.$.

Знаючи щільність розподілу p двовимірної величини (ξ, η), легко знайти щільності розподілу для її компонент p_ξ та p_η. Справді,

$$F_\xi(x) = \lim_{y \to +\infty} F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(u,v)dv \right) du, \ x \in \mathbb{R},$$

звідки

$$p_\xi(x) = \frac{dF_\xi(x)}{dx} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x,u)du,\ x \in \mathbb{R};$$

аналогічно

$$F_\eta(y) = \lim_{x\to+\infty} F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{y} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(u,v)du \right) dv,\ y \in \mathbb{R},$$

і

$$p_\eta(y) = \frac{dF_\eta(x)}{dy} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(u,y)du,\ y \in \mathbb{R}.$$

Нехай задана дискретна двовимірна випадкова величина (ξ,η). Розглянемо функцію розподілу випадкової величини ξ за умови, що η набула значення y_j, $j \in \{1,\dots,n\}$. Цю функцію позначають $F(x/y_j)$. Імовірність того, що ξ набуває значення x_i, коли η набуло значення y_j, дорівнює

$$p(x_i/y_j) = \frac{P\{\xi = x_i, \eta = y_j\}}{P\{\eta = y_j\}} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} \quad (p_{\cdot j} \neq 0),$$

аналогічно

$$p(y_j/x_i) = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}} \quad (p_{i\cdot} \neq 0).$$

У випадку неперервного розподілу вектора (ξ,η) з'являються умовні щільності розподілу ξ, коли $\eta = y$, і η, коли $\xi = x$. Можна довести, що

$$p(x/y) = \frac{p(x,y)}{p_\eta(y)} = \frac{p(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dx},\quad p(y/x) = \frac{p(x,y)}{p_\xi(x)} = \frac{p(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dy},$$

де $(x,\,y) \in \mathbb{R}^2$.

Випадкова величина ξ називається **незалежною** від випадкової величини η, якщо розподіл ξ не залежить від того, якого значення набула випадкова величина η. Аналогічно визначається незалежність η від ξ. Якщо величини ξ і η незалежні, то $p_{ij} = p_{i\cdot}p_{\cdot j}$ (дискретний розподіл) і $p(x,y) = p_{\xi}(x)p_{\eta}(y)$, $(x,\,y) \in \mathbb{R}^2$ (неперервний розподіл).

Приклад 2. Нехай щільність розподілу двовимірної випадкової величини

$$p(x,y) = \begin{cases} 2e^{-x-2y} & \text{, при} \quad x \geq 0, y \geq 0, \\ 0 & \text{, в інших випадках.} \end{cases}$$

Знайти функції розподілу випадкового вектора (ξ, η), випадкових величин ξ і η, умовні щільності розподілу.

$\triangleleft$ Спочатку доведемо коректність означення випадкового вектора (ξ, η):

1) $p(x,y) \geq 0$, $(x,\,y) \in \mathbb{R}^2$, що очевидно.

$$2)\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dx\right)dy = 2\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}dx \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-2y}dy =$$

$$= 2(-e^{-x})\Big|_{0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-2y}\right)\Big|_{0}^{+\infty} = 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = 1.$$

Знайдемо функцію розподілу даного випадкового вектора (ξ, η):

$$F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x}\left(\int\limits_{-\infty}^{y} p(u,v)dv\right)du = 2\int\limits_{0}^{x}\left(\int\limits_{0}^{y} e^{-u-2v}dv\right)du =$$

$$= 2\int\limits_{0}^{x} e^{-u}du\int\limits_{0}^{y} e^{-2v}dv = \left(-e^{-u}\right)\Big|_{0}^{x}\left(e^{-2v}\right)\Big|_{0}^{y} =$$

$$= \left(1-e^{-x}\right)\left(1-e^{-2y}\right) \quad \text{при} \quad x \geq 0, y \geq 0.$$

Для всіх інших точок (x,y) $\;F(x,y) = 0$. Очевидно, що $p(x/y) = 0$ при $x < 0$, бо ξ не набуває від'ємних значень; якщо $x \geq 0$, то

$$p(x/y) = \frac{p(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dx} =$$

$$= \frac{2e^{-x-2y}}{\int\limits_0^{+\infty} 2e^{-x-2y}dx} = \frac{2e^{-x}e^{-2y}}{2e^{-2y}\left(-e^{-x}\right)\big|_0^{+\infty}} = \frac{e^{-x}}{1} = e^{-x}.$$

Далі

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(u,y)dy \right) du = \int\limits_0^x du \int\limits_0^{+\infty} 2e^{-u-2y}dy =$$

$$= \int\limits_0^x e^{-u}du \cdot 2 \int\limits_0^{+\infty} e^{-2y}dy =$$

$$= \left(-e^{-u}\right)\Big|_0^x \left(-e^{-2y}\right)\Big|_0^{+\infty} = 1 - e^{-x} \quad \text{при} \quad x \geq 0,$$

$F_\xi(x) = 0 \quad$ при $\quad x < 0$.

Аналогічно $p(y/x) = 0$ при $y < 0$ і $p(y/x) = 2e^{-2y}$ при $y \geq 0$; $F_\eta(y) = 1 - e^{-2y}$ при $y \geq 0$, $F_\eta(y) = 0$ при $y < 0$. $\triangleright$

Вправи

О1. В урні є чотири кулі: 2 білі, 1 чорна і 1 синя. З урни навмання беруть дві кулі. Знайти закон розподілу двовимірної випадкової величини (ξ, η), де ξ - число чорних, а η - число синіх куль у вибірці.

О2. Двовимірна дискретна випадкова величина задана законом розподілу

$\eta \setminus \xi$	$0,01$	$0,02$	$0,03$	$0,04$
$0,02$	$0,01$	$0,02$	$0,04$	$0,04$
$0,04$	$0,03$	$0,24$	$0,15$	$0,06$
$0,06$	$0,04$	$0,10$	$0,08$	$0,08$
$0,08$	$0,02$	$0,04$	$0,03$	$0,02.$

Знайти: 1) безумовні закони розподілу η і ξ;

2) умовний закон розподілу ξ за умови, що $\eta = 0,06$ і умовний закон розподілу η при $\xi = 0,02$.

О3. Закон розподілу випадкового вектора (ξ, η) дискретного типу задається таблицею

$\eta \setminus \xi$	1	2	3
-1	0,05	0,05	0,10
0	0,10	0,15	0,05
1	0,15	0,15	0
2	0,10	0,05	0,05.

Знайти : 1) безумовні закони розподілу ξ і η;

2) умовний закон розподілу ξ за умови, що $\eta = 2$, і умовний закон розподілу η за умови, що $\xi = 1$, 3) $P\{\eta < \xi\}$.

О4. Дано щільність розподілу системи випадкових величин (ξ, η):

$$p(x,y) = \begin{cases} a\sin(x+y), & 0 \le x \le \pi/2, \qquad 0 \le y \le \pi/2; \\ 0, & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Знайти коефіцієнт a і функцію розподілу випадкової величини (ξ, η).

О5. Система випадкових величин (ξ, η) підпорядкована закону розподілу зі щільністю

$$p(x,y) = \begin{cases} a(x+y) \text{ в області } Q, \\ 0, \qquad \text{поза цією областю,} \end{cases}$$

де Q - квадрат, обмежений прямими $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$, $y = 3$. Треба знайти: 1) коефіцієнт a; 2) $P\{(\xi, \eta) \in D\}$, де D - квадрат, обмежений прямими $x = 1$, $x = 2$, $y = 1$, $y = 2$.

О6. Система випадкових величин (ξ, η) розподілена за законом

$$p(x,y) = \frac{a}{1 + x^2 + x^2y^2 + y^2}, \ (x,\, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Визначити коефіцієнт a. Перевірити, чи є величини ξ і η залежними. Знайти p_ξ, p_η і ймовірність попадання випадкової величини (ξ, η) в квадрат, центр якого збігається з початком координат, а сторони паралельні осям координат і мають довжину $b = 2$.

<u>С1.</u> Нехай щільність розподілу системи невід'ємних випадкових величин визначається формулою

$$p(x,y) = \begin{cases} kxy\exp\{-(x^2+y^2)\}, & x \geq 0, y \geq 0, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Знайти k, p_ξ, p_η, $p(x/y)$, $p(y/x)$.

<u>С2.</u> Два стрільці, незалежно один від одного, роблять по два поодиноких (незалежних) постріли кожний по своїй мішені. Випадкова величина ξ - число влучень першого стрільця, η - другого стрільця. Імовірність влучення при одному пострілі для першого стрільця $p_1 = 0,7$, для другого $p_2 = 0,4$. Побудувати закон розподілу двовимірної випадкової величини (ξ, η) і закони розподілу випадкових величин ξ і η. Знайти функцію розподілу F.

<u>С3.</u> Тричі незалежно підкидається гральний кубик. Нехай ξ - число появ четвірок, η - число появ парних чисел. Знайти ймовірність $P\{2\xi \geq \eta\}$.

<u>Домашнє завдання</u>

<u>Д1.</u> Закон розподілу системи двох випадкових величин (ξ, η) задано таблицею розподілу

$\eta \setminus \xi$	0	1	2	3
-1	0,01	0,06	0,05	0,04
0	0,04	0,24	0,15	0,07
1	0,05	0,10	0,10	0,09.

Знайти: 1) безумовні закони розподілу ξ і η; 2) умовний закон розподілу ξ за умови, що $\eta = 0$, і умовний закон розподілу η при $\xi = 2$.

<u>Д2.</u> Система випадкових величин (ξ, η) задана щільністю розподілу

$$p(x,y) = \begin{cases} \cos x \cos y, & 0 \leq x \leq \pi/2;\ 0 \leq y \leq \pi/2, \\ 0, & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу системи (ξ, η).

<u>Д3.</u> Випадковий вектор $(\xi,\, \eta)$ має закон розподілу

$\eta \setminus \xi$	-1	0	1
0	$0,1$	$0,2$	0
1	$0,2$	$0,3$	$0,2$

.

Знайти: 1) закони розподілу компонент ξ і η; 2) $P\{\xi < 1\}$; 3) $P\{\xi < 1, \eta > 0\}$.

<u>Д4.</u> Якість продукції характеризується двома випадковими параметрами ξ і η. Закон розподілу двовимірного вектора (ξ, η) задано таблицею

$\eta \setminus \xi$	5	6	7
0	$0,2$	0	0
$0,1$	$0,1$	$0,15$	0
$0,2$	$0,05$	$0,15$	$0,1$
$0,3$	$0,05$	$0,1$	$0,1$

.

Знайти: 1) умовний розподіл випадкової величини ξ за умови, що $\eta = 0,1$; 2) умовний розподіл випадкової величини η за умови, що $\xi = 6$.

<u>Д5.</u> Двовимірна випадкова величина (ξ, η) задана таблицею розподілу

$\eta \setminus \xi$	-1	1
-1	$1/8$	$5/24$
0	$1/6$	$1/6$
1	$5/24$	$1/8$

.

Знайти: 1) закони розподілу випадкових величин ξ і η; 2) умовний розподіл випадкової величини η за умови, що $\xi = -1$; 3) $P\{\xi < \eta\}$.

<u>Д6.</u> Система випадкових величин (ξ, η) має щільність розподілу

$$p(x, y) = \frac{A}{\pi^2(16 + x^2)(25 + y^2)},\ (x,\, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Треба знайти: 1) величину A, 2) функцію розподілу F.

<u>Д7</u> Щільність розподілу двовимірної випадкової величини (ξ, η) задана формулою

$$p(x, y) = Ae^{-ax^2+bxy-cy^2}, a > 0, c > 0, \ (x,\ y) \in \mathbb{R}^2.$$

Знайти щільності розподілу p_ξ і p_η. Для яких значень параметрів ξ і η є незалежними випадковими величинами ?

<u>Д8.</u> Щільності розподілів випадкових величин ξ і η задаються відповідно формулами

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x \le -1, \\ 1/3 \quad \text{при} \quad -1 < x \le 2, \\ 0 \quad \text{при} \quad x > 2; \end{cases}$$

$$p_\eta(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x \le 2, \\ 1/5 \quad \text{при} \quad 2 < x \le 7, \\ 0 \quad \text{при} \quad x > 7. \end{cases}$$

Випадкові величини ξ і η незалежні. Знайти ймовірність того, що випадкова величина (ξ, η) попала в прямокутник $\Pi \equiv \{(x, y)| -2 \le x \le 1, 3 \le y \le 5\}$.

<u>Д9.</u> Пара випадкових величин (ξ, η) визначається таким чином: якщо при підкиданні грального кубика випадає парне число, то $\xi = 1$, в протилежному випадку $\xi = 0$; $\eta = 1$, коли число очок кратне трьом, у протилежному випадку $\eta = 0$. Написати закон розподілу випадкового вектора (ξ, η), безумовні та умовні закони розподілу ξ і η.

<u>Д10.</u> Нехай ξ і η - координати випадкової точки - розподілені рівномірно всередині прямокутника $\Pi \equiv \{(x, y)|a \le x \le b, c \le y \le \le d\}$. Знайти щільність розподілу та функцію розподілу двовимірної випадкової величини $(\xi,\ \eta)$.

<u>Д11.</u> Нехай є двовимірна випадкова величина $(\xi,\ \eta)$, де випадкова величина ξ розподілена за показниковим законом з параметром λ

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0 \qquad \text{при} \quad x \le 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{при} \quad x > 0, \end{cases}$$

а випадкова величина η при заданому значенні $\xi = x$, $x > 0$, розподілена також за показниковим законом, але з параметром x

$$p_\eta(y \setminus x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad y \le 0, \\ xe^{-xy} & \text{при} \quad y > 0. \end{cases}$$

Знайти: 1) щільність розподілу p двовимірної випадкової величини (ξ, η); 2) щільність розподілу p_η випадкової величини η;
3) умовну щільність розподілу $p_\xi(x \setminus y)$.

Відповіді

О1.

$\eta \setminus \xi$	0	1
0	1/6	1/3
1	1/3	1/6

.

О2. 1)

ξ	0.01	0.02	0.03	0.04
p	0.10	0.40	0.30	0.20

;

η	0.02	0.04	0.06	0.08
p	0.11	0.48	0.30	0.11

.

2)

$\eta = 0.06$

ξ	0.01	0.02	0.03	0.04
p	0.133	0.333	0.267	0.267

;

$\xi = 0.02$

η	0.02	0.04	0.06	0.08
p	0.05	0.60	0.25	0.10

.

О3. 1)

ξ	1	2	3
p	0.4	0.4	0.2

;

η	-1	0	1	2
p	0.2	0.3	0.3	0.2

.

2) $\eta = 2$

ξ	1	2	3
p	0.5	0.25	0.25

;

3) $P\{\eta < \xi\} = 0,7$.

$\xi = 1$

η	-1	0	1	2
p	0.125	0.250	0.375	0.250

.

O4. $a = 1/2$;

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & x \le 0, y \le 0, \\ -1/2\sin(x+y) + 1/2\sin y + 1/2\sin x, & 0 < x < \pi/2, \\ & 0 < y < \pi/2, \\ 1/2(1+\sin x - \cos x), & 0 < x < \pi/2, \quad y \ge \pi/2, \\ 1/2(1+\sin y - \cos y), & x \ge \pi/2, \quad 0 < y < \pi/2, \\ 1, & x > \pi/2, y > \pi/2. \end{cases}$$

O5. 1) $a = 1/27$; 2) $P\{(\xi,\eta) \in D\} = 1/9$.

O6. $a = 1/\pi^2$, $p_\xi(x) = 1/(\pi(1+x^2))$, $x \in \mathbb{R}$, $p_\eta(y) = 1/(\pi(1+y^2))$, $y \in \mathbb{R}$, $p(x,y) = p_\xi(x)p_\eta(y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $P\{(\xi,\eta) \in \Pi\} = 1/4$.

C1. $k = 4$; $p_\xi(x) = 2xe^{-x^2}, x \ge 0$; $p_\eta(y) = 2ye^{-y^2}, y \ge 0$; $p(x/y) = 2xe^{-x^2}$, $x \ge 0$; $p(y/x) = 2ye^{-y^2}$, $y \ge 0$.

C2.

$\eta \setminus \xi$	0	1	2
0	0,0324	0,1512	0,1764
1	0,0432	0,2016	0,2352
2	0,0144	0,0672	0,0784

;

ξ	0	1	2
p	0.09	0.42	0.49

;

η	0	1	2
p	0.36	0.48	0.16

;

$F(x,y)$:

$y \setminus x$	$x \le 0$	$0 < x \le 1$	$1 < x \le 2$	$x > 2$
$y \le 0$	0	0	0	0
$0 < y \le 1$	0	0,0324	0,1836	0,3600
$1 < y \le 2$	0	0,0756	0,4284	0,8400
$y > 2$	0	0,0900	0,5100	1

.

Д1. 1)

ξ	0	1	2	3
p	0,10	0,4	0,3	0,20

,

η	−1	0	1
p	0,16	0,50	0,34

.

2) $\eta = 0$

ξ	0	1	2	3
p	0,08	0,48	0,3	0,14

;

$\xi = 2$

η	−1	0	1
p	0,167	0,5	0,333

.

Д2.

$$F(x,y)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \quad y\le 0,\\ \sin x\sin y, & 0<x<\pi/2, \quad 0<y<\pi/2,\\ \sin x, & 0<x<\pi/2, \quad y\ge\pi/2,\\ \sin y, & x\ge\pi/2, \quad 0<y<\pi/2,\\ 1, & x>\pi/2, \quad y>\pi/2. \end{cases}$$

Д3. 1)

$$\begin{array}{c|ccc} \xi & -1 & 0 & 1\\ \hline p & 0,3 & 0,5 & 0,2 \end{array}, \qquad \begin{array}{c|cc} \eta & 0 & 1\\ \hline p & 0,3 & 0,7 \end{array}.$$

2) 0,8; 3) 0,5.

Д4. 1) $\eta=0,1$ $\begin{array}{c|ccc} \xi & 5 & 6 & 7\\ \hline p & 2/5 & 3/5 & 0 \end{array}$;

2) $\xi=6$ $\begin{array}{c|cccc} \eta & 0 & 0,1 & 0,2 & 0,3\\ \hline p & 0 & 3/8 & 3/8 & 1/4 \end{array}$.

Д5. 1)

$$\begin{array}{c|cc} \xi & -1 & 1\\ \hline p & 0,5 & 0,5 \end{array}, \qquad \begin{array}{c|ccc} \eta & -1 & 0 & 1\\ \hline p & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}.$$

2) $\xi=-1$ $\begin{array}{c|ccc} \eta & -1 & 0 & 1\\ \hline p & 1/4 & 1/3 & 5/12 \end{array}$; 3) $3/8$.

Д6. 1) $A=20$; 2) $F(x,y)=\dfrac{1}{\pi^2}(arctg(x/4)+\pi/2)\times$

$\times(arctg(y/5)+\pi/2)$, $(x,\,y)\in\mathbb{R}^2$.

Д7.

$$p_\xi(x)=A\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{c}}\exp\left\{-\left(a-\frac{b^2}{4c}\right)x^2\right\},\ x\in\mathbb{R},$$

$$p_\eta(y)=A\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}\exp\left\{-\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)y^2\right\},\ y\in\mathbb{R};$$

ξ і η є незалежними при $b=0$, $A=\sqrt{ac}/\pi$.

Д8. $P\{(\xi,\eta)\in\Pi\}=2/5$.

Д9.

$\eta\setminus\xi$	0	1
0	1/3	1/3
1	1/6	1/6

Безумовні закони розподілу:

ξ	0	1
p	$1/2$	$1/2$

;

η	0	1
p	$2/3$	$1/3$

.

Умовні закони розподілу:

$\eta = 0$

ξ	0	1
p	$1/2$	$1/2$

; $\eta = 1$

ξ	0	1
p	$1/2$	$1/2$

;

$\xi = 0$

η	0	1
p	$2/3$	$1/3$

; $\xi = 1$

η	0	1
p	$2/3$	$1/3$

.

Д10.

$$p(x,\, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)(d-c)} & \text{при} \quad (x,\, y) \in \Pi, \\ 0 & \text{при} \quad (x,\, y) \notin \Pi; \end{cases}$$

$$F(x,\, y) = F_\xi(x) \cdot F_\eta(y),\ (x,\, y) \in \mathbb{R}^2,$$

де

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при} \quad a < x \le b, \\ 1 & \text{при} \quad x > b; \end{cases}$$

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad y \le c, \\ \dfrac{y-c}{d-c} & \text{при} \quad c < y \le d, \\ 1 & \text{при} \quad y > d. \end{cases}$$

Д11.

$$p(x,\, y) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0 \ \text{ або } \ y \le 0, \\ \lambda x e^{-(\lambda + y)x} & \text{при} \quad x > 0 \ \text{ і } \ y > 0; \end{cases}$$

$$p_\eta(y) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad y \le 0, \\ \dfrac{\lambda}{(\lambda + y)^2} & \text{при} \quad y > 0; \end{cases}$$

$$p_\xi(x \setminus y) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ x(\lambda + y)^2 e^{-(\lambda + y)x} & \text{при} \quad x > 0, \end{cases} \quad \text{при } y > 0.$$

Тема 12. Числові характеристики багатовимірних випадкових величин

Нехай задано n-вимірну випадкову величину $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. **Математичним сподіванням** цієї випадкової величини називається n-вимірний вектор $(M\xi_1, M\xi_2, \ldots, M\xi_n)$, де $M\xi_k$ - математичне сподівання випадкової величини ξ_k.

Дисперсією (або дисперсійною матрицею) n-вимірної випадкової величини називається сукупність n^2 чисел, що визначаються формулами

$$b_{ik} = M((\xi_i - M\xi_i)(\xi_k - M\xi_k)), \quad \{i, k\} \subset \{1, 2, \ldots, n\},$$

при цьому $b_{ik} = b_{ki}$.

Розглянемо двовимірну випадкову величину. Якщо (ξ, η) є дискретною випадковою величиною, заданою законом розподілу

$\eta \setminus \xi$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	$\sum$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$	$p_{\cdot 1}$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$	$p_{\cdot 2}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
y_k	p_{1k}	p_{2k}	$\cdots$	p_{ik}	$\cdots$	$p_{\cdot k}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\sum$	$p_{1\cdot}$	$p_{2\cdot}$	$\cdots$	$p_{i\cdot}$	$\cdots$	1

Табл. 1,

то

$$M\xi = \sum_i x_i p_{i\cdot}, \quad M\eta = \sum_k y_k p_{\cdot k},$$

$$b_{11} = M(\xi - M\xi)^2 = D\xi = \sum_i (x_i - M\xi)^2 p_{i\cdot},$$

$$b_{22} = M(\eta - M\eta)^2 = D\eta = \sum_k (y_k - M\eta)^2 p_{\cdot k}.$$

$$b_{12} = M((\xi - M\xi)(\eta - M\eta)) = M(\xi\eta) - M\xi M\eta.$$

Величина b_{12} називається **коваріацією** випадкових величин і позначається символом $cov(\xi, \eta)$. У випадку дискретної випадкової величини коваріація обчислюється за формулою

$$b_{12} \equiv cov(\xi, \eta) = \sum_i \sum_k (x_i - M\xi)(y_k - M\eta)p_{ik}.$$

Якщо ж (ξ, η) є неперервною випадковою величиною зі щільністю розподілу p, то

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x \left(\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dy \right) dx, \quad M\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} y \left(\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dx \right) dy,$$

$$b_{11} = D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dy \right) dx,$$

$$b_{22} = D\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} (y - M\eta)^2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dx \right) dy,$$

$$b_{12} = cov(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (y - M\eta)p(x,y)dy \right) dx.$$

Коефіцієнтом кореляції між випадковими величинами ξ і η називається число

$$\rho = \rho(\xi, \eta) = \frac{cov(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi \cdot D\eta}}.$$

Коефіцієнт кореляції має властивості:
1) $\rho(\xi, \eta) = \rho(\eta, \xi)$;
2) $\rho(\xi, \xi) = 1$;
3) $|\rho(\xi, \eta)| \leq 1$;
4) якщо ξ і η незалежні, то $\rho(\xi, \eta) = 0$;

5) якщо $\rho(\xi, \eta) = \pm 1$, то між ξ і η існує лінійна функціональна залежність.

Приклад 1. Двовимірна випадкова величина задана законом розподілу

$\eta \setminus \xi$	1	2	3
1	1/18	1/9	1/6
2	1/12	1/6	1/4
3	1/36	1/18	1/12

Знайти $M\xi$, $M\eta$, $D\xi$, $D\eta$, $cov(\xi, \eta)$, $\rho(\xi, \eta)$.

$\triangleleft$ Знайдемо спочатку закони розподілу одновимірних випадкових величин ξ і η:

ξ	1	2	3
p	1/6	1/3	1/2

η	1	2	3
p	1/3	1/2	1/6

Тоді

$$M\xi = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{3}; \qquad M\eta = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{6};$$

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M\xi^2 - (M\xi)^2 = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{3} + 3^2 \cdot \frac{1}{2} - \left(\frac{7}{3}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{4}{3} + \frac{9}{2} - \frac{49}{9} = 6 - \frac{49}{9} = \frac{5}{9};$$

$$D\eta = M\eta^2 - (M\eta)^2 = 1^2 \cdot \frac{1}{3} + 2^2 \cdot \frac{1}{2} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} - \left(\frac{11}{6}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{3} + 2 + \frac{3}{2} - \frac{121}{36} = \frac{12 + 72 + 54 - 121}{36} = \frac{17}{36};$$

$$cov(\xi, \eta) = M((\xi - M\xi)(\eta - M\eta)) = M(\xi\eta) - M\xi M\eta =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{18} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{9} + 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{18} +$$

$$+ 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{12} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{12} - \frac{7}{3} \cdot \frac{11}{6} = \frac{154}{36} - \frac{77}{18} = 0.$$

Оскільки $cov(\xi, \eta) = 0$, то $\rho(\xi, \eta) = 0$.

Як відомо, вектор $(M\xi, M\eta) = \left(\frac{7}{9}; \frac{11}{6}\right)$ є **математичним сподіванням** двовимірної випадкової величини (ξ, η). Матриця

$$\begin{pmatrix} D\xi & cov(\xi,\eta) \\ cov(\xi,\eta) & D\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/9 & 0 \\ 0 & 17/36 \end{pmatrix}$$

є **дисперсійною матрицею (коваріаційною матрицею)** двовимірної випадкової величини. $\triangleright$

Приклад 2. Система випадкових величин (ξ, η) підпорядкована закону розподілу зі щільністю

$$p(x,y) = \begin{cases} a(x+y), & \text{якщо} \quad (x,\, y) \in D; \\ 0, & \text{якщо} \quad (x,\, y) \notin D \end{cases}$$

Область D - квадрат, обмежений прямими $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$, $y = 3$. Треба: 1) визначити коефіцієнт a; 2) обчислити ймовірність попадання випадкової величини (ξ, η) в квадрат Q, обмежений прямими $x = 1$, $x = 2$, $y = 1$, $y = 2$; 3) знайти $M\xi$, $M\eta$, $D\xi$, $D\eta$, $cov(\xi,\eta)$, $\rho(\xi,\eta)$.

$\triangleleft$ 1) Коефіцієнт a знаходимо з рівняння

$$a\int_0^3 \left(\int_0^3 (x+y)dy\right) dx = 1,$$

звідки

$$a\int_0^3 \left(\int_0^3 (x+y)dy\right) dx = a\int_0^3 \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^3 dx = a\int_0^3 \left(3x + \frac{9}{2}\right) dx =$$

$$= a\left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x\right)\Bigg|_0^3 = a\left(\frac{27}{2} + \frac{27}{2})\right) = 27a, \quad 27a = 1,$$

тобто $a = 1/27$.

$$2) P\{(\xi,\eta) \in Q\} = \frac{1}{27}\int_1^2 \left(\int_1^2 (x+y)dy\right) dx = \frac{1}{27}\int_1^2 \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 dx =$$

$$= \frac{1}{27}\int_1^2 \left(x + \frac{3}{2}\right) dx = \frac{1}{27}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x\right)\Bigg|_1^2 = \frac{1}{27}\left(2 + 3 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{9}.$$

3) Знайдемо $M\xi$ і $M\eta$. Маємо

$$M\xi = \frac{1}{27}\int_0^3 \left(\int_0^3 x(x+y)dy\right) dx = \frac{1}{27}\int_0^3 \left(x^2y + \frac{xy^2}{2}\right)\Bigg|_0^3 dx =$$

$$= \frac{1}{27}\int_0^3 \left(3x^2 + \frac{9}{2}x\right) dx = \frac{1}{27}\left(x^3 + \frac{9}{4}x^2\right)\Bigg|_0^3 = \frac{1}{27}\left(27 + \frac{81}{4}\right) = \frac{7}{4};$$

$$M\eta = \frac{1}{27}\int_0^3 \left(\int_0^3 y(x+y)dx\right) dy = \frac{7}{4}.$$

Обчислимо $D\xi$, $D\eta$ і $cov(\xi, \eta)$:

$$D\xi = \frac{1}{27}\int_0^3 \left(\int_0^3 (x - M\xi)^2(x+y)dy\right) dx = \frac{1}{27}\int_0^3 \left(\int_0^3 \left(x - \frac{7}{4}\right)^2 (x+y)dy\right) dx =$$

$$= \frac{1}{27}\int_0^3 \left(x - \frac{7}{4}\right)^2 \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^3 dx = \frac{1}{27}\int_0^3 \left(x - \frac{7}{4}\right)^2 \left(3x + \frac{9}{2}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^3 \left(x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{49}{16}\right)(x + 3/2)dx = \frac{1}{9}\int_0^3 \left(x^3 - 2x^2 - \frac{35}{16}x + \frac{147}{32}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{35x^2}{32} + \frac{147x}{32}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{1}{9}\left(\frac{3^4}{4} - \frac{2\cdot 3^3}{3} - \frac{35\cdot 3^2}{32} + \right.$$

$$\left. + \frac{147\cdot 3}{32}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{27}{4} - 6 - \frac{105}{32} + \frac{147}{32}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4} + \frac{42}{32}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{66}{32} = \frac{11}{16};$$

аналогічно

$$D\eta = \frac{1}{27}\int_0^3 \left(\int_0^3 (y - M\eta)^2(x+y)dx\right) dy =$$

$$= \frac{1}{27}\int_0^3 \left(\int_0^3 \left(y - \frac{7}{4}\right)^2 (x+y)dx\right) dy = \frac{11}{16};$$

$$cov(\xi,\eta)=\frac{1}{27}\int\limits_0^3\left(\int\limits_0^3(x-7/4)(y-7/4)(x+y)dy\right)dx=$$

$$=\frac{1}{27}\int\limits_0^3(x-7/4)\left(\int\limits_0^3\left(y-\frac{7}{4}\right)(x+y)dy\right)dx=$$

$$=\frac{1}{27}\int\limits_0^3(x-7/4)\left(x\left(y^2/2-\frac{7}{4}y\right)\Bigg|_0^3+\frac{y^3}{3}\Bigg|_0^3-\frac{7}{8}y^2\Bigg|_0^3\right)dx=$$

$$=-\frac{1}{36}\int\limits_0^3(x-7/4)(x-3/2)dx=-\frac{1}{36}\int\limits_0^3(x^2-7x/4-3x/2+21/8)dx=$$

$$=-\frac{1}{36}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{7}{8}x^2-\frac{3}{4}x^2+\frac{21}{8}x\right)\Bigg|_0^3=-\frac{1}{36}\left(9-\frac{63}{8}-\frac{27}{4}+\frac{63}{8}\right)=-\frac{1}{16}.$$

Тоді

$$\rho(\xi,\eta)=\frac{-1/16}{\sqrt{\frac{11}{16}}\sqrt{\frac{11}{16}}}=-\frac{1}{11}.\ \triangleright$$

Вправи

О1. Двовимірна випадкова величина (ξ,η) задана законом розподілу

$\eta \setminus \xi$	-1	0	1
-1	$1/6$	$1/6$	$1/6$
1	$1/4$	$1/8$	$1/8$

Знайти $M\xi$, $D\xi$, $M\eta$, $D\eta$, $cov(\xi,\eta)$, $\rho(\xi,\eta)$.

О2. Дано незалежні випадкові величини ξ і η :

ξ	0	1	2
p	$0,25$	$0,5$	$0,25$

,

ξ	0	1	2	3
p	$0,4$	$0,3$	$0,2$	$0,1$

.

Знайти: 1) закони розподілу суми $\xi+\eta$ і добутку $\xi\eta$ випадкових величин ξ і η; 2) $M\xi$, $M\eta$, $M(\xi+\eta)$, $M(\xi\eta)$; 3) $D\xi$, $D\eta$, $D(\xi+\eta)$.

O3. Двовимірна випадкова величина (ξ, η) має закон розподілу

$\eta \setminus \xi$	0	1
-1	$0,1$	$0,15$
0	$0,15$	$0,25$
1	$0,2$	$0,15$

.

Знайти: 1) $M\xi$, $M\eta$; 2) кореляційну матрицю; 3) коефіцієнт кореляції ξ і η.

O4. Система випадкових величин (ξ, η) задана законом розподілу:

$\eta \setminus \xi$	0	1	2	3	4	5	6
0	$0,202$	$0,174$	$0,113$	$0,062$	$0,049$	$0,023$	$0,004$
1	0	$0,099$	$0,064$	$0,040$	$0,031$	$0,020$	$0,006$
2	0	0	$0,031$	$0,025$	$0,018$	$0,013$	$0,008$
3	0	0	0	$0,001$	$0,002$	$0,004$	$0,011$

.

Знайти $M\xi$, $D\xi$, $M\eta$, $D\eta$, $cov(\xi, \eta)$.

O5. Дано щільність розподілу системи випадкових величин (ξ, η):

$$p(x, y) = \begin{cases} 0,5\sin(x+y), & 0 \le x \le \pi/2,\ 0 \le y \le \pi/2, \\ 0, & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Знайти: 1) $M\xi$, $M\eta$; 2) дисперсійну матрицю; в) $\rho(\xi, \eta)$.

O6. Знайти щільність розподілу, математичне сподівання та дисперсійну матрицю випадкової величини (ξ, η), якщо її функція розподілу

$$F(x, y) = \begin{cases} \sin x \sin y, & 0 \le x \le \pi/2,\ 0 \le y \le \pi/2, \\ 0, & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

O7. Дано щільність розподілу системи невід'ємних випадкових величин (ξ, η):

$$p(x, y) = \begin{cases} kxye^{-(x^2+y^2)}, & x \ge 0,\ y \ge 0, \\ 0, & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Знайти: 1) k; 2) p_ξ, p_η; 3) $M\xi$, $M\eta$, $D\xi$, $D\eta$, $cov(\xi,\eta)$.

О8. Щільність розподілу двовимірної випадкової величини (ξ,η) задана формулою

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{C}{x^3y^3}, & x\geq 1, y\geq 1,\\ 0, & \text{в усіх інших випадках.}\end{cases}$$

Знайти сталу C і $cov(\xi,\eta)$.

С1. Закон розподілу системи випадкових величин (ξ,η) має вигляд:

$\eta\setminus\xi$	10	20	30
20	3λ	2λ	λ
40	λ	4λ	2λ
60	0	2λ	5λ

.

Знайти: 1) коефіцієнт λ; 2) $M\xi$, $M\eta$; 3) $D\xi$, $D\eta$; 4) коефіцієнт кореляції $\rho(\xi,\eta)$.

С2. Щільність розподілу випадкового вектора (ξ,η) має вигляд

$$p(x,y)=\begin{cases}C(x^2+xy+y^2), & 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1,\\ 0, & \text{у решті випадків.}\end{cases}$$

Знайти C, $M\xi$, $M\eta$, $D\xi$, $D\eta$, p_ξ, p_η і $\rho(\xi,\eta)$.

Домашнє завдання

Д1. Випадкова двовимірна величина задана законом розподілу

$\eta\setminus\xi$	-1	0	1
-1	0	1/4	0
0	1/4	0	1/4
1	0	1/4	0

.

Знайти: 1) $M\xi$, $D\xi$, $M\eta$, $D\eta$; 2) $cov(\xi,\eta)$, $\rho(\xi,\eta)$.

Д2. Дано незалежні випадкові величини ξ і η :

ξ	1	2	3
p	0,1	0,3	0,6

,

ξ	-2	-1	0
p	0,6	0,3	0,1

.

Знайти: 1) закони розподілу суми $\xi+\eta$ і добутку $\xi\eta$ випадкових величин ξ і η; 2) $M\xi$, $M\eta$, $M(\xi+\eta)$, $M(\xi\eta)$; 3) $D\xi$, $D\eta$, $D(\xi+\eta)$.

Д3. Закон розподілу системи двох випадкових величин (ξ,η) задано таблицею розподілу:

$\eta\setminus\xi$	0	1	2	3
-1	0,01	0,06	0,05	0,04
0	0,04	0,24	0,15	0,07
1	0,05	0,10	0,10	0,09

.

Знайти: 1) $M\xi$, $M\eta$; 2) $D\xi$, $D\eta$, $cov(\xi,\eta)$.

Д4. Щільність розподілу випадкового вектора (ξ,η) має такий вигляд:

$$p(x,y)=\begin{cases} C(xy+y^2), & 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 2,\\ 0, & \text{у решті випадків.}\end{cases}$$

Знайти: 1)значення C; 2) $M\xi$, $M\eta$; 3) $D\xi$, $D\eta$, $cov(\xi,\eta)$.

Д5. Є дві випадкові величини ξ і η, зв'язані співвідношенням $\eta=2-3\xi$. Числові характеристики величини ξ задані: $M\xi=-1$; $D\xi=4$. Знайти: 1) $M\eta$, $D\eta$; 2) $cov(\xi,\eta)$, $\rho(\xi,\eta)$.

Д6. Закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин (ξ,η) задано таблицею

$\eta\setminus\xi$	1	2	4
0	0,1	0	0,1
2	0	0,3	0,3
5	0,2	0	0

.

Знайти числові характеристики системи (ξ,η): $M\xi$; $D\xi$, $M\eta$, $D\eta$, $cov(\xi,\eta)$, $\rho(\xi,\eta)$.

Д7. Щільність розподілу двовимірної випадкової величини (ξ,η) задана формулою

$$p(x,y)=\begin{cases} C(1-xy^3), & |x|\le 1, |y|\le 1,\\ 0, & \text{в усіх інших випадках.}\end{cases}$$

Знайти сталу C і коефіцієнт кореляції $\rho(\xi,\eta)$.

Д8. Випадкова двовимірна величина задана законом розподілу

$\eta\setminus\xi$	-1	0	1
2	0,1	0,2	0
4	0,2	0,3	0,2

.

Знайти: 1) математичне сподівання; 2) кореляційну матрицю; 3) коефіцієнт кореляції.

Відповіді

О1. $M\xi=-1/8$, $D\xi=133/192$; $M\eta=0$, $D\eta=1$; $cov(\xi,\eta)=-1/8$, $\rho(\xi,\eta)=-0,15$.

О2. 1)

$\xi+\eta$	0	1	2	3	4	5
p	0,1	0,275	0,3	0,2	0,1	0,025

,

$\xi\eta$	0	1	2	3	4	6
p	0,55	0,15	0,175	0,05	0,05	0,025

;

2) $M\xi=1$, $M\eta=1$, $M(\xi+\eta)=2$, $M(\xi\eta)=1$;
3) $D\xi=0,5$, $D\eta=1$, $D(\xi+\eta)=1,5$.

О3. 1) $M\xi=0,55$, $M\eta=0,10$;

2) $\begin{pmatrix} 0,2475 & -0,055\\ -0,055 & 0,59\end{pmatrix}$; 3) $\rho(\xi,\eta)=-0,144$.

О4. $M\xi=1,947$, $D\xi=2,610$; $M\eta=0,504$, $D\eta=0,548$; $cov(\xi,\eta)=0,561$. **О5.** 1) $M\xi=0,785$, $M\eta=0,785$;

$$2)\ \begin{pmatrix} 0,188 & -0,046\\ -0,046 & 0,188\end{pmatrix};\quad 3)\quad \rho(\xi,\eta)=-0,245.$$

О6. $p(x,y) = \cos x \cos y$, $0 \le x \le \pi/2$, $0 \le y \le \pi/2$; $M\xi = M\eta =$ $= (\pi/2) - 1$,
$$\begin{pmatrix} \pi - 3 & 0 \\ 0 & \pi - 3 \end{pmatrix}.$$

О7. 1) $k = 4$; 2) $p_\xi(x) = 2xe^{-x^2}$, $x \ge 0$, $p_\eta(y) = 2ye^{-y2}$, $y \ge 0$; 3) $M\xi = \sqrt{\pi}/2$, $M\eta = \sqrt{\pi}/2$; $D\xi = D\eta = 1 - \pi/4$; $cov(\xi,\eta) = 0$.

О8. $C = 4$, $cov(\xi,\eta) = 0$.

С1. 1) $\lambda = 1/20$; 2) $M\xi = 22$, $M\eta = 41$; 3) $D\xi = 56$, $D\eta = 259$; 4) $\rho(\xi,\eta) = 0,56$. **С2.** $C = 12/11$, $p_\xi(x) = 12/11(x^2 + x/2 + 1/3)$, $p_\eta(y) = 12/11(y^2 + y/2 + 1/3)$, $M\xi = M\eta = 7/11$, $D\xi = D\eta =$ $= 0,071$, $\rho(\xi,\eta) = -0,155$.

Д1. 1) $M\xi = 0$, $D\xi = 1/2$; $M\eta = 0$, $D\eta = 1/2$; 2) $cov(\xi,\eta) = 0$, $\rho(\xi,\eta) = 0$.

Д2. 1)

$\xi+\eta$	-1	0	1	2	3
p	$0,06$	$0,21$	$0,46$	$0,21$	$0,06$

,

$\xi\eta$	-6	-4	-3	-2	-1	0
p	$0,36$	$0,18$	$0,18$	$0,15$	$0,03$	$0,1$

;

2) $M\xi = 2,5$, $M\eta = -1,5$, $M(\xi+\eta) = 1$, $M(\xi\eta) = -3,75$;
3) $D\xi = 0,45$, $D\eta = 0,45$, $D(\xi+\eta) = 0,9$.

Д3. 1) $M\xi = 1,6$, $M\eta = 0,18$; 2) $D\xi = 0,84$, $D\eta = 0,4676$, $cov(\xi,\eta) = 0,002$. **Д4.** 1) $c = 3/28$; 2) $M\xi = 8/7$, $M\eta = 10/7$; 3) $D\xi = 46/147$, $D\eta = 46/245$, $cov(\xi,\eta) = -2/147$. **Д5.** 1) $M\eta = 5$, $D\eta = 36$; 2) $cov(\xi,\eta) = -12$, $\rho(\xi,\eta) = -1$. **Д6.** $M\xi = 2,5$, $M\eta = 2,2$, $D\xi = 1,65$, $D\eta = 2,56$, $cov(\xi,\eta) = -0,9$, $\rho(\xi,\eta) = -0,438$.

Д7. $C = 1/4$, $\rho(\xi,\eta) = -1/5$. **Д8.** 1) (-0,1; 3,4); 2) $\begin{pmatrix} 0,49 & 0,14 \\ 0,14 & 0,84 \end{pmatrix}$; 3) $\rho(\xi,\eta) = 0,2174$.

Тема 13. Функції випадкових величин

Нехай є функція однієї змінної f з областю визначення $D(f)$ і деяка випадкова величина ξ, всі значення якої належать множині $D(f)$. Тоді, якщо ξ набула значення x, вважатимемо, що нова випадкова величина η набула значення $f(x)$. Ця нова випадкова величина називається **функцією випадкової величини** ξ. У цьому випадку пишуть: $\eta = f(\xi)$. Виникає запитання, як знайти закон розподілу η, коли відомий закон розподілу ξ.

Розглянемо спочатку дискретну випадкову величину ξ, закон розподілу якої має вигляд

ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
p	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

.

Подія $\{\xi = x_i\}$ настає з імовірністю p_i, з цією ж імовірністю η набуває значення $y_i = f(x_i)$. Тому закон розподілу випадкової величини $\eta = f(\xi)$ такий:

η	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\cdots$	$f(x_n)$
p	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

.

Якщо існує декілька значень x_i, для яких $f(x_i)$ одне і те саме, то всі такі випадки об'єднуються в один, якому відповідає за теоремою додавання ймовірність, що дорівнює сумі ймовірностей об'єднуваних випадків.

Приклад 1. Нехай розподіл випадкової величини ξ задається таблицею

ξ	-2	-1	0	1	2
p	$0,1$	$0,1$	$0,3$	$0,3$	$0,2$

.

Треба знайти закони розподілу випадкових величин ξ^2 і ξ^3.

$\triangleleft$ Можливі значення ξ^2: $(-2)^2 = 4$; $(-1)^2 = 1$; $(0)^2 = 0$; $(1)^2 = 1$; $(2)^2 = 4$. Звідси випливає, що $\eta = \xi^2$ набуває значень 0; 1; 4 відповідно з імовірностями $0,3$; $0,1 + 0,3 = 0,4$; $0,1 + 0,2 = 0,3$.

Таким чином, закон розподілу ξ^2 має вигляд

ξ^2	0	1	4
p	0,3	0,4	0,3

.

Оскільки функція $\eta = \xi^3$ монотонно зростаюча, то різним значенням ξ відповідають різні значення η. Отже, закон розподілу цієї випадкової величини такий:

ξ^3	-8	-1	0	1	8
p	0,1	0,1	0,3	0,3	0,2

. $\triangleright$

Якщо ξ – неперервна випадкова величина, яка задана щільністю розподілу p_ξ, і якщо $y = f(x)$ – диференційовна строго зростаюча або строго спадна функція, обернена для якої $x = f^{-1}(y)$, то щільність p_η випадкової величини η знаходиться за формулою

$$p_\eta(y) = p_\xi(f^{-1}(y))|(f^{-1}(y))'|,\ y \in E(f), \tag{1}$$

де $E(f)$ - множина значень функції f.

Якщо f - кусково строго монотонна функція на проміжку можливих значень ξ, то весь указаний проміжок розбивається на частинні проміжки, на кожному з яких f - монотонна функція. Якщо цих проміжків n і на кожному з них обернену функцію до f позначити через f_i^{-1}, $i \in \{1, \ldots, n\}$, то щільність розподілу

$$p_\eta(y) = \sum_{i=1}^{n} p_\xi(f_i^{-1}(y))|(f_i^{-1}(y))'|,\ y \in E(f).$$

Приклад 2. Нехай задано щільність розподілу p_ξ випадкової величини ξ, можливі значення якої містяться в інтервалі $(a; b)$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\eta = 3\xi$.

$\triangleleft$ Оскільки функція $y = 3x$ диференційовна й зростає на $(a; b)$, то вона має обернену $x = y/3$, яка визначена на інтервалі $(3a; 3b)$, диференційовна і зростаюча на цьому інтервалі.

Згідно з (1) маємо

$$p_\eta(y) = p_\xi(y/3)|(y/3)'| = p_\xi(y/3)\frac{1}{3},\ y \in (3a, 3b).\ \triangleright$$

Якщо ξ і η - дискретні випадкові величини, то для визначення закону розподілу функції $\zeta = \xi + \eta$, треба знайти всі можливі значення ζ. Для цього треба додати кожне можливе значення ξ до всіх можливих значень η. Імовірності знайдених можливих значень ζ дорівнюють добутку ймовірностей відповідних значень ξ і η.

Якщо ξ і η - неперервні незалежні випадкові величини, то щільність розподілу p суми $\zeta = \xi + \eta$ можна знайти за формулою

$$p(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(x) p_\eta(z-x)dx, \ z \in \mathbb{R} \qquad (2)$$

або за рівносильною формулою

$$p(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(z-x) p_\eta(x)dx, \ z \in \mathbb{R},$$

де p_ξ і p_η - щільності розподілу відповідно випадкових величин ξ і η. Якщо можливі значення аргументів невід'ємні, то

$$p(z) = \int_{0}^{z} p_\xi(x) p_\eta(z-x)dx, \ z \in \mathbb{R}_+ \qquad (3)$$

або

$$p(z) = \int_{0}^{z} p_\xi(z-x) p_\eta(x)dx, \ z \in \mathbb{R}_+.$$

Приклад 3. Незалежні випадкові величини ξ і η задані щільностями розподілу

$$p_\xi(x) = e^{-x}, \quad 0 \le x < +\infty,$$
$$p_\eta(y) = 1/2e^{-y/2}, \quad 0 \le y < +\infty.$$

Знайти композицію цих законів, тобто щільність розподілу випадкової величини $\zeta = \xi + \eta$.

$\triangleleft$ Оскільки можливі значення аргументів невід'ємні, то згідно з формулою (3)

$$p(z) = \int_0^z e^{-x}\left(\frac{1}{2}e^{-(z-x)/2}\right)dx = \frac{1}{2}e^{-z/2}\int_0^z e^{-x/2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}e^{-z/2}(-2e^{-x/2})\Big|_0^z = \frac{1}{2}e^{-z/2}(-2e^{-z/2} + 2e^0) =$$

$$= e^{-z/2}(1 - e^{-z/2}), \quad z \in (0, +\infty). \ \triangleright$$

Вправи

О1. Дискретна випадкова величина ξ задана законом розподілу:

ξ	-1	-2	1	2
p	$0,3$	$0,1$	$0,2$	$0,4$

Знайти закон розподілу випадкової величини $\eta = 3\xi^2$.

О2. Дискретні незалежні випадкові величини ξ і η задані законами розподілу:

ξ	1	3
p	$0,3$	$0,7$

η	2	4
p	$0,6$	$0,4$

Знайти закон розподілу випадкової величини $\zeta = \xi + \eta$.

О3. Випадкова величина ξ задана законом розподілу:

ξ	-2	-1	0	1	2
p	$0,1$	$0,2$	$0,3$	$0,3$	$0,1$

Знайти закон розподілу випадкової величини: 1) $\eta = \xi^2 + 1$; 2) $\eta = \sin(\pi\xi/2)$.

О4. Дві незалежні випадкові величини ξ і η задані законами розподілу:

ξ	-2	0	1	3
p	$0,3$	$0,2$	$0,4$	$0,1$

,

η	-5	-1	4
p	$0,1$	$0,6$	$0,3$

.

Знайти: 1) закон розподілу випадкової величини $\zeta = \xi \cdot \eta$;
2) $M\zeta$.

O5. Неперервна випадкова величина ξ розподілена в інтервалі $(0,1)$ зі щільністю

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 2x, & x \in (0,1), \\ 0, & x \notin (0,1). \end{cases}$$

Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини $\eta = \xi^2$.

O6. Випадкова величина ξ розподілена зі щільністю розподілу

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 1/2 \cos x, & x \in (-\pi/2; \pi/2), \\ 0, & x \notin (-\pi/2; \pi/2). \end{cases}$$

Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини $\eta = |\sin \xi|$.

O7. Задано функцію розподілу F_ξ випадкової величини ξ. Знайти функцію розподілу випадкової величини $\eta = -2\xi/3 + 2$.

O8. Випадкова величина ξ розподілена за показниковим законом

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 3e^{-3x}, & x > 0. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу випадкової величини $\eta = 2 - 3\xi$.

O9. Випадкова величина ξ задана щільністю розподілу

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 1/2 \sin x, & x \in (0, \pi), \\ 0, & x \notin (0, \pi). \end{cases}$$

Знайти математичне сподівання та дисперсію функції $\eta = \xi^2$, скориставшись щільністю розподілу p_η.

О10. Незалежні випадкові величини ξ і η задані щільностями розподілу

$$\begin{array}{ll} p_\xi(x) = 1/3e^{-x/3}, & 0 \le x < +\infty, \\ p_\eta(y) = 1/5e^{-y/5}, & 0 \le y < +\infty. \end{array} .$$

Знайти щільність розподілу випадковвої величини $\zeta = \xi + \eta$.

О11. Дві ремонтні бригади обслуговують водогінну систему міста. Час надходження чергової заявки на ремонт має показниковий розподіл з параметром λ. Першу заявку, яка надійшла, обслуговує перша бригада, наступну - друга бригада. Знайти закон розподілу часу очікування своєї заявки другою бригадою.

С1. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\eta = \xi^2$, де ξ - неперервна випадкова величина, яка задана щільністю розподілу

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 1/2\cos x, & x \in (-\pi/2, \pi/2), \\ 0, & x \notin (-\pi/2, \pi/2). \end{cases}$$

С2. Випадкова величина ξ підпорядкована нормальному закону:

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},\ x \in \mathbb{R}.$$

Знайти математичне сподівання випадкової величини $\eta = 1 - 3\xi^2 + 4\xi^3$.

С3. Випадкова величина ξ розподілена на всій числовій осі з щільністю $p_\xi(x) = 0,5e^{-|x|}$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\eta = \xi^2$. Чому дорівнює математичне сподівання цієї випадкової величини ?

С4. Студент при поїздці в університет користується тролейбусом і автобусом. Тролейбуса йому доводиться чекати не більше двох хвилин, а автобуса - не більше десяти хвилин. Вважаючи час очікування тролейбуса ξ й автобуса η незалежними випадковими величинами, розподіленими рівномірно на проміжках $[0, 2]$ і $[0, 10]$ відповідно, знайти щільність розподілу сумарного часу очікування $\xi + \eta$.

Домашнє завдання

Д1. Дискретна випадкова величина ξ має ряд розподілу

ξ	-1	0	1	2
p	$0,2$	$0,1$	$0,3$	$0,4$

.

Знайти закон розподілу випадкової величини $\eta = 2^{\xi}$.

Д2. Знайти закон розподілу випадкової величини $\zeta = \xi + \eta$, якщо

ξ	10	12	16
p	$0,4$	$0,1$	$0,5$

,

η	1	2
p	$0,2$	$0,8$

.

Д3. Задана функція розподілу F_{ξ} випадкової величини ξ. Знайти функцію розподілу F_{η} випадкової величини $\eta = 3\xi + 2$.

Д4. Дві незалежні випадкові величини ξ і η задані законами розподілу:

ξ	-1	1	2	4
p	$0,2$	$0,4$	$0,3$	$0,1$

,

η	-3	0	1
p	$0,3$	$0,5$	$0,2$

.

Знайти: 1) закон розподілу випадкової величини $\zeta = \xi \cdot \eta$;
2) $M\zeta$.

Д5. Закони розподілу двох незалежних випадкових величин мають вигляд

ξ	1	2	3
p	$0,1$	$0,3$	$0,6$

,

η	1	2	3
p	$0,2$	$0,3$	$0,5$

.

Знайти закон розподілу випадкової величини $\zeta = \xi + \eta$.

Д6. Дано закони розподілу двох незалежних випадкових величин

ξ	0	2	4
p	0,4	0,2	0,4

,

η	2	3	4
p	0,3	0,4	0,3

.

Знайти: 1) закони розподілу випадкових величин: $\xi + \eta$, $\xi - \eta$, $(\xi - \eta)^2$; 2) $P\{0 \leq \xi + \eta \leq 6\}$.

Д7. Випадкова величина ξ розподілена за законом Коші:

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Знайти щільність розподілу випадкової величини $\eta = \xi^3 + 2$.

Д8. Неперервна випадкова величина ξ розподілена за показниковим законом:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \end{cases}$$

де $\lambda > 0$.

За яких умов існують і чому дорівнюють математичне сподівання і дисперсія випадкової величини $\eta = e^\xi$?

Д9. Незалежні нормально розподілені випадкові величини ξ і η задані щільностями розподілу

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad p_\eta(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, \ \{x, y\} \subset \mathbb{R}.$$

Довести, що випадкова величина $\zeta = \xi + \eta$ є також нормально розподіленою.

Д10. Випадкові величини ξ і η мають один і той самий показниковий розподіл зі щільністю

$$p_\xi(x) = p_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \end{cases}$$

де $\lambda > 0$.

Знайти щільність розподілу $p_{\xi+\eta}$.

Відповіді

О1.

η	3	12
p	$0,5$	$0,5$

О2.

ζ	3	5	7
p	$0,18$	$0,54$	$0,28$

О3. 1)

η	1	2	5
p	$0,3$	$0,5$	$0,2$

; 2)

η	-1	0	1
p	$0,2$	$0,5$	$0,3$

О4. 1)

ζ	-15	-8	-5	-3	-1	0	2	4	10	12
p	$0,01$	$0,09$	$0,04$	$0,06$	$0,24$	$0,2$	$0,18$	$0,12$	$0,03$	$0,03$

; 2) 0,01.

О5. $M\eta = 1/2$; $D\eta = 1/12$. **О6.** $M\eta = 1/2$; $D\eta = 1/12$.

О7. $F_\eta(y) = 1 - F_\xi\left(\frac{3(2-y)}{2}\right)$, $y \in \mathbb{R}$.

О8. $p_\eta(y) = \begin{cases} e^{y-2}, & y < 2, \\ 0, & y \geq 2. \end{cases}$

О9. $p_\eta(y) = \frac{\sin\sqrt{y}}{4\sqrt{y}}$, $0 < y < \pi^2$; $M\eta = \frac{\pi^2-4}{2}$; $D\eta = \frac{\pi^4-16\pi^2+80}{4}$.

О10. $p(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-z/5}(1 - e^{-2z/15}), & z \geq 0, \\ 0, & z < 0. \end{cases}$

О11. $p_{\xi+\eta}(z) = \begin{cases} \lambda^2 z e^{-\lambda z} & z > 0, \\ 0, & z \leq 0. \end{cases}$

С1. $p_\eta(y) = \frac{\cos\sqrt{y}}{2\sqrt{y}}$, $0 \leq y < \pi^2/4$.

С2. $M\eta = 1 - 3\sigma^2$.

С3. $p_\eta(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}e^{-\sqrt{y}}, & y \geq 0, \\ 0, & y \leq 0; \end{cases}$ $M\eta = 2$.

С4. $p_{\xi+\eta}(z) = \begin{cases} x/20 & z \in [0,2], \\ 1/10 & z \in (2,10], \\ (12-x)/20 & z \in (10,12], \\ 0, & z \notin (0,12]. \end{cases}$

Д1.

η	$1/2$	1	2	4
p	$0,2$	$0,1$	$0,3$	$0,4$

.

Д2.

η	11	12	13	14	17	18
p	$0,08$	$0,32$	$0,02$	$0,08$	$0,10$	$0,40$

.

Д3. $F_\eta(y) = F_\xi\left(\frac{y-2}{3}\right)$, $y \in \mathbb{R}$.

Д4. 1)

ζ	-12	-6	-3	-1	0	1	2	3	4
p	$0,03$	$0,09$	$0,12$	$0,04$	$0,5$	$0,08$	$0,06$	$0,06$	$0,02$

; 2) -0,84.

Д5.

ζ	2	3	4	5	6
p	$0,02$	$0,09$	$0,26$	$0,33$	$0,3$

.

Д6. 1)

$\xi+\eta$	2	3	4	5	6	7	8
p	$0,12$	$0,16$	$0,18$	$0,08$	$0,18$	$0,16$	$0,12$

;

$\xi-\eta$	-4	-3	-2	-1	0	1	2
p	$0,12$	$0,16$	$0,18$	$0,08$	$0,18$	$0,16$	$0,12$

;

$(\xi-\eta)^2$	0	1	4	9	16
p	$0,18$	$0,24$	$0,30$	$0,16$	$0,12$

;

2) 0,72.

Д7. $p_\eta(y) = \frac{1}{3\pi\left((y-2)^{2/3}+(y-2)^{4/3}\right)}$, $y \neq 2$.

Д8. $M\eta$ існує при $\lambda > 1$ і $M\eta = \lambda/(\lambda-1)$; $D\eta$ існує при $\lambda > 2$ і $D\eta = \lambda/((\lambda-1)^2(\lambda-2))$;

Д9. $p(z) = 1/(2\sqrt{\pi})e^{-z^2/4}$, $z \in \mathbb{R}$ (скористатися формулою (2) і тим, що $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$).

Д10.

$$p_{\xi+\eta}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \lambda^2 x e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases}$$

Тема 14. Моменти випадкових величин. Коефіцієнт асиметрії та ексцес

Крім математичного сподівання і дисперсії, в теорії ймовірності та її застосуваннях використовують також інші числові характеристики.

Нехай $k \geq 0$ - ціле, a - дійсне число. **Моментом k-го порядку** випадкової величини ξ стосовно точки a називається число (якщо воно існує)

$$\nu_k(a) = M(\xi - a)^k.$$

Якщо $a = 0$, то момент називається **початковим**. Початковий момент k - го порядку позначатимемо через ν_k. Очевидно, що $\nu_1 = M\xi$.

Центральним моментом називається момент стосовно точки $a = M\xi$; центральний момент k - го порядку позначатимемо через μ_k. Легко помітити, що $\mu_1 = 0$, а $\mu_2 = D\xi$.

Між центральними і початковими моментами існує певний зв'язок. Справді, за означенням

$$\mu_k = M(\xi - \nu_1)^k.$$

Розкриваючи вираз у правій частині, дістаємо, зокрема, для перших чотирьох моментів:

$$\mu_1 = 0,$$

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2,$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 2\nu_1^3,$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4. \tag{1}$$

Початкові моменти для випадкової величини ξ визначаються за такими формулами, у залежності від того, чи є розподіл дискретним, чи неперервним:

$$\nu_k = \sum_i x_i^k p_i, \qquad \nu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k p_\xi(x) dx. \tag{2}$$

Тут p_i - імовірність, з якою набувається значення x_i випадкової величини ξ, а p_ξ - щільність розподілу випадкової величини ξ.

Приклад 1. Дискретна випадкова величина ξ задана законом розподілу

ξ	-2	-1	0	1	2	3
p	2/20	4/20	6/20	5/20	2/20	1/20

.

Знайти початкові та центральні моменти цієї величини до четвертого порядку включно.

◁ Знаходимо за формулою (2) початкові моменти першого, другого, третього і четвертого порядків:

$$\nu_1 = -2 \cdot \frac{2}{20} - 1 \cdot \frac{4}{20} + 0 \cdot \frac{6}{20} + 1 \cdot \frac{5}{20} + 2 \cdot \frac{2}{20} + 3 \cdot \frac{1}{20} = 0,2;$$

$$\nu_2 = (-2)^2 \cdot \frac{2}{20} + (-1)^2 \cdot \frac{4}{20} + 0^2 \cdot \frac{6}{20} + 1^2 \cdot \frac{5}{20} + 2^2 \cdot \frac{2}{20} + 3^2 \cdot \frac{1}{20} = 1,7;$$

$$\nu_3 = (-2)^3 \cdot \frac{2}{20} + (-1)^3 \cdot \frac{4}{20} + 0^3 \cdot \frac{6}{20} + 1^3 \cdot \frac{5}{20} + 2^3 \cdot \frac{2}{20} + 3^3 \cdot \frac{1}{20} = 1,4;$$

$$\nu_4 = (-2)^4 \cdot \frac{2}{20} + (-1)^4 \cdot \frac{4}{20} + 0^4 \cdot \frac{6}{20} + 1^4 \cdot \frac{5}{20} + 2^4 \cdot \frac{2}{20} + 3^4 \cdot \frac{1}{20} = 7,7.$$

Центральні моменти знаходимо за формулами (1):

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = 1,7 - (0,2)^2 = 1,66;$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 2\nu_1^3 = 1,4 - 3 \cdot 1,7 \cdot 0,2 + 2 \cdot (0,2)^3 = 0,40;$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4 = 7,7 - 4 \cdot 1,4 \cdot 0,2 + 6 \cdot 1,7 \cdot (0,2)^2 - \\ -3 \cdot (0,2)^4 = 6,17. \ \triangleright$$

Значення μ_1 завжди дорівнює нулю. Наступним після нього центральним моментом непарного порядку є μ_3. Він характеризує відхилення розподілу випадкової величини ξ від симетрії. За міру α цього відхилення беруть відношення центрального моменту третього порядку до середнього квадратичного в кубі, яке називають **коефіцієнтом асиметрії**:

$$\alpha = \frac{\mu_3}{\sigma_\xi^3}.$$

Четвертий центральний момент служить для характеристики крутості розподілу випадкової величини ξ в порівнянні з крутістю розподілу нормальної випадкової величини з математичним сподіванням і дисперсією такими самими, як і в ξ. За міру крутості κ беруть величину

$$\kappa = \frac{\mu_4}{\sigma_\xi^4} - 3,$$

яка називається **ексцесом**.

Для нормального закону розподілу $\mu_4 = 3\sigma^4$, тому в даному випадку $\kappa = 0$.

Приклад 2. Знайти коефіцієнт асиметрії та ексцес розподілу, наведеного у прикладі 1.

$\triangleleft$ Маємо

$$\alpha = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\mu_3}{(\sqrt{\mu_2})^3} = \frac{\mu_3}{\mu_2\sqrt{\mu_2}} = \frac{0,40}{1,66 \cdot 1,29} = 0,19;$$

$$\kappa = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 = \frac{6,17}{(1,66)^2} - 3 = -0,76. \triangleright$$

Приклад 3. Знайти початкові моменти випадкової величини ξ зі щільністю ймовірностей

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ 4/x^5, & x > 1. \end{cases}$$

$\triangleleft$ За формулою (2) маємо

$$\nu_k = M\xi^k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k p_\xi(x)dx = \int_1^{+\infty} x^k \frac{4}{x^5} dx = 4\int_1^{+\infty} x^{k-5} dx =$$

$$= \left.\frac{4x^{k-4}}{k-4}\right|_1^{+\infty} = \frac{4}{4-k}.$$

Очевидно, що дані розрахунки правильні, коли $k < 4$, бо при $k \ge 4$ записаний інтеграл розбігається. Отже, випадкова величина, що розглядається, має моменти першого, другого і третього порядків, а моментів порядків четвертого і вище не має. $\triangleright$

Вправи

О1. Дискретна випадкова величина ξ задана законом розподілу

ξ	1	2	4
p	$0,1$	$0,3$	$0,6$

.

Знайти початкові та центральні моменти першого, другого, третього і четвертого порядків.

О2. Довести, що центральний момент третього порядку зв'язаний з початковими моментами рівністю

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3.$$

О3. Випадкова величина ξ задана щільністю розподілу

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0,5x, & x \in (0,2), \\ 0, & x \notin (0,2). \end{cases}$$

Знайти початкові та центральні моменти перших чотирьох порядків.

О4. Дано ряд розподілу випадкової величини ξ:

ξ	1	3	5	7	9
p	$0,1$	$0,4$	$0,2$	$0,2$	$0,1$

.

Знайти початкові та центральні моменти перших чотирьох порядків цієї випадкової величини, а також визначити коефіцієнт асиметрії та ексцес.

О5. Дано функцію

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ ax^2, & 0 < x \le 1, \\ a(x-2)^2, & 1 < x \le 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Для якого значення a функція f є щільністю розподілу випадкової величини ξ ? Знайти початкові та центральні моменти чотирьох порядків, коефіцієнт асиметрії та ексцес.

<u>О6.</u> Обчислити початкові та центральні моменти перших чотирьох порядків випадкової величини, яка розподілена зі щільністю розподілу

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 3e^{-3x}, & x > 0. \end{cases}$$

<u>С1.</u> Неперервна випадкова величина ξ розподілена за законом Лапласа:

$$p_\xi(x) = be^{-|x|},\ x \in \mathbb{R}.$$

Знайти коефіцієнт b, $M\xi$, $D\xi$, коефіцієнт асиметрії, ексцес.

<u>С2.</u> Обчислити початкові та центральні моменти випадкової величини ξ, якщо задано її щільність розподілу

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ 9/x^{10}, & x > 1. \end{cases}$$

<u>Домашнє завдання</u>

<u>Д1.</u> Дано ряд розподілу випадкової величини ξ:

ξ	2	4	6	8
p	0,4	0,3	0,2	0,1

.

Знайти початкові та центральні моменти перших чотирьох порядків цієї випадкової величини ξ, а також коефіцієнт асиметрії та ексцес.

<u>Д2.</u> Довести, що центральний момент четвертого порядку зв'язаний з початковими моментами рівністю

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4.$$

<u>Д3.</u> Випадкова величина ξ задана щільністю розподілу

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 2x, & x \in (0,1), \\ 0, & x \notin (0,1). \end{cases}$$

Знайти початкові та центральні моменти перших чотирьох порядків.

Д4. Щільність розподілу випадкової величини ξ

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x, & 0 < x \le 1, \\ 2 - x, & 1 < x \le 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Знайти початкові та центральні моменти перших чотирьох порядків, коефіцієнт асиметрії та ексцес.

Д5. Для випадкової величини ξ з щільністю розподілу

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ e^{-x}, & x > 0, \end{cases}$$

знайти початкові та центральні моменти перших чотирьох порядків, коефіцієнт асиметрії та ексцес.

Відповіді

О1. $\nu_1 = 3,1$; $\nu_2 = 10,9$; $\nu_3 = 40,9$; $\nu_4 = 158,5$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 1,29$; $\mu_3 = -0,888$; $\mu_4 = 2,777$.

О3. $\nu_1 = 4/3$; $\nu_2 = 2$; $\nu_3 = 3,2$; $\nu_4 = 16/3$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 2/9$; $\mu_3 = -8/135$; $\mu_4 = 16/135$.

О4. $\nu_1 = 4,6$; $\nu_2 = 26,6$; $\nu_3 = 177,4$; $\nu_4 = 1293,8$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 5,44$; $\mu_3 = 4,992$; $\mu_4 = 64,55$; $\alpha = 0,394$; $\kappa = -0,82$.

О5. $a = 3/2$; $\nu_1 = 1$; $\nu_2 = 1,1$; $\nu_3 = 1,3$; $\nu_4 = 57/35$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 0,1$; $\mu_3 = 0$; $\mu_4 = 1/35$; $\alpha = 0$; $\kappa = -1/7$.

О6. $\nu_k = \frac{k!}{3^k}$, $k \in \{1,2,3,4\}$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 1/9$; $\mu_3 = 2/27$; $\mu_4 = 1/9$.

С1. $b = 1/2$; $M\xi = 0$; $D\xi = 2$; $\alpha = 0$; $\kappa = 3$.

С2. $M\xi = 9/8$; $\nu_k = 9/(9-k)$ при $k < 9$ і не існує при $k \ge 9$; $\mu_2 = 9/448$.

Д1. $\nu_1 = 4$; $\nu_2 = 20$; $\nu_3 = 116,8$; $\nu_4 = 752$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 4$; $\mu_3 = 4,8$; $\mu_4 = 35,2$; $\alpha = 0,6$; $\kappa = -0,8$.

Д3. $\nu_1 = 2/3$; $\nu_2 = 1/2$; $\nu_3 = 2/5$; $\nu_4 = 1/3$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 1/18$; $\mu_3 = -1/135$; $\mu_4 = 1/135$.

Д4. $\nu_1 = 1$; $\nu_2 = 7/6$; $\nu_3 = 3/2$; $\nu_4 = 31/15$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 1/6$; $\mu_3 = 0$; $\mu_4 = 1/15$; $\alpha = 0$; $\kappa = -0,6$.

Д5. $\nu_k = k!$, $k \in \{1,2,3,4\}$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 1$; $\mu_3 = 2$; $\mu_4 = 9$; $\alpha = 2$; $\kappa = 6$.

Тема 15. Закон великих чисел. Центральна гранична теорема

Нерівність Маркова. Якщо у невід'ємної випадкової величини ξ існує математичне сподівання $M\xi$, то при довільному додатному α правильною є **нерівність Маркова**

$$P\{\xi < \alpha\} \geq 1 - \frac{M\xi}{\alpha}. \tag{1}$$

Приклад 1. Сума всіх вкладів у одному з банків складає $2 \cdot 10^6$ гривень, а ймовірність того, що випадково взятий вклад не перевищує 10^4 гривень, дорівнює $0,8$. Що можна сказати про число вкладників даного банку ?

$\triangleleft$ Нехай ξ - величина випадково взятого вкладу, а n - число всіх вкладників. Тоді з умови задачі випливає, що $M\xi = 2 \cdot 10^6/n$. Оскільки $P\left\{\xi < 10^4\right\} = 0,8$, а згідно з нерівністю Маркова (1)

$$P\left\{\xi < 10^4\right\} \geq 1 - \frac{M\xi}{10^4}, \quad \text{то} \quad 0,8 \geq 1 - \frac{2 \cdot 10^6}{n \cdot 10^4},$$

звідси випливає, що

$$0,2 \leq \frac{2 \cdot 10^6}{n \cdot 10^4} \quad \text{або} \quad 0,2 \leq \frac{200}{n}, \text{ а тому } n \leq 1000. \triangleright$$

Нерівність Чебишова. Для будь-якої випадкової величини ξ, дисперсія якої скінченна, правильна **нерівність Чебишова**

$$P\{|\xi - M\xi| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D\xi}{\varepsilon^2}. \tag{2}$$

де $\varepsilon > 0$ - довільне число.

Приклад 2. Середня довжина деталі 50 см, а дисперсія – 0,1. Користуючись нерівністю Чебишова, оцінити ймовірність того, що випадково взята деталь виявиться за довжиною не менше 49,5 см і не більше 50,5 см.

$\triangleleft$ Нехай ξ - довжина випадково взятої деталі. З умови задачі випливає, що $M\xi = 50$, а $D\xi = 0,1$. Треба оцінити знизу величину $P\{49,5 < \xi < 50,5\}$. Оскільки нерівність $49,5 < \xi < 50,5$ рівносильна нерівності $|\xi - 50| < 0,5$, то необхідно оцінити $P\{|\xi - 50| < 0,5\}$, тобто $P\{|\xi - M\xi| < 0,5\}$. Згідно з нерівністю Чебишова (2)

$$P\{|\xi - M\xi| < 0,5\} \geq 1 - \frac{D\xi}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{0,1}{(0,5)^2} = 0,6. \triangleright$$

Теорема Чебишова. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ - послідовність незалежних випадкових величин, дисперсії яких обмежені однією і тією ж сталою C. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$

$$P\left\{\left|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n} - \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right| < \varepsilon\right\} \geq$$

$$\geq 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} D\xi_i}{n^2\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}, \quad M\xi_i = a_i, i \geq 1. \qquad (3)$$

Звідси випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

(**закон великих чисел Чебишова**).

Якщо $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$, то теорема Чебишова набуває вигляду

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - a\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Звідси видно, що в цьому випадку середнє арифметичне випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ як випадкова величина при великому n як завгодно мало відрізняється від сталої величини a.

Приклад 3. Для визначення середньої тривалості горіння електролампи в партії з 200 однакових ящиків було взято навмання по одній лампі з кожного ящика. Оцінити знизу ймовірність того, що середня тривалість горіння відібраних 200 ламп відрізняється від середньої тривалості горіння в усій партії за абсолютною величиною менше, ніж на 5 год, якщо відомо, що середнє квадратичне відхилення тривалості горіння електролампи в кожному ящику менше 7 год.

$\lhd$ Нехай ξ_i - тривалість горіння електролампи взятої з i-го ящика. Згідно з умовою задачі $D\xi_i < 7^2 = 49$. Очевидно, що середня тривалість горіння ламп у вибірці

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{200}}{200},$$

а середня тривалість горіння ламп в усій партії

$$\frac{M\xi_1 + M\xi_2 + \cdots + M\xi_{200}}{200}.$$

Оцінимо знизу ймовірність:

$$P\left\{\left|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{200}}{200} - \frac{M\xi_1 + M\xi_2 + \cdots + M\xi_{200}}{200}\right| < 5\right\}.$$

Для цього скористаємося формулою (3), де $C = 49$, $\varepsilon = 5$, $n = 200$:

$$P\left\{\left|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{200}}{200} - \frac{M\xi_1 + M\xi_2 + \cdots + M\xi_{200}}{200}\right| < 5\right\} \geq$$

$$\geq 1 - \frac{49}{200 \cdot 25} = 1 - \frac{49}{5000} = 1 - 0,0098 = 0,9902. \rhd$$

Теорема Пуассона. Якщо в послідовності незалежних випробувань p_i - імовірність появи події A в i-му випробуванні, а m - число настання події при n випробуваннях, то

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i(1-p_i)}{n^2\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}, \quad (4)$$

яке б не було число $\varepsilon > 0$. Звідси випливає рівність

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{m}{n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i\right| < \varepsilon\right\} = 1,$$

(**закон великих чисел Пуассона**).

Приклад 4. Проведено 800 незалежних випробувань: у 200 з них імовірність появи очікуваного результату дорівнювала 0,5, у 400 випробуваннях ця ймовірність - 0,4, а в решті випадків - 0,3. Оцінити знизу ймовірність того, що відхилення частоти появи очікуваного результату від середньої ймовірності за абсолютною величиною не перевищує 0,04.

◁ Якщо через p_i позначити ймовірність настання події в i-му випробуванні, то середня ймовірність настання події у 800 випробуваннях

$$\bar{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i = \frac{1}{800}(0,5 \cdot 200 + 0,4 \cdot 400 + 0,3 \cdot 200) = \frac{3,2}{8} = 0,4.$$

Оцінимо знизу ймовірність $P\left\{\left|\frac{m}{n} - \bar{p}\right| < 0,04\right\}$, користуючись теоремою Пуассона, точніше нерівністю (4). Одержимо

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - 0,4\right| < 0,04\right\} \geq$$

$$\geq 1 - \frac{0,5(1-0,5)200 + 0,4(1-0,4)400 + 0,3(1-0,3)200}{800^2(0,04)^2} = 0,817. \text{ ▷}$$

Якщо у випадку формули (4) $p_1 = \ldots = p_n = p$, то матимемо нерівність

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}, \qquad (5)$$

з якої випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{|\frac{m}{n} - p| < \varepsilon\right\} = 1$$

(**закон великих чисел Бернуллі**).

Якщо $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ незалежні випадкові величини і $\eta_n = = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n, n \geq 1$, то теореми, які стверджують нормальність граничного розподілу відповідним чином центрованих і нормованих випадкових величин η_n, називаються **центральними граничними теоремами.**

Наведемо одну з них, яка часто використовується в математичній статистиці.

Теорема Ліндеберга-Леві. Якщо взаємно незалежні випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ однаково розподілені, мають математичне сподівання a і дисперсію σ^2, то при $n \to \infty$ рівномірно по $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2}dz.$$

Вправи

О1. Середній термін служби мотора – 4 роки. За нерівністю Маркова оцінити знизу ймовірність того, що даний мотор не прослужить більше 20 років.

О2. Для випадкової величини ξ відомо, що $D\xi = 0,009$ і $P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} < 0,1$. Знайти ε.

О3. Невід'ємні випадкові величини ξ і η незалежні, $M\xi = 5$, $M\eta = 4$. Оцінити знизу ймовірність нерівностей:

1) $\xi + \eta < 40$; 2) $\xi\eta < 200$.

О4. Електростанція обслуговує мережу з 18000 ламп, імовірність увімкнення кожної з яких у зимовий вечір дорівнює 0,9. Оцінити ймовірність того, що число ламп, увімкнених у мережу в зимовий вечір, відрізняється від свого математичного сподівання за абсолютною величиною не більше, ніж на 200.

О5. Розподіл випадкової величини ξ задано таблицею:

ξ	1	2	3	4	5	6
p	$0,05$	$0,10$	$0,25$	$0,30$	$0,20$	$0,10$

.

Чому дорівнює $P\{|\xi - M\xi| < 2\}$? Оцінити цю ймовірність, користуючись нерівністю Чебишова.

О6. Оцінити ймовірність того, що у групі з 800 чоловік число осіб, які мають вищу освіту, відрізняється від свого математичного сподівання менше, ніж на 30.

О7. Вважаючи для простоти, що ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,5, оцінити за допомогою нерівності

Чебишова ймовірність того, що серед 1200 новонароджених хлопчиків буде від 550 до 650 включно.

<u>О8.</u> Математичне сподівання швидкості вітру на даній висоті дорівнює 25 км/год, а середнє квадратичне відхилення - 4,5 км/год. Які швидкості вітру на цій висоті можна очікувати з імовірністю, не меншою 0,9?

<u>О9.</u> Імовірність появи події в одному досліді дорівнює $1/2$. Чи можна з імовірністю, більшою від 0,97, стверджувати, що число появ події A в 1000 незалежних дослідах буде в межах від 400 до 600?

<u>О10.</u> Скільки разів треба виміряти дану величину, істинне значення якої дорівнює a, щоб з імовірністю, не меншою 0,95, можна було стверджувати, що середнє арифметичне значення цих вимірювань відрізняється від a за абсолютною величиною менше, ніж на 2, якщо середнє квадратичне відхилення кожного з вимірювань менше 10?

<u>О11.</u> Проведено 600 незалежних випробувань; у 200 з них імовірність появи події A дорівнювала $0,3$, а у решті випадків – 0,5. Оцінити знизу ймовірність того, що відхилення частоти від середньої ймовірності не перевищить за абсолютною величиною 0,05.

<u>О12.</u>
Дисперсія кожної з $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{900}$ незалежних випадкових величин дорівнює 1. Оцінити ймовірність того, що середнє арифметичне цих випадкових величин відхиляється від свого математичного сподівання за абсолютною величиною не більше, ніж на 0,1: 1) з допомогою нерівності Чебишова; 2) з допомогою центральної граничної теореми.

<u>О13.</u> Випадкова величина η_n є середнім арифметичним $n = 10000$ незалежних і однаково розподілених випадкових величин, середнє квадратичне відхилення кожної з яких дорівнює 2. Яке найбільше відхилення величини η_n від математичного сподівання $M\eta_n$ можна очікувати з ймовірністю $\geq 0,9544$?

<u>С1.</u> Випадкова величина ξ має характеристики $M\xi = 1$, $\sigma_\xi = 0,2$. Оцінити знизу ймовірності подій: $A = \{0,5 < \xi < 1,5\}$, $B = \{0,75 < \xi < 1,35\}$, $C = \{\xi < 2\}$.

С2. Імовірність випуску нестандартної деталі дорівнює 25 відсотків. Оцінити знизу ймовірність того, що в партії з 1000 деталей число нестандартних відрізняється від 250 менше, ніж на 40.

С3. З'ясувати, чи можна застосувати теорему Чебишова до послідовності незалежних випадкових величин ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n, ..., якщо ξ_n має розподіл

ξ_n	-5 n	0	5 n
p	$1/(3n^2)$	$1-2/(3n^2)$	$1/(3n^2)$

.

С4. З 4000 проведених випробувань у 500 імовірність появи очікуваного результату – 0,4, в 1200 – 0,5 і в 2300 – 0,6. Знайти межі, в яких повинна знаходитись частота появи очікуваного результату, якщо це треба гарантувати з імовірністю 0,98.

С5. Випадкова величина η_n є середнім арифметичним незалежних і однаково розподілених випадкових величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$, дисперсія кожної з яких дорівнює 5. При якому n буде виконуватись нерівність $P\{|\eta - M\eta| \leq 0,01\} \geq 0,9973$?

Домашнє завдання

Д1. Для випадкової величини ξ відомо, що $D\xi = 0,01$ і $P\{|\xi - M\xi| < \varepsilon\} > 0,96$. Знайти ε.

Д2. Середнє значення витрат води в населеному пункті складає 50000 л на день. Оцінити ймовірність того, що в цьому населеному пункті витрати води не будуть перевищувати 120000 л на день.

Д3. Дискретна випадкова величина ξ задана законом розподілу

ξ	0,3	0,6
p	$0,2$	0,8

.

Користуючись нерівністю Чебишова, оцінити ймовірність того, що $|\xi - M\xi| < 0,2$.

Д4. Імовірність настання події A в кожному досліді дорівнює $1/2$. Користуючись нерівністю Чебишова, оцінити ймовірність того, що число ξ появи події A буде міститися в межах від 40 до 60, якщо буде проведено 100 незалежних дослідів.

Д5. Дискретна випадкова величина ξ задана законом розподілу

ξ	0,1	0,4	0,6
p	$0,2$	0,3	0,5

Користуючись нерівністю Чебишова, оцінити ймовірність того, що $|\xi - M\xi| < \sqrt{0,4}$.

Д6. Освітлювальна мережа складається з 20 паралельно ввімкнених ламп. Імовірність того, що за час Т лампа буде ввімкненою, дорівнює 0,8. Користуючись нерівністю Чебишова, оцінити ймовірність того, що абсолютна величина різниці між числом увімкнених ламп і середнім числом (математичним сподіванням) увімкнених ламп за час Т виявиться: а) менше трьох; б) не менше трьох.

Д7. Послідовність незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ задана законом розподілу

ξ_n	$-n\alpha$	0	$n\alpha$
p	$1/(2n^2)$	$1 - 1/n^2$	$1/(2n^2)$

Чи можна застосовувати до заданої послідовності теорему Чебишова?

Д8. Нехай схожість насіння якоїсь рослини складає 70 відсотків. Оцінити знизу ймовірність того, що при посіві 10000 насінин відхилення частки тих, що зійшли, від імовірності того, що зійде кожна з них, не перевищить за абсолютною величиною 0,01.

Д9. Нехай імовірність того, що покупцеві взуттєвого магазину потрібні черевики 41 розміру, дорівнює 0,15. Оцінити межі відсотка покупців серед 2000 тих, що відвідали магазин, яким необхідні такі черевики, якщо ці межі треба гарантувати з імовірністю 0,98.

Д10. Дисперсія кожної з $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{4500}$ однаково розподілених незалежних випадкових величин дорівнює 5. Оцінити ймовірність того, що середнє арифметичне цих випадкових величин відхиляється від свого математичного сподівання за абсолютною величиною не більше, ніж на 0,04: 1) з допомогою нерівності Чебишова; 2) з допомогою центральної граничної теореми.

Відповіді

О1. $P\{\xi < 20\} \geq 0,8$. **О2.** $\varepsilon > 0,3$.

О3. 1) $P\{\xi + \eta < 40\} \geq 1 - M(\xi + \eta)/40 = 0,775$; 2) $P\{\xi\eta < 200\} \geq$ $\geq 1 - M(\xi\eta)/200 = 0,9$. **О4.** $P\{|\xi - M\xi| < 200\} \geq 1 - \dfrac{npq}{\varepsilon^2} = 0,9595$;

$P\{|\xi - M\xi| < 200\} \approx 2\Phi\left(\dfrac{200}{\sqrt{npq}}\right) = 1.$

О5. $P\{|\xi - M\xi| < 2\} = P\{\xi = 2\} + P\{\xi = 3\} + P\{\xi = 4\} +$ $+ P\{\xi = 5\} = 0,85$; $P\{|\xi - M\xi| < 2\} \geq 1 - \dfrac{1,66}{4} = 0,585.$

О6. $P\{|\xi - M\xi| < 30\} \geq 1 - 8/9 \cdot p(1-p) \geq 1 - \dfrac{2}{9} = \dfrac{7}{9}$.

О7. $P\{550 \leq \xi \leq 650\} \geq 1 - \frac{300}{50^2} = 0,88$. **О8.** $10,8 \leq \xi \leq 39,2$.

О9. $P\{|\xi - 500| < 100\} \geq 1 - \dfrac{250}{100^2} = 0,975.$

О10. $n \geq 100/(4 \cdot 0,05) = 500$ (Скористатись формулою (3)).

О11. $P\left\{\left|\dfrac{m}{n} - p\right| \leq 0,05\right\} \geq 0,843$. **О12.** 1) $\geq 0,888$; 2) $\approx 0,997$.

О13. 0,028. **С1.** $P(A) \geq 0,84$; $P(B) \geq 0,36$; $P(C) \geq 0,74$.

С2. $P \geq 0,883$. **С3.** Так. **С4.** (0,537; 0,563). **С5.** 450000.

Д1. $\varepsilon > 0,5$. **Д2.** $P \geq 0,583$. **Д3.** $P\{|\xi - M\xi| < 0,2\} \geq 1 - \dfrac{0,0144}{0,04} =$ $= 0,64$. **Д4.** $P\{|\xi - 50| < 10\} \geq 0,75$.

Д5. $P\{|\xi - M\xi| < \sqrt{0,4}\} \geq 1 - \dfrac{0,0364}{0,4} = 0,909.$

Д6. а) $P\{|\xi - 16| < 3\} \geq 1 - 0,36 = 0,64$;
б) $P\{|\xi - 16| \geq 3\} \leq 1 - 0,64 = 0,36$.

Д7. Так. **Д8.** $P\left\{\left|\dfrac{m}{n} - 0,7\right| < 0,01\right\} \geq 1 - \dfrac{0,7 \cdot 0,3}{0,01^2 \cdot 10000} = 0,79.$

Д9. $\varepsilon = 0,056$, або 5,6 відсотка. **Д10.** 1) $\geq 0,301$; 2) 0,7698.

Тема 16. Генеральна сукупність. Вибірка, розподіл вибірки, емпірична функція розподілу, вибіркові характеристики

Нехай ξ - випадкова величина, функція розподілу якої F_ξ нам невідома. Досліджуючи цю величину, ми здійснюємо n разів один і той же експеримент, у результаті якого одержуємо n значень величини ξ : $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Прийнято множину всіх можливих значень випадкової величини ξ називати **генеральною сукупністю**, а одержані в результаті n експериментів числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - **вибіркою** з цієї сукупності.

Оскільки умови експерименту вважаємо незмінними, а результати експериментів незалежними один від одного, то результати n експериментів $x_1, x_2, \ldots, x_n$ є незалежними в сукупності випадковими величинами, що мають одну і ту саму функцію розподілу F_ξ.

Вибірка може записуватися у вигляді варіаційного ряду або у вигляді статистичного ряду. **Варіаційним рядом** вибірки x_1, x_2, $\ldots$, x_n називається спосіб її запису, при якому елементи впорядковуються за величиною, тобто записуються у вигляді $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $\ldots$, $x^{(k)}$, де $x^{(1)} \leq x^{(2)} \leq \ldots \leq x^{(k)}$. Різниця між максимальним і мінімальним елементами вибірки $x^{(k)} - x^{(1)} = \omega$ називається **розмахом вибірки**. Нехай у вибірці обсягу n елемент x_i зустрічається n_i разів. Число n_i називається **частотою** елемента x_i. Очевидно, що $\sum\limits_{i=1}^{k} n_i = n$. **Статистичним рядом** називається послідовність пар (x_i, n_i). Записують статистичний ряд у вигляді таблиці, перший рядок якої містить елементи x_i, а другий - їх частоти n_i.

Приклад 1. Записати у вигляді варіаційного і статистичного рядів вибірку 5, 3, 7, 10, 5, 5, 2, 10, 7, 2, 7, 7, 4, 2, 4. Знайти розмах вибірки.

$\triangleleft$ Обсяг вибірки $n = 15$. Впорядкувавши елементи вибірки за величиною, дістанемо варіаційний ряд

$$2, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 10, 10.$$

Розмах вибірки $\omega = 10 - 2 = 8$.

Статистичний ряд записується у вигляді таблиці

x_i	2	3	4	5	7	10
n_i	3	1	2	3	4	2

.

Для контролю правильності запису знаходимо $\sum n_i = 15$. ▷

При великому обсязі вибірки її елементи об'єднують у групи (розряди), подаючи результати дослідів у вигляді групованого статистичного ряду. Для цього інтервал, який містить усі елементи вибірки, розбивається на k частинних інтервалів, що не перетинаються. Обчислення значно спрощуються, якщо частинні інтервали мають однакову довжину $h \approx \omega/k$. Ми розглядатимемо саме такий випадок. Після того, як частинні інтервали вибрані, знаходять частоти - кількість n_i елементів вибірки, які попали в i-й інтервал (елемент, який збігається з верхньою межею інтервалу, відноситься до наступного інтервалу). Одержаний статистичний ряд у верхньому рядку містить середини x_i інтервалів групування, а нижній - частоти n_i.

У залежності від обсягу вибірки число інтервалів групування k береться від 6 до 20. Поряд з частотами одночасно підраховуються також нагромаджені частоти $\sum\limits_{j=1}^{i} n_j$, відносні частоти n_i/n і нагромаджені відносні частоти $\sum\limits_{j=1}^{i} n_j/n$, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Одержані результати зводяться в таблицю, яка називається таблицею частот групованої вибірки.

Зауваження. При побудові інтервального статистичного ряду довжину частинного інтервалу обчислюють за формулою

$$h = \frac{x^{(k)} - x^{(1)}}{1 + 3,322 \cdot lg\, n},$$

де $x^{(1)}$ - найменша варіанта, $x^{(k)}$ - найбільша варіанта, а n - обсяг вибірки.

Приклад 2. Подати вибірку 55 спостережень у вигляді таблиці частот, використовуючи 7 інтервалів групування. Вибірка:

17	19	23	18	21	15	16	13	20	18	15
20	14	20	16	14	20	19	15	19	16	19
15	22	21	12	10	21	18	14	14	17	16
13	19	18	20	24	16	20	19	17	18	18
21	17	19	17	13	17	11	18	19	19	17.

$\triangleleft$ Розмах вибірки $\omega = 24 - 10 = 14$. Довжина інтервалу $h = 14/7 = 2$. Результати групування зведемо в таблицю

Номер інтервалу i	Інтервали I_i	Середина інтервалу x_i	Частоти n_i	Нагромаджені частоти $\sum_{j=1}^{i} n_j$	Відносні частоти n_i/n	Нагромадж. відн. частоти $\sum_{j=1}^{i} n_j/n$
1	$[10,\ 12)$	11	2	2	0,0364	0,0364
2	$[12,\ 14)$	13	4	6	0,0727	0,1091
3	$[14,\ 16)$	15	8	14	0,1455	0,2546
4	$[16,\ 18)$	17	12	26	0,2182	0,4728
5	$[18,\ 20)$	19	16	42	0,2909	0,7637
6	$[20,\ 22)$	21	10	52	0,1818	0,9455
7	$[22,\ 24]$	23	3	55	0,0545	1,0000

.

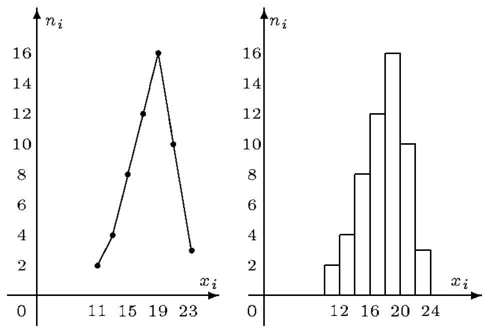
$\triangleright$

Полігоном частот групованої вибірки називається ламана з вершинами в точках (x_i, n_i), $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. **Гістограмою частот** групованої вибірки називається східчаста фігура, складена з прямокутників, побудованих на інтервалах групування так, що площа кожного прямокутника дорівнює частоті n_i, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Звідси випливає, що площа гістограми частот дорівнює обсягу вибірки n. У тому випадку, коли довжини всіх інтервалів однакові та дорівнюють h, висоти прямокутників дорівнюють $h_i = n_i/h$, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Аналогічно будується полігон і гістограма відносних частот групованої вибірки.

Приклад 3. Побудувати полігон і гістограму частот групованої вибірки з прикладу 2.

$\triangleleft$ За результатами групування побудуємо полігон частот і гістограму частот.



▷

Розподілом вибірки називають дискретний розподіл, в якому кожному з чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ відповідає ймовірність $1/n$. **Функцією розподілу** вибірки (або **емпіричною функцією розподілу**) є

$$F_n(x) = \sum_{x_i < x} \frac{n_i}{n}, \ x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Очевидно, що $F_n(x) = 0$ при $x \le x^{(1)}$ і $F_n(x) = 1$ при $x > x^{(n)}$. На проміжку $(x^{(1)}, x^{(n)}]$ F_n є неспадною кусково сталою функцією.

Приклад 4. Побудувати графік емпіричної функції розподілу для вибірки з прикладу 2.

◁ Подамо вибірку у вигляді статистичного ряду

x_i	10	11	12	13	14	15	16	17
n_i	1	1	1	3	4	3	6	7

,

x_i	18	19	20	21	22	23	24
n_i	7	9	6	4	1	1	1

.

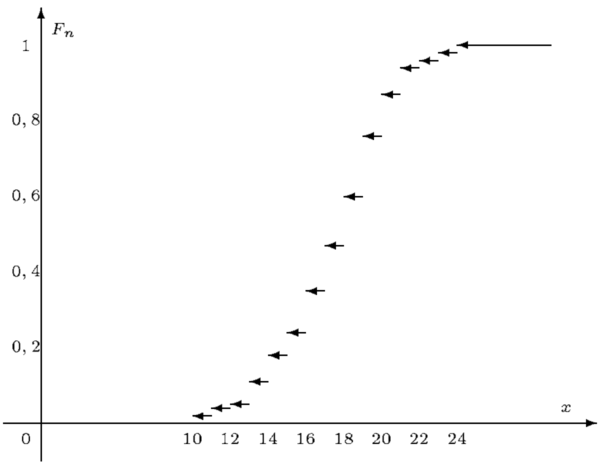
Оскільки $x^{(1)} = 10$, а $x^{(55)} = 24$, то $F_n(x) = 0$ при $x \le 10$ і $F_n(x) = 1$ при $x > 24$. Для інтервалу $(10, 24]$ емпіричну функцію будуємо за формулою (1):

$$x \le 11, \quad F_n(x) = \frac{1}{55} = 0,018; \qquad x \le 18, \quad F_n(x) = \frac{26}{55} = 0,473;$$

$$x \le 12, \quad F_n(x) = \frac{2}{55} = 0,036; \qquad x \le 19, \quad F_n(x) = \frac{33}{55} = 0,600;$$

$$
\begin{array}{llll}
x \le 13, & F_n(x) = \dfrac{3}{55} = 0,054; & x \le 20, & F_n(x) = \dfrac{42}{55} = 0,764; \\
x \le 14, & F_n(x) = \dfrac{6}{55} = 0,109; & x \le 21, & F_n(x) = \dfrac{48}{55} = 0,873; \\
x \le 15, & F_n(x) = \dfrac{10}{55} = 0,182; & x \le 22, & F_n(x) = \dfrac{52}{55} = 0,945; \\
x \le 16, & F_n(x) = \dfrac{13}{55} = 0,236; & x \le 23, & F_n(x) = \dfrac{53}{55} = 0,964; \\
x \le 17, & F_n(x) = \dfrac{19}{55} = 0,345; & x \le 24, & F_n(x) = \dfrac{54}{55} = 0,982;
\end{array}
$$

$$
x > 24, \quad F_n(x) = \frac{55}{55} = 1.
$$



$\triangleright$

Якщо ми маємо статистичний ряд, то числа

$$
\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} n_i x_i
$$

і

$$
S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - (\bar{x})^2
$$

називаються відповідно **вибірковим середнім** і **вибірковою дисперсією**.

Числа $\bar{x}$ і S^2 називаються точковими оцінками відповідно математичного сподівання та дисперсії генеральної сукупності. Поряд з S^2 розглядають виправлену оцінку $S_1^2 = n/(n-1)S^2$.

Оцінки $\bar{x}$ і S_1^2 є спроможними й незсуненими оцінками математичного сподівання та дисперсії відповідно.

Як характеристики варіаційних рядів використовують також **медіану** і **моду**.

Медіаною Me називається варіанта, яка є серединою статистичного варіаційного ряду. Якщо обсяг вибірки $n = 2k-1$, то $Me = x_k$; якщо ж $n = 2k$, то $Me = \frac{1}{2}(x_k + x_{k+1})$.

У випадку інтервального статистичного розподілу

$$Me = x_0 + h\frac{\frac{1}{2}n - S_{i_0-1}}{n_{i_0}},$$

де x_0 - початкове значення медіанного інтервалу, тобто інтервалу, який містить медіану; S_{i_0-1} - нагромаджена частота інтервалу, який передує медіанному; n_{i_0} - частота медіанного інтервалу; h - довжина медіанного інтервалу; n - обсяг сукупності. Номер медіанного інтервалу відповідає інтервалу, нагромаджена частота якого дорівнює або перевищує половину суми частот

$$\sum_{j=1}^{i_0} n_j \le \frac{n}{2} < \sum_{j=1}^{i_0+1} n_j \ .$$

Модою Mo статистичного розподілу називається варіанта, яка має найбільшу частоту. Якщо маємо інтервальний статистичний розподіл, то

$$Mo = x_0 + h\frac{n_{i_0} - n_{i_0-1}}{(n_{i_0} - n_{i_0-1}) + (n_{i_0} - n_{i_0+1})},$$

де x_0 - початкове значення модального інтервалу, тобто інтервалу, який містить моду; n_{i_0} - частота модального інтервалу; n_{i_0-1}

- частота інтервалу, що передує модальному; n_{i_0+1} - частота інтервалу, наступного після модального; h - довжина модального інтервалу.

Приклад 5. Обчислити медіану та моду статистичного розподілу проданого взуття (за розміром)

x_i	36	37	38	39	40	41	42	43
n_i	1	1	5	8	17	21	18	8

.

◁ Обсяг сукупності $n = 79$, тобто непарний, а тому $2k - 1 = 79$, $k = 40$. Отже, медіаною буде x_{40}. Для знаходження x_{40} знайдемо нагромаджені частоти розподілу

x_i	36	37	38	39	40	41	42	43
n_i	1	1	5	8	17	21	18	8
$\sum_{j=1}^{i} n_j$	1	2	7	15	32	53	71	79

.

В одержаній таблиці знаходимо нагромаджену частоту, яка менша від половини обсягу сукупності, і першу частоту, яка більша за неї. Вони дорівнюють відповідно 32 і 53. Отже, перші 32 варіанти за своєю величиною менші 41, а наступні 21 варіанта, які мають номери з 33-го до 53-го включно, набувають значення 41. Отже, медіана $Me = x_{40} = 41$.

Найбільша частота нашого розподілу дорівнює 21, і вона відповідає варіанті 41. Тому мода $Mo = 41$. ▷

Вправи

О1. У результаті вибірки одержано числа: -5, 1, -3, -2, 0, 0, -3, -3, -2, 0, 1, 2, 0, 0. Побудувати статистичний ряд, нарисувати полігон і гістограму частот. Знайти емпіричну функцію розподілу.

О2. Побудувати статистичний ряд і нарисувати полігон для такого розподілу розмірів 45 пар чоловічого взуття, проданих у магазині за день:

39	41	40	42	41	40	42	44	40	43	42	41	43
39	42	41	42	39	41	37	43	41	38	43	42	41
40	41	38	44	40	39	41	40	42	40	41	42	40
			43	38	39	41	41	42.				

О3. Спостереження за товщиною (в мм) 50 слюдяних прокладок дали такі результати:

0,021	0,030	0,039	0,031	0,042	0,034	0,036	0,030	0,028
0,030	0,033	0,024	0,031	0,040	0,031	0,033	0,031	0,027
0,031	0,045	0,031	0,034	0,027	0,030	0,048	0,030	0,028
0,030	0,033	0,046	0,043	0,030	0,033	0,028	0,031	0,027
0,031	0,036	0,051	0,034	0,031	0,036	0,034	0,037	0,028
		0,030	0,039	0,031	0,042	0,037.		

Побудувати за цими даними інтервальний статистичний ряд з однаковими інтервалами (перший інтервал $[0,020;\,0,024)$, другий $[0,024;\,0,028)$ і т.д.) і накреслити гістограму.

О4. Статистична сукупність має вигляд

61,55	61,59	62,09	63,08	63,97	64,74	65,07
67,12	68,10	69,38	70,21	70,21	70,36	71,25
71,86	72,00	72,39	72,41	72,46	72,50	72,80
72,84	73,44	74,93	75,46	75,65	77,13	77,37
77,64	77,86	77,93	78,03	78,28	78,74	78,97
79,07	79,10	79,34	79,34	79,34	79,40	79,49
79,70	80,02	80,26	80,56	80,65	80,69	81,13
81,32	81,40	81,54	81,85	82,27	82,71	82,74
82,78	83,03	83,05	83,59	83,68	83,74	83,78
83,96	84,98	85,18	85,32	85,64	85,71	85,84
86,01	86,03	86,05	86,11	86,48	86,94	86,98
87,38	87,47	87,59	87,89	88,03	88,04	88,11
88,24	88,89	90,34	90,40	90,58	90,73	90,76
92,51	92,72	92,94	94,58	95,06	95,73	96,11
		96,34	96,55.			

Скласти інтервальний ряд розподілу, знайти емпіричну функцію розподілу, а також числові характеристики, взявши

$$h = \frac{x^{(k)} - x^{(1)}}{1 + 3,322 \cdot lg\, n} \approx 5.$$

О5. У результаті досліду випадкова величина ξ набула значень: 2, 5, 7, 1, 10, 5, 9, 6, 8, 6, 2, 3, 7, 6, 8, 3, 8, 10, 6, 7, 3, 9, 4, 5, 6. Треба :

1) знайти статистичний розподіл вибірки;

2) побудувати полігон частот.

<u>О6.</u> У результаті випробувань неперервна випадкова величина ξ набула значень: 16, 17, 9, 13, 21, 11, 7, 7, 19, 5, 17, 5, 20, 18, 11, 4, 6, 22, 21, 15, 15, 23, 19, 25, 1. Треба :

1) скласти таблицю статистичного розподілу, розбивши проміжок $[0; 25]$ на п'ять розрядів, які мають однакові довжини;

2) побудувати гістограму частот.

<u>О7.</u> Знайти емпіричну функцію за таким розподілом вибірки:

x_i	1	4	6
n_i	10	15	25

<u>О8.</u> Після п'яти вимірювань довжини стержня одним приладом (без систематичних помилок) одержано такі результати (в мм) : $x_1 = 92$; $x_2 = 94$; $x_3 = 103$; $x_4 = 105$; $x_5 = 106$. Знайти : а) вибіркову середню довжину стержня; б) вибіркову і виправлену дисперсію помилок приладу.

<u>О9.</u> На заводі було проведено контрольне вимірювання 200 однотипних деталей. Результати, здобуті після групування, наведено в таблиці, де у першому рядку вказано середини інтервалів (шириною 0,1 мм), а у другому - число результатів вимірювання, що потрапили у цей інтервал:

x_i	3,7	3,8	3,9	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4
n_i	1	22	40	79	27	26	4	1

Знайти вибіркові середнє і дисперсію, а також незсунену оцінку дисперсії.

<u>О10.</u> За даними чотирьох вступних іспитів складена таблиця

Сума балів	12	13	14	15	16	17	18	19	20
К-сть абітур.	1	3	7	15	21	30	12	8	3

Знайти вибіркове середнє та вибіркову дисперсію (зсунену й незсунену) для випадкової величини ξ - суми балів.

<u>О11.</u> Задано статистичний ряд:

1)

x_i	2	5	7	8
n_i	3	4	6	5

; 2)

x_i	5	6	7	10
n_i	4	5	8	2

.

Знайти числові характеристики і побудувати емпіричну функцію розподілу та полігон частот.

<u>О12.</u> Для інтервального статистичного розподілу робітників за часом (у хв.), який затрачається на обробку однієї деталі

I_i	[0; 2)	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 15]
n_i	133	237	373	362	270	125

,

знайти медіану та моду.

<u>С1.</u> Проводились випробування чутливості 40 однотипних радіоприймачів. Результати випробувань після групування подано в таблицях, де в першому рядку дано інтервали чутливості (у мікровольтах), у другому рядку - число приймачів з чутливістю у цих інтервалах:

I_i	[75; 125)	[125; 175)	[175; 225)	[225; 275)
n_i	0	1	5	9

,

I_i	[275; 325)	[325; 375)	[375; 425)	[425; 475)
n_i	6	8	6	2

,

I_i	[475; 525)	[525; 575)	[575; 625)	[625; 675)	[675; 725]
n_i	2	0	0	1	0

.

Побудувати функцію розподілу вибірки, обчислити вибіркову середню чутливість і вибіркову дисперсію (незсунену оцінку).

<u>С2.</u> З метою визначення середньої врожайності пшениці на площі 500000 га проведено вибіркове вимірювання вражайності на 2500 га. Результати вимірювань подано у таблиці

Врож. з 1 га	[15; 17)	[17; 19)	[19; 21)	[21; 23)	[23; 25)	[25; 27]
Кільк. га	100	300	500	700	600	300

.

Знайти вибіркову середню врожайність з гектара і вибіркову дисперсію. Знайти ймовірність того, що середня врожайність з 500000 га відрізняється від вибіркової не більше, ніж на 9 кг.

Домашнє завдання

Д1. Побудувати дискретний статистичний ряд і накреслити полігон розподілу 60 абітурієнтів за числом балів, одержаних ними на вступних іспитах

20	19	22	24	21	18	23	17	20	16	15	23
21	24	21	18	23	21	19	20	24	21	20	18
17	22	20	16	22	18	20	17	21	17	19	20
20	21	18	22	23	21	25	22	20	19	21	24
		23	21	19	22	21	19	20	23	22	
				25	21	21.					

Д2. П'ятдесят спостережень за жирністю молока дали такі результати (в %):

3,86	4,06	3,67	3,97	3,76	3,61	3,96	4,04	3,84
3,94	3,98	3,57	3,87	4,07	3,99	3,69	3,76	3,71
3,94	3,82	4,16	3,76	4,00	3,46	4,08	3,88	4,01
3,93	3,71	3,81	4,02	4,17	3,72	4,09	3,78	4,02
3,73	3,52	3,89	3,92	4,18	4,26	4,03	4,14	3,72
		4,33	3,82	4,03	3,62	3,91.		

Побудувати за цими даними інтервальний варіаційний ряд з рівними інтервалами (перший інтервал [3,45; 3,55), другий [3,55; 3,65) і т.д.) і накреслити гістограму.

Д3. З генеральної сукупності зроблено вибірку обсягу $n = 60$:

x_i	1	3	6	26
n_i	8	40	10	2

Знайти вибіркове середнє, вибіркову дисперсію та виправлену вибіркову дисперсію.

Д4. У результаті вибірки одержано числа: -3, 2, -1, -3, 5, -3, 2. Знайти емпіричну функцію розподілу та побудувати її графік.

Д5. Нижче наведено результати вимірювання зросту (в см) випадково відібраних 100 студентів:

Зріст	[154; 158)	[158; 162)	[162; 166)	[166; 170)
Число студентів	10	14	26	28

,

Зріст	[170; 174)	[174; 178)	[178; 182]
Число студентів	12	8	2

.

Знайти вибіркове середнє, вибіркову дисперсію та виправлену вибіркову дисперсію зросту обстежуваних студентів.

Д6. У відділі технічного контролю було виміряно 200 втулок з партії, виготовленої одним автоматичним верстатом. У таблиці дано відхилення діаметрів від номіналу (у мікронах) після групування

Межі відхилень	[-20,-15)	[-15,-10)	[-10,-5)	[-5,0)	[0,5)
n_i	7	11	15	24	49

,

Межі відхилень	[5,10)	[10,15)	[15,20)	[20,25)	[25,30]
n_i	41	26	17	7	3

.

Знайти вибіркове середнє та незсунену оцінку дисперсії для цих відхилень.

Д7. З партії сталевих плашок зроблено вибірку обсягом 200 і результати вимірювання товщини плашок згруповано в 12 інтервалів шириною в 0,02 мм. Результати наведено в таблиці, де в першому рядку записано середини інтервалів (x_i), а в другому (n_i) - число плашок, товщина яких міститься у цьому інтервалі

x_i	14,41	14,43	14,45	14,47	14,49	14,51	14,53	14,55
n_i	2	2	8	9	9	14	41	76

,

x_i	14,57	14,59	14,61	14,63
n_i	21	11	4	3

.

Знайти вибіркові середнє і дисперсію, а також незсунену оцінку дисперсії.

Д8. Дано розподіл вибірки

x_i	11	12	13	14
n_i	4	1	3	2

. Знайти емпіричну функцію розподілу та побудувати її графік.

Д9. Задано статистичний ряд:

1)

x_i	2	4	5	6
n_i	8	9	10	3

; 2)

x_i	2	5	7	8
n_i	3	1	4	10

;

3)

x_i	6	8	12	15
n_i	2	3	10	5

.

Знайти числові характеристики і побудувати емпіричну функцію розподілу та полігон частот.

Д10. Статистичний розподіл волокон бавовни за довжиною (мм) має вигляд

x_i	6	9	12	15	18	21	24	27
n_i	3	27	60	85	108	127	153	172

,

x_i	30	33	36	39
n_i	146	82	33	4

.

Знайти для нього медіану та моду.

Відповіді

О1.

x_i	-5	-3	-2	0	1	2
n_i	1	3	2	5	2	1

;

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x \le -5, \\ 1/14, & -5 < x \le -3, \\ 2/7, & -3 < x \le -2, \\ 3/7, & -2 < x \le 0, \\ 11/14, & 0 < x \le 1, \\ 13/14, & 1 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

O2.

x_i	37	38	39	40	41	42	43	44
n_i	1	3	5	8	12	9	5	2

.

O3.

I_i	[0,020; 0,024)	[0,024; 0,028)	[0,028; 0,032)	[0,032; 0,036)
n_i	1	4	22	8

,

I_i	[0,036; 0,040)	[0,040; 0,044)	[0,044; 0,048)	[0,048; 0,052]
n_i	7	4	2	2

.

O4.

I_i	[61,55; 66,55)	[66,55; 71,55)	[71,55; 76,55)	[76,55; 81,55)
n_i	7	7	11	27

,

I_i	[81,55; 86,55)	[86,55; 91,55)	[91,55; 96,55]
n_i	23	16	9

.

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x \le 64,05, \\ 0,07, & 64,05 < x \le 69,05, \\ 0,14, & 69,05 < x \le 74,05, \\ 0,25, & 74,05 < x \le 79,05, \\ 0,52, & 79,05 < x \le 84,05, \\ 0,75, & 84,05 < x \le 89,05, \\ 0,91, & 89,05 < x \le 94,05, \\ 1, & x > 94,05; \end{cases}$$

$\bar{x} = 80,85; S^2 = 66,62; S_1^2 = 67,29.$

O5.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_i	1	2	3	1	3	5	3	3	2	2

.

O6.

I_i	[0,5)	[5,10)	[10,15)	[15,20)	[20,25]
n_i	3	5	4	8	5

.

O7. $F_n(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ 0,2, & 1 < x \le 4, \\ 0,5, & 4 < x \le 6, \\ 1, & x > 6. \end{cases}$

O8. $\bar{x} = 100$; $S^2 = 34$; $S_1^2 = 42,5$. **O9.** $\bar{x} = 4,004$; $S^2 = 0,0159$; $S_1^2 = 0,0160$. **O10.** $\bar{x} = 16,48$; $S^2 = 0,4896$; $S_1^2 = 0,4945$.

О11. 1) $\bar{x} = 6$; $S^2 = 4,33$; $S_1^2 = 4,585$;

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ 1/6, & 2 < x \le 5, \\ 7/18, & 5 < x \le 7, \\ 13/18, & 7 < x \le 8, \\ 1, & x > 8. \end{cases}$$

2) $\bar{x} = 6,63$; $S^2 = 1,935$; $S_1^2 = 2,0425$.

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x \le 5, \\ 4/19, & 5 < x \le 6, \\ 9/19, & 6 < x \le 7, \\ 17/19, & 7 < x \le 10, \\ 1, & x > 10. \end{cases}$$

О12. $Me = 6,04$; $Mo = 5,85$.
С1. $\bar{x} = 323,75$; $S_1^2 = 108$. **С2.** $\bar{x} = 21,84$; $S^2 = 6,64$;

$$P\{|a - 21,84| \le 0,09\} \approx 2\Phi\left(\frac{0,09\sqrt{2500}}{\sqrt{6,64}}\right) = 2\Phi(1,75) = 0,919.$$

Д1.

x_i	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
n_i	1	2	4	5	6	10	13	7	6	4	2

.

Д2.

I_i	[3,45;3,55)	[3,55;3,65)	[3,65;3,75)	[3,75;3,85)	[3,85;3,95)
n_i	2	3	7	8	9

I_i	[3,95;4,05)	[4,05;4,15)	[4,15;4,25)	[4,25;4,35]
n_i	11	5	3	2

.

Д3. $\bar{x} = 4$; $S^2 = 18,67$; $S_1^2 = 18,986$.

Д4. $F_n(x) = \begin{cases} 0, & x \le -3, \\ 3/7, & -3 < x \le -1, \\ 4/7, & -1 < x \le 2, \\ 6/7, & 2 < x \le 5, \\ 1, & x > 5. \end{cases}$

Д5. $\bar{x} = 166$; $S^2 = 33,44$; $S_1^2 = 33,778$. **Д6.** $\bar{x} = 4,3$; $S_1^2 = 92,25$.

Д7. $\bar{x} = 14,54$; $S_1^2 = 0,0015$; $S^2 = 0,00149$.
Д8.

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 11, \\ 0,4, & 11 < x \leq 12, \\ 0,5, & 12 < x \leq 13, \\ 0,8, & 13 < x \leq 14, \\ 1, & x > 14. \end{cases}$$

Д9. 1) $\bar{x} = 4$; $S^2 = 1,8$; $S_1^2 = 1,86$,

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2, \\ 4/15, & 2 < x \leq 4, \\ 17/30, & 4 < x \leq 5, \\ 9/10, & 5 < x \leq 6, \\ 1, & x > 6. \end{cases}$$

2) $\bar{x} = 6,61$; $S^2 = 2,03$; $S_1^2 = 2,15$,

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2, \\ 1/6, & 2 < x \leq 5, \\ 2/9, & 5 < x \leq 7, \\ 4/9, & 7 < x \leq 8, \\ 1, & x > 8. \end{cases}$$

3) $\bar{x} = 11,56$; $S^2 = 8,0475$; $S_1^2 = 8,471$,

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 6, \\ 0,1, & 6 < x \leq 8, \\ 0,25, & 8 < x \leq 12, \\ 0,75, & 12 < x \leq 15, \\ 1, & x > 15. \end{cases}$$

Д10. $Me = 24$; $Mo = 27$.

Тема 17. Інтервальні оцінки для математичного сподівання і середнього квадратичного відхилення

Точкові оцінки параметрів розподілу (математичного сподівання і дисперсії) можна взяти за початкові орієнтовні результати обробки спостережень. Їх недолік у тому, що невідомо, з якою точністю вони визначають оцінюваний параметр. Якщо для великого числа спостережень ця точність є достатньою для практичних висновків, то для вибірок невеликого обсягу питання точності оцінок є істотним.

Поставлена задача в математичній статистиці розв'язується так. Нехай C - невідомий параметр розподілу. За зробленою вибіркою знаходять за певними правилами числа γ_1 і γ_2 так, щоб виконувалась нерівність

$$P\{C \in (\gamma_1; \gamma_2)\} \geq \beta.$$

Числа γ_1 і γ_2 називають **надійними межами**, а інтервал $(\gamma_1; \gamma_2)$ - **надійним інтервалом** для параметра C. Число β називається надійністю зробленої оцінки.

Оскільки числа γ_1 і γ_2 знаходяться за взятою вибіркою, то вони є функціями від x_1, x_2, $\ldots$, x_n а, отже, є випадковими величинами. Таким чином, надійний інтервал $(\gamma_1; \gamma_2)$ також випадковий. Він може накривати параметр C (певне число) або ні. Саме так і розуміють випадкову подію $\{C \in (\gamma_1; \gamma_2)\}$, яка полягає в тому, що надійний інтервал накриває число C.

Нехай x_1, x_2, $\ldots$, x_n - вибірка з генеральної сукупності величини ξ, розподіленої за певним законом з математичним сподіванням a і дисперсією σ^2. Тоді, як відомо, x_1, x_2, $\ldots$, x_n є сукупністю значень, набутих n взаємно незалежними, однаково розподіленими випадковими величинами $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, що мають математичне сподівання a і дисперсією σ^2. Тому за центральною граничною теоремою у формі Ліндеберга-Леві при $n \to \infty$

$$P\left\{|\bar{x} - a| < \frac{\sigma}{\sqrt{n}} x\right\} \to 2\Phi(x),\ x > 0,$$

де Φ - функція Лапласа.

Звідси випливає, що при достатньо великому n

$$P\left\{|\bar{x}-a| < \frac{\sigma}{\sqrt{n}}x\right\} \approx 2\Phi(x),$$

тобто при надійному рівні $\beta = 2\Phi(x_\beta)$ надійним інтервалом для математичного сподівання a є проміжок

$$\left(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}x_\beta,\ \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}x_\beta\right).$$

Оскільки σ, як правило, нам невідоме, то його замінюють величиною S_1. При цьому для надійного рівня $\beta = 2\Phi(x_\beta)$ для a беруть надійний інтервал

$$\left(\bar{x} - \frac{S_1}{\sqrt{n}}x_\beta,\ \bar{x} + \frac{S_1}{\sqrt{n}}x_\beta\right).$$

Якщо обсяг вибірки недостатньо великий ($n < 30$), то даний інтервал не заслуговує значної довіри. Тоді в цьому випадку беруть інтервал

$$\left(\bar{x} - \frac{S_1}{\sqrt{n}}t_\beta, \bar{x} + \frac{S_1}{\sqrt{n}}t_\beta\right),$$

де $t_\beta = t(\beta, n)$ - значення, яке береться з таблиці розподілу Стьюдента (таблиці 5).

Приклад 1. Нехай із значень випадкової величини, розподіленої за нормальним законом з невідомим математичним сподіванням a, зроблена вибірка обсягом $n = 25$, для якої середнє арифметичне $\bar{x} = 12,7$, а вибіркова виправлена дисперсія $S_1^2 = 0,25$. Знайдемо надійний інтервал для параметра a з надійністю $\beta = 0,95$.

$\triangleleft$ З таблиці розподілу Стьюдента для $\beta = 0,95$, $n = 25$ знаходимо $t_\beta = 2,064$. Отже, надійні межі такі:

$$\bar{x} - \frac{S_1}{\sqrt{n}}t_\beta = 12,7 - 2,064 \cdot \frac{0,5}{5} \approx 12,5,$$

$$\bar{x} + \frac{S_1}{\sqrt{n}}t_\beta = 12,7 + 2,064 \cdot \frac{0,5}{5} \approx 12,9,$$

а математичне сподівання a накривається надійним інтервалом (12,5; 12,9) з надійністю $0,95$. Можна сказати, що $a \approx 12,7$ з точністю до $0,2$ і надійністю $0,95$. $\triangleright$

Надійний інтервал для оцінок середнього квадратичного відхилення σ нормального розподілу за виправленим вибірковим середнім S_1 має вигляд

$$(S_1(1-q);\ S_1(1+q)), \quad \text{якщо} \quad q < 1,$$

і

$$(0;\ S_1(1+q)), \quad \text{якщо} \quad q > 1,$$

де $q = q(\gamma, n)$ визначається з таблиці 7 за найдійним рівнем γ і обсягом вибірки n.

Приклад 2. Для знаходження середньої маси бичків на тваринницькій фермі було відібрано 170 бичків. Треба знайти можливу межу похибки середньої маси бичка з ймовірністю $0,9973$, якщо вибіркова дисперсія $S^2 = 40$. Крім того, необхідно знайти надійний інтервал для σ з імовірністю $\gamma = 0,99$.

$\triangleleft$ З рівності $2\Phi(x) = 0,9973$ за таблицею 2 для функції Лапласа знаходимо, що $x_\beta = 3$. Тоді

$$x_\beta \frac{S_1}{\sqrt{n}} = x_\beta \frac{S}{\sqrt{n-1}} = 3\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{169}} = 0,4865 \cdot 3 = 1,4595,$$

а тому надійний інтервал для a

$$(\bar{x} - 1,4595;\ \bar{x} + 1,4595).$$

Для визначення надійного інтервалу, що покриває σ для $n = 170$ і $\gamma = 0,99$ з таблиці 7 для $q = q(\gamma, n)$, знаходимо $q = 0,15$. Оскільки

$$S_1 = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} S = \frac{\sqrt{170}}{\sqrt{169}} \sqrt{40} = 6,34,$$

то надійний інтервал для σ має вигляд

$$(6,34(1-0,15);\ 6,34(1+0,15)) \quad \text{або} \quad (5,39;\ 7,29). \triangleright$$

Приклад 3. Знайти мінімальний обсяг вибірки, при якому з надійністю 0,975 точність оцінки математичного сподівання a

генеральної сукупності за вибірковим середнім дорівнюватиме $\delta = 0,2$, якщо відоме середнє квадратичне відхилення $\sigma = 1,2$ нормально розподіленої генеральної сукупності.

◁ Скористаємося формулою, яка визначає точність оцінки математичного сподівання генеральної сукупності за вибірковим середнім:

$$\delta = x_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Звідси

$$n = \frac{x_\beta^2 \sigma^2}{\delta^2}.$$

За умовою $\beta = 0,975$ або $2\Phi(x_\beta) = 0,975$; отже, $\Phi(x_\beta) = 0,4875$. За таблицею значень функції Лапласа знаходимо $x_\beta = 2,24$.

Тоді $n = (2,24^2 \cdot 1,2^2) : (0,2)^2 = 181$. ▷

Вправи

О1. Знайти надійний інтервал для оцінки з надійністю $\beta = 0,95$ невідомого математичного сподівання a нормально розподіленої випадкової величини ξ, якщо задано середнє квадратичне відхилення $\sigma = 5$, вибіркове середнє $\bar{x} = 14$ і обсяг вибірки $n = 25$.

О2. Знайти мінімальний обсяг вибірки, при якому з надійністю $\beta = 0,925$ точність оцінки математичного сподівання нормально розподіленої генеральної сукупності за вибірковим середнім дорівнюватиме $\delta = 0,2$, якщо середнє квадратичне відхилення генеральної сукупності $\sigma = 1,5$.

О3. З партії однотипних високоомних резисторів відібрано для контролю 10 шт. Вимірювання показали такі відхилення від номіналу (у кілоомах): +1; +3; -2; +2; +4; +2; +5; +3; -2; +4. Знайти вибіркові середнє і дисперсію відхилення фактичної величини опору від номіналу в цій партії. За розподілом Стьюдента знайти надійні межі для математичного сподівання цього відхилення при надійному рівні $\beta = 0,95$.

О4. За даними 9 незалежних однаково точних вимірювань деякої фізичної величини знайдені середнє арифметичне результатів вимірювань $\bar{x} = 30,1$ та виправлене середнє квадратичне відхилення $S_1 = 6$. Оцінити істинне значення вимірюваної величини за допомогою надійного інтервалу з надійністю $\beta = 0,99$.

<u>О5.</u> Проведено 9 незалежних і однаково точних вимірювань. Середнє арифметичне їх дорівнює 37,261, а вибіркова дисперсія $S_1^2 = 25$. Оцінити істинне значення вимірюваної величини з надійністю $\beta = 0,95$.

<u>О6.</u> Термін служби освітлювальної лампи є нормально розподіленою випадковою величиною, параметри якої a і σ невідомі. Для їх оцінки проведено контрольні вимірювання 16 ламп, виходячи з чого, знайдено, що $\bar{x} = 3000$ год., а $S_1 = 20$ год. Знайти надійний інтервал для математичного сподівання a з надійністю $\beta = 0,95$, а також надійний інтервал, який накриває середнє квадратичне відхилення σ з надійністю $\gamma = 0,999$.

<u>О7.</u> За даними вибірки обсягу $n = 16$ з генеральної сукупності знайдено виправлене середнє квадратичне відхилення $S_1 = 1$ нормально розподіленої якісної ознаки. Знайти надійний інтервал, який накриває генеральне середнє квадратичне відхилення σ з надійністю $\gamma = 0,95$.

<u>О8.</u> Зроблено 12 вимірювань одним приладом (без систематичної помилки) деякої фізичної величини, причому виправлене середнє квадратичне відхилення S_1 випадкових помилок вимірювань дорівнює $0,6$. Знайти точність приладу з надійністю $\beta = = 0,99$.

<u>С1.</u> Виміряно максимальну ємність 20 конденсаторів змінної ємності; результати вимірювань (у пікофарадах) наведено у наступній таблиці:

4,40	4,31	4,40	4,40	4,65
4,56	4,71	4,54	4,36	4,56
4,31	4,42	4,60	4,35	4,50
4,40	4,43	4,48	4,42	4,45.

Знайти : а) надійні межі для математичного сподівання a генеральної сукупності при надійному рівні 1) 0,99; 2) 0,95, користуючись нормальним розподілом ; б) зробити те саме за допомогою розподілу Стьюдента.

C2. Відомі результати двадцяти двох вимірювань деякої величини: 3,1, 3,3, 2,9, 3,0, 3,1, 3,2, 2,8, 2,7, 3,1, 3,2, 2,9, 3,0, 2,9, 3,1, 2,8, 2,9, 3,2, 3,3, 2,9, 3,1, 3,2, 3,0. За розподілом Стьюдента знайти надійний інтервал для значення вимірюваної величини a з надійним рівнем $\beta = 0,99$.

C3. При перевірці 180 одиниць товару з великої партії виявилось 12 бракованих. Знайти 92%-ий надійний інтервал для частки бракованих одиниць у всій партії та оцінити мінімальний обсяг вибірки, щоб з імовірністю 0,92 можна було стверджувати, що частка браку в усій партії відрізняється від частки появи браку у вибірці не більше, ніж на 2% ?

C4. Розглядається вибірка обсягу $n = 40$ з нормально розподіленої сукупності. Вибіркове середнє вибірки дорівнює 25, а виправлена вибіркова дисперсія - 3,7. Знайти 90%-ий надійний інтервал для математичного сподівання та 95%-ий надійний інтервал для середнього квадратичного відхилення.

Домашнє завдання

Д1. Глибина моря вимірюється приладом, систематична похибка якого дорівнює нулю, а випадкові похибки розподілені нормально з середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 15$ м. Скільки треба зробити незалежних вимірювань, щоб знайти глибину з похибкою не більшою, ніж 5 м, при надійному рівні $\beta = 0,9$.

Д2. 1) Випадкова величина розподілена за нормальним законом з параметром $\sigma = 2$. Зроблена вибірка обсягу $n = 25$. Знайти з надійністю $\beta = 0,95$ надійний інтервал для невідомого параметра a цього розподілу.

2) Нехай з множини значень випадкової величини, яка розподілена за нормальним законом з невідомим математичним сподіванням a, зроблено вибірку обсягу $n = 25$, для якої вибіркове середнє $\bar{x} = 12,7$, а вибіркова дисперсія $S_1^2 = 0,25$. Знайти надійний інтервал для параметра a з надійністю $\beta = 0,95$.

Д3. За даними 16 незалежних вимірювань деякої фізичної величини знайдені середнє арифметичне результатів вимірювань

$\bar{x} =$
$= 42,8$ і виправлене середнє квадратичне відхилення $S_1 = 8$. Оцінити істинне значення вимірюваної величини з надійністю $\beta = 0,999$.

Д4. За даними вибірки обсягу n з генеральної сукупності нормально розподіленої кількісної ознаки знайдено виправлене середнє квадратичне відхилення S_1. Знайти надійний інтервал, який накриває генеральне середнє квадратичне відхилення σ з надійністю $\gamma = 0,999$, якщо : а) $n = 10$, $S_1 = 5,1$; б) $n = 50$, $S_1 = 14$.

Д5. Проведено 10 вимірювань одним приладом (без систематичної помилки) деякої фізичної величини, причому виправлене середнє квадратичне відхилення випадкових помилок вимірювань дорівнює 0,8. Знайти точність приладу з надійністю 0,95.

Д6. Для визначення середньої суми вкладів у банку, який має 2200 вкладників, проведено вибіркове дослідження 111 вкладників, результати якого дано в таблиці

Сума вкладу, тис.грн.	[10;30)	[30;50)	[50;70)	[70;90)	[90;110)	[110;130]
Число вклад.	1	3	10	30	60	7

.

Користуючись цими даними, знайти надійні межі для генерального середнього, які можна було б гарантувати з імовірністю 0,96.

Д7. Для визначення середньої врожайності пшениці на площі 500000 га проведено вибіркове вимірювання врожайності на 2500 га. Результати вимірювань подано в таблиці

Врож. з 1 га (в ц)	[15; 17)	[17; 19)	[19; 21)	[21; 23)	[23; 25)	[25; 27]
К-сть га	100	300	500	700	600	300

.

Знайти надійні межі для середньої врожайності з надійністю: 1) $\beta = 0,95$; 2) $\beta = 0,999$.

Д8. Вимірювання твердості 16 зразків легованої сталі (в умовних одиницях) дали такі результати : 13,1; 12,8; 11,9; 12,4; 13,5; 13,7; 12,0; 13,8; 10,6; 12,4; 13,5; 11,7; 13,9; 11,5; 12,5; 11,9. Вважаючи, що вибірка одержана з нормально розподіленої генеральної сукупності, знайти надійні інтервали для математичного сподівання та середнього квадратичного відхилення при надійному рівні 0,95.

Відповіді

О1. $12,04 < a < 15,96$. **О2.** $n = 179$.
О3. $\bar{x} = 2$; $S^2 = 5,77$; $0,3 < a < 3,7$. **О4.** $23,38 < a < 36,82$.
О5. (33,421; 41,001). **О6.** (2989,35; 3010,65), (0; 41,4).
О7. $0,56 < \sigma < 1,44$. **О8.** $0,06 < \sigma < 1,14$.
С1. а) 1) $4,41 < a < 4,53$; 2) $4,42 < a < 4,52$;
б) 1) $4,40 < a < 4,54$; 2) $4,42 < a < 4,52$.
С2. $\bar{x} = 3,0318$; $S_1^2 = 0,0303$; $2,9268 < a < 3,1368$.
С3. (0,0615; 0,0785), $n \geq 34$ (скористатися формулою

$$P\{|p^* - p| < \varepsilon\} \approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p^*q^*}}\right),$$

де $p^* = \mu/n$ - частота, $q^* = 1 - p^*$). **С4.** (24,5; 25,5); (1,46; 2,38).
Д1. $n = 25$. **Д2.** 1) $(\bar{x} - 0,784; \bar{x} + 0,784)$; 2) (12,5; 12,9).
Д3. $34,66 < a < 50,94$. **Д4.** а) $0 < \sigma < 14,28$; б) $7,98 < \sigma < 20,02$.
Д5. $0,28 < \sigma < 1,32$. **Д6.** $86,37 < a < 93,45$. **Д7.** 1) (21,74; 21,94); 2) (21,64; 22,04). **Д8.** $12,08 < a < 13,06$; $0,56 < \sigma < 1,44$.

Тема 18. Метод умовних варіант (метод добутків) обчислення вибіркових характеристик

Якщо число варіант досить велке, то для спрощення обчислень при знаходженні вибіркових характеристик застосовують групування емпіричних даних. Нехай $(a,\, b)$ - інтервал, в якому лежать усі вибіркові значення. Розіб'ємо інтервал (a, b) на деяке число k рівних частин. Нехай x_i, $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, - середини цих інтервалів; для спрощення обчислень покладемо наближено, що всі вибіркові значення, які попали в i-й інтервал, дорівнюють x_i. Якщо n_i - число вибіркових значень, які попали в i-й інтервал, то

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} n_i x_i,$$

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - (\bar{x})^2.$$

Для подальшого спрощення обчислень застосовують **метод умовних варіант** (метод добутків). Нехай i_0 - номер одного з інтервалів, який знаходиться приблизно посередині інтервалу (a, b); особливо зручно брати інтервал, в який потрапило найбільше число вибіркових значень, але це не обов'язково. Введемо так звані умовні варіанти $u_i = i - i_0$. Нехай $h = (b-a)/k$ - довжина частинних інтервалів або крок. Оскільки $x_i = x_1 + (i-1)h$, $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, то $x_i - x_{i_0} = (i - i_0)h = u_i h$, звідки

$$x_i = x_{i_0} + u_i h,\ \ i \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

Тоді

$$\bar{x} = x_{i_0} + \bar{u}h, \quad \text{де} \quad \bar{u} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} n_i u_i, \qquad (1)$$

$$S^2 = h^2 \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} n_i u_i^2 - (\bar{u})^2 \right) = h^2 S_u^2. \qquad (2)$$

Формули (1) і (2) зручні тим, що умовні варіанти u_i - послідовні цілі числа.

Приклад 1. Знайти методом умовних варіант вибіркове середнє і вибіркову дисперсію за заданим розподілом вибірки обсягу $n = 100$:

x_i	12	14	16	18	20	22
n_i	5	15	50	16	10	4

.

◁ Складемо розрахункову таблицю, для чого:

1) запишемо варіанти в перший стовпчик;

2) запишемо частоти в другий стовпчик;

3) за умовний нуль x_{i_0} візьмемо варіанту 16, яка має найбільшу часоту; у клітинці третього стовпчика, яка належить рядку, що містить умовний нуль, записуємо 0; над нулем послідовно записуємо -1, -2, а під нулем – 1, 2, 3;

4) добутки $n_i u_i$ запишемо в четвертий стовпчик ; додавши ці числа, їх суму записуємо в нижню клітинку четвертого стовпчика;

5) добутки $n_i u_i^2$ запишемо в п'ятий стовпчик; суму чисел цього стовпчика вміщуємо в нижню клітинку п'ятого стовпчика.

x_i	n_i	u_i	$n_i u_i$	$n_i u_i^2$
12	5	-2	-10	20
14	15	-1	-15	15
16	50	0	0	0
18	16	1	16	16
20	10	2	20	40
22	4	3	12	36
	100		23	127

.

Тоді згідно з формулами (1) і (2) маємо:

$$\bar{x} = 16 + \tfrac{1}{100} \cdot 23 \cdot 2 = 16,46;$$

$$S^2 = 2^2 \left(\frac{1}{100} \cdot 127 - \left(\frac{23}{100} \right)^2 \right) = 4(1,27 - (0,23)^2) = 4,87,$$

бо $h = 14 - 12 = 2$. ▷

Якщо початкові варіанти **не є рівновіддаленими** , то інтервал, в якому містяться всі варіанти вибірки, ділимо на декілька рівних, довжиною h, частинних інтервалів (бажано, щоб кожний частинний інтервал містив не менше 8-10 варіант). Потім знаходимо середини частинних інтервалів, які й утворюють послідовність рівновіддалених варіант. За частоту кожної середини інтервалу беремо суму частот варіант, які попали у відповідний частинний інтервал.

При обчисленні вибіркової дисперсії для зменшення помилки, викликаної групуванням (особливо при малому числі інтервалів), робимо поправку Шеппарда і обчислюємо її за формулою

$$\bar{S}^2 = S^2 - \frac{1}{12}h^2.$$

Приклад 2. За допомогою методу умовних варіант знайти вибіркове середнє і вибіркову дисперсію, якщо розподіл вибірки обсягу $n = 100$ має вигляд

x_i	2	3	7	9	11	12,5	16	18	23	25	26
n_i	3	5	10	6	10	4	12	13	8	20	9

.

◁ Розіб'ємо відрізок [2; 26] на такі чотири частинних проміжки довжиною $h = 6$: [2; 8); [8; 14); [14; 20); [20; 26].

Узявши середини частинних інтервалів за нові варіанти x_i, дістанемо рівновіддалені варіанти : $x_1 = 5$, $x_2 = 11$, $x_3 = 17$, $x_4 = 23$. За частоту n_1 варіанти $x_1 = 5$ візьмемо суму частот варіант, які попали в перший інтервал: $n_1 = 3 + 5 + 10 = 18$.

Знайшовши аналогічно частоти решти варіант, дістанемо розподіл рівновіддалених варіант:

x_i	5	11	17	23
n_i	18	20	25	37

.

Складемо розрахункову таблицю

x_i	n_i	u_i	$n_i u_i$	$n_i u_i^2$
5	18	-2	-36	72
11	20	-1	-20	20
17	25	0	0	0
23	37	1	37	37
	100		-19	129

.

Отже, $x_{i_0} = 17$; $\bar{u} = \frac{1}{100} \cdot (-19) = -0,19$; $\bar{x} = 17 + (-0,19) \cdot 6 = 15,86$; $S^2 = 6^2 \left(\frac{1}{100}129 - (-0,19)^2\right) = 45,14$.

Якщо врахувати поправку Шеппарда, то одержимо, що $\bar{S}^2 = S^2 - \frac{1}{12}h^2 = 45,14 - \frac{6^2}{12} = 42,14$.▷

Коефіцієнт асиметрії і **ексцес** статистичного розподілу визначаються відповідно рівностями

$$\alpha = \frac{m_3}{S^3}, \qquad \kappa = \frac{m_4}{S^4} - 3, \tag{3}$$

де

$$m_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \bar{x})^3, \quad m_4 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \bar{x})^4.$$

Якщо скористатися методом умовних варіант, то m_3 і m_4 обчислюються за формулами

$$m_3 = (M_3 - 3M_1M_2 + 2M_1^3)h^3,$$

$$m_4 = (M_4 - 4M_1M_3 + 6M_1^2M_2 - 3M_1^4)h^4,$$

де

$$M_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i u_i^j$$

- умовний момент j-го порядку (очевидно, що $M_1 = \bar{u}$).

Приклад 3. Знайти коефіцієнт асиметрії й ексцес за розподілом вибірки прикладу 1.

$\triangleleft$ Розширимо таблицю з прикладу 1, доповнивши її ще двома стовпчиками:

x_i	n_i	u_i	n_iu_i	$n_iu_i^2$	$n_iu_i^3$	$n_iu_i^4$
12	5	-2	-10	20	-40	80
14	15	-1	-15	15	-15	15
16	50	0	0	0	0	0
18	16	1	16	16	16	16
20	10	2	20	40	80	160
22	4	3	12	36	108	324
	100		23	127	149	595

.

Маємо $M_1 = \bar{u} = 0,23$, $M_2 = 1,27$, $M_3 = 1,49$, $M_4 = 5,95$. Тому

$$m_3 = (1,49 - 3\cdot 0,23\cdot 1,27 + 2(0,23)^3)2^3 = 5,124,$$

$$m_4 = (5,95 - 4\cdot 0,23\cdot 1,49 + 6(0,23)^2\cdot 1,27 - 3(0,23)^4)2^4 = 79,582.$$

Якщо врахувати, що $S=\sqrt{4,87}\approx 2,21$, то згідно з формулами (3) матимемо

$$\alpha=\frac{5,124}{(\sqrt{4,87})^3}\approx 0,49,\quad \kappa=\frac{79,582}{(\sqrt{4,87})^4}-3\approx 0,36.\ \triangleright$$

Вправи

<u>О1.</u> Використовуючи метод умовних варіант, знайти вибіркове середнє, вибіркову дисперсію та надійні межі для математичного сподівання з надійністю $\beta=0,95$ і надійні межі для середнього квадратичного відхилення з надійністю $\gamma=0,99$ за заданими розподілами вибірки:

1)

x_i	65	70	75	80	85
n_i	2	5	25	15	3

;

2)

x_i	10	13	15	17	19	23	24	26	28	32	34	35
n_i	2	4	6	8	9	6	20	15	10	8	7	5

;

3)

x_i	7,14	7,21	7,28	7,35	7,42	7,49	7,56	7,63	7,70
n_i	2	9	24	43	51	37	25	8	1

.

Обчислити також вибіркову дисперсію, враховуючи поправку Шеппарда.

<u>О2.</u> Знайти коефіцієнт асиметрії й ексцес за заданими розподілами вибірки обсягом $n=100$:

1)

x_i	2,6	3,0	3,4	3,8	4,2
n_i	8	20	45	15	12

;

2)

x_i	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84
n_i	2	4	6	8	12	30	18	8	7	5

.

<u>О3.</u> При свердлінні 80 отворів тим самим свердлом з наступними вимірюваннями діаметрів отворів одержано такі дані (в мм):

40,25	40,35	40,45	40,35	40,39	40,40	40,42	40,32
40,37	40,35	40,44	40,35	40,30	40,34	40,31	40,32
40,33	40,41	40,35	40,30	40,33	40,38	40,33	40,33
40,28	40,30	40,40	40,36	40,32	40,32	40,42	40,35
40,29	40,33	40,31	40,33	40,36	40,34	40,30	40,30
40,41	40,40	40,33	40,37	40,34	40,30	40,43	40,34
40,35	40,34	40,34	40,31	40,43	40,36	40,34	40,34
40,28	40,45	40,32	40,34	40,31	40,31	40,36	40,34
40,29	40,39	40,39	40,37	40,37	40,38	40,36	40,41
40,27	40,38	40,37	40,37	40,36	40,35	40,32	40,36.

Знайти вибіркове середнє значення діаметра і незсунену оцінку дисперсії, згрупувавши емпіричні дані і використавши метод умовних варіант. При групуванні розбити проміжок від 40, 25 до 40,45 на 10 проміжків з кроком $h = 0,02$.

<u>О4.</u> При вимірюванні зросту (в сантиметрах) навмання вибраних 100 студентів одержали інтервальний розподіл

I_i	[154; 158)	[158; 162)	[162; 166)	[166; 170)
n_i	10	14	26	28

,

I_i	[170; 174)	[174; 178)	[178; 182]
n_i	12	8	2

.

З допомогою методу умовних варіант знайти вибіркове середнє, вибіркову дисперсію, коефіцієнт асиметрії та ексцес.

<u>С1.</u> Знайти вибіркові середнє і дисперсію, а також незсунену оцінку дисперсії вибірки

x_i	14,41	14,43	14,45	14,47	14,49	14,51
n_i	2	2	8	9	9	14

,

x_i	14,53	14,55	14,57	14,59	14,61	14,63
n_i	41	76	21	11	4	3

.

<u>С2.</u> Обчислити вибіркові середнє та дисперсію, коефіцієнт асиметрії та ексцес для вибірки

I_i	[10; 12)	[12; 14)	[14; 16)	[16; 18)
n_i	2	4	8	12

,

I_i	[18; 20)	[20; 22)	[22; 24]
n_i	16	10	3

.

Домашнє завдання

Д1. Знайти за методом умовних варіант вибіркове середнє, вибіркову дисперсію та надійний інтервал для математичного сподівання з рівнем надійності $\beta = 0,9$ таких вибірок:

1)

x_i	18,6	19,0	19,4	19,8	20,2	20,6
n_i	4	6	30	40	18	2

;

2)

x_i	6	8	11	13	15,5	17,5	20	23,5	24,5	26
n_i	1	9	6	6	4	6	8	5	4	1

.

Знайти також вибіркову дисперсію з урахуванням поправки Шеппарда.

Д2. Знайти коефіцієнт асиметрії та ексцес для таких статистичних розподілів вибірок:

1)

x_i	1	6	11	16	21
n_i	5	25	40	20	10

;

2)

x_i	10,2	10,4	10,6	10,8	11	11,2	11,4	11,6	11,8	12,0
n_i	2	3	8	13	25	20	12	10	6	1

.

Д3. Обчислити вибіркові середнє і дисперсію, коефіцієнт асиметрії й ексцес для заданих вибірок:

1)

I_i	[61; 65)	[65; 69)	[69; 73)	[73; 77)	[77; 81)
n_i	1	4	5	8	14

,

I_i	[81; 85)	[85; 89)	[89; 93)	[93; 97)	[97; 101]
n_i	9	6	1	1	1

;

2)

I_i	[49; 52)	[52; 55)	[55; 58)	[58; 61)
n_i	3	6	11	19

,

I_i	[61; 64)	[64; 67)	[67; 70]
n_i	30	21	10

;

3)

I_i	[-40; -30)	[-30; -20)	[-20; -10)	[-10; 0)
n_i	7	11	15	24

,

I_i	[0; 10)	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50)	[50; 60]
n_i	49	41	26	17	7	3

.

Відповіді

О1. 1) $\bar{x} = 76,2$, $S^2 = 18,56$, $\bar{S}^2 = 16,48$, (74,98; 77,42), (3,08; 5,71); 2) $\bar{x} = 23,35$, $S^2 = 38,425$, $\bar{S}^2 = 36,342$, (22,13; 24,57), (4,996; 7,463). 3) $\bar{x} = 7,4151$, $S^2 = 0,0116$, $\bar{S}^2 = 0,0112$, (7,401; 7,431), (0,093; 0,123).

О2. 1) $\alpha = 0,139$, $\kappa = -0,353$; 2) $\alpha = -0,233$, $\kappa = 2,997$.

О3. $\bar{x} = 40,35$, $S^2 = 0,00196$. **О4.** $\bar{x} = 166$, $S^2 = 33,44$, $\alpha = 0,16$, $\kappa = -0,39$.

С1. $\bar{x} = 14,54$, $S^2 = 0,0015$, $S_1^2 = 0,001508$.

С2. $\bar{x} = 17,8$, $S^2 = 8,4$, $\alpha = -0,393$, $\kappa = -0,303$.

Д1. 1) $\bar{x} = 19,672$, $S^2 = 0,169$, $\bar{S}^2 = 0,156$, (19,604; 19,740); 2) $\bar{x} = 15,68$, $S^2 = 32$, $\bar{S}^2 = 30,7$, (14,35; 17,01). **Д2.** 1) $\alpha = 0,18$, $\kappa = -0,45$; 2) $\alpha = -0,014$, $\kappa = -0,2445$. **Д3.** 1) $\bar{x} = 78,9$, $S^2 = 52,15$, $\alpha = 0,21$, $\kappa = 0,28$; 2) $\bar{x} = 61,10$, $S^2 = 19,53$, $\alpha = -0,51$, $\kappa = -0,72$; 3) $\bar{x} = 8,6$, $S^2 = 378,9$, $\alpha = -0,12$, $\kappa = -0,18$.

Тема 19. Застосування критерію Пірсона для перевірки гіпотези про нормальний розподіл генеральної сукупності

Нехай емпіричний розподіл (вибірку) задано у вигляді рівновіддалених варіант і відповідних їм частот:

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_s
n_i	n_1	n_2	$\cdots$	n_s

.

Для перевірки, чи узгоджуються дані вибірки з гіпотезою про нормальний розподіл генеральної сукупності, поступають так:

1. Обчислюють теоретичні (вирівнюючі) частоти за формулами

$$n_i^{'} = \frac{nh}{S}\varphi(v_i),\ i \in \{1, \ldots, s\},$$

де n - обсяг вибірки, h - різниця між двома сусідніми варіантами, S - вибіркова дисперсія, $v_i = (x_i - \bar{x})/S$, $i \in \{1, \ldots, s\}$, $\bar{x}$ - вибіркове середнє,

$$\varphi(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}}.$$

2. Обчислюють величину

$$\chi_q^2 = \sum_{i=1}^{s} \frac{(n_i - n_i^{'})^2}{n_i^{'}}$$

де n_i - емпіричні частоти, $n_i^{'}$ - теоретичні частоти, $i \in \{1, \ldots, s\}$.

3. Обчислюють число ступенів вільності $k = s - 3$, де s - число різних значень x_i.

4. Вибирають рівень значущості α.

5. Знаходять з таблиці 6 за k і χ^2 ймовірність $P(\chi^2 > \chi_q^2)$, якщо ця ймовірність менша за взятий рівень значущості, то дані спостережень не узгоджуються з гіпотезою про нормальний розподіл генеральної сукупності; якщо ж ця ймовірність більша за рівень значущості, - то узгоджується.

Приклад 1. Користуючись критерієм Пірсона, при рівні значущості $\alpha = 0,05$ перевірити, чи узгоджується гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності з даними вибірки обсягу $n = 200$:

x_i	5	7	9	11	13	15	17	19	21
n_i	15	26	25	30	26	21	24	20	13

$\triangleleft$ За допомогою методу умовних варіант знаходимо, що вибіркове середнє і вибіркова дисперсія відповідно дорівнюють $\bar{x} = 12,63$, $S = 4,695$.

Обчислимо теоретичні частоти, враховуючи, що $n = 200$, $h = 2$, $S = 4,695$, за формулою

$$n_i^{'} = \frac{nh}{S}\varphi(v_i) = \frac{200 \cdot 2}{4,695}\varphi(v_i) = 85,2\varphi(v_i)$$

(значення $\varphi(v_i)$ знаходимо з відповідної таблиці 1). Для цього складемо розрахункову таблицю

i	x_i	n_i	$v_i = \frac{x_i - \bar{x}}{S}$	$\varphi(v_i)$	$n_i^{'} = 85,2\varphi(v_i)$
1	5	15	-1,62	0,1074	9,1
2	7	26	-1,20	0,1942	16,5
3	9	25	-0,77	0,2966	25,3
4	11	30	-0,35	0,3752	32,0
5	13	26	0,08	0,3977	33,9
6	15	21	0,51	0,3503	29,8
7	17	24	0,93	0,2589	22,0
8	19	20	1,36	0,1582	13,5
9	21	13	1,78	0,0818	7,0

Для обчислення

$$\chi_q^2 = \sum_{i=1}^{s} \frac{(n_i - n_i^{'})^2}{n_i^{'}}$$

складемо також відповідну таблицю

i	n_i	n_i'	$n_i - n_i'$	$(n_i - n_i')^2$	$\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$
1	15	9,1	-5,9	34,81	3,8
2	26	16,5	9,5	90,25	5,5
3	25	25,3	-0,3	0,09	0,0
4	30	32,0	-2,0	4,0	0,1
5	26	33,9	-7,9	62,41	1,8
6	21	29,8	-8,8	77,44	2,6
7	24	22,0	2,0	4,0	0,2
8	20	13,5	6,5	42,25	3,1
9	13	7,0	6,0	36,00	5,1
					$\chi_q^2 = 22,2$

.

Оскільки число ступенів вільності $k = s - 3 = 9 - 3 = 6$, то за таблицею 6 при $k = 6$ і $\chi_q^2 = 22$ знаходимо ймовірність $P(\chi^2 \geq \chi_q^2) = 0,0012$.

Знайдена ймовірність менша за рівень значущості 0,05, а тому гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності не узгоджується з даними вибірки. ▷

Нехай емпіричний розподіл задано у вигляді

I_i	$[x_1; x_2)$	$[x_2; x_3)$	$\cdots$	$[x_s; x_{s+1}]$
n_i	n_1	n_2	$\cdots$	n_s

.

Для того, щоб перевірити, чи узгоджуються дані емпіричного розподілу з гіпотезою про нормальний розподіл генеральної сукупності, поступають так:

1. Обчислюють за методом умовних варіант вибіркове середнє $\bar{x}$ і вибіркове середнє квадратичне відхилення S, причому за варіанти беруть відповідно середини частинних інтервалів

$$y_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \ \ i \in \{1, \ldots, s\}.$$

2. Нормують випадкову величину ξ, тобто переходять до випадкової величини $\eta = (\xi - \bar{x})/S$, причому найменше значення η покладають рівним $-\infty$, а найбільше $+\infty$.

3. Обчислюють теоретичні ймовірності попадання величини η в інтервал (z_i, z_{i+1}):

$$p_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i),$$

де Φ - функція Лапласа.

4. Знаходять величину

$$\chi_q^2 = \sum_{i=1}^{s} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i},$$

де n - обсяг вибірки.

5. Обчислюють число ступенів вільності $k = s - 3$, де s - число інтервалів вибірки.

6. Вибирають рівень значущості α.

7. За даними k і χ_q^2 знаходять за таблицею 6 ймовірність $P(\chi^2 \geq \chi_q^2)$; якщо ця ймовірність менша за прийнятий рівень значущості, то дані спостережень не узгоджуються з гіпотезою про нормальний розподіл генеральної сукупності; якщо ця ймовірність більша за рівень значущості, то узгоджуються.

Приклад 2. Користуючись критерієм Пірсона, з рівнем значущості $\alpha = 0,04$, вияснити, чи узгоджується гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності за даними вибірки обсягу $n = 100$

I_i	$[3;8)$	$[8;13)$	$[13;18)$	$[18;23)$	$[23;28)$	$[28;33)$	$[33;38]$
n_i	6	8	15	40	16	8	7

◃ Знайдемо вибіркове середнє і вибіркове середнє квадратичне відхилення методом умовних варіант. З цією метою перейдемо від заданого інтервального розподілу до розподілу рівновіддалених варіант, взявши за варіанти y_i середнє арифметичне кінців інтервалу $y_i = (x_i + x_{i+1})/2$, $i \in \{1, 2, \ldots, 7\}$. У результаті одержимо розподіл:

y_i	5,5	10,5	15,5	20,5	25,5	30,5	35,5
n_i	6	8	15	40	16	8	7

Провівши обчислення за методом умовних варіант, знайдемо, що

$$\bar{x} = 20,7, \ S = 7,28.$$

Обчислимо теоретичні ймовірності p_i попадання нормально розподіленої випадкової величини ξ в інтервал (x_i, x_{i+1}):

$$P\{x_i < \xi < x_{i+1}\} = \Phi\left(\frac{x_{i+1} - \bar{x}}{S}\right) - \Phi\left(\frac{x_i - \bar{x}}{S}\right) = \Phi\left(z_{i+1}\right) - \Phi\left(z_i\right),$$

де Φ - функція Лапласа і $z_i = (x_i - \bar{x})/S$.

Зауважимо, що найменше значення $z_i = z_1$ беруть рівним $-\infty$, а найбільше $+\infty$.

Наприклад,

$$p_1 = P\{x_1 < \xi < x_2\} = \Phi\left(z_2\right) - \Phi\left(z_1\right) = \Phi\left(\frac{x_2 - \bar{x}}{S}\right) - \Phi\left(-\infty\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{8 - 20,7}{7,28}\right) + \Phi\left(\infty\right) = \Phi\left(-1,74\right) + 0,5 = 0,5 - \Phi(1,74) =$$

$$= 0,5 - 0,4591 = 0,0409.$$

Аналогічно обчислюються інші теоретичні ймовірності. Результати обчислень подамо у вигляді таблиці

i	z_i	z_{i+1}	$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	$p_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$
1	$-\infty$	-1,74	0,5	-0,4591	0,0409
2	-1,74	-1,06	-0,4591	-0,3554	0,1037
3	-1,06	-0,37	-0,3554	-0,1443	0,2111
4	-0,37	0,32	-0,1443	0,1255	0,2698
5	0,32	1,00	0,1255	0,3413	0,2158
6	1,00	1,69	0,3413	0,4545	0,1132
7	1,69	∞	0,4545	0,5	0,0455

.

Для обчислення

$$\chi_q^2 = \sum_{i=1}^{s} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$$

складемо також відповідну таблицю

i	p_i	$np_i = 100p_i$	n_i	$n_i - np_i$	$(n_i - np_i)^2$	$\dfrac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
1	0,0409	4,09	6	1,91	3,648	0,89
2	0,1037	10,37	8	-2,37	5,617	0,54
3	0,2111	21,11	15	-6,11	37,332	1,77
4	0,2698	26,98	40	13,02	169,52	6,28
5	0,2158	21,58	16	-5,58	31,136	1,44
6	0,1132	11,32	8	-3,32	11,02	0,97
7	0,0455	4,55	7	2,45	6,002	1,32
	$\sum p_i = 1$	$\sum np_i = 100$				$\chi_q^2 = 13$

.

Обчислимо число ступенів вільності $k = s - 3 = 7 - 3 = 4$. Тоді з таблиці 6 за $k = 4$, $\chi_q^2 = 13$ знаходимо ймовірність

$$P(\chi^2 \geq \chi_q^2) = 0,0113.$$

Оскільки знайдена ймовірність менша за рівень значущості $\alpha = = 0,04$, то гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності не узгоджується з данами вибірки. ▷

Вправи

О1. Користуючись критерієм Пірсона, при рівні значущості 0,05 установити, чи узгоджується гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності з даними вибірки обсягу $n = 200$

x_i	$0,3$	$0,5$	$0,7$	$0,9$	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	2,1	2,3
n_i	6	9	26	25	30	26	21	24	20	8	5

.

О2. Користуючись критерієм Пірсона з рівнем значущості α, перевірити гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності ξ, якщо відомі емпіричні n_i та теоретичні $n_i^{'}$ частоти:

1) $\alpha = 0,03$,

n_i	8	16	40	72	36	18	10
$n_i^{'}$	6	18	36	76	39	18	7

;

2) $\alpha = 0,05$,

n_i	6	13	38	74	106	85	30	14
n_i'	3	14	42	82	99	76	37	13

;

3) $\alpha = 0,05$,

n_i	5	10	20	8	7
n_i'	6	14	18	7	5

.

<u>О3.</u> Користуючись критерієм Пірсона, при рівні значущості 0,05 установити, чи узгоджується гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності з даними вибірки:

1)

I_i	$[-20;-10)$	$[-10;0)$	$[0;10)$
n_i	20	47	80

,

I_i	$[10;20)$	$[20;30)$	$[30;40)$	$[40;50]$
n_i	89	40	16	8

.

2)

I_i	$[1;3)$	$[3;5)$	$[5;7)$	$[7;9)$	$[9;11)$
n_i	2	4	6	10	18

,

I_i	$[11;13)$	$[13;15)$	$[15;17)$	$[[17;19)$	$[19;21)$	$[21;23]$
n_i	20	16	11	7	5	1

.

<u>С1.</u> На екзамені з певного предмета екзаменатор задає студентові тільки одне питання з однієї із чотирьох частин курсу. Зі 100 студентів 26 одержали питання з першої частини, 32 - з другої, 17 - з третьої і 25 - з четвертої. Чи можна за цими результатами прийняти гіпотезу, що студент з однаковою ймовірністю може дістати на екзамені питання з будь-якої частини курсу? Взяти $\alpha = 0,05$.

<u>С2.</u> Розглядаючи розподіл розмірів чоловічого взуття, проданого магазином за зміну, як вибірку з генеральної сукупністі, перевірити гіпотезу про те, що ознака, яка нас цікавить, розподілена в генеральній сукупності за нормальним законом (взявши $\alpha = 0,01$). Дані про кількість пар проданого взуття подано в таблиці

Розмір взуття x_i	36	37	38	39	40	41	42	43	44
Кількість пар n_i	1	2	3	5	10	13	9	6	1

.

Домашнє завдання

Д1. Користуючись критерієм Пірсона з рівнем значущості $\alpha = 0,05$, перевірити гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності ξ, якщо відомі емпіричні n_i та теоретичні $n_i^{'}$ частоти:

1)

n_i	6	8	13	15	20	16	10	7	5
$n_i^{'}$	5	9	14	16	18	16	9	6	7

;

2)

n_i	14	18	32	70	20	36	10
$n_i^{'}$	10	24	34	80	18	22	12

;

3)

n_i	8	16	40	72	36	18	10
$n_i^{'}$	6	18	36	76	39	18	7

.

Д2. Користуючись критерієм Пірсона, при рівні значущості $\alpha = 0,05$ встановити, чи узгоджується гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності за даними вибірки:

1)

I_i	$[6;16)$	$[16;26)$	$[26;36)$	$[36;46)$
n_i	8	7	16	35

,

I_i	$[46;56)$	$[56;66)$	$[66;76)$	$[76;86]$
n_i	15	8	6	5

;

2)

I_i	$[5;10)$	$[10;15)$	$[15;20)$	$[20;25)$	$[25;30)$
n_i	7	8	15	18	23

,

I_i	$[30;35)$	$[35;40)$	$[40;45)$	$[45;50]$
n_i	19	14	10	6

.

Д3. При рівні значущості $\alpha = 0,01$ перевірити гіпотезу про нормальний розподіл ознаки у генеральній сукупності ξ за вибіркою, дані якої наведено в таблиці

x_i	$[3; 3,6)$	$[3,6; 4,2)$	$[4,2; 4,8)$
n_i	2	8	35

,

x_i	$[4,8; 5,4)$	[5,4; 6,0)	[6,0; 6,6)	[6,6; 7,2]
n_i	43	22	15	5

.

Д4. Для наведених вибірок, взявши за рівень значущості $\alpha = 0,10$, перевірити гіпотезу про те, що вони одержані з нормально розподіленої генеральної сукупності:

1) 150 відхилень діаметрів цапф передньої осі від номінального розміру (мкм):

Середина інтервалу x_i	26	29	32	35	38	41	44	47	50	53
n_i	1	4	13	23	22	29	29	16	11	2

;

2) ріст 1004 дівчат у віці 16 років (см):

I_i	$[134; 137)$	$[137; 140)$	$[140; 143)$	$[143; 146)$
n_i	1	4	16	53

,

I_i	$[146; 149)$	$[149; 152)$	[152; 155)	[155; 158)
n_i	121	197	229	186

,

I_i	$[158; 161)$	$[161; 164)$	[164; 167)	[167; 170)	[170; 173]
n_i	121	53	17	5	1

.

Відповіді

О1. Узгоджується ($k = 8$, $\chi_q^2 = 7,71$, $P(\chi^2 \geq \chi_q^2) = 0,4664$).

О2. 1) Приймається ($k=4$, $\chi_q^2=3$, $P(\chi^2 \geq \chi_q^2)=0,5578$); 2) приймається ($k = 5$, $\chi_q^2 = 7,19$, $P(\chi^2 \geq \chi_q^2) = 0,2206$); 3) приймається ($k=4$, $\chi_q^2=2,47$, $P(\chi^2 \geq \chi_q^2)=0,7358$).

О3. 1) Узгоджується ($\bar{x}=10,4$, S= 13,67, $k=4$, $\chi_q^2=5,4$, $P(\chi^2 \geq \chi_q^2)=0,2503$); 2) узгоджується ($\bar{x}=12,04$, S^2= 4,261, $k=6$, $\chi_q^2=1,3$, $P(\chi^2 \geq \chi_q^2)=0,9658$). Вказівка: оскільки частоти перших двох і останніх двох інтервалів малі, то слід об'єднати кожну пару цих інтервалів в один і просумувати їх частоти.

С1. Гіпотеза підтверджується ($k=3$, $\chi_q^2=4,56$, $P(\chi^2 \geq \chi_q^2)=$ $=0,1718$).

С2. Гіпотеза підтверджується ($\bar{x}=40,64$, S= 1,73, $k=3$, $\chi_q^2=$ $=1,35$, $P(\chi^2 \geq \chi_q^2) \approx 0,7258$). Вказівка: перейти до інтервального розподілу

I_i	$[35,5;36,5)$	$[36,5;37,5)$	$[37,5;38,5)$
n_i	1	2	3

,

I_i	$[38,5;39,5)$	$[39,5;40,5)$	$[40,5;41,5)$
n_i	5	10	13

,

I_i	$[41,5;42,5)$	$[42,5;43,5)$	$[43,5;44,5]$
n_i	9	6	1

.

і об'єднати перших три інтервали в один і два останіх в один, оскільки їх частоти малі.

Д1. 1) Приймається ($k=6$, $\chi_q^2=1,52$, $P(\chi^2 \geq \chi_q^2)=0,9197$);
2) відхиляється ($k=4$, $\chi_q^2=13,93$, $P(\chi^2 \geq \chi_q^2)=0,0073$);
3) приймається ($k=4$, $\chi_q^2=3,06$, $P(\chi^2 \geq \chi_q^2)=0,5578$).

Д2. 1) Не узгоджується ($\bar{x}=42,5$, S^2= 17,17, $k=5$, $\chi_q^2=14$, $P(\chi^2 \geq \chi_q^2)=0,0146$); 2) узгоджується ($\bar{x}=27,54$, S= 10,44, $k=6$, $\chi_q^2=5,4$, $P(\chi^2 \geq \chi_q^2)=0,4956$).

Д3. Узгоджується.

Д4. 1) Приймається, $\chi_q^2=3,26$ (перші два і останні два інтервали об'єднати); 2) приймається, $\chi_q^2=0517$ (перші три і останні три інтервали об'єднати).

Тема 20. Елементи теорії кореляції

1^0. **Лінійна кореляційна залежність і прямі регресії**. Нехай ξ і η - випадкові величини, зв'язок між якими треба вивчити. У результаті n випробувань дістали n пар значень цих величин (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_n, y_n). Вибіркові середні та дисперсії позначимо відповідно $\bar{x}$, $\bar{y}$, S_x^2, S_y^2. За оцінку коефіцієнта кореляції $\rho = \rho(\xi, \eta)$ візьмемо вибірковий коефіцієнт кореляції r - коефіцієнт кореляції між розподілами вибірок x_1, x_2, $\ldots$, x_n і y_1, y_2, $\ldots$, y_n; при цьому кожній парі (x_i, y_i), як і при побудові одновимірної функції розподілу вибірки, приписуємо ймовірність $1/n$. Згідно з означенням коефіцієнта кореляції

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{S_x S_y} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x} \cdot \bar{y}}{n S_x S_y}. \tag{1}$$

Рівняння вибіркової прямої регресії η на ξ має вигляд

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r \frac{S_y}{S_x}(x - \bar{x}),$$

а прямої регресії ξ на η -

$$\bar{x}_y - \bar{x} = r \frac{S_x}{S_y}(y - \bar{y}).$$

Рівняння прямих регресії доцільно знаходити лише в тому випадку, коли точки (x_i, y_i), $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, групуються поблизу певної прямої (це можна перевірити, наприклад, побудувавши ці точки в декартовій системі координат).

Якщо число випробувань n дуже велике, то для спрощення обчислень дані згрупуємо і застосуємо метод умовних варіант. Нехай дані вже згруповано і виявилось, що пара чисел (x_i, y_j) спостерігалась n_{ij}, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, l\}$, разів. Запишемо ці дані у вигляді кореляційної таблиці

$\eta \setminus \xi$	x_1	x_2	$\ldots$	x_k	$\sum$
y_1	n_{11}	n_{21}	$\ldots$	n_{k1}	n_1
y_2	n_{12}	n_{22}	$\ldots$	n_{k2}	n_2
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
y_l	n_{1l}	n_{2l}	$\ldots$	n_{kl}	n_l
$\sum$	m_1	m_2	$\ldots$	m_k	n

Табл. 1.

У цій таблиці

$$m_i = \sum_{j=1}^{l} n_{ij}, \qquad n_j = \sum_{i=1}^{k} n_{ij}, \qquad \sum_{i=1}^{k} m_i = \sum_{j=1}^{l} n_j = n,$$

n - число всіх спостережень. Формула (1) набуває вигляду

$$r = \frac{\sum\limits_{i,j} n_{ij} x_i y_j - n\bar{x} \cdot \bar{y}}{n S_x S_y}. \tag{2}$$

Нехай $x_{i+1} - x_i = h_1$, $i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$, $y_{j+1} - y_j = h_2$, $j \in \{1, 2, \ldots, l-1\}$, - кроки таблиці. Позначимо через i_0, j_0 номери варіант, що лежать приблизно посередині варіаційних рядів, і введемо умовні варіанти $u_i = i - i_0$, $v_j = j - j_0$. Очевидно, що

$$x_i = x_{i_0} + u_i h_1, \ i \in \{1, 2, \ldots, k\},$$

$$y_j = y_{j_0} + v_j h_2, \ j \in \{1, 2, \ldots, l\}.$$

Тоді формула (2) буде такою

$$r = \frac{\sum\limits_{i,j} n_{ij} u_i v_j - n\bar{u} \cdot \bar{v}}{n S_u S_v}, \tag{3}$$

де

$$\bar{u} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} m_i u_i, \quad \bar{v} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{l} n_j v_j, \quad S_u^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} m_i u_i^2 - \bar{u}^2,$$

$$S_v^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{l} n_j v_j^2 - \bar{v}^2, \ a \ S_x^2 = h_1^2 S_u^2, \ S_y^2 = h_2^2 S_v^2.$$

Зауважимо, що $\bar{x} = x_{i_0} + \bar{u} \cdot h_1$, $\bar{y} = y_{j_0} + \bar{v} \cdot h_2$.

Приклад 1. У кореляційній таблиці наведені вибіркові значення величин ξ і η

$\xi \setminus \eta$	10	12	14	16	18	20
10	9	4	1			
30	1	10	9	3		
50		2	6	14	6	
70			1	10	18	6

.

Знайти рівняння прямих регресій η на ξ і ξ на η.

$\triangleleft$ Складемо кореляційну таблицю в умовних варіантах, взявши за умовні нулі $x_{i_0} = 50$ і $y_{j_0} = 16$.

$\xi \setminus \eta$	-3	-2	-1	0	1	2	
-2	9	4	1				14
-1	1	10	9	3			23
0		2	6	14	6		28
1			1	10	18	6	35
	10	16	17	27	24	6	100

.

Знайдемо $\bar{u}$ і $\bar{v}$:

$$\bar{u} = \frac{(-2)\cdot 14 + (-1)\cdot 23 + 1\cdot 35}{100} = \frac{-51+35}{100} = -0,16;$$

$$\bar{v} = \frac{(-3)\cdot 10 + (-2)\cdot 16 + (-1)\cdot 17 + 1\cdot 24 + 2\cdot 6}{100} = -0,43.$$

Обчислимо допоміжні величини $\overline{u^2}$ і $\overline{v^2}$:

$$\overline{u^2} = \frac{4\cdot 14 + 1\cdot 23 + 1\cdot 35}{100} = \frac{114}{100} = 1,14;$$

$$\overline{v^2} = \frac{9\cdot 10 + 4\cdot 16 + 1\cdot 17 + 1\cdot 24 + 4\cdot 6}{100} = \frac{219}{100} = 2,19.$$

Тоді

$$S_u = \sqrt{\overline{u^2} - (\bar{u})^2} = \sqrt{1,14 - (-0,16)^2} = 1,056,$$

а
$$S_v = \sqrt{\overline{v^2} - (\bar{v})^2} = \sqrt{2,19 - (-0,43)^2} = 1,42.$$

Знайдемо $\sum\limits_{i,j} n_{ij} u_i v_j$:

$$\sum_{i,j} n_{ij} u_i v_j = (-3)(-2)9 + (-2)(-2)4 + (-1)(-2)1+$$
$$+(-3)(-1)1 + (-2)(-1)10 + (-1)(-1)9 + (-1)\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 18+$$
$$+2\cdot 1\cdot 6 = 54 + 16 + 2 + 3 + 20 + 9 - 1 + 18 + 12 = 133.$$

Тоді

$$r = \frac{133 - 100\cdot(-0,16)(-0,43)}{100\cdot 1,056\cdot 1,42} = \frac{126,12}{149,952} = 0,84,$$
$$\bar{x} = x_{i_0} + \bar{u}\cdot h_1 = 50 + 20(-0,16) = 50 - 3,2 = 46,8,$$
$$\bar{y} = y_{j_0} + \bar{v}\cdot h_2 = 16 + 2(-0,43) = 16 - 0,86 = 15,14,$$
$$S_x = h_1 S_u = 20\cdot 1,056 = 21,12,$$
$$S_y = h_2 S_v = 2\cdot 1,42 = 2,84.$$

Таким чином, шукане рівняння прямої регресії η на ξ має вигляд

$$\bar{y}_x - 15,14 = 0,84\cdot\frac{2,84}{21,12}(x - 46,8)$$

або
$$\bar{y}_x = 0,113x + 9,85.$$

Аналогічно знаходимо рівняння прямої регресії ξ на η

$$\bar{x}_y - 46,8 = 0,84\cdot\frac{21,12}{2,84}(y - 15,14)$$

або
$$\bar{x}_y = 6,25y - 47,78. \triangleright$$

З табл. 1 можна одержати розподіл середніх величин $\bar{y}_{x_i}$, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, та $\bar{x}_{y_j}$, $j \in \{1, 2, \ldots, l\}$.

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_k
$\bar{y}_{x_i}$	$\bar{y}_{x_1}$	$\bar{y}_{x_2}$	$\dots$	$\bar{y}_{x_k}$
Частота	m_1	m_2	$\dots$	m_k

Табл. 2,

y_i	y_1	y_2	$\dots$	y_l
$\bar{x}_{y_j}$	$\bar{x}_{y_1}$	$\bar{x}_{y_2}$	$\dots$	$\bar{x}_{y_l}$
Частота	n_1	n_2	$\dots$	n_l

Табл. 3.

Тут

$$\bar{y}_{x_i} = \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^{l} y_j n_{ij}, \quad i \in \{1, 2, \dots, k\};$$

$$\bar{x}_{y_j} = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{k} x_i n_{ij}, \quad j \in \{1, 2, \dots, l\}.$$

Рівняння прямої регресії можна шукати у вигляді

$$\bar{y}_x = ax + b,$$

де a і b знаходяться з системи рівнянь

$$\begin{cases} a\bar{x}^2 + b\bar{x} = \overline{xy}, \\ a\bar{x} + b = \bar{y}, \end{cases}$$

де

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} m_i x_i; \quad \bar{x}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} m_i x_i^2,$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} m_i \bar{y}_{x_i}; \quad \overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} m_i x_i \bar{y}_{x_i}.$$

Якщо скористатися табл. 1, то дістанемо

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} n_{ij} y_j, \quad \overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} n_{ij} x_i y_j.$$

2^0. **Нелінійна регресія.** Якщо лінії регресії відмінні від прямих, то коефіцієнт кореляції не дає повної уяви про зв'язок між величинами ξ і η. У цьому випадку за міру залежності беруть кореляційні відношення, які обчислюють за формулами:

$$r_{\eta/\xi} = \frac{S_{\bar{\eta}}}{S_\eta}, \quad r_{\xi/\eta} = \frac{S_{\bar{\xi}}}{S_\xi}, \tag{4}$$

де

$$S_{\bar{\eta}}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(\bar{y}_{x_i} - \bar{y})^2 m_i; \quad S_\eta^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{l}(y_j - \bar{y})^2 n_j;$$

$$S_{\bar{\xi}}^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{l}(\bar{x}_{y_j} - \bar{x})^2 n_j; \quad S_\xi^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2 m_i;$$

$$\bar{x}_{y_j} = \frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{k} x_i n_{ij}; \quad \bar{y}_{x_i} = \frac{1}{m_i}\sum_{j=1}^{l} y_j n_{ij}.$$

Розглянемо випадок, коли графік розсіювання значень випадкових величин ξ і η наближений до параболи

$$\bar{y}_x = ax^2 + bx + c. \tag{5}$$

Нехай розподіл двовимірної випадкової величини (ξ, η) має вигляд табл. 1. На основі цієї таблиці перейдемо до табл. 2, де кожному x_i відповідатиме середнє значення $\bar{y}_{x_i}$ з частотою m_i. Тоді для знаходження a, b і c матимемо систему рівнянь

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{k} x_i^4 m_i + b\sum\limits_{i=1}^{k} x_i^3 m_i + c\sum\limits_{i=1}^{k} x_i^2 m_i = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i^2 m_i \bar{y}_{x_i}, \\ a\sum\limits_{i=1}^{k} x_i^3 m_i + b\sum\limits_{i=1}^{k} x_i^2 m_i + c\sum\limits_{i=1}^{k} x_i m_i = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i m_i \bar{y}_{x_i}, \\ a\sum\limits_{i=1}^{k} x_i^2 m_i + b\sum\limits_{i=1}^{k} x_i m_i + nc = \sum\limits_{i=1}^{k} m_i \bar{y}_{x_i}. \end{cases} \tag{6}$$

Якщо замість рівняння (5) взяти

$$\bar{y}_x = ax^2 + c, \tag{7}$$

то для обчислювання a і c дістанемо систему рівнянь

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{k} x_i^4 m_i + c\sum_{i=1}^{k} x_i^2 m_i = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 m_i \bar{y}_{x_i}, \\ a\sum_{i=1}^{k} x_i^2 m_i + nc = \sum_{i=1}^{k} \bar{y}_{x_i}. \end{cases} \tag{8}$$

При виборі формули кореляційної залежності η від ξ у вигляді

$$\bar{y}_x = \frac{a}{x} + b \tag{9}$$

для знаходження коефіцієнтів a і b одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{x_i} m_i + bn = \sum_{i=1}^{k} m_i \bar{y}_{x_i}, \\ a\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{x_i^2} m_i + b\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{x_i} m_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{x_i} m_i \bar{y}_{x_i}. \end{cases} \tag{10}$$

У випадку гіперболічної регресії ξ на η рівняння гіперболи має вигляд

$$\bar{x}_y = \frac{c}{y} + d,$$

коефіцієнти c і d якого знаходимо із системи

$$\begin{cases} c\sum_{j=1}^{l} \frac{1}{y_j} n_j + dn = \sum_{j=1}^{l} n_j \bar{x}_{y_j}, \\ c\sum_{j=1}^{l} \frac{1}{y_j^2} n_j + d\sum_{j=1}^{l} \frac{1}{y_j} n_j = \sum_{j=1}^{l} \bar{x}_{y_j} \frac{1}{y_j} n_j. \end{cases}$$

Приклад 2. Знайти вибіркове рівняння регресії

$$\bar{y}_x = ax^2 + bx + c$$

за даними кореляційної таблиці

$\eta \setminus \xi$	2	3	5	
25	20	–	–	20
45	-	30	1	31
110	-	1	48	49
	20	31	49	100

.

Оцінити силу кореляційного зв'язку за вибірковим кореляційним відношенням $r_{\eta/\xi}$.

◁ Складемо розрахункову таблицю

x_i	m_i	$\bar{y}_{x_i}$	$m_i x_i$	$m_i x_i^2$	$m_i x_i^3$
2	20	25	40	80	100
3	31	47,1	93	279	837
5	49	108,67	245	1225	6125
$\sum$	100	-	378	1584	7122

$m_i x_i^4$	$m_i \bar{y}_{x_i}$	$m_i \bar{y}_{x_i} x_i$	$m_i \bar{y}_{x_i} x_i^2$
320	500	1000	2000
2511	1460	4380	13141
30625	5325	26624	133121
33456	7285	32004	148262

.

Підставивши знайдені числа останього рядка в (6), дістанемо систему рівнянь для знаходження коефіцієнтів a, b, c:

$$\begin{cases} 33456a + 7122b + 1584c = 148262, \\ 7122a + 1584b + 378c = 32004, \\ 1584a + 378b + 100c = 7285. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, одержимо

$$a = 2,94; \quad b = 7,27; \quad c = -1,25.$$

Після підстановки знайдених коефіцієнтів у (5) дістанемо

$$\bar{y}_x = 2,94x^2 + 7,27x - 1,25.$$

Тепер знайдемо $r_{\eta/\xi}$. Маємо

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{l} n_{ij} y_j = \frac{1}{100}(20 \cdot 25 + 31 \cdot 45 + 49 \cdot 110) = 72,85;$$

$$S_\eta = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{l}(y_j - \bar{y})^2 n_j} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{100}(20(25-72,85)^2 + 31(45-72,85)^2 + 49(110-72,85)^2)} =$$

$$= 37,07;$$

$$S_{\bar{\eta}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(\overline{y_{x_i}} - \bar{y})^2 m_i} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{100}(20(25-72,85)^2 + 31(47,1-72,85)^2 + 49(108,67-72,85)^2)} =$$

$$= 33,06.$$

Тоді з формули (4) випливає, що

$$r_{\eta/\xi} = \frac{S_{\bar{\eta}}}{S_\eta} = \frac{33,06}{37,07} = 0,89. \triangleright$$

Вправи

О1. Знайти вибіркові рівняння прямих ліній регресії η на ξ і ξ на η за даними кореляційних таблиць:

1)

$\eta \setminus \xi$	5	10	15	20	25	30	35	40	
100	2	1							3
120	3	4	3						10
140			5	10	8				23
160				1		6	1	1	9
180							4	1	5
	5	5	8	11	8	6	5	2	50

;

2)

$\eta \setminus \xi$	18	23	28	33	38	43	48	
125		1						1
150	1	2	5					8
175		3	2	12				17
200			1	8	7			16
225					3	3		6
250						1	1	2
	1	6	8	20	10	4	1	50

;

3)

$\eta \setminus \xi$	25	30	35	40	45
21	3	5	3		
31	1	9	15	3	
41		2	17	17	2
51			2	11	6
61				2	2

.

O2. Знайти вибіркове рівняння регресії $\bar{y}_x = ax^2 + bx + c$ і вибіркове кореляційне відношення $r_{\eta/\xi}$ за даними кореляційної таблиці:

1)

$\eta \setminus \xi$	0	1	2	3	4	
0	18	1	1			20
3	1	20				21
5	3	5	10	2		20
10			7	12		19
17					20	20
	22	26	18	14	20	100

;

2)

$\eta \setminus \xi$	0	4	6	7	10	
7	19	1	1			21
13	2	14				16
40		3	22	2		27
80				15		15
200					21	21
	21	18	23	17	21	100

.

C1. Знайти вибіркове рівняння регресії $\bar{x}_y = ax^2 + bx + c$ і вибіркове кореляційне відношення $r_{\xi/\eta}$ за кореляційною таблицею:

$\eta \setminus \xi$	6	30	50	
1	15			15
3	1	14		15
4		2	18	20
	16	16	18	50

C2. Проведено 60 випробувань міцності волокна бавовни в залежності від його товщини. Дані цих випробувань наведено в таблиці, де ξ означає певну умовну величину, обернено пропорційну товщині волокна, η - граничне навантаження (в грамах)

$\xi \setminus \eta$	$5,2$	$4,7$	$4,2$	3,7
2,3	3	1		
2,5	2	6	2	
2,7		4	12	2
2,9		2	7	12
3,1			2	5

Знайти вибіркове рівняння регресії $\bar{y}_x = ax^2 + bx + c$ і кореляційне відношення. Крім того, знайти рівняння регресії $\bar{y}_x = ax^2 + c$, $\bar{y}_x = a/x + b$.

Домашнє завдання

Д1. Знайти вибіркове рівняння прямих ліній регресії η на ξ і ξ на η за даними кореляційної таблиці:

1)

$\eta \setminus \xi$	5	10	15	20	25	30	35	
100						6	1	7
120						4	2	6
140			8	10	5			23
160	3	4	3					10
180	2	1		1				4
	5	5	11	11	5	10	3	50

;

2)

$\eta \setminus \xi$	10	15	20	25	30	35
15	3	3				
18	1	5	4			
21		2	8	35	4	
24			5	10	5	1
27				4	5	5

.

Д2. Знайти вибіркове рівняння регресії $\bar{y}_x = ax^2 + bx + c$ і вибіркове кореляційне відношення $r_{\eta/\xi}$ за даними кореляційної таблиці:

1)

$\eta \setminus \xi$	0	4	5	
1	50	5	1	56
35		44		44
50		5	45	50
	50	54	46	150

;

2)

$\eta \setminus \xi$	0	1	2	3	4	
10	20	5				25
11	7	15	3	1		26
20		3	17	4		24
35			8	13	7	28
50				5	42	47
	27	23	28	23	49	150

.

Д3. У таблиці наведено вибіркові дані про кількість випущених виробів ξ і повних витрат η на 20 однотипних підприємствах

$\xi \setminus \eta$	3	4	5	7	8	10	12	13	14	19	20	24
2										1	1	1
4	1	1			2			1	1			
9	2			1		1	1					
18			1		1							

.

Знайти рівняння регресії $\bar{y}_x = a/x + b$ і обчислити кореляційне відношення $r_{\eta/\xi}$.

Відповіді

О1. 1) $\bar{y}_x = 1,92x + 101,6$; $\bar{x}_y = 0,12y + 3,7$;
2) $\bar{y}_x = 4x + 57,8$; $\bar{x}_y = 0,19y - 3,1$;
3) $\bar{y}_x = 1,48x - 15,4$; $\bar{x}_y = 0,35y + 22,9$.

О2. 1) $\bar{y}_x = 0,66x^2 + 1,23x + 1,07$; $r_{\eta/\xi} = 0,96$.
2) $\bar{y}_x = 3,20x^2 - 13,01x + 9,09$; $r_{\eta/\xi} = 0,99$.

С1. $\bar{x}_y = 2,8y^2 + 0,02x + 3,18$; $r_{\xi/\eta} = 0,96$.

С2. $\bar{y}_x = 0,855x^2 - 5,598x + 12,348$; $\bar{y}_x = -0,2921x^2 + 6,4668$; $\bar{y}_x = 11,8255/x - 0,0840$; $r_{\xi/\eta} = 0,7526$; $r_{\eta/\xi} = 0,7683$.

Д1. 1)$\bar{y}_x = -2,15x + 181,8$; $\bar{x}_y = -0,33y + 65,7$;
2) $\bar{y}_x = 0,41x + 12,04$; $\bar{x}_y = 1,37y - 6,09$.

Д2. 1) $\bar{y}_x = 1,53x^2 + 1,95x + 1$; $r_{\eta/\xi} = 0,99$.
2) $\bar{y}_x = 1,59x^2 + 3,33x + 9,4$; $r_{\eta/\xi} = 0,83$.

Д3. $\bar{y}_x = 16,6146/x + 9,6502$; $r_{\eta/\xi} = 0,7372$.