В. П. Лавренчук, Т. І. Готинчан,
В. С. Дронь, О. С. Кондур

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ:

ТЕОРІЯ ТА ЗАСТОСУВАННЯ

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
як навчальний підручник для студентів
вищих навчальних закладів

Київ
"Кондор"
2005

ББК 22.11я73
В 558
УДК 51 (075.8)

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний підручник для студентів вищих навчальних закладів
(лист про надання грифу N від)

Рецензенти:
Івасишен С.Д., доктор фіз.-мат. наук, професор кафедри математичної фізики НТУУ "КПІ";
Благун І.С., доктор економ. наук, професор, завідувач кафедри економічної кібернетики ПНУ ім. В. Стефаника;
Ленюк М.П., доктор фіз.-мат. наук, професор, завідувач кафедри інформаційних систем ХНТУ "ХПІ" (Чернівецький факультет)

В-558 **Математика для економістів: теорія та застосування**. Навчальний підручник. / В.П. Лавренчук, Т.І. Готинчан, В.С. Дронь, О.С. Кондур. – Київ: Кондор, 2005. – 595 с.
ISBN

Навчальний підручник містить короткий довідковий матеріал, приклади розв'язування типових задач, підбірки задач для практичних занять та домашнього завдання з елементів лінійної алгебри, аналітичної геометрії, математичного аналізу, диференціальних рівнянь, теорії ймовірностей, математичної статистики, математичного програмування відповідно до програми з вищої математики.

ББК 22.11я73
УДК 51(075.8)

© В.П. Лавренчук, Т.І. Готинчан, В.С. Дронь, О.С. Кондур, 2005
© ТзОВ "Кондор", 2005

ISBN

Передмова

Даний підручник охоплює весь матеріал програми з вищої математики для студентів економічних та інженерно-економічних спеціальностей. Він складається з трьох частин. У першій частині розглядаються аналітична геометрія, елементи лінійної алгебри та математичний аналіз. Друга частина присвячена теорії ймовірностей та елементам математичної статистики. У третій частині розглянуто різні задачі математичного програмування (задачі оптимізації).

Усі три частини підручника побудовані за таким принципом: спочатку дається короткий виклад теоретичного матеріалу даної теми, який ілюструється конкретними прикладами; потім пропонуються задачі для аудиторних занять (позначені літерою "О"), самостійних занять (літера "С") і для домашнього завдання (літера "Д").

Задачі підібрано так, щоб студенти не тільки формально засвоїли ті чи інші математичні факти, а змогли застосувати отримані знання у своєму подальшому навчанні та наступній роботі.

У книзі початок розв'язування прикладів позначається символом $\triangleleft$, закінчення – $\triangleright$.

Частина I

Тема 1. Відношення, пропорції, відсотки, арифметична та геометрична прогресії

Відношенням чисел a і b називається частка від ділення a на b. Позначають відношення символом $\frac{a}{b}$ або $a : b$. Якщо $a : b = t$, то $a = bt$, $b = a : t$.

Пропорцією називається рівність двох відношень $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ або $a : b = c : d$.

Числа a і d – крайні члени пропорції, числа b і c – середні члени пропорції.

Основна властивість пропорції: $ad = bc$.

З пропорції $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ можна одержати нові пропорції, які називаються похідними від даної: 1) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$; 2) $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$; 3) $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ і т.д.

Нехай маємо дві пропорції: $a : b = d : e$ та $b : c = e : k$, тоді $a : b : c = d : e : k$ або $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{k}$. Остання рівність називається подвоєною пропорцією. Похідною від неї є, наприклад, $\frac{a+b+c}{d+e+k} = \frac{a}{d}$.

Якщо величини x та y змінюються так, що їхнє відношення залишається незмінним, то вони називаються **прямо пропорційними**. У цьому випадку величини y та x зв'язані рівністю $\frac{y}{x} = k$, або $y = kx$, де k – **коефіцієнт пропорційності**.

Якщо величини x та y змінюються так, що добуток їх залишається незмінним, то вони називаються **обернено пропорційними**. Для таких величин правильна рівність $yx = k$ або $y = \frac{k}{x}$, k – стала.

Якщо число c поділити у відношенні $m : n$, то дістанемо числа $\frac{cm}{m+n}$ і $\frac{cn}{m+n}$.

Приклад 1. Знайти x з пропорції $(20 + 2x) : (20 - 2x) = 3 : 2$.

$\lhd$ Згідно з основною властивістю пропорції маємо $(20 + 2x)2 = (20 - 2x)3$ або $40 + 4x = 60 - 6x$. Звідси одержуємо, що $10x = 20$ або $x = 2$. $\rhd$

Приклад 2. Відомо, що $4 : 5 : x = 3 : y : 7$. Знайти x і y.

$\triangleleft$ З пропорції $4 : 5 = 3 : y$ знаходимо $y = \frac{5\cdot 3}{4} = \frac{15}{4}$, а з пропорції $4 : x = 3 : 7$ знаходимо $x = \frac{4\cdot 7}{3} = \frac{28}{3}$. $\triangleright$

Приклад 3. Відомо, що 14 см^3 заліза важить $109,2$ г. Скільки грамів важить кусок заліза об'ємом 42 см^3?

$\triangleleft$ Оскільки вага заліза прямо пропорційна його об'єму, то $14 : 42 = 109,2 : x$, звідки $x = \frac{42\cdot 109,2}{14} = 327,6$ г. $\triangleright$

Приклад 4. Зубчате колесо з 8 зубцями робить 95 обертів за хвилину. Скільки обертів за хвилину зробить колесо, яке зчеплене з першим і має 20 зубців?

$\triangleleft$ Оскільки число обертів за хвилину двох коліс, зчеплених одне з одним, обернено пропорційне числу їхніх зубців, то $8 : 20 = x : 95$, звідки $x = \frac{8\cdot 95}{20} = 38$ обертів. $\triangleright$

Відсотком (процентом) деякого числа називається $\frac{1}{100}$ частина його і позначається символом %.

Розглянемо три основні задачі на відсотки: знаходження відсотка від даного числа; знаходження числа за його відсотком; знаходження процентного відношення чисел:

1) $p\%$ від числа c дорівнює $\frac{cp}{100}$;

2) якщо $p\%$ від числа c дорівнює a, то $c = \frac{100a}{p}$;

3) процентне відношення чисел a і c дорівнює $\frac{a}{c}\cdot 100\%$.

Приклад 5. Знайти 19% від числа 80.

$\triangleleft$ Оскільки 1% від числа 80 дорівнює $\frac{1}{100}\cdot 80$, то 19% від числа 80 дорівнює $\frac{80}{100}\cdot 19 = 15,2$. $\triangleright$

Приклад 6. Відомо, що 5% вкладу в ощадбанк становлять 170 грн. Чому дорівнює вклад?

$\triangleleft$ Очевидно, що 1% вкладу становить $\frac{170}{5}$ грн., тому весь вклад дорівнює $\frac{170}{5}\cdot 100 = 3400$ грн. $\triangleright$

Приклад 7. Який відсоток складає число 270 від 3000?

$\triangleleft$ Складемо пропорцію $\frac{3000}{100} = \frac{270}{p}$, звідки $p = \frac{270\cdot 100}{3000}\% = 9\%$. $\triangleright$

Використовуватимемо позначення: P – основна сума, або капітал (початкова кількість грошей, позичених, взятих у позику або інвестованих (вкладених) куди-небудь); r – ставка відсотка (процента) за рік (річний показник); t – час (тривалість кредиту або строк вкладу в роках); I – величина прибутку з капіталу у грошових одиницях (прості проценти); S – загальна сума (основна сума плюс прибуток), яка виникла на кінець обумовленого проміжку часу.

Відомо, що **прості проценти** знаходяться за формулою

$$I = Prt,$$

а **загальна сума** $S = P + I$.

Приклад 8. Банк дав позику в розмірі 20000 грн. асоціації підприємців на 6 місяців зі ставкою процента 6% річних. Визначити: 1) прості проценти (прибуток з капіталу); 2) загальну суму (майбутню вартість).

◁ Маємо: $P = 20000$ грн., $r = 0,06$, $t = 0,5$ року. Тоді: 1) $I = Prt = 20000 \cdot 0,06 \cdot 0,5 = 600$ грн.; 2) $S = P(1 + rt) = 20000(1 + 0,06 \cdot 0,5) = 20000(1 + 0,03) = 20000 \cdot 1,03 = 20600$. ▷

У задачах на прості проценти ставка процента r обчислюється відносно основної суми P. Інколи угода про надання позики укладається за допомогою **дисконтного векселя**. У цьому випадку ціна, яку треба сплатити за користування позикою, називається **дисконтом**. Дисконт підраховується як процент від завершеної вартості. Ці проценти називаються **ставкою дисконту** і позначаються буквою d. **Простий дисконт** D визначається формулою

$$D = Sdt,$$

де t – тривалість часу (місяці чи роки), на який позичені гроші.

Приклад 9. Фермер узяв позику на 9 місяців і видав банку дисконтний вексель на 1000 гривень. Ставка дисконту дорівнює 8%. Визначити простий дисконт.

◁ Маємо: $S = 1000$.; $d = 0,08$; $t = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ року. Тоді $D = Sdt = 1000 \cdot 0,08 \cdot \frac{3}{4} = 60$ грн. Оскільки вексель складений відносно завершеної вартості у 1000 грн., то фермер отримає тільки 1000-60=940 грн. Ця сума називається **виручeною сумою векселя**, або **виручкою**, позначається літерою B і визначається рівністю $B = S(1 - dt)$. ▷

Приклад 10. На рахунок до ощадбанку внесено суму m грн. Скільки грошей буде на рахунку через t років, якщо рахунок збільшується за рік на $p\%$?

$\triangleleft$ Через рік сума на рахунку дорівнюватиме $m(1+\frac{p}{100})$; через два роки – $m(1+\frac{p}{100})+\frac{p}{100}m(1+\frac{p}{100}) = m(1+\frac{p}{100})^2$; через три роки – $m(1+\frac{p}{100})^3$ і т.д.

Отже, через t років сума на рахунку становитиме $m_t = m(1+\frac{p}{100})^t$. Це є формула **складних відсотків**. $\triangleright$

Арифметичною прогресією називається числова послідовність $\{a_n, n \geq 1\}$, у якої різниця між кожним членом, починаючи з другого, і попереднім є сталою величиною.

З цього означення випливає, що $a_{n+1} = a_n + d, \quad n \in \mathbb{N}$.

Число d називається **різницею** арифметичної прогресії. Якщо $d > 0$, то арифметичну прогресію називають зростаючою, а при $d < 0$ – спадною.

Загальний член арифметичної прогресії знаходиться за формулою $a_n = a_1 + (n-1)d$.

Кожний член арифметичної прогресії, починаючи з другого, дорівнює середньому арифметичному двох сусідніх з ним членів, тобто

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}, \quad k \geq 2.$$

Дане співвідношення називають **характеристичною властивістю** арифметичної прогресії.

Сума n перших членів арифметичної прогресії знаходиться за формулою

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \quad \text{або} \quad S_n = \frac{(2a_1 + (n-1)d)n}{2}.$$

Відомо, що $a_k + a_m = a_p + a_q$, де $k + m = p + q$.

<u>**Приклад 11.**</u> При діленні дев'ятого члена арифметичної прогресії на другий член частка дорівнює 5, а при діленні тринадцятого члена на шостий член частка дорівнює 2, а остача – 5. Знайти перший член і різницю прогресії.

$\triangleleft$ Маємо $\frac{a_9}{a_2} = 5$, $\frac{a_{13}}{a_6} = 2$ (остача 5), тобто $a_9 = 5a_2$, $a_{13} = 2a_6 + 5$.

Тоді

$$\begin{cases} a_1 + 8d = 5(a_1 + d), \\ a_1 + 12d = 2(a_1 + 5d) + 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4a_1 = 3d, \\ a_1 = 2d - 5. \end{cases}$$

Звідси випливає, що $a_1 = 3$, $d = 4$. ▷

Приклад 12. Підприємство розпочало використовувати нове обладнання вартістю 3 млн. 700 тис. грн., вартість обладнання зменшується (через амортизацію) кожного року на 150 тис. гривень. Знайти вартість даного обладнання через 10 років. При вартості 400 тис. гривень обладнання буде непридатним для використання. Коли це настане?

◁ Згідно з умовою задачі вартість обладнання з кожним роком зменшуватиметься на 150 тис. грн., тому його вартість (у тис. грн.) з роками виглядатиме так: $3700 - 150$, $3700 - 2 \cdot 150$, $3700 - 3 \cdot 150$, $3700 - 4 \cdot 150$, ... або 3550, 3400, 3250, 3100, ...

Дана послідовність утворює арифметичну прогресію з $a_1 = 3550$, $d = 3400 - 3550 = -150$. Тому $a_{10} = 3550 + (10 - 1) \cdot (-150) = 3550 - 9 \cdot 150 = 2200$ тис. грн.

З рівності $400 = 3550 + (n-1)(-150)$ знаходимо $150n = 3300$ і $n = 22$. Отже, дане обладнання можна використовувати 22 роки. ▷

Геометричною прогресією називається числова послідовність $\{b_n, n \geq 1\}$ ненульових чисел, у якої частка від ділення будь-якого члена, починаючи з другого, на попередній є сталою величиною.

Геометричну прогресію можна задати формулою

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = q, \quad q \neq 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

де q – **знаменник** геометричної прогресії. Геометрична прогресія називається зростаючою, якщо $|q| > 1$, і називається спадною, якщо $|q| < 1$.

Формула **загального члена** геометричної прогресії має вигляд

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

Характеристична властивість геометричної прогресії така:

$$b_n^2 = b_{n-1}\, b_{n+1}.$$

Сума n перших членів геометричної прогресії знаходиться за формулами

$$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q} \quad \text{або} \quad S_n = \frac{b_1 - q b_n}{1 - q},$$

якщо $q \neq 1$ і $S_n = nb_1$ при $q = 1$.

Маємо також $b_k b_m = b_p b_r$, якщо $k + m = p + r$.

Якщо $|q| < 1$, то при необмеженому збільшенні n $(n \to \infty)$ сума S_n прямує до числа $\frac{b_1}{1-q}$, яке називається **сумою нескінченно спадної геометричної прогресії** і позначається буквою S, тобто

$$S = \frac{b_1}{1-q}.$$

Приклад 13. Знайти число членів геометричної прогресії, в якої перший член дорівнює 3, другий – 12, а останній – 3072.

◁ Згідно з умовою $b_1 = 3$, $b_2 = 12$, а $b_n = 3072$, тобто

$$\begin{cases} b_1 = 3, \\ b_1 q = 12, \\ b_1 q^{n-1} = 3072. \end{cases}$$

З другого рівняння одержуємо, що $q = 4$, а тому третє рівняння набуває вигляду $3 \cdot 4^{n-1} = 3072$ або $4^{n-1} = 1024$, тобто $4^{n-1} = 4^5$, звідки випливає, що $n - 1 = 5$ і $n = 6$. ▷

Приклад 14. Перетворити нескінченний періодичний десятковий дріб 0,4(13) у звичайний.

◁ Оскільки

$$0,4(13) = \frac{4}{10} + \frac{13}{1000} + \frac{13}{100000} + ...,$$

то звідси випливає, що після першого доданка маємо суму нескінченно спадної геометричної прогресії з $b_1 = \frac{13}{1000}$ і $q = \frac{1}{100}$.

Тому

$$0,4(13) = \frac{4}{10} + \frac{\frac{13}{1000}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{4}{10} + \frac{13}{990} = \frac{409}{990}. \quad ▷$$

Вправи

О1. Знайти x з таких пропорцій:
1) $x : 5 = (x - 6) : 3$; 2) $(3,2x - 2) : (1,7x + 1) = 3 : 4$.

<u>O2.</u> Поділити 125 на чотири частини так, щоб перша частина відносилася до другої, як 2 : 3, друга до третьої, як 3 : 5, а третя до четвертої, як 5 : 6.

<u>O3.</u> Спочатку ціну на товар знизили на 20%, а потім нову ціну підвищили на 20%. Як змінилася початкова ціна?

<u>O4.</u> Перше з трьох чисел складає 25% від другого та 30% від третього. Скільки процентів складає третє число від другого?

<u>O5.</u> Прибуток складає $\frac{45}{4}\%$ ціни товару. Скільки відсотків складає це від собівартості товару?

<u>O6.</u> При виконанні контрольної роботи з вищої математики 12% студентів зовсім не розв'язали задачі, 32% розв'язали з помилками, а решта 14 студентів розв'язали правильно. Скільки студентів у групі?

<u>O7.</u> Ціна 60 примірників першого тому і 75 примірників другого тому підручника складає 405 грн. При 15% знижці на перший том і 10% знижці на другий треба заплатити 355 грн. 50 коп. Визначити ціну кожного тому.

<u>O8.</u> Ощадбанк виплачує щорічно 3% від внеску. Через скільки років наявна сума перевищуватиме подвоєну початкову?

<u>O9.</u> Яку суму треба інвестувати відразу на умовах 6% річних, щоб через 8 місяців з моменту інвестування отримати майбутню вартість, що становить 9828 річних?

<u>O10.</u> Підприємець видав банку 8-місячний вексель на суму 12000 грн. Ставка дисконту дорівнює 9%. Необхідно визначити: 1) яку суму він отримає у банку; 2) яку суму він сплатить банку в кінці 8-місячного строку при погашенні боргу; 3) яку суму заробить банк на цій угоді?

<u>O11.</u> Відомо, що сума n перших членів деякої арифметичної прогресії $S_n = 4n^2 - 3n$. Знайти три перших члени цієї прогресії.

<u>O12.</u> Турист, піднімаючись угору, за першу годину пройшов 800 м, а за кожну наступну годину проходив на 25 м менше, ніж за попередню. За скільки годин від досягне позначки 5700 м?

<u>O13.</u> Обладнання вартістю 20 тисяч гривень унаслідок експлуатації втрачає кожного року 2 тисячі гривень. Знайти вартість цього обладнання через 5 років, а також скільки років доцільно це обладнання використовувати, якщо при вартості 4 тисячі гривень обладнання використовувати недоцільно.

<u>О14.</u> При яких значеннях x числа 2^{x-1}, 4, 4^{x-2} будуть послідовними членами арифметичної прогресії?

<u>О15.</u> Сума перших трьох членів геометричної прогресії дорівнює 21, а її знаменник – 2. Знайти суму перших п'яти членів цієї прогресії.

<u>О16.</u> Три числа, третє з яких дорівнює 12, утворюють геометричну прогресію. Якщо замість 12 взяти 9, то ці три числа утворюватимуть арифметичну прогресію. Знайти ці числа.

<u>О17.</u> Кожного місяця сім'я вносить 100 гривень на рахунок в ощадбанку з метою накопичення й одержання прибутку в розмірі 3% за кожен місяць. Знайти: 1) суму накопичень через n місяців; 2) безпосередньо після 10-го внеску.

<u>С1.</u> Робочий день скоротили з 8 до 7 годин. На скільки відсотків треба збільшити продуктивність праці, щоб при тих самих розцінках за виконану роботу заробітна платня за робочий день зросла на 5%?

<u>С2.</u> В антикварному магазині продавлась дорога картина, яка довго не знаходила покупця. Власник картини розпорядився знижувати вартість картини на 10% в останній день кожного місяця. Через півроку картину продали. На скільки відсотків, у порівнянні з початковою вартістю, знизилась вартість картини?

<u>С3.</u> Знайти ціле додатне число n з рівняння

$$(3+6+9+...+3(n-1))+(4+5,5+7+...+\frac{8+3n}{2})=137.$$

<u>С4.</u> Знайти три числа, які утворюють геометричну прогресію, якщо їх добуток дорівнює 64, а середнє арифметичне – $\frac{14}{3}$.

<u>С5.</u> Три числа утворюють геометричну прогресію. Якщо друге число збільшити на 2, то прогресія стане арифметичною, а якщо після цього збільшити третє число на 9, то прогресія стане знову геометричною. Знайти ці числа.

Домашнє завдання

Д1. Знайти x, якщо:
1) $x : (10 - x) = 2 : 3$; 2) $(2,5x - 3) : (3,5x - 2) = 5 : 9$.

Д2. На вступному екзамені з математики 15% абітурієнтів не розв'язали жодної задачі, 144 особи розв'язали задачі з помилками, а число тих, хто розв'язав усі задачі правильно, відноситься до числа тих, хто не розв'язав жодної, як 5 : 3. Скільки абітурієнтів екзаменувалося з математики цього дня?

Д3. Антикварний магазин, придбавши два предмети за 225 грн., продав їх з прибутком 40%. Скільки коштував магазину кожний предмет, якщо від першого одержано 25% прибутку, а від другого – 50%.

Д4. Поділити число 121 у відношенні $1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{3}$.

Д5. Книжка коштувала 3 грн. 80 коп. Скільки вона коштуватиме після двох послідовних підвищень спочатку на 20%, потім на 25%?

Д6. Необхідно отримати позику в розмірі 8000 гривень на 6 місяців. Банк пропонує дисконтний вексель зі ставкою 12%. Визначити: 1) завершену вартість підписаного дисконтного векселя; 2) скільки коштуватиме користування 8000 грн. протягом 6 місяців згідно з цим дисконтним векселем?

Д7. Відомо два члени арифметичної прогресії $a_1 = 7$, $a_5 = 19$. Знайти суму ста перших членів цієї прогресії.

Д8. П'ятий член геометричної прогресії дорівнює 324, а сьомий член – 2916. Знайти перший член цієї прогресії.

Д9. Чотири числа утворюють геометричну прогресію. Якщо до двох перших чисел додати по 1, а до третього і четвертого – відповідно 4 і 13, то одержимо арифметичну прогресію. Знайти ці числа.

Д10. Сума членів нескінченно спадної геометричної прогресії дорівнює 56, а сума квадратів членів цієї ж прогресії дорівнює 448. Знайти перший член і знаменник даної прогресії.

Д11. Розв'язати рівняння $2x + 1 + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + ... = \frac{13}{6}$, де $|x| < 1$.

Д12. Кожного року деяка особа вкладає до банку 1000 грн. для накопичення з фіксованим 8% щорічним приростом. Скільки коштів вона матиме через 11 років?

Д13. 1) Підприємець взяв у борг 3905 гривень з умовою повернути 20 гривень у перший місяць і подальшим зростанням цієї суми на 15 гривень щомісяця. Який термін йому потрібен для повернення боргу?

2) Щомісячне повернення банку боргу підприємець здійснює за арифметичною прогресією. Скільки йому потрібно повернути коштів у 20-му місяці, якщо його внески у 8-му та 15-му місяцях були 153 та 181 гривень відповідно?

Відповіді

О1. 1) 15; 2) $\approx 1,43$. **О2.** $\frac{125}{8}$, $\frac{375}{16}$, $\frac{625}{16}$, $\frac{375}{8}$. **О3.** Зменшилась на 4%. **О4.** $83,3\%$. **О5.** $12,6\%$. **О6.** 25. **О7.** 3 грн., 3 грн. **О8.** 23. **О9.** 9450 грн. **О10.** 1) 11 280, 2) 12 000, 3) 720. **О11.** 1; 9; 17. **О12.** 8. **О13.** 10000 грн.; 8 років. **О14.** 3. **О15.** 93. **О16.** 3, 6, 12; 27, 18, 12. **О17.** 1) $1,03 \cdot \frac{100((1,03)^n-1)}{1,03-1}$; 2) $\frac{100((1,03)^{10}-1)}{1,03-1} \approx 1146,38$. **С1.** 20%. **С2.** 47%. **С3.** 7. **С4.** 2, 4, 8; 8, 4, 2. **С5.** 4, 8, 16; $\frac{4}{25}$, $-\frac{16}{25}$, $\frac{64}{25}$. **Д1.** 1) 4; 2) $\frac{17}{5}$. **Д2.** 240. **Д3.** 90; 135. **Д4.** 66, 33, 22. **Д5.** 5 грн.70 коп. **Д6.** 1) 8510,64; 2) 510,64. **Д7.** 15550. **Д8.** 4. **Д9.** -3, -6, -12, -24. **Д10.** $b_1 = 14$, $q = \frac{3}{4}$. **Д11.** $\frac{1}{2}$, $-\frac{7}{9}$. **Д12.** $1000 \cdot 1,08 \cdot \frac{1,08^{11}-1}{1,08-1} \approx 17977,12$ грн. **Д13.** 1) 22 місяці; 2) 201 грн.

Тема 2. Визначники другого порядку і системи двох рівнянь першого степеня з двома невідомими

Розглянемо квадратну таблицю з чотирьох чисел a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Дану таблицю називають **матрицею другого порядку**. Число $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ називається **визначником другого порядку**, що відповідає матриці (1). Цей визначник позначають символами $|A|$, $\det A$ або $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. Отже, маємо

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \tag{2}$$

Числа a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} називаються елементами визначника. Кажуть, що елементи a_{11}, a_{22} лежать на головній діагоналі визначника, а a_{12}, a_{21} – на побічній. Тому, визначник другого порядку дорівнює різниці між добутками елементів, які лежать на головній і побічній діагоналях.

Наприклад, $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - (-3) \cdot 5 = 23.$

Розглянемо систему двох рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_2 \end{cases} \tag{3}$$

з двома невідомими x_1, x_2. Коефіцієнти $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ і вільні члени c_1, c_2 вважатимемо заданими. Введемо позначення:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Визначник Δ, складений з коефіцієнтів при невідомих системи (3), називається визначником системи. Визначник Δ_{x_1} одержується заміною елементів першого стовпчика визначника

Δ вільними членами системи (3); визначник Δ_{x_2} одержують з визначника Δ заміною вільними членами системи (3) елементів його другого стовпчика.

Якщо $\Delta \neq 0$, то система (3) має єдиний розв'язок, який визначається **формулами Крамера**

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}. \tag{5}$$

У цьому випадку система (3) називається **визначеною**.

Якщо $\Delta = 0$ і при цьому принаймні один із визначників Δ_{x_1}, Δ_{x_2} відмінний від нуля, то система (3) не має розв'язків (вона **несумісна**).

Якщо ж $\Delta = 0$, але також $\Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = 0$, то система (3) має безліч розв'язків. У цьому випадку одне з рівнянь є наслідком другого і система називається **невизначеною**.

Нехай в (3) $c_1 = c_2 = 0$. Тоді система (3) має вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0 \end{cases} \tag{6}$$

і називається **однорідною**. Вона завжди має нульовий розв'язок $x_1 = 0, x_2 = 0$. Якщо $\Delta \neq 0$, то цей розв'язок єдиний; якщо ж $\Delta = 0$, то система (6), крім нульового, має безліч інших розв'язків.

Приклад 1. За допомогою формул Крамера розв'язати систему $2x + 3y = 0$, $6x - 12y = -7$.

$\triangleleft$ Маємо $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -12 \end{vmatrix} = -42, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -7 & -12 \end{vmatrix} = 21,$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -7 \end{vmatrix} = -14$; тоді $x = \frac{21}{-42} = -\frac{1}{2}, \quad y = \frac{-14}{-42} = \frac{1}{3}$.

Отже, розв'язок системи $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$. $\triangleright$

Приклад 2. Дослідити за яких умов, накладених на коефіцієнти, система лінійних рівнянь $ax + 4y = 2$, $9x + ay = 3$ визначена або несумісна.

$\triangleleft$ Розглянемо визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 4 \\ 9 & a \end{vmatrix} = a^2 - 36.$$

Очевидно, що $\Delta \neq 0$ при $a \neq \pm 6$, а тому в цьому випадку система має єдиний розв'язок. Якщо $a = 6$, то $\Delta = 0$ і

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

тобто ситема має безліч розв'язків.

При $a = -6 \quad \Delta = 0$, а $\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = -24 \neq 0$, звідки випливає, що система несумісна. ▷

Вправи

О1. Обчислити такі визначники:

1) $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} \sin\beta & -\cos\beta \\ \cos\beta & \sin\beta \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^3 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} \frac{x}{x+1} & \frac{2x+1}{x+1} \\ \frac{-1}{x+1} & \frac{x}{x+1} \end{vmatrix}$.

О2. Розв'язати рівняння:

1) $\begin{vmatrix} 2 & x-4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$; 2) $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0$; 3) $\begin{vmatrix} 4\sin x & 1 \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = 0$.

О3. Розв'язати нерівності:

1) $\begin{vmatrix} 3x-3 & 2 \\ x & 1 \end{vmatrix} > 0$; 2) $\begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} < 14$.

О4. Розв'язати системи рівнянь:

1) $\begin{cases} 3x - 5y = 13, \\ 2x + 7y = 81; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x - 3y = 6, \\ 4x - 6y = 5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - y\sqrt{3} = 1, \\ x\sqrt{3} - 3y = \sqrt{3}; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x + y = 1, \\ x - y = 2; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 2x + 3y = 1, \\ 3x + 5y = 4. \end{cases}$

О5. Визначити, при яких значеннях a і b система рівнянь $3x - ay = 1$, $6x + 4y = b$: 1) має єдиний розв'язок; 2) не має розв'язків; 3) має безліч розв'язків.

О6. При яких значеннях k однорідна система $kx + y = 0$, $x + ky = 0$ має ненульові розв'язки ?

О7. Знайти усі розв'язки кожної з таких систем :

1) $\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 0, \\ x + 2y - 3z = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - 3y + z = 0, \\ 2x - 9y + 3z = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x + 2y + 2z = 0, \\ 5x + 2y + 3z = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x + y - z = 3, \\ 3x + 3y + 2z = 7. \end{cases}$

О8. Для виготовлення двох видів товарів A і B використовують 500 кг сталі та 950 кг пластмаси, причому на одиницю товару A витрачають10 кг сталі і 40 кг пластмаси, а на одиницю товару B – відповідно 20 кг і 10 кг. Скільки одиниць кожного товару буде виготовлено, якщо при цьому вичерпано всі ресурси?

С1. Дослідити, при яких значеннях параметра λ система $5x+5y=4+\lambda x$, $7x+3y=1+\lambda y$ буде визначеною, невизначеною, несумісною; розв'язати її для тих значень λ, при яких вона визначена.

С2. Розв'язати системи рівнянь:

$$1)\left\{\begin{array}{c} 2x+y-z=3, \\ 3x+3y+2z=7; \end{array}\right. \qquad 2)\left\{\begin{array}{c} x-3y+az=0, \\ bx+6y-z=0. \end{array}\right.$$

Домашнє завдання

Д1. Обчислити визначники: 1) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$;

2) $\begin{vmatrix} \mathrm{tg}\alpha & -1 \\ 1 & \mathrm{tg}\alpha \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} a+1 & b-c \\ a^2+a & ab-ac \end{vmatrix}$.

Д2. Розв'язати рівняння: 1) $\begin{vmatrix} 3x & -1 \\ x & 2x-3 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}$;

$$2)\begin{vmatrix} x^2-4 & -1 \\ x-2 & x+2 \end{vmatrix} = 0; \qquad 3)\begin{vmatrix} \cos 8x & -\sin 5x \\ \sin 8x & \cos 5x \end{vmatrix} = 0.$$

Д3. Розв'язати нерівності:

$$1)\begin{vmatrix} 2x-2 & 1 \\ 7x & 2 \end{vmatrix} > 5; \qquad 2)\begin{vmatrix} 1 & x+5 \\ 2 & x \end{vmatrix} < 0.$$

Д4. Знайти всі розв'язки кожної з поданих систем:

$$1)\left\{\begin{array}{c} 3y-4x=1, \\ 3x+4y=18; \end{array}\right. \qquad 2)\left\{\begin{array}{c} x\sqrt{5}-5y=\sqrt{5}, \\ x-y\sqrt{5}=5; \end{array}\right.$$

$$3)\left\{\begin{array}{c} 3x-2y+z=0, \\ 6x-4y+3z=0; \end{array}\right. \qquad 4)\left\{\begin{array}{c} ax+2y-z=0, \\ 2x+by-3z=0; \end{array}\right.$$

$$5)\left\{\begin{array}{c} 2x-5y=-2, \\ x+4y=3; \end{array}\right. \qquad 6)\left\{\begin{array}{c} x-3y+z=0, \\ 2x-9y+3z=0. \end{array}\right.$$

Д5. Дослідити, при яких значеннях параметра λ система рівнянь є визначеною, невизначеною або несумісною; розв'язати її у випадку, коли вона визначена:

1) $\begin{cases} \lambda x + (\lambda+1)y = 5, \\ 3x + 4y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \lambda x + (\lambda+10)y = -1, \\ (\lambda-10)x + (\lambda+1)y = 2. \end{cases}$

Д6. Два види бактерій B_1 і B_2 існують у пробірці й споживають два види субстратів S_1 і S_2. Середньодобове споживання субстрату S_i бактеріями виду B_j становить a_{ij}, $\{i,j\} \subset \{1,2\}$. Наявний запас субстрату S_i становить c_i, $i \in \{1,2\}$. Яка чисельність популяцій обох видів бактерій може існувати у даному середовищі, якщо $A \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C \equiv (c_1,\ c_2) = (4000,\ 3000)$ і бактерії споживають увесь запас субстратів.

Відповіді

О1. 1) 11; 2) 1; 3) -1; 4) 1. **О2.** 1) 12; 2) -1; -4; 3) $(-1)\frac{k\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$. **О3.** 1) $x > 3$; 2) $-1 < x < 7$. **О4.** 1) (16, 7); 2) несумісна; 3) $x = 1 + y\sqrt{3}$, $y \in \mathbb{R}$; 4) $(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2})$; 5) $(-7; 5)$. **О5.** 1) $a \neq -2$; 2) $a = -2$, $b \neq 2$; 3) $a = -2$, $b = 2$. **О6.** $k = \pm 1$. **О7.** 1) $x = -2t$, $y = 7t$, $z = 4t$, $t \in \mathbb{R}$; 2) $x = 0$, $y = t$, $z = 3t$, $t \in \mathbb{R}$; 3) $x = 2t, y = t, z = -4t, t \in \mathbb{R}$; 4) $x = \frac{1}{3}(2+5t), y = \frac{1}{3}(5-3t), z = t, t \in \mathbb{R}$. **О8.** 20; 15. **С1.** Система визначена при $\lambda \neq -2$; $\lambda \neq 10$; $x = \frac{7-4\lambda}{(\lambda+2)(\lambda-10)}, y = \frac{-\lambda-23}{(\lambda+2)(\lambda-10)}$. При $\lambda = -2$ і при $\lambda = 10$ система несумісна. **С2.** 1) $x = \frac{2+5z}{3}$, $y = \frac{5-7z}{3}$; 2)$x = 3(1-2a)t$, $y = (ab+1)t$, $z = 3(b+2)t$, $t \in \mathbb{R}$, за умови, що $a \neq 1/2$ або $b \neq -2$. Якщо $a = 1/2$, $b = -2$, то $z = 2(3y - x), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$. **Д1.** 1) -5; 2) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$; 3) $4ab$; 4) 0. **Д2.** 1) $x_1 = -1/6$, $x_2 = 3/2$; 2) $x = 2$; 3) $x = \frac{\pi(2n+1)}{6}$, $n \in \mathbb{Z}$. **Д3.** 1) $x < -3$; 2) $x > -10$. **Д4.** 1) $x = 2$, $y = 3$; 2) несумісна; 3) $x = 2t, y = 3t, z = 0$, $t \in \mathbb{R}$; 4) $x = (b-6)t$, $y = (3a-2)t$, $z = (ab-4)t$, $t \in \mathbb{R}$, якщо $a \neq 2/3$ або $b \neq 6$; при $a = 2/3$, $b = 6$, $z = \frac{2}{3}x + 2y$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$; 5) $x = \frac{7}{13}, y = -\frac{8}{13}$; 6) $x = 0, y = t, z = 3t, t \in \mathbb{R}$. **Д5.** 1) Система визначена при $\lambda \neq 3$: $x = -5$, $y = 5$; при $\lambda = 3$ система невизначена; 2) система визначена при $\lambda \neq -100$: $x = -\frac{3(\lambda+7)}{\lambda+100}$, $y = \frac{3\lambda-10}{\lambda+100}$; при $\lambda = -100$ система несумісна. **Д6.** 2000, 1000.

Тема 3. Визначники третього порядку та їхні властивості. Системи трьох рівнянь першого степеня з трьома невідомими

Нехай задана квадратна таблиця (матриця) з дев'яти чисел a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Визначником третього порядку, що відповідає таблиці (1), називається число, яке позначається символами $|A|$, $\det A$ або $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ і визначається рівністю $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$ $= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$.

Числа a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33} називаються елементами визначника. Елементи a_{11}, a_{22}, a_{33} розміщені на головній діагоналі визначника, а елементи a_{13}, a_{22}, a_{31} утворюють його побічну діагональ.

Нагадаємо властивості визначників.

Властивість 1. Величина визначника не зміниться, якщо всі його рядки замінити стовпчиками, причому кожний рядок замінити стовпчиком з тим же номером.

Властивість 2. Перестановка двох стовпчиків або двох рядків визначника рівносильна множенню його на -1.

Властивість 3. Якщо визначник має два однакові стовпчики (рядки), то він дорівнює нулеві.

Властивість 4. Множення всіх елементів одного стовпчика (рядка) визначника на довільне число λ рівносильне множенню визначника на це число λ.

Наприклад,
$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \lambda a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

<u>Властивість 5.</u> Якщо всі елементи деякого стовпчика (рядка) дорівнюють нулю, то і сам визначник дорівнює нулеві.

<u>Властивість 6.</u> Якщо відповідні елементи двох стовпчиків (рядків) визначника пропорційні, то визначник дорівнює нулеві.

<u>Властивість 7.</u> Якщо кожний елемент i-го стовпчика (рядка) визначника є сумою двох доданків, то визначник можна подати у вигляді суми двох визначників, перший з яких в i-му стовпчику (рядку) має перші із згаданих доданків, а другий – другі; елементи, які стоять на решті місцях , у всіх трьох визначниках одні і ті ж самі.

Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a'_{11}+a''_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21}+a''_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31}+a''_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a''_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a''_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

<u>Властивість 8.</u> Якщо до елементів деякого стовпчика (рядка) додати відповідні елементи іншого стовпчика (рядка), помножені на спільний множник, то величина визначника не зміниться.

Інші властивості визначників пов'язані з поняттями алгебраїчного доповнення і мінора. **Мінором** деякого елемента визначника називається визначник, який одержується з даного викреслюванням рядка і стовпчика, на перетині яких розміщений цей елемент. Якщо a_{ij} – елемент визначника, то його мінор позначається символом M_{ij}.

Наприклад, $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Алгебраїчне доповнення A_{ij} **елемента** a_{ij} визначника дорівнює мінору цього елемента, взятому зі своїм знаком, якщо сума номерів рядка і стовпчика, на перетині яких розміщений елемент, є парне число, і з протилежним знаком, – якщо це число непарне, тобто

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Наприклад,

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

<u>Властивість 9.</u> Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпчика) визначника на їхні алгебраїчні доповнення дорівнює величині визначника.

Сума ж добутків елементів будь-якого рядка (стовпчика) на алгебраїчні доповнення іншого рядка (стовпчика) дорівнює нулеві.

Властивість 9 підказує загальне означення **визначника n-го порядку** $|A|$ матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

а саме: $|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in}, \quad i \in \{1, 2, ..., n\}$,
або $|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + ... + a_{nj}A_{nj}, \quad j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Зазначимо, що властивості 1 – 9 правильні для визначників будь-якого порядку.

Приклад 1. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

$\triangleleft$ Згідно з означенням $\Delta = 2 \cdot (-2) \cdot 3 + 5 \cdot 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 \cdot 1 -$
$-1 \cdot (-2) \cdot 4 - 5 \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \cdot 2 = -10.$ $\triangleright$

Приклад 2. Розклавши за елементами другого рядка (властивість 9), обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & b & 0 \\ b & 0 & -b \end{vmatrix}$.

$\triangleleft$ Маємо $\Delta = 0 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} b & 1 \\ 0 & -b \end{vmatrix} + b \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & -b \end{vmatrix} +$
$+0 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & b \\ b & 0 \end{vmatrix} = b \cdot (-b - b) = -2b^2.$ $\triangleright$

Приклад 3. Обчислити визначник $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

$\triangleleft$ Очевидно, що даний визначник зручно обчислити, розклавши його за елементами четвертого рядка: $|A| = 5 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} =$

$$= (-5) \cdot 2 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -10 \cdot (0 \cdot 5 - 1 \cdot 3) = 30. \quad \triangleright$$

Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = c_3 \end{cases} \tag{2}$$

з невідомими x_1, x_2, x_3. Введемо позначення:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{vmatrix}.$$

Якщо $\Delta \neq 0$, то система (2) має єдиний розв'язок, який визначається за **формулами Крамера**

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}. \tag{3}$$

Припустимо, що $\Delta = 0$, але принаймні один із визначників Δ_{x_1}, Δ_{x_2}, Δ_{x_3} відмінний від нуля. У цьому випадку система (2) розв'язків не має.

У випадку, коли $\Delta = 0$ і одночасно $\Delta_{x_1} = 0$, $\Delta_{x_2} = 0$, $\Delta_{x_3} = 0$, система (2) також може не мати розв'язків; але якщо система (2) за цих умов має хоча б один розв'язок, то вона має безліч розв'язків.

Якщо $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, то система (2) називається **однорідною.** Очевидно, що така система завжди має розв'язок $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Якщо $\Delta \neq 0$, то цей розв'язок єдиний. Якщо ж $\Delta = 0$, то однорідна система має безліч ненульових розв'язків.

Приклад 4. Використовуючи формули Крамера, розв'язати систему

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = -3, \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 = 2. \end{cases}$$

$\triangleleft$ За формулами (3) маємо $x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 5 & 1 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{31}{31} = 1,$

$$x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -3 \\ 5 & 2 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 5 & 1 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{31}{31} = 1, x_3 = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 5 & 1 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{31}{31} = 1. \quad \triangleright$$

Приклад 5. Взуттєва фабрика спеціалізується з випуску виробів трьох типів $П_1$, $П_2$ і $П_3$, використовуючи при цьому сировину трьох видів S_1, S_2 і S_3. Норми витрат кожної сировини на одну пару взуття і обсяг витрат сировини на один день задані таблицею

Вид сировини	Норма витрат сировини на одну пару			Витрати сировини на 1 день
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	
S_1	6	4	5	2400
S_2	4	3	1	1450
S_3	5	2	3	1550

Знайти щоденний обсяг випуску кожного типу взуття.

$\triangleleft$ Нехай щоденно фабрика випускає x_1 пар виробів $П_1$, x_2 пар виробів $П_2$ і x_3 пар виробів $П_3$. Тоді згідно з витратами сировини кожного виду маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 2400, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 1450, \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1550. \end{cases}$$

Розв'яжемо дану систему за формулами Крамера :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -21, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 2400 & 4 & 5 \\ 1450 & 3 & 1 \\ 1550 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3150,$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 6 & 2400 & 5 \\ 4 & 1450 & 1 \\ 5 & 1550 & 3 \end{vmatrix} = -5250, \quad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 2400 \\ 4 & 3 & 1450 \\ 5 & 2 & 1550 \end{vmatrix} = -2100.$$

Отже, $x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{-3150}{-21} = 150$, $x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{-5250}{-21} = 250$, $x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{-2100}{-21} = 100$, а це означає, що фабрика випускає 150 пар взуття типу

Π_1, 250 пар типу Π_2 і 100 пар типу Π_3. $\triangleright$

Приклад 6. З'ясувати, чи система $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 6 \end{cases}$ є визначеною, невизначеною або несумісною.

$\triangleleft$ Маємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 6 - 8 - 4 + 8 - 6 + 4 = 0,$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 6 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 12 - 8 - 6 + 12 - 4 - 12 = -6 \neq 0,$$

це означає, що система несумісна. $\triangleright$

Вправи

О1. Обчислити визначники:

$$1)\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}; \quad 2)\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}; \quad 3)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix};$$

$$4)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & -5 \end{vmatrix}; \quad 5)\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

О2. Не обчислюючи визначники, довести правильність рівностей:

$$1)\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 11 \end{vmatrix}; 2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 + la_2 & b_1 + lb_2 & c_1 + lc_2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$3)\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \cos 2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

О3. Обчислити наведені визначники, використовуючи властивість 9:

$$1)\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}; \quad 2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}; \quad 3)\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}.$$

О4. Розв'язати рівняння:

$$1)\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0; \quad 2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5-x & 2 \\ 8-x & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

<u>О5.</u> Розв'язати нерівність $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 1.$

<u>О6.</u> Обчислити визначники:

$$1)\begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}; \quad 2)\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix};$$

$$3)\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}; \quad 4)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

<u>О7.</u> Розв'язати системи:

$$1)\begin{cases} x+y+z=36, \\ 2x-3z=-17, \\ 6x-5z=7; \end{cases} 2)\begin{cases} x+y-z=36, \\ x+z-y=13, \\ y+z-x=7; \end{cases} 3)\begin{cases} x+2y-4z=1, \\ 2x+y-5z=-1, \\ x-y-z=-2; \end{cases}$$

$$4)\begin{cases} 3x-y+2z=5, \\ 2x-y-z=2, \\ 4x-2y-2z=-3; \end{cases} 5)\begin{cases} 4x+y+z=0, \\ x+3y+z=0, \\ x+y+2z=0; \end{cases} 6)\begin{cases} 3x+2y-z=0, \\ x+2y+9z=0, \\ x+y+2z=0. \end{cases}$$

<u>О8.</u> З деякого листового матеріалу необхідно викроїти 200 заготовок типу A_1, 260 – типу A_2 і 290 – типу A_3. При цьому можна застосовувати три способи розкроювання. Кількість заготовок, одержуваних з кожного листа при різних способах розкрою, наведена в таблиці

Тип заготовки	Способи розкроювання		
	B_1	B_2	B_3
A_1	3	2	1
A_2	1	6	2
A_3	4	1	5

Знайти скільки листів кожним способом треба розкроїти, щоб одержати зазначену кількість заготовок.

C1. Розв'язати рівняння $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & x+1 \end{vmatrix} = 0.$

C2. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix}.$$

C3. Визначити, для яких значеннь a і b система рівнянь

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = b, \\ 5x - 8y + 9z = 3, \\ 2x + y + az = -1 \end{cases}$$

1) має єдиний розв'язок; 2) невизначена; 3) несумісна.

C4. З'ясувати, коли система $\begin{cases} 2ax_1 - 23x_2 + 29x_3 = 4, \\ 7x_1 + ax_2 + 4x_3 = 7, \\ 5x_1 + 2x_2 + ax_3 = 5 \end{cases}$

є визначеною, невизначеною або несумісною.

Домашнє завдання

Д1. Обчислити визначники:

$$1) \begin{vmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}; \quad 3) \begin{vmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{vmatrix};$$

$$4) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix}; \quad 5) \begin{vmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 8 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Д2. Використовуючи властивості визначників, довести такі рівності:

$$1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} \beta b_1 + \gamma c_1 & b_1 & c_1 \\ \beta b_2 + \gamma c_2 & b_2 & c_2 \\ \beta b_3 + \gamma c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$3)\begin{vmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Д3. Обчислити визначники, користуючись властивістю 9:

$$1)\begin{vmatrix} 1 & 17 & -7 \\ -1 & 13 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix}; \qquad 2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Д4. Розв'язати рівняння:

$$1)\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad 2)\begin{vmatrix} x-3 & 1 & 0 \\ 0 & x+1 & 0 \\ 0 & 0 & x+3 \end{vmatrix} = 0.$$

Д5. Розв'язати нерівність $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0.$

Д6. Обчислити визначники:

$$1)\begin{vmatrix} 2 & 2 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}; \qquad 2)\begin{vmatrix} 3 & 2 & 11 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix};$$

$$3)\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}; \quad 4)\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Д7. Розв'язати системи:

$$1)\begin{cases} 2x-4y+9z=28, \\ 7x+3y-6z=-1, \\ 7x+9y-9z=5; \end{cases} \; 2)\begin{cases} 2x+y=5, \\ x+3z=16, \\ 5y-z=10; \end{cases} \; 3)\begin{cases} 2x-y+z=-2, \\ x+2y+3z=-1, \\ x-3y-2z=3; \end{cases}$$

$$4)\begin{cases} 2x+y-z=0, \\ x+2y+z=0, \\ 2x-y+3z=0; \end{cases} \qquad 5)\begin{cases} x-y-z=0, \\ x+4y+2z=0, \\ 3x+7y+3z=0; \end{cases}$$

$$6)\begin{cases} x-2y+z=3, \\ 2x-4y+2z=5, \\ 3x-6y+3z=9; \end{cases} \qquad 7)\begin{cases} x+3y-4z=3, \\ 7y-7z=1, \\ 2x-y-z=5. \end{cases}$$

Д8. Для якого значення a система

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 0, \\ ax - 14y + 15z = 0, \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

має лише нульовий розв'язок?

Д9. Підприємство випускає три види продукції, використовуючи сировину трьох видів. Необхідні характеристики виробництва задано таблицею

Вид сировини	Витрати сировини на одиницю продукції			Запаси сировини
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	
S_1	5	3	4	2700
S_2	2	1	1	900
S_3	3	2	2	1600

Знайти обсяг випуску кожного виду продукції при повному використанні наявних запасів сировини.

Відповіді

О1. 1) -12; 2) 87; 3) -29; 4) 42; 5) 120. **О3.** 1) 87; 2) $xy(y-x)+xz(x-z)$; 3) $2a^2b$. **О4.** 1) $x = -3$; 2) $x_1 = 3$; $x_2 = 5$. **О5.** $x > 7/2$. **О6.** 1) -28; 2) -70; 3) -11; 4) 0. **О7.** 1) $x = \frac{53}{4}$, $y = \frac{33}{4}, z = \frac{29}{2}$; 2) $x = \frac{49}{2}, y = \frac{43}{2}, z = 10$; 3) $x = 2z - 1, y = z + 1, z \in \mathbb{R}$; 4) несумісна; 5) $x = 0, y = 0, z = 0$; 6) $x = 20t, y = -28t, z = 4t, t \in \mathbb{R}$. **О8.** (40; 30; 20). **С1.** $x = 0$. **С2.** 640. **С3.** Якщо $a \neq -3$, то система має єдиний розв'язок; при $a = -3$, $b \neq 1/3$ система несумісна; при $a = -3$, $b = 1/3$ система має безліч розв'язків. **С4.** При $a^3 \neq 27$ система визначена; при $a^3 = 27$ — несумісна. **Д1.** 1) -36; 2) 0; 3) $2a^3$; 4) 0; 5) -236. **Д3.** 1) 180; 2) 0. **Д4.** 1) $x_1 = -10, x_2 = 2$; 2) $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, $x_3 = -3$. **Д5.** $-6 < x < -4$. **Д6.** 1) 0; 2) 14; 3) -2; 4) -15. **Д7.** 1) $x = 2, y = 3, z = 4$; 2) $x = 1, y = 3, z = 5$; 3) несумісна; 4) $x = y = z = 0$; 5) $x = 2t, y = -3t, z = 5t$, $t \in \mathbb{R}$; 6) несумісна; 7) $x = \frac{18}{7} + z, y = \frac{1}{7} + z, z \in \mathbb{R}$. **Д8.** $a = 5$.

Д9. $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2700, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 900, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1600; \end{cases}$ $(200; 300; 200)$.

Тема 4. Матриці та дії над ними. Матричний метод розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Матрицею розміру $m \times n$ або $(m \times n)$-матрицею називається прямокутна таблиця з чисел $a_{ij}, i \in \{1, 2, ..., m\}$, $j \in \{1, 2, ..., n\}$, вигляду:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix},$$

яка складається з m рядків і n стовпчиків. Якщо $m = n$, то матриця називається **квадратною**; якщо $m = 1$, то маємо матрицю-рядок; якщо $n = 1$ – матрицю-стовпчик.

Сумою $A + B$ $(m \times n)$**-матриць** $A = (a_{ij})$ і $B = (b_{ij})$ називається матриця $C = (c_{ij})$ того самого розміру, кожний елемент якої дорівнює сумі відповідних елементів матриць A і B:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i \in \{1, 2, ..., m\},\ j \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Добутком λA **матриці** $A = (a_{ij})$ **на число** $\lambda \in \mathbb{R}$ називається матриця $B = (b_{ij})$, яка одержується з матриці A множенням усіх її елементів на $\lambda : b_{ij} = \lambda a_{ij}$, $i \in \{1, 2, ..., m\}$, $j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Добутком AB $(m \times n)$-матриці $A = (a_{ij})$ на $(n \times k)$-матрицю $B = (b_{ij})$ називається $(m \times k)$-матриця $C = (c_{ij})$, елемент якої c_{ij}, що стоїть в i-му рядку та j-му стовпчику, дорівнює сумі добутків відповідних елементів i-го рядка матриці A та j-го стовпчика матриці B:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj}, \ i \in \{1, 2, ..., m\}, j \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Матриця $A' = (a'_{ij})$ називається **транспонованою** до матриці $A = (a_{ij})$, якщо виконується умова $a'_{ij} = a_{ji}$ для всіх i, j.

Квадратна матриця A називається **виродженою** (**особливою**), якщо її визначник $|A|$ дорівнює нулю, і **невиродженою** (**неособливою**) – в іншому випадку. Якщо A – невироджена матриця, то існує і притому єдина матриця A^{-1} така, що $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, де E – одинична матриця (тобто на її головній діагоналі стоять одиниці, а всі інші елементи дорівнюють нулю).

Матриця A^{-1} називається **оберненою** до матриці A. Можна довести, що матриця A^{-1} будується таким чином:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} – алгебраїчне доповнення алемента a_{ij}, а $|A|$ – визначник матриці A, $|A| \neq 0$.

Будь-який ненульовий вектор X називається **власним вектором** квадратної матриці A, якщо існує таке число λ – **власне число** матриці A, що

$$AX = \lambda X \qquad \text{або} \qquad (A - \lambda E)X = 0.$$

Власні вектори знаходяться як розв'язки однорідної системи рівнянь $(A - \lambda E)X = 0$, яку можна записати в розгорнутому вигляді так:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0. \end{cases}$$

Ненульові розв'язки цієї системи існують тоді й тільки тоді, коли $\det(A - \lambda E) = 0$, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Останнє рівняння називається **характеристичним рівнянням** матриці A. Розв'язавши характеристичне рівняння, отримаємо власні числа матриці, а після цього із записаної системи рівнянь – її ненульові розв'язки, тобто власні вектори.

Приклад 1. Знайти $3A + 2B$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\triangleleft$ Маємо $3A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -12 \end{pmatrix}$, $2B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -6 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, тому

$$3A + 2B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -6 & 4 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6-4 & 3+2 & -3+0 \\ 0-6 & 3+4 & -12+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ -6 & 7 & -8 \end{pmatrix}. \quad \triangleright$$

Приклад 2. Обчислити $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

$$\triangleleft \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot 3+(-2)\cdot 2 & 3\cdot 4+(-2)\cdot 5 \\ 5\cdot 3+(-4)\cdot 2 & 5\cdot 4+(-4)\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}. \triangleright$$

Приклад 3. Підприємство випускає продукцію трьох видів $П_1$, $П_2$, $П_3$ і використовує сировину двох типів S_1 і S_2. Норми витрат сировини характеризуються матрицею $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, де кожний елемент a_{ij}, $i \in \{1,2,3\}$, $j \in \{1,2\}$, вказує, скільки одиниць сировини j-го типу витрачається на виробництво одиниці продукції i-го виду. План випуску продукції задано матрицею-рядком $C = (100 \quad 80 \quad 130)$, вартість одиниці кожного типу сировини — матрицею-стовпчиком $B = \binom{30}{50}$.

Знайти витрати сировини, необхідні для планового випуску продукції, а також загальну вартість сировини.

$\triangleleft$ Витрати сировини 1-го типу складають $S_1 = 2\cdot 100+5\cdot 80+1\cdot 130 = 730$, а другого – $S_2 = 3\cdot 100+2\cdot 80+4\cdot 130 = 980$, а це означає, що матрицю-рядок S витрат сировини можна подати у вигляді

$$S = CA = (100 \quad 80 \quad 130)\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = (730 \quad 980).$$

Тоді сумарна вартість сировини

$$Q = SB = (730 \quad 980)\binom{30}{50} = (730\cdot 30 + 980\cdot 50) = (70900).$$

Сумарну вартість сировини можна обчислити і по-іншому: спочатку обчислимо матрицю вартостей сировини на одиницю продукції, тобто матрицю $R = AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\binom{30}{50} = \begin{pmatrix} 210 \\ 250 \\ 230 \end{pmatrix}$, а потім загальну вартість сировини

$$Q = CR = C(AB) = (100 \quad 80 \quad 130)\begin{pmatrix} 210 \\ 250 \\ 230 \end{pmatrix} = (\,70900\,). \; \triangleright$$

Приклад 4. Обчислити потрібну кількість вихідного матеріалу M_1, M_2, M_3 на одиницю кінцевої продукції $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$, якщо для цього спочатку треба виготовити проміжну продукцію N_1, N_2, N_3, за умови, що витрати задано відповідно матрицями

$$A_1 = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} M_1 & M_2 & M_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{array} \end{array}, \quad A_2 = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} N_1 & N_2 & N_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \Pi_1 \\ \Pi_2 \\ \Pi_3 \\ \Pi_4 \end{array} \end{array}.$$

$\triangleleft$ Очевидно, що

$$A = A_2 A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0\cdot6+4\cdot2+6\cdot0 & 0\cdot3+4\cdot4+6\cdot2 & 0\cdot1+4\cdot5+6\cdot3 \\ 3\cdot6+2\cdot2+1\cdot0 & 3\cdot3+2\cdot4+1\cdot2 & 3\cdot1+2\cdot5+1\cdot3 \\ 5\cdot6+3\cdot2+5\cdot0 & 5\cdot3+3\cdot4+5\cdot2 & 5\cdot1+3\cdot5+5\cdot3 \\ 2\cdot6+0\cdot2+3\cdot0 & 2\cdot3+0\cdot4+3\cdot2 & 2\cdot1+0\cdot5+3\cdot3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 28 & 38 \\ 22 & 19 & 16 \\ 36 & 37 & 35 \\ 12 & 12 & 11 \end{pmatrix}. \text{ Отже, } \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} M_1 & M_2 & M_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 8 & 28 & 38 \\ 22 & 19 & 16 \\ 36 & 37 & 35 \\ 12 & 12 & 11 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \Pi_1 \\ \Pi_2 \\ \Pi_3 \\ \Pi_4 \end{array} \end{array}. \; \triangleright$$

Приклад 5. Підприємство випускає чотири види виробів $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$ з використанням чотирьох видів сировини S_1, S_2, S_3, S_4. Норми витрат сировини задано матрицею

$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \Pi_1 \\ \Pi_2 \\ \Pi_3 \\ \Pi_4 \end{array} \end{array}.$$

Треба знайти витрати сировини кожного виду при заданому плані випуску кожного виду виробів $Q = (60 \quad 50 \quad 35 \quad 40)$.

$\triangleleft$ Очевидно, що $\Pi = QA = (60 \quad 50 \quad 35 \quad 40)\times$

$$\times\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120+50+245+160 \\ 180+100+70+200 \\ 240+250+105+240 \\ 300+300+70+320 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 575 \\ 550 \\ 835 \\ 990 \end{pmatrix}. \rhd$$

Приклад 6. Галузь складається з n підприємств, кожне з яких випускає по одному виду продукції в обсязі x_i, $i \in \{1, 2, ..., n\}$, одиниць. Для забезпечення свого виробництва підприємство використовує частину продукції, яка випускається ним самим та іншими підприємствами. Нехай a_{ij} – доля продукції i-го підприємства, яка використовується j-м підприємством для забезпечення випуску своєї продукції обсягом x_j одиниць.

Знайти обсяг кінцевого продукту y_i, тобто кількість продукції i-го підприємства для реалізації поза даною галуззю. Розрахунки провести для випадку, коли $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ і $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ мають відповідно вигляд $X = \begin{pmatrix} 400 \\ 500 \\ 200 \end{pmatrix}$ і $A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$.

$\lhd$ Позначимо через Y матрицю-стовпчик $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Очевидно, що $y_i = x_i - \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$, або в матричній формі $Y = X - AX$, тобто $Y = (E - A)X$, де E – одинична матриця.

Для нашого конкретного випадку матимемо

$$Y = \begin{pmatrix} 1-0,4 & -0,2 & -0,3 \\ -0,3 & 1-0,5 & -0,2 \\ -0,1 & -0,2 & 1-0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 400 \\ 500 \\ 200 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 240-100-60 \\ -120+250-40 \\ -40-100+160 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 90 \\ 20 \end{pmatrix}. \quad \rhd$$

Приклад 7. Знайти матрицю A^{-1}, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$\lhd$ Маємо $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -4;$

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -8;$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -7;$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 9; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5;$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -6; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 10;$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6.$$

Тому $\quad A^{-1} = \dfrac{1}{-4} \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 7/4 & -9/4 & 5/4 \\ 3/2 & -5/2 & 3/2 \end{pmatrix}. \quad \rhd$

Приклад 8. Знайти власні вектори і власні числа матриці
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$\lhd$ Складемо характеристичне рівняння матриці A

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

або $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$. Власні числа $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$.

Запишемо системи рівнянь для визначення власних векторів X_1 і X_2.

Нехай $\lambda_1 = 2$. Тоді система має вигляд $\begin{cases} -x_1 - x_2 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 = 0; \end{cases}$ звідси випливає, що $x_2 = -x_1$. Якщо взяти $x_1 = 1$, то $x_2 = -1$ і тоді вектор $X_1 = C \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $C \neq 0$.

Для $\lambda_2 = 3$ маємо $\begin{cases} -2x_1 - x_2 = 0, \\ 2x_1 + x_2 = 0; \end{cases} \qquad x_2 = -2x_1,$

тому $X_2 = C \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C \neq 0$.

Відповідь: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$; $X_1 = C \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, X_2 = C \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, C \neq 0. \rhd$

Розглянемо систему алгебраїчних рівнянь першого степеня

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = c_3. \end{cases} \tag{1}$$

Ввівши позначення

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

запишемо дану систему (1) у вигляді

$$AX = C. \tag{2}$$

Припустимо, що $|A| \neq 0$. Тоді існує A^{-1}. Помноживши (2) зліва на A^{-1}, дістанемо

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}C. \tag{3}$$

Оскільки $A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = EX = X$, то з (3) випливає, що

$$X = A^{-1}C. \tag{4}$$

Формула (4) дає розв'язок системи (1), записаний у матричній формі.

Як один з прикладів застосування матричного методу розв'язування лінійних систем розглянемо **модель Леонтьєва** багатогалузевої економіки (балансовий аналіз).

Метою балансового аналізу є відповідь на питання, яке виникає в макроекономіці й зв'язане з ефективністю ведення багатогалузевого господарства: яким повинен бути обсяг виробництва кожної з n галузей, щоб задовольнити всі потреби в продукції даної галузі? При цьому кожна галузь виступає, з одного боку, як виробник деякої продукції, а з другого – як споживач продукції і своєї, і виробленої іншими галузями.

Припустимо, що розглядається n галузей промисловості, кожна з яких виробляє свою продукцію. Частина продукції йде на споживання всередині даної галузі, а також іншими галузями, а друга частина – для реалізації (споживання) у невиробничій сфері.

Розглянемо процес виробництва за деякий період часу, наприклад, за рік.

Введемо такі позначення: x_i – загальний (валовий) обсяг продукції i-ої галузі, y_i – обсяг кінцевого продукту i-ої галузі для невиробничого споживання $(i \in \{1, 2, ..., n\})$, x_{ij} – обсяг продукції i-ої галузі, що споживається j-ою галуззю в процесі виробництва $(\{i, j\} \subset \{1, 2, ..., n\})$.

Балансовий принцип зв'язку різних галузей промисловості полягає в тому, що валовий випуск i-ої галузі повинен дорівнювати сумі обсягів споживання у виробничій і невиробничій сферах, тобто

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + ... + x_{in} + y_i, \quad i \in \{1, 2, .., n\}. \tag{5}$$

Дані рівняння називаються **співвідношеннями балансу**. Розглядатимемо вартісний міжгалузевий баланс, коли всі величини, які входять до (5), мають вартісне вираження.

Введемо **коефіцієнти прямих витрат**

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \quad \{i, j\} \subset \{1, 2, ..., n\}, \tag{6}$$

які показують витрати продукції i-ої галузі на виробництво одиниці продукції j-ої галузі. Можна вважати, що протягом деякого проміжку часу коефіцієнти a_{ij} будуть сталими і залежними від технології виробництва. Це означає лінійну залежність матеріальних витрат від валового випуску, тобто $x_{ij} = a_{ij}x_j$, $\{i, j\} \subset \{1, 2, ..., n\}$. Тепер співвідношення балансу (5) набудуть вигляду

$$x_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n + y_i, \quad i \in \{1, 2, ..., n\}. \tag{7}$$

Розглядатимемо відповідно матриці-стовпчики обсягів виробленої продукції (матриця валового випуску), обсягів продукції кінцевого споживання (матриця кінцевого споживання) і матрицю коефіцієнтів прямих витрат:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тоді система рівнянь (7) у матричній формі матиме вигляд

$$X = AX + Y. \tag{8}$$

Дане рівняння називають **рівнянням лінійного міжгалузевого балансу**, або **моделлю Леонтьєва**.

Рівняння (8) можна використовувати у двох напрямках:
1) відома матриця-стовпчик валового випуску X, а треба знайти матрицю-стовпчик кінцевого споживання Y (задача розглянута нами у прикладі 6);
2) для періоду T (наприклад, рік) відома матриця-стовпчик кінцевого споживання і треба знайти матрицю-стовпчик валового випуску. У другому випадку треба розв'язати систему рівнянь (8) з відомими матрицею A і матрицею-стовпчиком Y. Перепишемо рівняння (8) у вигляді

$$(E - A)X = Y. \tag{9}$$

Якщо матриця $E - A$ невироджена, тобто $\det(E - A) \neq 0$, то

$$X = (E - A)^{-1}Y. \tag{10}$$

Матриця $S = (E - A)^{-1}$ називається матрицею **повних витрат**; кожний її елемент s_{ij} є величиною валового випуску продукції i-ої галузі, необхідної для забезпечення випуску одиниці кінцевого продукту j-ої галузі $y_j = 1$, $j \in \{1, 2, ..., n\}$.

У відповідності з економічним змістом задачі значення x_i повинні бути невід'ємними при невід'ємних значеннях y_i і a_{ij}, де $\{i, j\} \subset \{1, 2, ..., n\}$.

Матрицю A називатимемо **невід'ємною** і писатимемо $A \geq 0$, якщо всі її елементи невід'ємні.

Матриця $A \geq 0$ називається **продуктивною**, якщо для довільної матриці-стовпчика $Y \geq 0$ існує розв'язок $X \geq 0$ рівняння (8). У цьому випадку і модель Леонтьєва називається **продуктивною**.

Існує декілька ознак продуктивності матриці A. Одна з них стверджує, що матриця A продуктивна, якщо максимум сум елементів її стовпчиків не перевищує одиниці, причому хоча б для одного із стовпчиків сума елементів строго менша від одиниці, тобто матриця A продуктивна, якщо $a_{ij} \geq 0$, $\{i, j\} \subset \{1, 2, ..., n\}$, $\max\limits_{1 \leq j \leq n} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} \leq 1$ й існує номер j такий, що $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} < 1$.

Приклад 9. У таблиці наведено дані про виконання балансу за звітний період.

		Споживання		Кінцевий продукт	Валовий випуск
		енергетика	машинобудування		
Виробництво	енергетика	7	21	72	100
	машинобудування	12	15	63	100

Обчислити необхідний обсяг валового випуску в кожній галузі, якщо кінцеве споживання енергетичної галузі збільшиться вдвічі, а машинобудування залишиться на попередньому рівні.

$\triangleleft$ Маємо $x_1 = 100$, $x_2 = 100$, $x_{11} = 7$, $x_{12} = 21$, $x_{21} = 12$, $x_{22} = 15$, $y_1 = 72$, $y_2 = 63$. За формулою (6) знаходимо коефіцієнти прямих витрат: $a_{11} = 7/100 = 0,07$; $a_{12} = 21/100 = 0,21$; $a_{21} = 12/100 = 0,12$; $a_{22} = 15/100 = 0,15$; тобто матриця прямих витрат $A = \begin{pmatrix} 0,07 & 0,21 \\ 0,12 & 0,15 \end{pmatrix}$ має невід'ємні елементи і задовольняє критерій продуктивності, оскільки $\max\{0,07 + 0,12; 0,21 + 0,15\} = \max\{0,19; 0,36\} = 0,36 < 1$.

Тому для довільної матриці-стовпчика кінцевого продукту Y можна знайти необхідний обсяг валового випуску X за формулою $X = (E - A)^{-1}Y$.

Оскільки згідно з умовою $Y = \begin{pmatrix} 144 \\ 63 \end{pmatrix}$, то треба знайти $(E - A)^{-1}$:

$E-A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0,07 & 0,21 \\ 0,12 & 0,15 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,93 & -0,21 \\ -0,12 & 0,85 \end{pmatrix}$; $\det(E-A)=$ $=0,93\cdot 0,85-0,12\cdot 0,21=0,7653\neq 0$; $(E-A)^{-1}=\frac{1}{0,7653}\begin{pmatrix} 0,85 & 0,21 \\ 0,12 & 0,93 \end{pmatrix}$.

Отже, вектор валового випуску $X=\frac{1}{0,7653}\begin{pmatrix} 0,85 & 0,21 \\ 0,12 & 0,93 \end{pmatrix}\times$ $\times\begin{pmatrix} 144 \\ 63 \end{pmatrix}=\frac{1}{0,7653}\begin{pmatrix} 0,85\cdot 144+0,21\cdot 63 \\ 0,12\cdot 144+0,93\cdot 63 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 177,2 \\ 99,1 \end{pmatrix}$, тобто валовий випуск в енергетичній галузі треба збільшити до 177,2 ум.од., а в машинобудівній – зменшити до 99,1 ум.од. $\triangleright$

<u>**Приклад 10.**</u> Обчислити міжгалузевий баланс виробництва і споживання продукції трьох галузей, коли відома матриця прямих витрат $A=\begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,0 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,0 & 0,1 \end{pmatrix}$ і кінцевий продукт кожної галузі $\begin{pmatrix} 100000 \\ 300000 \\ 200000 \end{pmatrix}$.

$\triangleleft$ Маємо $X=(E-A)^{-1}Y$, де $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Отже, $E-A=$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,0 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,0 & 0,1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,7 & -0,1 & 0,0 \\ -0,2 & 0,7 & -0,2 \\ -0,1 & 0,0 & 0,9 \end{pmatrix};$$

$\det(E-A)=0,421$; $(E-A)^{-1}=\begin{pmatrix} 1,49644 & 0,21378 & 0,04751 \\ 0,47506 & 1,49644 & 0,33254 \\ 0,16627 & 0,02375 & 1,11639 \end{pmatrix}$.

Тоді

$$X=\begin{pmatrix} 1,49644 & 0,21378 & 0,04751 \\ 0,47506 & 1,49644 & 0,33254 \\ 0,16627 & 0,02375 & 1,11639 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 100000 \\ 300000 \\ 200000 \end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix} 223280 \\ 562946 \\ 247030 \end{pmatrix}.$$

Обсяги виробництва першої галузі $x_1=223280$, другої $x_2=562946$ і третьої $x_3=247030$. Знаючи ці обсяги і коефіцієнти прямих витрат, можна обчислити потоки продукції від i-ої до j-ої галузі.

Якщо, наприклад, на одиницю продукції другої галузі йде 0,1 одиниць продукції першої галузі, то на 562946 одиниць всієї продукції другої галузі витрачається $0,1\cdot 562946=56294,6$ одиниць продукції першої галузі. Решта продукції першої галузі споживається у ній самій:

$0,3 \cdot 223280 = 66984,0$, бо в третій галузі її продукція не споживається, тобто $a_{13} = 0$, що видно з A.

Отже, продукція першої галузі розподіляється так: $x_{11} = 66984,0$; $x_{12} = 56294,6$; $x_{13} = 0$; $y_1 = 100000$, що разом дає $x_1 \approx 223279$.

Подібним чином можна обчислити балансовий розподіл продукції другої і третьої галузей. $\triangleright$

Вправи

О1. Знайти матрицю $A + 3B - C$, якщо
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

О2. Знайти AB, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

О3. Знайти AB і BA для матриць:

$1) A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $2) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$.

О4. Знайти матрицю X , якщо :

$1) X + 2A = E, A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $2) X = A^2 + A - 6E, A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

О5. Знайти матрицю:

1) $3A^2 - 2A + 5E$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$;

2) $ABC - 3E$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

О6. При виготовленні деталей чотирьох видів витрати матеріалів, робочої сили та електроенергії задаються таблицею:

Ресурси	Витрати (в ум.од.) на одну деталь			
	I	*II*	*III*	*IV*
Матеріали	1	3	0,5	2
Робоча сила	1,5	2	3	1
Електроенергія	2	1	1	0,5

Обчислити загальні потреби в матеріалах y_1, робочій силі y_2 та електроенергії y_3 для виготовлення заданої кількості деталей кожного виду: $x_1 = 10$, $x_2 = 2$, $x_3 = 8$, $x_4 = 4$.

О7. У народному господарстві є дві галузі: промисловість і сільське господарство. Задано матрицю прямих витрат $A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,5 \\ 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$ і матрицю кінцевого продукту $Y = \begin{pmatrix} 300 \\ 66 \end{pmatrix}$. Яким повинен бути випуск кожної галузі?

О8. Виконати розрахунок заробітної платні, яка припадає на кожне замовлення при виготовленні різних деталей, якщо відомі матриці:

1) затрат робочого часу в годинах на кожному робочому місці $П_j$, $j \in \{1,2,3,4,5\}$, і на кожний виріб A_i, $i \in \{1,2,3\}$,

$$P = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} П_1 & П_2 & П_3 & П_4 & П_5 \end{array} \\ & \left(\begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \end{array};$$

2) кількість виробів B_k, $k \in \{1,2,3\}$ (у штуках), у кожному замовленні A_i, $i \in \{1,2,3\}$,

$$Q = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A_1 & A_2 & A_3 \end{array} \\ & \left(\begin{array}{ccc} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{c} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{array} \end{array};$$

3) годинної заробітної платні (у грошових одиницях) на кожному робочому місці

$$Y = \begin{pmatrix} 1,25 \\ 1,50 \\ 1,40 \\ 1,40 \\ 1,25 \end{pmatrix}.$$

<u>О9.</u> Знайти матриці, обернені до даних:

$$1)\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}; \quad 2)\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}; \quad 3)\begin{pmatrix} 4 & -8 & -5 \\ -4 & 7 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

<u>О10.</u> Знайти власні числа і власні вектори матриці:

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad 2)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

<u>О11.</u> Матричним методом розв'язати системи:

$$1)\begin{cases} 3x + 2y = 7, \\ 4x - 5y = 40; \end{cases} \quad 2)\begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0, \\ x + 5y - 4z + 5 = 0, \\ 4x + y - 3z + 4 = 0; \end{cases} \quad 3)\begin{cases} x + 2y + 3z = 5, \\ 2x - y - z = 1, \\ x + 3y + 4z = 6. \end{cases}$$

<u>С1.</u> Розв'язати матричні рівняння:

$$1)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}; \ 2)\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

<u>С2.</u> У таблиці наведено дані про виконання балансу за звітний період (в ум.грошових од.)

Галузь		Споживання		Кінцевий продукт	Валовий випуск
		1	2		
Вироб-	1	100	160	240	500
ництво	2	275	40	85	400

Знайти необхідний обсяг валового випуску кожної галузі, якщо кінцевий продукт першої галузі повинен збільшитися у 2 рази, а другої галузі – на 20 %.

<u>С3.</u> У таблиці наведено склад вітамінів у харчових продуктах P_1, P_2, P_3:

Продукти	Вітаміни (%)			
	A_1	A_2	A_3	A_4
P_1	0,5	0,5	0	0
P_2	0,3	0	0,2	0,1
P_3	0,1	0,1	0,2	0,5

1. Скільки вітамінів кожного виду міститься в раціоні, який включає 5 одиниць продукту P_1, 16 одиниць продукту P_2 і 8 одиниць продукту P_3?

2. Враховуючи тільки вартість вітамінів у кожному продукті відповідно 10, 20, 25 і 50 грн. за одиницю кожного вітаміну, знайти вартість одиниці кожного виду продукту.

3. Підрахувати вартість раціону, склад якого наведено вище.

<u>С4.</u> Умовне народне господарство складається з трьох галузей. Коефіцієнти прямих витрат, невиробниче споживання і нагромадження задані в таблиці

Галузі Виробництво	Розподіл I	II	III	Невиробниче споживання і нагромадження
I	$0,3$	$0,3$	0	24
II	$0,2$	$0,2$	$0,3$	91
III	$0,1$	$0,1$	$0,2$	88

Знайти матрицю повних витрат і випуск продукції кожною галуззю.

<u>Домашнє завдання</u>

<u>Д1.</u> Знайти матрицю: 1) $3A+2B$, якщо

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix};$$

2) $2A-B$, якщо

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 6 \\ 8 & 3 & 4 & 1 \\ -5 & 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 9 \\ 2 & 8 & 3 & 2 \\ -5 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

<u>Д2.</u> Знайти AB, якщо: 1) $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$;

2) $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$; 3) $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$; 4) $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Д3. Обчислити A^3, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

Д4. Знайти AB і BA, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Д5. Знайти матрицю X , якщо $XA = AX = E$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Д6. Знайти матрицю, обернену до матриці:

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad 2)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Д7. Знайти власні вектори і власні числа матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Д8. Розв'язати матричним методом системи:

$$1) \begin{cases} 5x + 2y = 4, \\ 7x + 4y = 8; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1, \\ x - 2y + 4z = 3, \\ 3x - y + 5z = 2; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 2x - y + z = 2, \\ 3x + 2y + 2z = -2, \\ x - 2y + z = 1. \end{cases}$$

Д9. Підприємство випускає продукцію трьох видів і використовує сировину двох типів. Норми витрат сировини на одиницю продукції кожного виду задані матрицею $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Вартість одиниці сировини кожного типу задана матрицею $B = (10 \quad 15)$. Які загальні витрати виробництва на виготовлення 100 одиниць продукції першого виду, 200 одиниць продукції другого виду і 150 одиниць продукції третього виду?

Д10. Обчислити потрібну кількість вихідного матеріалу M_1, M_2, M_3 на одиницю кінцевої продукції $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$, якщо для цього спочатку треба виготовити проміжну продукцію N_1, N_2, N_3, за умови, що витрати задано відповідно матрицями

$$A_1 = \begin{array}{c c} \begin{matrix} M_1 & M_2 & M_3 \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{matrix} \end{array}, \quad A_2 = \begin{array}{c c} \begin{matrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \Pi_1 \\ \Pi_2 \\ \Pi_3 \\ \Pi_4 \end{matrix} \end{array}.$$

Д11. Галузь складається з трьох підприємств, які випускають по одному виду продукції в обсязі x_i, $i \in \{1, 2, 3\}$, одиниць, тобто матриця валового випуску $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Кожне підприємство галузі для забезпечення свого виробництва використовує частину продукції, яка виробляється ним самим та суміжними підприємствами. Нехай a_{ij} – доля продукції i-го підприємства, яка використовується j-им підприємством для забезпечення випуску своєї продукції обсягом x_j одиниць, тобто матриця прямих витрат має вигляд $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Вважатимемо, що y_j – це кількість продукції i-го підприємства, яка поступає для реалізації поза даною галуззю. Тоді матриця кінцевого продукту $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. Треба знайти:

1) матрицю кінцевого продукту Y, якщо
$$X = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 400 \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix};$$

2) матрицю валового випуску X, якщо
$$Y = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \\ 30 \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 0,05 & 0,35 & 0,40 \\ 0,10 & 0,10 & 0,40 \\ 0,20 & 0,10 & 0,20 \end{pmatrix}.$$

Д12. На підприємстві є три цехи. Скільки продукції слід випускати кожному цеху, якщо задані матриця прямих витрат A і матриця кінцевого продукту Y:

$$1)\ \ A = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0 \end{pmatrix},\ \ Y = \begin{pmatrix} 1200 \\ 2000 \\ 2400 \end{pmatrix};$$

$$2)\ \ A = \begin{pmatrix} 0 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0 & 0,3 \\ 0,2 & 0,4 & 0 \end{pmatrix},\ \ Y = \begin{pmatrix} 1224 \\ 1632 \\ 816 \end{pmatrix}\ ?$$

Д13. Є дві фірми, які виробляють певний товар.

1) Сукупний продукт першої фірми дорівнює 200, а другої – 300, матриця прямих витрат $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$. Знайти кінцевий продукт кожної фірми.

2) Кінцевий продукт першої фірми дорівнює 70, а другої – 120. Треба знайти необхідний сукупний продукт, якщо матриця прямих витрат $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$.

Відповіді

О1. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. **О2.** $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 12 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. **О3.** 1) $AB = BA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 18 \\ -18 & 19 \end{pmatrix}$. **О4.** 1) $X = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $X = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$. **О5.** $\begin{pmatrix} 21 & -23 & 15 \\ -13 & 34 & 10 \\ -9 & 22 & 25 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 6 & -3 & 15 \\ 34 & 0 & 82 \end{pmatrix}$. **О6.** $y_1 =$ 28,
$y_2 = 47$, $y_3 = 32$. **О7.** $X = \begin{pmatrix} 1800 \\ 420 \end{pmatrix}$. **О8.** $(99,6; 81,90; 102,55)$. **О9.** 1) $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$; 3) $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} -12 & 17 & -43 \\ -7 & 11 & -24 \\ -1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.
О10. 1) $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$; $X_1 = C\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = C\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; 2) $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$, $X_1 = C\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = C\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. **О11.** 1) $(5; -4)$; 2) (5;6;10); 3) (1;-1;2). **С1.** 1) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. **С2.** $X = \begin{pmatrix} 945,6 \\ 691,2 \end{pmatrix}$.

С3. 1) $\begin{pmatrix} 6,3 \\ 3,3 \\ 3,6 \\ 5 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 15 \\ 13 \\ 33 \end{pmatrix}$; 3) 469.

С4. $(E-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,64865 & 0,64865 & 0,24324 \\ 0,51351 & 1,51351 & 0,56757 \\ 0,27027 & 0,27027 & 1,35135 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 120 \\ 200 \\ 150 \end{pmatrix}$.

Д1. 1) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ -6 & 7 & -8 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 & 3 \\ 14 & -2 & 5 & 0 \\ -5 & 11 & -6 & 1 \end{pmatrix}$. **Д2.** 1) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 56 \\ 69 \\ 17 \end{pmatrix}$; 4) (31). **Д3.** $\begin{pmatrix} 13 & -14 \\ 21 & -22 \end{pmatrix}$.

Д4. $AB = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; $BA = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; **Д5.** $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Д6. 1) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -5/3 & 1/3 & 1 \\ -10/3 & 5/3 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 66 & 4 \end{pmatrix}$.

Д7. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$; $X_1 = C\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = C\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C \neq 0$.

Д8. 1) (0;2); 2) (-1;0;1); 3) (2;-1;-3). **Д9.** 28000.

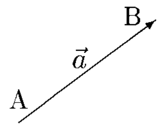
Д10. $A = \begin{array}{cc} \begin{matrix} \;M_1 & M_2 & M_3 \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 23 & 26 & 17 \\ 14 & 18 & 4 \\ 13 & 12 & 31 \\ 13 & 12 & 31 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \Pi_1 \\ \Pi_2 \\ \Pi_3 \\ \Pi_4 \end{matrix} \end{array}$. **Д11.** 1) $Y = \begin{pmatrix} 110 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix}$;

2) $X = \begin{pmatrix} 152,2 \\ 135,8 \\ 92,5 \end{pmatrix}$. **Д12.** 1) $X = \begin{pmatrix} 1640 \\ 2940 \\ 3116 \end{pmatrix}$, 2) $X = \begin{pmatrix} 1910 \\ 2440 \\ 2190 \end{pmatrix}$.

Д13. 1) $Y = \begin{pmatrix} 60 \\ 80 \end{pmatrix}$; 2) $X = \begin{pmatrix} 260 \\ 410 \end{pmatrix}$.

Тема 5. Векторна алгебра

Вектором називається напрямлений відрізок у просторі (на площині), який має певну довжину, тобто відрізок певної довжини, в якого одна із обмежуючих його точок береться за початок, а друга – за кінець. Якщо A – початок вектора, B – його кінець, то вектор позначається символом $\overrightarrow{AB}$. Вектор позначатимемо також і символом $\vec{a}$. Довжину вектора $\overrightarrow{AB}$ називають його **модулем** і позначають символом $|\overrightarrow{AB}|$ або $|\vec{a}|$.



Вектор, у якого кінець збігається з початком, називається **нуль-вектором** і позначається символом $\vec{0}$.

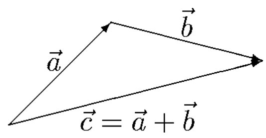
Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, розміщені на одній прямій або паралельних прямих, називаються **колінеарними**.

Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються **рівними**, якщо вони : 1) мають однакові модулі; 2) колінеарні; 3) напрямлені в один бік. У цьому випадку пишуть $\vec{a} = \vec{b}$.

Добутком вектора $\vec{a}$ на число λ називається вектор, довжина якого дорівнює $|\lambda||\vec{a}|$, а напрямок збігається з напрямком $\vec{a}$ при $\lambda > 0$ і протилежний при $\lambda < 0$. Позначається цей вектор символом $\lambda\vec{a}$.

З даного означення випливає, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ є колінеарними. Правильне й обернене твердження: з колінеарності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ випливає, що $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, початок якого збігається з початком вектора $\vec{a}$, а кінець – з кінцем вектора $\vec{b}$, за умови, що початок вектора $\vec{b}$ прикладено до кінця вектора $\vec{a}$.



Нехай вектор $\vec{a}$ утворює з віссю l кут φ. Тоді проекція вектора на цю вісь визначається формулою: $\text{пр}_l\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi$.

Якщо позначити через $\vec{a}^0$ орт вектора $\vec{a}$, тобто вектор, який колінеарний вектору $\vec{a}$, однаково з ним напрямлений, але має одиничну довжину, то $\vec{a} = |\vec{a}|\vec{a}^0$.

Нехай задано три взаємно перпендикулярні координатні осі зі спільним початком O і дана точка . Проекції її радіус-вектора $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ на осі координат пр$_{Ox}\vec{r} = x$, пр$_{Oy}\vec{r} = y$, пр$_{Oz}\vec{r} = z$ називаються **прямокутними координатами** точки або вектора $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$. Модуль радіус-вектора $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Одиничні вектори координатних осей $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ називаються **ортами** координатних осей Ox, Oy, Oz відповідно. Радіус-вектор виражається через орти так: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Якщо вектор $\overrightarrow{AB}$ заданий координатами початку $A(x_1; y_1; z_1)$ і кінця $B(x_2; y_2; z_2)$, то:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k};$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Нехай α, β і γ – кути вектора $\overrightarrow{AB}$ з осями координат, тоді величини

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{|\overrightarrow{AB}|}, \quad \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{|\overrightarrow{AB}|}, \quad \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{|\overrightarrow{AB}|}$$

називаються **напрямними косинусами** вектора $\overrightarrow{AB}$, причому

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

тобто сума квадратів напрямних косинусів вектора дорівнює одиниці.

З попереднього випливає, що вектор $\overrightarrow{AB}$ повністю визначається трьома числами: $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ і $z_2 - z_1$ – його проекціями або його координатами. Тому часто пишуть або кажуть, що задано вектор $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ або $\vec{a} = (x; y; z)$.

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задані своїми координатами, тобто $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, то:

1) $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2$;

2) $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$;

3) $\lambda\vec{a} = (\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1), \quad \lambda \in \mathbb{R}$;

4) $\vec{a} || \vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$.

Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – це число, що дорівнює добутку довжин $|\vec{a}|$ і $|\vec{b}|$ на косинус кута φ між ними і позначається символом $\vec{a}\cdot\vec{b}$:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi.$$

Оскільки $|\vec{b}|\cos\varphi=\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}$, $|\vec{a}|\cos\varphi=\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$.

Властивості скалярного добутку:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;

2) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$;

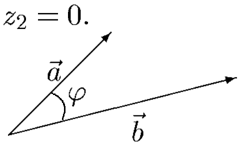
3) $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$;

4) $\vec{a}^2=\vec{a}\cdot\vec{a}\geq 0$; $\quad |\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}$; $\quad \vec{a}\cdot\vec{a}=0\Leftrightarrow\vec{a}=0$
(властивості випливають з рівності $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|\cos 0^0=|\vec{a}|^2$);

5) якщо вектори у просторі задані координатами
$\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$;

6) умова перпендикулярності: якщо $\vec{a}\neq 0$, $\vec{b}\neq 0$, то
$\vec{a}\perp\vec{b} \quad\Leftrightarrow\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=0$ або $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$.

Кут між векторами:
якщо $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$, то



$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

Приклад 1. Знайти довжину вектора $\vec{a}=20\vec{i}+30\vec{j}-60\vec{k}$ і його напрямні косинуси.

$\triangleleft$ Маємо $|\vec{a}|=\sqrt{20^2+30^2+(-60)^2}=70$;
$\cos\alpha=\frac{20}{70}=\frac{2}{7}$; $\cos\beta=\frac{30}{70}=\frac{3}{7}$; $\cos\gamma=\frac{-60}{70}=\frac{-6}{7}$. $\triangleright$

Приклад 2. Знайти кут між векторами

$$\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k} \quad \text{і} \quad \vec{b}=6\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}.$$

$\triangleleft$ Оскільки $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot 6+2\cdot 4+3\cdot(-2)=8$,

$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$, $|\vec{b}|=\sqrt{6^2+4^2+(-2)^2}=\sqrt{56}=2\sqrt{14}$,

то $\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{8}{\sqrt{14}\cdot 2\sqrt{14}}=\frac{2}{7}$; $\varphi=\arccos\frac{2}{7}$. $\triangleright$

Приклад 3. Знайти орт вектора $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

◁ Знаходимо довжину вектора $\vec{a}$: $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$. Оскільки $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, то $\vec{a}^0 = \frac{1}{3}(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k})$ або $\vec{a}^0 = \frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$. ▷

Приклад 4. Дано вектори $\vec{a} = (2; 2; 1)$, $\vec{b} = (6; 3; 2)$. Знайти $\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}$ і $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$.

◁ Маємо

$$\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = \frac{2 \cdot 6 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{20}{3};$$

$$\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{2 \cdot 6 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{20}{7}. \quad ▷$$

Приклад 5. Дано три вектори $\vec{a} = (3; -1)$, $\vec{b} = (1; -2)$, $\vec{c} = (-1; 7)$. Знайти розклад вектора $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ за базисом $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

◁ Знаходимо вектор $\vec{p} = (3+1+(-1); -1+(-2)+7) = (3; 4)$. Розклад вектора $\vec{p}$ по базису $\vec{a}$ і $\vec{b}$ має вигляд $\vec{p} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, де α і β – деякі дійсні сталі. Тоді $(3; 4) = \alpha(3; -1) + \beta(1; -2)$ або $\begin{cases} 3\alpha + \beta = 3, \\ -\alpha - 2\beta = 4. \end{cases}$ Розв'язавши дану систему, одержимо, що $\alpha = 2, \quad \beta = -3$. Отже, $\vec{p} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$. ▷

Вправи

О1. Знайти модуль вектора $\vec{a} = (6; 3; -2)$.

О2. Знайти напрямні косинуси вектора $\vec{a} = (12; -15; -16)$.

О3. За даними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ побудувати такі вектори: 1) $\vec{a} + \vec{b}$; 2) $\vec{a} - \vec{b}$; 3) $\vec{b} - \vec{a}$; 4) $-\vec{a} - \vec{b}$.

О4. Дано $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 23$ і $|\vec{a} - \vec{b}| = 30$. Знайти $|\vec{a} + \vec{b}|$.

О5. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут величиною $\varphi = 60^0$, причому $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 8$. Знайти $|\vec{a} + \vec{b}|$ і $|\vec{a} - \vec{b}|$.

О6. За даними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ побудувати вектори: 1) $3\vec{a}$; 2) $2\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.

О7. Дано вектори $\vec{a} = (3; -2; 6)$ і $\vec{b} = (-2; 1; 0)$. Знайти проекції на координатні осі таких векторів: 1) $\vec{a} + \vec{b}$; 2) $\frac{1}{3}\vec{a} - \vec{b}$.

О8. Для яких значень α і β вектори $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \beta\vec{k}$ і $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ колінеарні ?

<u>О9.</u> Дано чотири точки $A(-1;5;-10)$, $B(5;-7;8)$, $C(2;2;-7)$ і $D(5;-4;2)$. Перевірити, що вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ колінеарні; знайти, який з них довший і у скільки разів, як вони напрямлені – в один чи в протилежні боки.

<u>О10.</u> Знайти орт вектора $\vec{a}=(3;4;-12)$.

<u>О11.</u> На площині задано два вектори $\vec{p}=(2;-3)$, $\vec{q}=(1;2)$. Знайти розклад вектора $\vec{a}=(9;4)$ по базису $\vec{p}$, $\vec{q}$.

<u>О12.</u> Дано три вектори $\vec{p}=(3;-2;1)$, $\vec{q}=(-1;1;-2)$, $\vec{r}=(2;1;-3)$. Знайти розклад вектора $\vec{c}=(11;-6;5)$ за базисом $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$.

<u>О13.</u> Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні, вектор $\vec{c}$ утворює з ними кути величиною $\varphi=\pi/3$. Знаючи, що $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$, $|\vec{c}|=8$, обчислити : 1) $(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{b}+3\vec{c})$; 2) $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2$.

<u>О14.</u> Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут величиною $\varphi=\pi/6$. Знаючи, що $|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=1$, знайти кут α між векторами $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}$.

<u>О15.</u> Для якого значення α вектори $\vec{a}=\alpha\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$ і $\vec{b}=\vec{i}+$ $+2\vec{j}-\alpha\vec{k}$ взаємно перпендикулярні?

<u>О16.</u> Вектор $\vec{x}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=18\vec{i}-22\vec{j}-5\vec{k}$ і утворює з віссю Oy тупий кут. Знайти його координати, знаючи, що $|\vec{x}|=14$.

<u>О17.</u> Обчислити проекцію вектора $\vec{a}=(5;2;5)$ на вісь вектора $\vec{b}=(2;-1;2)$.

<u>О18.</u> Задано вектор асортименту $\vec{q}=(20;40;60;10)$ і вектор витрат сировини $\vec{s}=(5;3;7;2)$. Знайти сумарні витрати сировини S.

<u>О19.</u> Знайти лінійну комбінацію $3\overrightarrow{a}+4\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c}$ векторів $\overrightarrow{a}=(4;1;3;-2)$, $\overrightarrow{b}=(1;2;-2;3)$ і $\overrightarrow{c}=(10;8;1;-3)$.

<u>О20.</u> Для векторів $\overrightarrow{a}=(2;4;-3;0)$ і $\overrightarrow{b}=(-1;2;2;-5)$ знайти їхні довжини і кут між ними.

<u>С1.</u> Знайти початок вектора $\vec{a}=(2;-3;-1)$, якщо його кінець збігається з точкою (1; -1 ; 2).

<u>С2.</u> Знайти площу трикутника з вершинами в точках $A(1;1;1)$, $B(1;0;0)$, $C(0;1;0)$.

<u>С3.</u> Яку умову повинні задовольняти вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, щоб вектор

$\vec{a}+\vec{b}$ був перпендикулярний до вектора $\vec{a}-\vec{b}$?

С4. Дано точки $A(-1;3;-7)$, $B(2;-1;5)$ і $C(0;1;-5)$. Обчислити $(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB})\cdot(2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})$.

С5. Дано вершини трикутника $A(3;2;-3)$, $B(5;1;-1)$ і $C(1;-2;1)$. Знайти його зовнішній кут при вершині A.

С6. Дано вектори $\vec{a}=(1;-3;4)$, $\vec{b}=(3;-4;2)$, $\vec{c}=(-1;1;4)$. Обчислити $\text{пр}_{\vec{b}+\vec{c}}\vec{a}$.

Домашнє завдання

Д1. Дано точки $A(3;-1;2)$ і $B(-1;2;1)$. Знайти координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BA}$.

Д2. Знайти напрямні косинуси вектора $\vec{a}=(\frac{3}{13};\frac{4}{13};\frac{12}{13})$.

Д3. Дано $|\vec{a}|=13$; $|\vec{b}|=19$; $|\vec{a}+\vec{b}|=24$. Знайти $|\vec{a}-\vec{b}|$.

Д4. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні, причому $|\vec{a}|=5$ і $|\vec{b}|=12$. Знайти $|\vec{a}+\vec{b}|$ і $|\vec{a}-\vec{b}|$.

Д5. Дано два вектори $\vec{a}=(3;-2;6)$ і $\vec{b}=(-2;1;0)$. Визначити проекції на координатні осі таких векторів: 1) $\vec{a}-\vec{b}$; 2) $2\vec{a}+3\vec{b}$.

Д6. Знайти орт вектора $\vec{a}=(6;-2;-3)$.

Д7. На площині дано три вектори $\vec{a}=(3;-2)$, $\vec{b}=(-2;1)$ і $\vec{c}=(7;-4)$. Знайти розклад кожного з цих векторів, беручи за базис два інших.

Д8. Дано чотири вектори $\vec{a}=(2;1;0)$, $\vec{b}=(1;-1;2)$, $\vec{c}= (2;2;-1)$ і $\vec{d}=(3;7;-7)$. Знайти розклад кожного з цих чотирьох векторів, беручи за базис три інші.

Д9. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут величиною $\varphi=2\pi/3$. Знаючи, що $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, обчислити : 1) $(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})$; 2) $(\vec{a}-\vec{b})^2$.

Д10. Довести, що вектор $\vec{p}=\vec{b}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})$ перпендикулярний до вектора $\vec{a}$.

Д11. Дано вектори $\vec{a}=(4;-2;-4)$, $\vec{b}=(6;-3;2)$. Обчислити: 1) $(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})$; 2) $(\vec{a}+\vec{b})^2$.

Д12. Обчислити косинус кута, утвореного векторами $\vec{a} = (2; -4; 4)$ і $\vec{b} = (-3; 2; 6)$.

Д13. Вектор $\vec{x}$ колінеарний вектору $\vec{a} = (6; -8; -7,5)$ і утворює гострий кут з віссю Oz. Знаючи, що $|\vec{x}| = 50$, знайти його координати.

Д14. Дано вектори $\vec{a} = 3\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$ і $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}$. Обчислити $\text{пр}_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b})$.

Д15. Знайти затрати робочого часу T і вартість виробленої продукції P, якщо відомі вектори: асортименту $\vec{q} = (20; 40; 60; 10)$, затрат робочого часу $\vec{t} = (5; 10; 7; 12)$ і цін $\vec{p} = (30; 15; 40; 20)$.

Д16. Знайти скалярний добуток векторів $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$, якщо:
1) $\overrightarrow{a} = (2; 1; -1; 1)$, $\overrightarrow{b} = (3; -1; -2; 1)$;
2) $\overrightarrow{a} = (1; 2; 1; -1)$, $\overrightarrow{b} = (-2; 3; -5; -1)$.

Д17. Визначити кут між векторами $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$, якщо: 1) $\overrightarrow{a} = (2; 1; 3; 2)$, $\overrightarrow{b} = (1; 2; -2; 1)$; 2) $\overrightarrow{a} = (1; 2; 2; 3)$, $\overrightarrow{b} = (3; 1; 5; 1)$.

Відповіді

О1. $|\vec{a}| = 7$. **О2.** $\cos\alpha = 12/25$, $\cos\beta = -3/5$, $\cos\gamma = -16/25$. **О4.** $|\vec{a} + \vec{b}| = 20$. **О5.** $|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{129} \approx 11,4$; $|\vec{a}-\vec{b}| = 7$. **О7.** 1) (1; -1; 6); 2) (3; -5/3 ; 2). **О8.** $\alpha = 4$, $\beta = -1$. **О9.** Вектор $\overrightarrow{AB}$ вдвічі довший за вектор $\overrightarrow{CD}$, вони напрямлені в один бік. **О10.** $\vec{a}^0 = (\frac{3}{13}; -\frac{4}{13}; -\frac{12}{13})$. **О11.** $\vec{a} = 2\vec{p} + 5\vec{q}$. **О12.** $\vec{c} = 2\vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r}$. **О13.** 1) -62; 2) 162. **О14.** $\alpha = \arccos\frac{2}{7}$. **О15.** $\alpha = -6$. **О16.** $\vec{x} = -4\vec{i} - 6\vec{j} + 12\vec{k}$. **О17.** 6. **О18.** $S = 660$. **О19.** $(6; 3; 0; 9)$. **О20.** $|\vec{a}| = \sqrt{29}$, $|\vec{b}| = \sqrt{34}$, $\varphi = 90^0$. **С1.** (-1; 2; 3). **С2.** $\sqrt{3}/2$. **С3.** $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. **С4.** -524. **С5.** $\arccos(-4/9)$. **С6.** 5. **Д1.** $\overrightarrow{AB} = (-4; 3; -1)$, $\overrightarrow{BA} = (4; -3; 1)$. **Д2.** $\cos\alpha = 3/13$, $\cos\beta = 4/13$, $\cos\gamma = 12/13$. **Д3.** $|\vec{a} - \vec{b}| = 22$. **Д4.** $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| = 13$. **Д5.** 1) (5; -3; 6); 2) $(0; -1; 12)$. **Д6.** $\vec{a}^0 = (6/7; -2/7; -3/7)$. **Д7.** $\vec{a} = 2\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c}$, $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$. **Д8.** $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{c} = -2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{d}$, $\vec{b} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{d}$, $\vec{a} = \frac{3}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d}$. **Д9.** 1) -61; 2) 37. **Д11.** 1) -200; 2) 129. **Д12.** $\cos\varphi = 5/21$. **Д13.** $\vec{x} = (-24; 32; 30)$. **Д14.** -4. **Д15.** $T = 1040$, $P = 3800$. **Д16.** 1) 9; 2) 0. **Д17.** 1) 90^0; 2) 45^0.

Тема 6. Площина в просторі, різні рівняння площини

У декартових прямокутних координатах кожна площина визначається рівнянням першого степеня і кожне рівняння першого степеня визначає площину.

Довільний ненульовий вектор, перпендикулярний до даної площини, називається її **нормальним вектором**. Рівняння

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \tag{1}$$

визначає площину, яка проходить **через точку** $M_0(x_0;y_0;z_0)$ **і нормальним вектором** якої є $\vec{n}=(A;B;C)$.

Якщо в рівнянні (1) розкрити дужки і ввести позначення $-Ax_0-By_0-Cz_0=D$, то дістанемо рівняння

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{2}$$

яке називається **загальним рівнянням площини**.

З (2), поділивши обидві частини на $-D$, одержимо **рівняння площини у відрізках**

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \tag{3}$$

де $a=-\frac{D}{A}$, $b=-\frac{D}{B}$, $=-\frac{D}{C}$ — величини напрямлених відрізків, що їх відтинає площина на координатних осях Ox, Oy і Oz відповідно.

Рівняння площини, яка проходить **через три точки** $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$, має вигляд

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \tag{4}$$

Якщо в рівнянні (2) $D=0$, то площина проходить через початок координат. У випадку, коли який-небудь з коефіцієнтів A, B або C дорівнює нулю, то площина паралельна одній з координатних осей, а саме тій, яка однойменна з відсутньою координатою; якщо ж, крім того, і $D=0$, то площина проходить через цю вісь.

Якщо $A=0$ і $B=0$, то площина паралельна координатній площині Oxy; якщо ж $A=0$ і $C=0$, то вона паралельна координатній площині Oxz, а при $B=0$ і $C=0$ – паралельна координатній площині Oyz.

Взаємне розміщення в просторі двох площин $A_1x+B_1y+C_1z+$ $+D_1=0$ (P_1) і $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ (P_2) визначається їх нормальними векторами $\vec{n}_1=(A_1;B_1;C_1)$, $\vec{n}_2=(A_2;B_2;C_2)$, а саме:

1) $P_1 \parallel P_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$;

2) $P_1 \perp P_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$;

3) косинус кута між P_1 і P_2 визначається формулою

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Відстань від точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ до площини, яка задана рівнянням (2), знаходиться за формулою

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (5)$$

Приклад 1. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(2;3;5)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=4\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$.

◁ Скориставшись рівнянням (1), дістанемо
$4(x-2)+3(y-3)+2(z-5)=0$ або $4x+3y+2z-27=0$. ▷

Приклад 2. З точки $M_0(2;3;-5)$ на координатні площини опущено перпендикуляри. Скласти рівняння площини, яка проходить через їх основи.

◁ Основами перпендикулярів, опущених на координатні площини, є точки $M_1(2;3;0)$, $M_2(2;0;-5)$, $M_3(0;3;-5)$. Використовуючи формулу (4), запишемо рівняння площини, яка проходить через точки M_1, M_2, M_3: $\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z \\ 0 & -3 & -5 \\ -2 & 0 & -5 \end{vmatrix}=0$ або $15x+10y-6z-60=0$. ▷

Приклад 3. Знайти відстань від точки $M_0(3;5;-8)$ до площини
$6x-3y+2z-28=0$.

◁ Використавши формулу (5), дістанемо, що

$$d = \frac{|6\cdot 3-3\cdot 5+2\cdot(-8)-28|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}} = \frac{41}{7}. \quad \triangleright$$

Приклад 4. Знайти множину точок, рівновіддалених від двох даних точок $M_1(1;2;-3)$ і $M_2(3;2;1)$.

◁ Розглянемо довільну точку $M(x;y;z)$, що належить шуканій множині. За умовою відстані $|M_1M|$ і $|M_2M|$ однакові, тобто

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2} = \sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2+(z-1)^2}$$

або $x+2z=0$.

Одержали, що шуканою множиною є площина, яка проходить через вісь Oy. ▷

Приклад 5. Записати рівняння площини, яка проходить через точку $M(5;4;3)$ і відтинає на осях координат відрізки однакової величини.

◁ Скористаємося рівнянням (3) площини у відрізках, в якому $a=b=\ :\ \frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=1$. Координати точки M задовольняють рівняння шуканої площини, тому виконується рівність $5/a+4/a+3/a=1$, звідки $a=12$. Отже, маємо рівняння $x+y+z-12=0$. ▷

Вправи

О1. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(2;1;-1)$ і має нормальний вектор $\vec{n}=(1;-2;3)$.

О2. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(3;-2;-7)$ паралельно площині $2x-3z+5=0$.

О3. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(3;4;-5)$ паралельно двом векторам $\vec{a}_1=(3;1;-1)$ і $\vec{a}_2=(1;-2;1)$.

О4. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(2;-1;5)$ перпендикулярно до площин $3x-2y+z+7=0$ і $5x-4y+3z+1=0$.

О5. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(2;-1;4)$ і $M_2(3;2;-1)$ перпендикулярно до площини $x+y+z-3=0$.

О6. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(2;-3;3)$ паралельно площині Oxy.

О7. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(7;2;-3)$ і $M_2(5;6;-4)$ паралельно осі Ox.

<u>О8.</u> Обчислити об'єм піраміди, яка обмежена площиною $2x-$ $-3y+6z-12=0$ і координатними площинами.

<u>О9.</u> Знайти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(1;-1;0)$, $M_2(1;2;3)$ і $M_3(5;-1;1)$.

<u>О10.</u> Знайти кут між площинами

1) $2x-3y+3z-1=0$ і $-2x+3y-3z+5=0$;

2) $3x-4y-z-1=0$ і $2x+3y-6z-2=0$.

<u>О11.</u> Обчислити відстань d від точки $P(-1;1;-2)$ до площини, яка проходить через точки $M_1(1;-1;1)$, $M_2(-2;1;3)$ і $M_3(4;-5;-2)$.

<u>С1.</u> Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(0;0;a)$ перпендикулярно до площин $x-y-z=0$, $2y=x$.

<u>С2.</u> Знайти рівняння площин, які паралельні з площиною $2x+$ $2y+z-8=0$ і знаходяться на відстані $d=4$ від неї.

<u>С3.</u> Знайти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(2;3;4)$, $M_2(-1;1;0)$ і паралельна вектору $\vec{a}=(1;1;-2)$.

<u>С4.</u> Знайти рівняння площини, яка проходить через точку перетину площин $2x+2y+z-7=0$, $2x-y+3z-3=0$, $4x+5y-2z-12=0$ і через точки $M_1(0;3;0)$, $M_2(1;1;1)$.

<u>С5.</u> Знайти рівняння площини, точки якої однаково віддалені від точок $P(1;-4;2)$ і $Q(7;1;-5)$.

<u>Домашнє завдання</u>

<u>Д1.</u> Знайти рівняння площини, яка проходить через початок координат і має нормальний вектор $\vec{n}=(5;0;-3)$.

<u>Д2.</u> Дано точки $M_1(3;-1;2)$ і $M_2(4;-2;-1)$. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку M_1 перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$.

<u>Д3.</u> Знайти рівняння площини, яка проходить через початок координат перпендикулярно до площин $2x-y+3z=0$, $x+2y+z=0$.

<u>Д4.</u> Знайти рівняння площини, яка проходить через дві точки $M_1(1;-1;-2)$ і $M_2(3;1;1)$ перпендикулярно до площини $x-2y+$ $3z-5=0$.

<u>Д5.</u> Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(-5;2;-1)$ паралельно площині Oyz.

Д6. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(3;-2;5)$ і $M_2(2;3;1)$ паралельно осі Oz.

Д7. Знайти величини відрізків, які відтинає площина $3x-4y-24z+12=0$ на координатних осях.

Д8. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(2;-3;-4)$ і відтинає на координатних осях відрізки однакової величини.

Д9. На осі Oy знайти точки, які знаходяться на відстані $d=4$ від площини $x+2y-2z-2=0$.

Д10. Скласти рівняння множини точок, рівновіддалених від площин $x+5y-2z-3=0$ та $x+5y-2z+1=0$.

Д11. Через лінію перетину площин $x+y-z+5=0$ та $2x+y+z-3=0$ провести площину, перпендикулярну до площини $3x-y+2z-11=0$.

Д12. Знайти відстань між площинами $2x+2y-z-15=0$ і $4x+4y-2z+11=0$.

Д13.Знайти рівняння площини, що проходить через точки 1) $M_1(2;1;1)$, $M_2(-1;2;1)$ і $M_3(2;2;1)$; 2) $M_1(1;1;-3)$, $M_2(2;0;-3)$ і $M_3(1;-1;-1)$.

Д14. Знайти точки перетину площин $x+2y-z-2=0$, $3x-y-z-3=0$ і $x+2y+z-4=0$.

Д15. Знайти відстань від точки $M_0(2;1;1)$ до площини $x+y-z+1=0$.

Відповіді

О1. $x-2y+3z+3=0$. **О2.** $2x-3z-27=0$. **О3.** $x+4y+7z+16=0$. **О4.** $x+2y+z-5=0$. **О5.** $4x-3y-z-7=0$. **О6.** $z-3=0$. **О7.** $y+4z+10=0$. **О8.** $V=8$. **О9.** $x+4y-4z+3=0$. **О10.** 1) $\varphi=\pi$. 2) $\varphi=\pi/2$. **О11.** $d=4$. **С1.** $2x+y+z=a$. **С2.** $2x+2y+z=20, 2x+2y+z=-4$. **С3.** $8x-10y-z=-18$. **С4.** $x-z=0$. **С5.** $6x+5y+7z-27=0$. **Д1.** $5x-3z=0$. **Д2.** $x-y-3z+2=0$. **Д3.** $7x-y-5z=0$. **Д4.** $4x-y-2z-9=0$. **Д5.** $x+5=0$. **Д6.** $5x+y-13=0$. **Д7.** $a=-4, b=3, \ =1/2$. **Д8.** $x+y+z+5=0$. **Д9.** $P(0;7;0), Q(0;-5;0)$. **Д10.** $x+5y-2z-1=0$. **Д11.** $x+y-z+5=0$. **Д12.** $d=41/6$. **Д13.** 1) $z-1=0$; 2) $x+y+z+1=0$. **Д14.**$(\frac{11}{7};\frac{5}{7};1)$. **Д15.** $\sqrt{3/2}$.

Тема 7. Пряма в просторі.
Взаємне розміщення прямої та площини в просторі

Рівняння прямої в просторі, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ паралельно вектору $\vec{s} = (m; n; p)$, мають вигляд:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \tag{1}$$

Рівняння (1) називаються **канонічними** рівняннями прямої, а вектор $\vec{s} = (m; n; p)$ – **напрямним** вектором прямої.

Параметричні рівняння прямої одержуються, коли прирівняти кожне із співвідношень (1) до параметра t:

$$x = mt + x_0, \quad y = nt + y_0, \quad z = pt + z_0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Рівняння прямої, яка проходить через дві точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$, такі:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{3}$$

Загальне рівняння прямої:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Кут між двома прямими L_1 і L_2, які задані канонічними рівняннями

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}\ (L_1), \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}\ (L_2),$$

визначається формулою

$$\cos\varphi = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}; \tag{5}$$

умова паралельності прямих L_1 і L_2:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}; \tag{6}$$

умова перпендикулярності прямих L_1 і L_2:

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0. \tag{7}$$

Відстань від точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ до прямої L, яка визначена рівняннями (1), знаходиться за формулою

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} \frac{y_1-y_0}{n} & \frac{z_1-z_0}{p} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{z_1-z_0}{p} & \frac{x_1-x_0}{m} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{x_1-x_0}{m} & \frac{y_1-y_0}{n} \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Необхідною і достатньою умовою належності прямих L_1 і L_2 одній площині є

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

Якщо величини m_1, n_1, p_1 не пропорційні величинам m_2, n_2, p_2, то умова (8) є необхідною і достатньою умовою перетину двох прямих у просторі.

Кут θ між прямою $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ (L) і площиною $Ax + By + Cz + D = 0$ (P) обчислюється за формулою

$$\sin\theta = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}; \tag{9}$$

умова паралельності прямої L і площини P:

$$Am + Bn + Cp = 0; \tag{10}$$

умова перпендикулярності прямої L і площини P:

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}. \tag{11}$$

Для знаходження точки перетину прямої і площини треба, записавши параметричні рівняння прямої, підставити (2) у рівняння площини $Ax + By + Cz + D = 0$. Знайшовши звідси t, підставити його в (2), що й дасть координати точки перетину.

Приклад 1. Скласти канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2;1;-3)$ паралельно прямій $\frac{x-1}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+1}{-1}$.

$\triangleleft$ Скористаємося рівняннями (1), де за вектор $\vec{s}$ можна взяти вектор $\vec{s}_1=(5;2;-1)$ – напрямний вектор заданої прямої.
Маємо

$$\frac{x-2}{5}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+3}{-1}. \quad \triangleright$$

Приклад 2. Знайти параметричні рівняння прямої, яка проходить через точки $M_1(2;-5;1)$ і $M_2(-1;1;2)$.

$\triangleleft$ Згідно з (2), маємо

$$\frac{x-2}{-1-2}=\frac{y-(-5)}{1-(-5)}=\frac{z-1}{2-1} \quad \text{або} \quad \frac{x-2}{-3}=\frac{y+5}{6}=\frac{z-1}{1}.$$

Прирівнявши дані співвідношення до t, одержимо шукані параметричні рівняння прямої: $x=2-3t,\quad y=-5+6t,\quad z=1+t,\quad t\in\mathbb{R}.$ $\triangleright$

Приклад 3. Знайти кут між прямими

$$\begin{cases} 2x+3y-4z+5=0, \\ x-y-z=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y+2z-4=0, \\ 2x+y-z-5=0. \end{cases}$$

$\triangleleft$ Запишемо спочатку канонічні рівняння даних прямих, а потім скористаємось формулою (5).

Для знаходження канонічних рівнянь першої прямої розв'яжемо систему рівнянь за правилом Крамера:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -5+4z & 3 \\ z & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{-5-z}{-5}=1+\frac{z}{5}, \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -5+4z \\ 1 & z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{-5-6z}{-5}=$$

$=1+\frac{6}{5}z$; поклавши $\frac{z}{5}=t$, дістанемо параметричні рівняння прямої $x=1+t$, $y=1+6t$, $z=5t$, а, отже, канонічні рівняння

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{6}=\frac{z}{5}.$$

Аналогічно знаходимо канонічні рівняння другої прямої:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 4-2z & -1 \\ 5+z & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}=\tfrac{9-z}{3}=3-\tfrac{z}{3}, y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 4-2z \\ 2 & 5+z; \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}=\tfrac{-3+5z}{3}=-1+\tfrac{5}{3}z;$$

$$x=3-t,\ y=-1+5t,\ z=3t; \qquad \frac{x-3}{-1}=\frac{y+1}{5}=\frac{z}{3}.$$

Згідно з формулою (5), маємо

$$\cos\varphi=\frac{1\cdot(-1)+6\cdot5+5\cdot3}{\sqrt{1^2+6^2+5^2}\sqrt{(-1)^2+5^2+3^2}}=\frac{44}{\sqrt{35}\cdot\sqrt{62}}\approx0,9445;$$

$$\varphi=19^0 11'.\ \triangleright$$

<u>**Приклад 4.**</u> Знайти відстань між мимобіжними прямими

$$\frac{x-3}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-1} \quad \text{і} \quad \frac{x+2}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-3}{-1}.$$

$\triangleleft$ Знайдемо спочатку рівняння площини, яка проходить через першу пряму і паралельна другій прямій. Скористаємося рівнянням площини, яка проходить через точку $M_1(3;-1;1)$ і нормальний вектор якої $\vec{n}=(A;B;C)$ перпендикулярний до напрямних векторів $\vec{s}_1=(-1;2;-1)$ і $\vec{s}_2=(2;3;-1)$ заданих прямих: $A(x-3)+B(y+1)+C(z-1)=0,$

$$\vec{n}\perp\vec{s}_1 \Leftrightarrow -A+2B-C=0; \qquad \vec{n}\perp\vec{s}_2 \Leftrightarrow 2A+3B-C=0;$$

$$\begin{cases} -A+2B-C=0, \\ 2A+3B-C=0; \end{cases} \quad B=-3A, C=-7A;$$

$$A(x-3)-3A(y+1)-7A(z-1)=0 \text{ або } x-3y-7z+1=0.$$

Тепер знайдемо відстань від будь-якої точки другої прямої до даної площини. Наприклад, від точки $M_0(-2;0;3)$:

$$d=\frac{|-2-3\cdot0-7\cdot3+1|}{\sqrt{1^2+(-3)^2+(-7)^2}}=\frac{|-22|}{\sqrt{59}}=\frac{22}{\sqrt{59}}.\triangleright$$

<u>Вправи</u>

<u>**О1.**</u> Скласти параметричні рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $M_1(1;1;-2)$, $M_2(3;-1;0)$.

O2. Дано вершини трикутника $A(1;-2;-4)$, $B(3;1;-3)$ і $C(5;1;-7)$. Скласти параметричні рівняння його висоти, опущеної з вершини B на протилежну сторону.

O3. Знайти канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2;3;-5)$ паралельно прямій $3x-y+2z-7=0$, $x+3y-2z+3=0$.

O4. Знайти канонічні та параметричні рівняння прямої $2x+3y-z-4=0$, $3x-5y+2z+1=0$.

O5. Довести перпендикулярність прямих

$$\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{3};\quad \begin{cases} 3x+y-5z+1=0, \\ 2x+3y-8z+3=0. \end{cases}$$

O6. Знайти: 1) гострий кут між прямими

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}},\quad \frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}};$$

2) відстань між паралельними прямими

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{3},\quad \frac{x-2}{2}=\frac{y+2}{4}=\frac{z+1}{6}.$$

O7. Дано точки $A(1;1;1)$, $B(2;3;3)$ і $C(3;3;2)$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку A перпендикулярно до векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$.

O8. Довести, що пряма $x=3t-2$, $y=-4t+1$, $z=4t-5$ паралельна площині $4x-3y-6z-5=0$.

O9. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2;-3;-5)$ перпендикулярно до площини $6x-3y-5z+2=0$.

O10. Для якого значення m пряма $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{m}=\frac{z+3}{-2}$ паралельна площині $x-3y+6z+7=0$?

O11. Для яких значень A і B площина $Ax+By+3z-5=0$ перпендикулярна до прямої $x=3+2t$, $y=5-3t$, $z=-2-2t$?

O12. Знайти точку перетину прямої $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{2}$ з площиною $x+2y+3z-29=0$.

C1. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(a;b;c)$ паралельно осі Oz.

C2. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(-1;2;-3)$ перпендикулярно до прямої $x=2$, $y-z=1$.

C3. Знайти рівняння площини, яка проходить через паралельні прямі $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$, $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$.

С4. Знайти проекцію точки $M(1;2;8)$ на пряму $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=z$.

С5. Скласти рівняння траєкторії точки $M(x;y;z)$, яка, вийшовши з точки $A(4;-3;1)$, рухається зі швидкістю $\vec{v}=(2;3;1)$.

С6. Знайти кут між прямою $x=2z-1$, $y=-2z+1$ і прямою, яка проходить через початок координат і через точку $M_0(1;1;-1)$.

С7. Знайти кут між прямими

$$\begin{cases} x-y+z-4=0, \\ 2x+y-2z+5=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z-4=0, \\ 2x+3y-z-6=0. \end{cases}$$

Домашнє завдання

Д1. Скласти канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2;0;-3)$ паралельно: 1) осі Ox; 2) осі Oy.

Д2. Скласти параметричні рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(1;-1;-3)$ паралельно: 1) вектору $\vec{a}=(2;-3;4)$; 2) прямій $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{0}$; 3) прямій $x=3t-1$, $y=-2t+3$, $z=5t+2$.

Д3. Через точки $M_1(-6;6;-5)$ і $M_2(12;-6;1)$ проведена пряма. Знайти точки перетину цієї прямої з координатними площинами.

Д4. Скласти канонічні рівняння прямої $\begin{cases} x-2y+3z-4=0, \\ 3x+2y-5z-4=0. \end{cases}$

Д5. Довести паралельність прямих $x=2t+5$, $y=-t+2$, $z=t-7$ і $x+3y+z+2=0$, $x-y-3z-2=0$.

Д6. Довести перпендикулярність прямих

$$\begin{cases} x+y-3z-1=0, \\ 2x-y-9z-2=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+y+2z+5=0, \\ 2x-2y-z+2=0. \end{cases}$$

Д7. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}$ і площини $2x+3y+z-1=0$.

Д8. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(1;-2;1)$ перпендикулярно до прямої $x-2y+z-3=0$, $x+y-z+2=0$.

Д9. Для якого значення C пряма $3x-2y+z+3=0$, $4x-3y+$ $+4z+1=0$ паралельна площині $2x-y+Cz-2=0$?

Д10. Знайти проекцію точки $P(2;-1;3)$ на пряму $x=3t$, $y=5t-7$, $z=2t+2$.

Д11. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(1;2;-3)$ паралельно до прямих

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-7}{3},\ \frac{x+5}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+3}{-1}.$$

Д12. Знайти рівняння площини, яка проходить через пряму $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{4}$ перпендикулярно до площини $3x+y-z+2=0$.

Д13. Знайти кут між прямою $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-2}$ і площиною $x+$ $+2y+2z+3=0$.

Д14. Знайти відстань від точки $M_1(1;-1;-2)$ до прямої $\frac{x+3}{3}=$ $=\frac{y+2}{2}=\frac{z-8}{-2}$.

Д15. Через точку $M_0(-1;1;2)$ провести пряму, перпендикулярну до площини $2x-y+z=0$.

Д16. Записати рівняння прямої, яка проходить через точки $M_1(2;1;3)$ і $M_2(1;1;2)$.

Відповіді

О1. $x=t+3$, $y=-t-1$, $z=t$. **О2.** $x=3t+3$, $y=15t+1$, $z=19t-3$. **О3.** $\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+5}{-5}$. **О4.** $x=t+1$, $y=-7t$, $z=-19t-2$. **О6.** 1) 60^0; 2) $\sqrt{3/14}$. **О7.** $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-1}{2}$. **О9.** $\frac{x-2}{6}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z+5}{-5}$. **О10.** $m=-3$. **О11.** $A=-3$, $B=9/2$. **О12.** (6; 4; 5). **С1.** $\frac{x-a}{0}=\frac{y-b}{0}=\frac{z-c}{1}$. **С2.** $y+z+1=0$ [рівняння прямої слід записати у вигляді $\frac{x-2}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$)]. **С3.** $x+2y-2z=1$. **С4.** (3; -1; 1). **С5.** $x=4t+2$, $y=-3+3t$, $z=1+t$. **С6.** $\cos\varphi=1/\sqrt{3}$. **С7.** $\cos\varphi=11/26$.
Д1. 1) $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{0}$; 2) $\frac{x-2}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z+3}{0}$. **Д2.** 1) $x=2t+1$, $y=-3t-1$, $z=4t-3$; 2) $x=2t+1$, $y=4t-1$, $z=-3$; 3) $x=3t+1$, $y=-2t-1$, $z=5t-3$. **Д3.** (9; -4; 0), (3; 0; -2), (0; 2; -3). **Д4.** $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{7}=\frac{z}{4}$. **Д7.** (2; -3; 6). **Д8.** $x+2y+3z=0$. **Д9.** $C=-2$. **Д10.** (3; -2; 4). **Д11.** $9x+11y+5z-16=0$. **Д12.** $x-5y-2z+11=0$. **Д13.** $\varphi=0^o$. **Д14.** 7. **Д15.** $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{1}$. **Д16.** $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-3}{1}$.

Тема 8. Пряма на площині

Наведемо різні рівняння прямої на площині:

1) рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (A; B)$: $A(x-x_0)+B(y-y_0) = 0$;

2) рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ і паралельна вектору $\vec{s} = (m; n)$: $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n}$;

3) загальне рівняння прямої: $Ax + By + C = 0$;

4) параметричні рівняння прямої

$$x = x_0 + mt, \quad y = y_0 + nt, \quad t \in \mathbb{R};$$

5) рівняння прямої, яка проходить через дві точки $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$;

6) рівняння прямої у відрізках на осях координат:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

де $(a; 0)$ і $(0; b)$ – точки перетину прямої з осями координат;

7) рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом: $y = kx + b$, де k – тангенс кута між прямою і віссю Ox (кутовий коефіцієнт);

8) рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ і має кутовий коефіцієнт k: $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Умови **паралельності** двох прямих:

1) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$, де $\vec{n}_1 = (A_1; B_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2)$ – вектори, перпендикулярні до прямих;

2) $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$, де $\vec{s}_1 = (m_1; n_1)$, $\vec{s}_2 = (m_2; n_2)$ – вектори, паралельні прямим;

3) $k_1 = k_2$, де k_1, k_2 – кутові коефіцієнти прямих.

Умови **перпендикулярності** двох прямих:

1) $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$, де $\vec{n}_1 = (A_1; B_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2)$ – вектори, перпендикулярні до прямих;

2) $m_1m_2 + n_1n_2 = 0$, де $\vec{s}_1 = (m_1; n_1)$, $\vec{s}_2 = (m_2; n_2)$ – вектори, паралельні до прямих;

3) $k_1k_2 = -1$, де k_1 і k_2 – кутові коефіцієнти прямих.

Кут φ між двома прямими знаходиться як кут між векторами, перпендикулярними до прямих, або як кут між векторами, паралельними до прямих, або ж за допомогою формули $\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$, де k_1 і k_2 – кутові коефіцієнти прямих.

Якщо пряма задана загальним рівнянням, то **відстань від точки** $M_0(x_0;y_0)$ **до** цієї **прямої** можна знайти за формулою
$$d = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Бісектриси кутів між прямими $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і A_2x+ $+B_2y + C_2 = 0$ мають рівняння
$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}} \pm \frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}} = 0.$$

Приклад 1. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $(2;5)$ паралельно з прямою $3x - 4y + 15 = 0$.

◁ Нехай шукане рівняння прямої має вигляд $A(x-x_0)+B(y-y_0) = 0$, де $x_0 = 2$, $y_0 = 5$, а A і B – невідомі. Оскільки наші прямі паралельні, то їх нормальні вектори $\vec{n} = (A;B)$ і $\vec{n}_1 = (3;4)$ колінеарні, а тому можна взяти $\vec{n} = \vec{n}_1$. Тоді $A = 3$, $B = -4$, а, отже, $3(x-2) - 4(y-5) = 0$ або $3x - 4y + 14 = 0$. ▷

Приклад 2. Знайти рівняння прямої, яка проходить через дві точки $M_1(-1;2)$ і $M_2(2;1)$.

◁ Скориставшись рівнянням $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, дістанемо $\frac{x-(-1)}{2-(-1)} = \frac{y-2}{1-2}$, або $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-1}$, або $x + 3y - 5 = 0$.▷

Приклад 3. Загальне рівняння прямої $4x - 3y + 12 = 0$ подати у вигляді рівняння: а) з кутовим коефіцієнтом; б) у відрізках на осях координат.

◁ а) Розв'яжемо дане рівняння відносно y, тоді $y = \frac{4}{3}x + 4$.

б) Поділимо обидві частини рівняння на -12 і спростимо:
$$\frac{4x}{-12} - \frac{3y}{-12} = 1, \quad \frac{x}{-3} + \frac{y}{4} = 1. \ ▷$$

Приклад 4. Знайти відстань від точки $M_0(1;2)$ до прямої $20x - 21y - 58 = 0$.

◁ Маємо
$$d = \frac{|20\cdot 1 - 21\cdot 2 - 58|}{\sqrt{20^2+(-21)^2}} = \frac{|-80|}{29} = \frac{80}{29}. \ ▷$$

Приклад 5. Дано вершини трикутника: $A(0;1)$, $B(6;5)$ і $C(12;-1)$. Скласти рівняння висоти трикутника, проведеної з вершини C.

◁ Знайдемо спочатку рівняння прямої AB як прямої, що проходить через дві точки: $\frac{x-0}{6-0} = \frac{y-1}{5-1}$ або $\frac{x}{6} = \frac{y-1}{4}$, або $y = \frac{2}{3}x + 1$. Оскільки висота є прямою, що проходить через точку C перпендикулярно до AB, то її кутовий коефіцієнт $k = -\frac{1}{2/3} = -\frac{3}{2}$. Тому рівняння шуканої висоти таке: $y - (-1) = -\frac{3}{2}(x - 12)$ або $3x + 2y - 34 = 0$. $\triangleright$

Вправи

О1. Знайти точки перетину прямої $2x - 3y - 12 = 0$ з координатними осями і побудувати цю пряму.

О2. Сторони AB, BC і AC трикутника задані відповідно рівняннями $4x + 3y - 5 = 0$, $x - 3y + 10 = 0$, $x - 2 = 0$. Знайти координати його вершин.

О3. Дано пряму $2x + 3y + 4 = 0$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2;1)$: 1) паралельно з цією прямою; 2) перпендикулярно до заданої прямої.

О4. Дано рівняння двох сторін прямокутника $x - 2y = 0$, $x - 2y + 15 = 0$ і рівняння однієї з його діагоналей $7x + y - 15 = 0$. Знайти вершини прямокутника.

О5. Відомі середини сторін трикутника: $M_1(2;1)$, $M_2(5;3)$ і $M_3(3;-4)$. Знайти рівняння його сторін.

О6. Знайти кут φ між двома прямими:
1) $5x - y + 7 = 0$, $3x + 2y = 0$; 2) $3x - 2y + 7 = 0$, $2x + 3y - 3 = 0$.

О7. Дано сторони трикутника:
$x + 3y - 7 = 0$ (AB), $4x - y - 2 = 0$ (BC), $6x + 8y - 35 = 0$ (AC). Знайти довжину висоти, проведеної з вершини B.

О8. Знайти відстань між паралельними прямими $3x + y - 3\sqrt{10} = 0$, $6x + 2y + 5\sqrt{10} = 0$.

О9. Дано вершини трикутника $A(1;1)$, $B(10;13)$, $C(13;6)$. Скласти рівняння бісектриси кута A.

О10. Дано дві протилежні вершини квадрата $A(-1;3)$ і $C(6;2)$. Скласти рівняння його сторін.

О11. Знайти рівняння сторін трикутника, якщо дано одну з його вершин $B(-4;-5)$ і рівняння двох висот $5x + 3y - 4 = 0$ і $3x + 8y + 13 = 0$.

<u>О12.</u> При якому значенні a три прямі $2x-y+3=0$, $x+y+3=$ $=0$, $ax+y-13=0$ перетинаються в одній точці?

<u>О13.</u> Знайти рівняння прямої, яка відображає зміну врожайності 1 га орної землі протягом сімнадцяти років, якщо в перший рік з 1 га було зібрано 21 ц зернових, а в останній – 37 ц.

<u>О14.</u> Витрати виробництва на 20 одиниць товару складають 2000 грн., на 60 одиниць товару – 3000 грн. Знайти витрати виробництва на 30 одиниць товару за умови, що витрати залежать від обсягу продукції лінійно.

<u>О15.</u> Знайти довжину і рівняння висоти BD у трикутнику з вершинами $A(-3;0)$, $B(2;5)$ і $C(3;2)$.

<u>О16.</u> Скласти рівняння прямої, що утворює кут 45^0 із прямою $3x+y-2=0$ та проходить через точку перетину цієї прямої з віссю ординат.

<u>С1.</u> Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $C(1;1)$ і відтинає від координатного кута трикутник площею, яка дорівнює 2 кв.од.

<u>С2.</u> Дано рівняння висот трикутника ABC: $x+y-2=0$, $9x-$ $-3y-4=0$ і вершину $A(2;2)$. Знайти рівняння його сторін.

<u>С3.</u> Скласти рівняння прямих, які проходять через точку $M_0(5;1)$ і утворюють з прямою $2x+y-4=0$ кут $\varphi=\pi/4$.

<u>С4.</u> Дано сторони трикутника $x+y-6=0$, $3x-5y+14=0$ і $5x-3y-14=0$. Скласти рівняння його висот.

<u>С5.</u> Знайти відстань від точки $M_0(2;-1)$ до прямої, яка відтинає на осях координат відрізки величиною $a=8$ і $b=6$.

<u>Домашнє завдання</u>

<u>Д1.</u> Зайти точку перетину прямих $3x-4y-29=0$ і $2x+5y+$ $+19=0$.

<u>Д2.</u> Дано рівняння двох сторін паралелограма $8x+3y+1=0$, $2x+y-1=0$ і рівняння однієї з його діагоналей $3x+2y+3=0$.

Знайти координати вершин цього паралелограма.

Д3. Знайти кутовий коефіцієнт прямої, яка проходить через дві задані точки: а) $M_1(2;-5)$, $M_2(3;2)$; б) $P(-3;1)$, $Q(7;8)$.

Д4. Дано вершини трикутника $M_1(2;1)$, $M_2(-1;-1)$ і $M_3(3;2)$. Скласти рівняння його висот.

Д5. Знайти кут між прямими: 1) $5x-y+7=0$ та $2x-3y+1=0$; 2) $3x-2y+7=0$ та $2x+3y-3=0$; 3) $y=2x-3$ та $y=\frac{1}{2}x+1$.

Д6. Скласти рівняння прямих, які проходять через точку перетину прямих $2x-3y-1=0$ та $3x-y-2=0$ паралельно і перпендикулярно до прямої $y=x+1$.

Д7. Дано сторони трикутника: $x-y+2=0$ (AB), $x=2$ (BC), $x+y-2=0$ (AC). Знайти рівняння прямої, яка проходить через вершину B і через точку на стороні AC, що ділить її (рахуючи від вершини A) у відношенні $1:3$.

Д8. Скласти рівняння трьох сторін квадрата, якщо відомо, що четвертою стороною є відрізок прямої $4x+3y-12=0$, кінці якого лежать на осях координат.

Д9. Обчислити відстань від точки $M_0(1;1)$ до прямої L:
$x=-1+2t$, $y=2+t$.

Д10. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(-2;3)$ на однакових відстаннях від точок $M_1(5;-1)$ і $M_2(3;7)$.

Д11. При яких значеннях α і β прямі $\alpha x-2y-1=0$ та $6x-4y-\beta=$
$=0$ 1) мають спільну точку; 2) паралельні; 3) збігаються?

Д12. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2,4)$ на відстані $d=2$ від початку координат.

Д13. Скласти рівняння прямої, яка проходить через початок координат і разом з прямими $x-y+12=0$, $2x+y+9=0$ утворює трикутник площею 1,5 кв. од.

Д14. Дано трикутник з вершинами $A(-2;0)$, $B(2;4)$ і $C(4;0)$. Знайти рівняння сторін трикутника, медіани AE, висоти AD і довжину медіани AE.

Д15. Знайти рівняння бісектрис кутів між прямими $3x+4y-$
$-1=0$ та $4x-3y+5=0$.

Д16. Перевезення вантажу з даного місця до першого пункту, який знаходиться на відстані 200 км, коштує 400 грн., а до другого, що знаходиться на відстані 600 км – 800 грн. Знайти залежність вартості перевезення y від відстані x, якщо вартість є лінійною функцією від відстані і не залежить від якості доріг.

Відповіді

О1. (6; 0), (0; -4). **О2.** $A(2;-1)$, $B(-1;3)$, $C(2;4)$. **О3.** а) $2x+3y-7=0$; б) $3x-2y-4=0$. **О4.** (2; 1), (4; 2), (-1; 7), (1; 8). **О5.** $7x-2y-12=0$, $5x+y-28=0$, $2x-3y-18=0$. **О6.** а) $\varphi=\pi/4$; б) $\varphi=\pi/2$. **О7.** $d=1,3$. **О8.** $d=5,5$. **О9.** $7x-9y+2=0$. **О10.** $3x-4y+15=0$, $4x+3y-30=0$, $3x-4y-10=0$, $4x+3y-5=0$. **О11.** $3x-5y-13=0$, $8x-3y+17=0$, $5x+2y-1=0$. **О12.** $a=-7$. **О13.** $y=x+20$. **О14.** 2250. **О15.** $\sqrt{10}$; $3x+y-11=0$. **О16.** $x-y+2=0$. **С1.** $x+y-2=0$, або $(1+\sqrt{2})x+(1-\sqrt{2})y-2=0$, або $(1-\sqrt{2})x+(1+\sqrt{2})y-2=0$. **С2.** $7x+5y-8=0$, $x+3y-8=0$. **С3.** $3x-y-14=0$. **С4.** $x-y=0$, $5x+3y-26=0$, $3x+5y-26=0$. **С5.** $d=4,4$. **Д1.** (3; -5). **Д2.** (1; -3), (-2; 5), (5; -9), (8; -17). **Д3.** а) $k=7$; б) $k=7/10$. **Д4.** $4x+3y-11=0$, $x+y+2=0$, $3x+2y-13=0$. **Д5.** 1) $\pi/4$; 2) $\pi/2$; 3) arctg3/4. **Д6.** $7x-7y-4=0$, $7x+7y-6=0$. **Д7.** $5x-3y+2=0$. **Д8.** $3x-4y-9=0$, $3x-4y+16=0$, $4x+3y-37=0$ або $4x+3y+13=0$. **Д9.** $d=4/\sqrt{5}$. **Д10.** $4x+y+5=0$ або $y-3=0$. **Д11.** 1) $\alpha\neq 3$, β – довільне; 2) $\alpha=3$, β – довільне; 3) $\alpha=3$, $\beta=2$. **Д12.** $3x-4y+10=0$, $x=2$. **Д13.** $x+2y=0$, $23x+25y=0$. **Д14.** $AE: 2x-5y+4=0$; $AD: x-2y+2=0$; $|AE|=\sqrt{29}$. **Д15.** $x-7y+6=0$, $7x+y+4=0$. **Д16.** $y=x+200$.

Тема 9. Криві другого порядку

Колом називається множина точок площини, рівновіддалених від даної точки, яка називається **центром**. Якщо R – радіус кола, а точка $C(a;b)$ – його центр, то рівняння кола має вигляд

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \tag{1}$$

Зокрема, якщо центр кола збігається з початком координат, то рівняння (1) набуває вигляду

$$x^2+y^2=R^2. \tag{2}$$

Еліпсом називається геометричне місце точок площини, для яких сума відстаней до двох фіксованих точок площини F_1 і F_2, які називаються **фокусами**, є сталою величиною, більшою, ніж відстань між фокусами. Відстань між фокусами позначають через $2c$, а сталу з означення еліпса – через $2a$. За означенням $a>c$.

Якщо систему координат вибрати так, щоб вісь Ox проходила через F_1 і F_2, а початок координат ділив відрізок F_1F_2 навпіл, то рівняння еліпса матиме вигляд

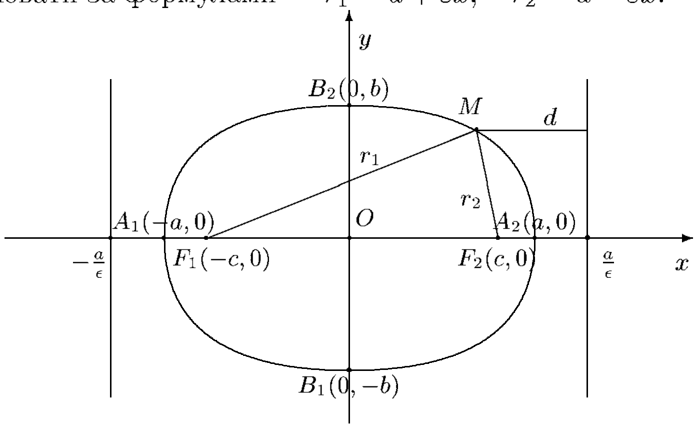
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{3}$$

де $b^2=a^2-c^2$. Рівняння (3) називається **канонічним** рівнянням еліпса.

Осі координат є осями симетрії еліпса, а початок координат – його центром симетрії. Точки, в яких еліпс перетинає свої осі, називаються його **вершинами**. На рисунку вершинами є точки A_1, A_2, B_1 і B_2. Часто осями еліпса називають відрізки $A_1A_2=2a$, $B_1B_2=2b$, а $A_1=a$ – **великою піввіссю**, $B_1=b$ – **малою піввіссю** еліпса.

Число $\varepsilon=c/a$, де a – велика піввісь, називається **ексцентриситетом** еліпса. Очевидно, що $0<\varepsilon<1$. Якщо $M(x;y)$ – довільна точка еліпса, то відрізки $F_1M=r_1$ і $F_2M=r_2$ називаються

фокальними радіусами точки M. Фокальні радіуси можна обчислювати за формулами $\quad r_1 = a + \varepsilon x, \quad r_2 = a - \varepsilon x.$



Якщо еліпс заданий рівнянням (3) і $a > b$, то прямі

$$x = \frac{a}{\varepsilon}, \quad x = -\frac{a}{\varepsilon}$$

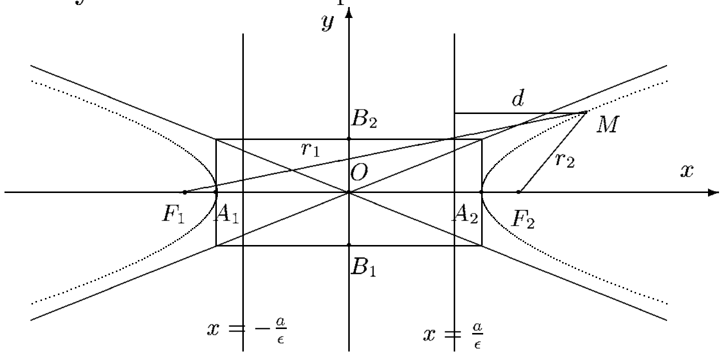
називаються **директрисами** еліпса. Вони мають таку властивість: якщо r – відстань від довільної точки еліпса до деякого фокуса, d – відстань від цієї ж точки до однобічної з цим фокусом директриси, то $\frac{r}{d} = \varepsilon$.

Гіперболою називається множина точок площини, для яких модуль різниці відстаней від двох фіксованих точок F_1 і F_2, які називаються **фокусами**, є сталою величиною, рівною $2a$ і меншою $2c$ – відстані між фокусами.

Якщо осі декартової системи координат вибрано так, що фокуси розміщуються на осі абсцис симетрично відносно початку координат, то в цій системі координат рівняння гіперболи має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{4}$$

де $b^2 = c^2 - a^2$. Рівняння (4) називається **канонічним** рівнянням гіперболи. Осі координат називаються осями симетрії гіперболи, а початок координат – її центром симетрії. Гіпербола перетинає одну з осей – вісь x, яка називається **дійсною віссю**; вісь y називається **уявною віссю** гіперболи.



Прямокутник зі сторонами $2a$ і $2b$, розміщений симетрично відносно осей гіперболи і який дотикається її у вершинах A_1 і A_2, називається **характеристичним** (**основним**) прямокутником гіперболи. Діагоналі цього прямокутника є **асимптотами** гіперболи; їх рівняння мають вигляд $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$. Число $\varepsilon = c/a$, де a - дійсна піввісь, називається **ексцентриситетом** гіперболи. Очевидно, що $\varepsilon > 1$.

Якщо $M(x;y)$ – довільна точка гіперболи, то відрізки $F_1M = r_1$, $F_2M = r_2$ називаються **фокальними радіусами** точки M. Фокальні радіуси точок правої вітки гіперболи обчислюються за формулами

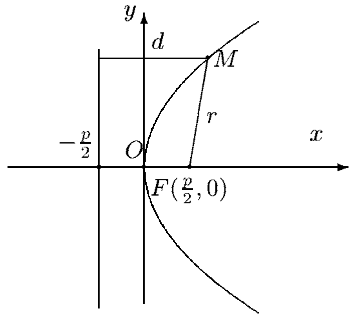
$$r_1 = \varepsilon x + a, \quad r_2 = \varepsilon x - a,$$

фокальні радіуси точок лівої вітки – за формулами

$$r_1 = -\varepsilon x - a, \quad r_2 = -\varepsilon x + a.$$

Прямі $x = -\frac{a}{\varepsilon}$, $x = \frac{a}{\varepsilon}$ називаються **директрисами** гіперболи, яка задана рівнянням (4). Кожна директриса має властивість: якщо r – відстань від довільної точки гіперболи до деякого фокуса, d – відстань від цієї ж точки до однобічної з цим фокусом директриси , то $\frac{r}{d} = \varepsilon$.

Параболою називається множина точок, для кожної з яких відстань до деякої фіксованої точки F площини, яка називається **фокусом**, дорівнює відстані до деякої фіксованої прямої, яка називається **директрисою**.



Позначимо відстань від фокуса до директриси через p. Введемо декартову прямокутну систему координат так, щоб вісь абсцис проходила через фокус параболи перпендикулярно до директриси і була напрямлена від директриси до фокуса; початок координат розмістимо посередині між фокусом і директрисою. У цій системі координат дана парабола визначається рівнянням

$$y^2 = 2px. \qquad (5)$$

Рівняння (5) називається **канонічним** рівнянням параболи.

Рівняння директриси має вигляд $x = -\frac{p}{2}$, а фокальний радіус довільної точки $M(x;y)$ параболи (тобто $r = FM$) обчислюється за формулою $r = x + \frac{p}{2}$.

Для параболи $\frac{r}{d} = 1$, а тому зручно вважати, що ексцентрисит параболи $\varepsilon = 1$.

Приклад 1. Знайти координати центра і радіус кола
$$2x^2 + 2y^2 - 8x + 5y - 4 = 0.$$

◁ Поділимо рівняння на 2 і згрупуємо члени рівняння, утворивши при цьому повні квадрати:
$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 5/2y + 25/16) = 2 + 4 + 25/16$$
або $(x-2)^2 + (y+5/4)^2 = 121/16$. Таким чином, координати центра кола $a = 2, b = -5/4$, а радіус кола $R = 11/4$. ▷

Приклад 2. Скласти канонічне рівняння еліпса, який проходить через точки $M_0(5/2;\sqrt{6}/4)$ і $M_1(-2;\sqrt{15}/5)$.

◁ Нехай шукане рівняння еліпса має вигляд $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Для знаходження a і b скористаємося тим, що координати точок M_0 і M_1 повинні задовольняти дане рівняння. Отже,

$$\frac{(5/2)^2}{a^2} + \frac{(\sqrt{6}/4)^2}{b^2} = 1, \quad \frac{(-2)^2}{a^2} + \frac{(\sqrt{15}/5)^2}{b^2} = 1;$$

$$\frac{25}{4a^2} + \frac{3}{8b^2} = 1, \quad \frac{4}{a^2} + \frac{3}{5b^2} = 1.$$

Звідси знаходимо, що $a^2 = 10$, $b^2 = 1$. Отже, рівняння еліпса має вигляд $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{1} = 1$. $\triangleright$

<u>**Приклад 3.**</u> Ексцентриситет гіперболи дорівнює $\sqrt{2}$. Скласти канонічне рівняння гіперболи, яка проходить через точку $M_0(\sqrt{3};\sqrt{2})$.

$\triangleleft$ Згідно з означенням ексцентриситета маємо $\frac{c}{a} = \sqrt{2}$ або $c^2 = 2a^2$. Оскільки $c^2 = a^2 + b^2$, то $a^2 + b^2 = 2a^2$ або $a^2 = b^2$, тобто гіпербола рівнобічна. Далі з того, що точка M_0 належить гіперболі, дістаємо

$$\frac{(\sqrt{3})^2}{a^2} - \frac{(\sqrt{2})^2}{b^2} = 1 \text{ або } \frac{3}{a^2} - \frac{2}{b^2} = 1.$$

Таким чином, з системи $a^2 = b^2$, $3/a^2 - 2/b^2 = 1$ одержуємо $a^2 = b^2 = 1$. Отже, гіпербола має вигляд $x^2 - y^2 = 1$. $\triangleright$

<u>**Приклад 4.**</u> Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат, яка симетрична відносно осі y і відтинає на бісектрисі першого і третього координатних кутів хорду довжиною $8\sqrt{2}$.

$\triangleleft$ Шукане рівняння параболи $x^2 = 2py$; рівняння бісектриси $y = x$. Точками перетину параболи і даної бісектриси є $(0;0)$ і $(2p;2p)$. Довжина хорди є відстанню між точками і , а тому $8\sqrt{2} = \sqrt{4p^2 + 4p^2}$, звідки $2p = 8$. Отже, рівняння параболи має вигляд $x^2 = 8y$. $\triangleright$

<u>Вправи</u>

<u>**О1.**</u> Скласти рівняння кола, яке проходить через точки $A(5;0)$, $(1;4)$, якщо його центр знаходиться на прямій $x + y - 3 = 0$.

<u>**О2.**</u> 1) Знайти рівняння кола, яке дотикається до двох паралельних прямих $2x + y - 5 = 0$, $2x + y + 15 = 0$, причому однієї з них – у точці $A(2;1)$.

2) Скласти рівняння прямої, що проходить через центри кіл $x^2 + y^2 = 5$ і $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 31 = 0$. Знайти відношення радіусів кіл.

<u>**О3.**</u> Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис симетрично відносно початку координат, знаючи, що його мала вісь дорівнює 24, а відстань між фокусами $2c = 10$.

<u>О4.</u> Дано еліпс $9x^2 + 5y^2 = 45$. Знайти його:
а) півосі; б) фокуси; в) ексцентриситет.

<u>О5.</u> Ексцентриситет еліпса $\varepsilon = 2/3$, фокальний радіус точки еліпса дорівнює 10. Знайти відстань від точки до однобічної з цим фокусом директриси.

<u>О6.</u> 1) Ексцентриситет еліпса $\varepsilon = 1/3$, центр його збігається з початком координат, один з фокусів $(-2; 0)$. Знайти відстань від точки M_1 еліпса з абсцисою 2 до директриси, однобічної з даним фокусом.

2) Еліпс проходить через точки $M_1(4; \frac{4\sqrt{5}}{5})$ і $M_2(0; 6)$. Знайти півосі, координати фокусів і ексцентриситет еліпса.

<u>О7.</u> Записати рівняння гіперболи, фокуси якої розміщені на осі абсцис симетрично відносно початку координат, знаючи, що рівняння асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$ і відстань між фокусами $2c = 20$.

<u>О8.</u> Переконавшись, що точка $M_1(-5; 9/4)$ лежить на гіперболі $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, знайти фокальні радіуси цієї точки.

<u>О9.</u> Довести, що рівняння $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$ визначає гіперболу, знайти координати її центра , півосі, ексцентриситет, рівняння асимптот.

<u>О10.</u> Знайти фокальний радіус точки параболи $y^2 = 12x$, якщо ордината точки дорівнює 6.

<u>О11.</u> Скласти рівняння параболи за відомим фокусом $F(7; 2)$ і відомою директрисою $x - 5 = 0$.

<u>О12.</u> Відстань між двома торговими організаціями дорівнює 6 км. Знайти рівняння множини всіх можливих місцезнаходжень баз, які обслуговують ці організації, якщо відомо, що сума відстаней від бази до них повинна бути сталою та дорівнювати 10 км.

<u>С1.</u> Переконавшись, що точка $M_1(-4; 2,4)$ лежить на еліпсі $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, знайти фокальні радіуси цієї точки.

<u>С2.</u> Ексцентриситет гіперболи дорівнює 3, відстань від точки гіперболи до директриси – 4. Знайти відстань від точки до фокуса, однобічного з цією директрисою.

С3. Скласти рівняння гіперболи, якщо відомі її ексцентриситет $\varepsilon = \sqrt{5}$, фокус $F(2; -3)$ і рівняння відповідної директриси $3x - y + 3 = 0$.

С4. Знайти рівняння параболи, якщо дано її фокус $F(4; 3)$ і директрису $y + 1 = 0$.

Домашнє завдання

Д1. Точка $C(3; -1)$ є центром кола, яке відтинає на прямій $2x - 5y + 18 = 0$ хорду, довжина якої дорівнює 6. Знайти рівняння цього кола.

Д2. Скласти рівняння кола, центр якого лежить на прямій $2x + y = 0$ і яке дотикається до прямих $4x - 3y + 10 = 0$, $4x - 3y - 30 = 0$.

Д3. Скласти рівняння діаметра кола $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 17 = 0$, перпендикулярного до прямої $5x + 2y - 13 = 0$.

Д4. Дано еліпс $9x^2 + 25y^2 = 225$. Знайти: а) півосі; б) фокуси; в) ексцентриситет; г) рівняння директрис.

Д5. Знайти точки еліпса $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$, відстань від яких до правого фокуса дорівнює 14.

Д6. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої знаходяться на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо відстань між фокусами $2c = 6$ і ексцентриситет $\varepsilon = 3/2$.

Д7. 1) Ексцентриситет гіперболи $\varepsilon = 2$, фокальний радіус точки , проведений з одного з фокусів, дорівнює 16. Знайти відстань від точки M до однобічної з цим фокусом директриси.

2) Знайти рівняння гіперболи, яка має вершини у фокусах, а фокуси - у вершинах еліпса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Д8. Скласти рівняння параболи, яка має фокус $F(0; -3)$ і проходить через початок координат, знаючи, що її віссю є y.

Д9. 1) На параболі $y^2 = 32x$ знайти точку, відстань якої від прямої $4x + 3y + 10 = 0$ дорівнює 2.

2) Знайти рівняння параболи і її директриси, коли відомо, що

парабола симетрична відносно осі Ox і проходить через точку перетину прямих $y = x$, $x + y - 2 = 0$.

Д10. Знайти фокальні радіуси гіперболи $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ в точках перетину її з колом $x^2 + y^2 = 91$.

Д11. Відстань між двома підприємствами, що виробляють однакову продукцію, дорівнює 300 км. Транспортні витрати на перевезення продукції від підприємства Π_1 вдвічі більші, ніж від Π_2. Знайти сукупність точок – межу розміщення споживачів, яким однаково вигідно одержувати продукцію від підприємств Π_1 та Π_2.

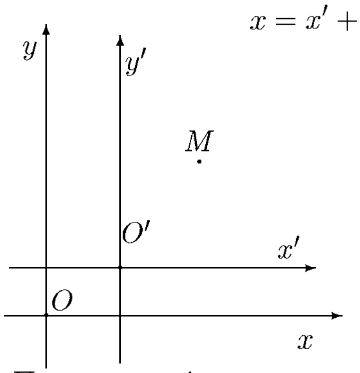
Відповіді

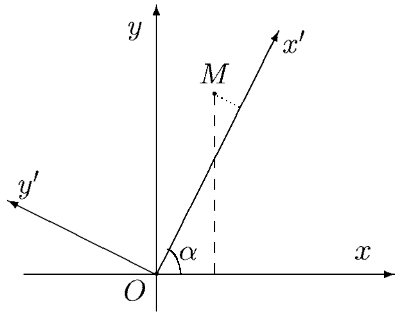
О1. $(x-2)^2+(y-1)^2 = 10$. **О2.** 1) $(x+2)^2+(y+1)^2 = 20$; 2) $x-y = 0$; $\frac{\sqrt{5}}{6}$. **О3.** $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144} = 1$. **О4.** а) $\sqrt{5}, 3$; б) $F_1(0;-2)$, $F_2(0;2)$; в) $\varepsilon = 2/3$. **О5.** $d = 15$. **О6.** 1) $d = 20$; 2) $a = 6$, $b = 4$, $F_1(2\sqrt{5};0)$, $F_2(-2\sqrt{5};0)$, $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}$. **О7.** $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$. **О8.** $r_1 = 9/4$, $r_2 = 41/4$. **О9.** $C(2;-3)$, $a = 3$, $b = 4$, $\varepsilon = 5/3$; директриси: $5x - 1 = 0$, $5x + 9 = 0$; асимптоти: $4x - 3y - 17 = 0$, $4x + 3y + 1 = 0$. **О10.** 6. **О11.** $x = 1/4y^2 - y + 7$. **О12.** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. **С1.** $r_1 = 2,6$; $r_2 = 7,4$. **С2.** $r = 12$. **С3.** $7x^2 - 6xy - y^2 + 26x - 18y - 17 = 0$. **С4.** $y = \frac{1}{8}x^2 - x + 3$. **Д1.** $(x-3)^2+(y+1)^2 = 38$. **Д2.** $(x-1)^2+(y+2)^2 = 16$. **Д3.** $2x - 5y + 19 = 0$. **Д4.** а) 5 і 3; б) $F_1(-4;0)$, $F_2(4;0)$; в) $\varepsilon = 4/5$; г) $x = \pm 25/4$. **Д5.** $(-5;3\sqrt{3})$, $(-5;-3\sqrt{3})$. **Д6.** $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$. **Д7.** 1) $d = 8$; 2) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. **Д8.** $x^2 = -12y$. **Д9.** 1) (0;0) і (18;–24); 2) $y^2 = x$, $x = -\frac{1}{4}$. **Д10.** 6 і 14. **Д11.** $(x + 100)^2 + y^2 = 40000$.

Тема 10. Перетворення декартових прямокутних систем координат і спрощення рівнянь кривих другого порядку

При переході від системи координат xy до нової системи $x''y'$ (напрямок осей координат той же, а за новий початок координат взята точка $'(a;b)$) зв'язок між старими і новими координатами деякої точки площини визначається такими формулами:

$$x = x' + a, \quad y = y' + b. \tag{1}$$





При повороті осей координат на кут α (початок координат той же, причому α відраховується проти годинникової стрілки) залежність між старими координатами x, y і новими x', y' визначається такими формулами:

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \quad y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha. \tag{2}$$

Приклад 1. Зроблено паралельне перенесення осей координат, причому новий початок розміщено в точці $O'(3;-4)$. Відомі старі координати точки $M(7;8)$. Знайти нові координати цієї точки.

$\triangleleft$ Оскільки $a = 3$, $b = -4$, $x = 7$, $y = 8$, то з формул (1) дістаємо: $7 = x' + 3$, $8 = y' - 4$, тобто $x' = 4$, $y' = 12$. $\triangleright$

Приклад 2. На площині xOy задана точка $M_0(4;3)$. Систему координат повернено так навколо початку координат, що нова вісь Ox' пройшла через точку M_0. Знайти старі координати точки M, якщо відомі її нові координати $x' = 5$, $y' = 5$.

$\triangleleft$ Оскільки $|OM| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, то $\sin\alpha = 3/5$, $\cos\alpha = 4/5$. З формул (2) випливає, що $x = \frac{4}{5}x' - \frac{3}{5}y'$, $y = \frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y'$. Покладаючи $x' = 5$, $y' = 5$, знаходимо $x = 1$, $y = 7$.$\triangleright$

Якщо рівняння

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (3)$$

визначає на площині деяку криву другого порядку, то це або еліпс, або гіпербола, або парабола.

Нехай :

1) $AC > 0$; тоді крива, яка визначається рівнянням (3), є еліпс; при $A = C$ еліпс перетворюється в коло;

2) $AC < 0$; тоді відповідна крива є гіперболою, яка може вироджуватися у дві прямі, що перетинаються ;

3) $AC = 0$ (тобто $A = 0$, $C \neq 0$ або $A \neq 0$, $C = 0$); тоді рівняння визначає параболу, яка може вироджуватися у дві паралельні прямі.

Вид кривої та її розміщення на площині можна визначити за допомогою утворення повних квадратів і подальшим перенесенням декартової системи координат.

Приклад 3. Яку лінію визначає рівняння

$$16x^2 + 25y^2 - 32x + 50y = 359?$$

⊲ Перетворимо рівняння, утворивши повні квадрати

$$16(x^2 - 2x + 1) + 25(y^2 + 2y + 1) = 400$$

$$\text{або} \quad 16(x-1)^2 + 25(y+1)^2 = 400.$$

Зробимо паралельне перенесення осей координат у точку $_1(1;-1)$: $x - 1 = x'$; $y + 1 = y'$. Тоді в новій системі координат рівняння матиме вигляд : $\frac{x'^2}{25} + \frac{y'^2}{16} = 1$. (Рис. 1)

Отже, маємо еліпс з півосями $a = 5$, $b = 4$. ⊳

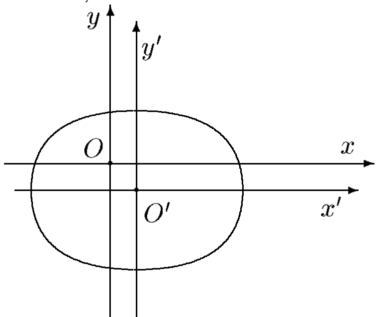


*Рис.*1

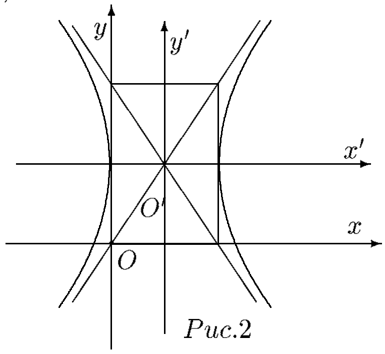


*Рис.*2

Приклад 4. Яку лінію визначає рівняння $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9}y^2 - x + \frac{2}{3}y - 1 = 0$?

◁ Перетворимо дане рівняння так:

$$\frac{1}{4}(x^2-4x+4)-\frac{1}{9}(y^2-6y+9)-1+1-1=0;$$

$$\frac{(x-2)^2}{4}-\frac{(y-3)^2}{9}=1.$$

Після паралельного перенесення осей координат $x-2=x'$, $y-3=y'$, дістанемо рівняння : $\frac{x'^2}{4}-\frac{y'^2}{9}=1$. Таким чином, задана крива є гіперболою. Асимптотами цієї гіперболи відносно нових осей є прямі $y'=\pm\frac{3}{2}x'$. (Рис. 2) ▷

Приклад 5. Яку лінію визначає рівняння $2x^2-4x+2y-3=0$?

◁ Перепишимо дане рівняння у вигляді

$$2(x^2-4x+1)+2y-5=0 \text{ або } (x-1)^2=-(y-5/2).$$

Якщо зробити паралельне перенесення осей $x-1=x'$, $y-5/2=y'$, то дістанемо параболу (Рис. 3): $y'=-x'^2$. ▷

Якщо крива другого порядку задана рівнянням

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

з $B\neq 0$, то, застосувавши перетворення повороту осей координат з використанням формул $x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha$, $\quad y=x'\sin\alpha+$ $+y'\cos\alpha$, де α визначається з рівняння $\mathrm{tg}^2\alpha-(C-A)\mathrm{tg}\alpha-B=0$, дістанемо рівняння вигляду:

$$A_1x'^2+C_1y'^2+D_1x'+E_1y'+F_1=0.$$

Зауваження. Оскільки в перетворенні осей координат беруть участь $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$, то, знаючи $\mathrm{tg}\alpha$, можна знайти $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ за формулами: $\quad \sin\alpha=\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}$; $\quad \cos\alpha=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}$.

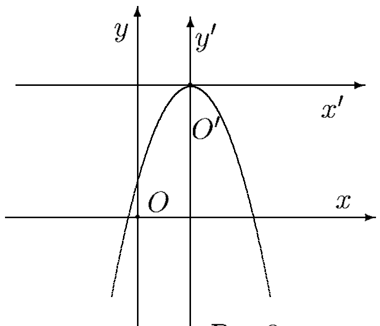


Рис.3

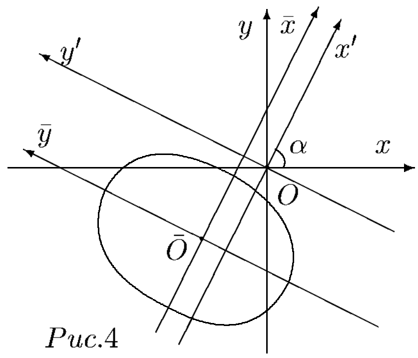


Рис.4

Приклад 6. Звести до канонічного вигляду рівняння:

$$5x^2+4xy+8y^2+8x+14y+5=0.$$

◁ Перетворимо дане рівняння, зробивши поворот осей координат на кут α, який визначається з рівняння:

$$2\mathrm{tg}^2\alpha-(8-5)\mathrm{tg}\alpha-2=0 \quad \text{або} \quad 2\mathrm{tg}^2\alpha-3\mathrm{tg}\alpha-2=0.$$

Звідси знаходимо, що $\mathrm{tg}\alpha=2$ і $\mathrm{tg}\alpha=-1/2$. Візьмемо одне з цих значень, наприклад, $\mathrm{tg}\alpha=2$. Тоді

$$\sin\alpha=\frac{2}{\pm\sqrt{1+2^2}}=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos\alpha=\frac{1}{\pm\sqrt{1+2^2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Оскільки можна брати будь-яке з цих значень, то візьмемо $\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$; $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$. Зробивши перетворення $x=\frac{1}{\sqrt{5}}(x'-2y')$, $y=\frac{1}{\sqrt{5}}(2x'+y')$, зведемо наше рівняння до вигляду:

$$9x'^2+4y'^2+\frac{36}{\sqrt{5}}x'-\frac{2}{\sqrt{5}}y'+5=0 \quad \text{або}$$

$$9(x'^2+\frac{4}{\sqrt{5}}x')+4(y'^2-\frac{1}{2\sqrt{5}}y')=-5.$$

Утворивши повні квадрати, дістанемо рівняння

$$9(x'+\frac{2}{\sqrt{5}})^2+4(y'-\frac{1}{4\sqrt{5}})^2=9/4,$$

яке після перетворення : $x'+\frac{2}{\sqrt{5}}=\bar{x}$, $y'-\frac{1}{4\sqrt{5}}=\bar{y}$, набуде вигляду

$$9\bar{x}^2+4\bar{y}^2=9/4 \quad \text{або} \quad \frac{\bar{x}^2}{1/4}+\frac{\bar{y}^2}{9/16}=1.$$

Це рівняння еліпса (Рис. 4).▷

Приклад 7. Яка лінія визначається рівнянням $xy+2x-4y-8=0$?

Запишемо рівняння у вигляді:

$$x(y+2)-4(y+2)=0 \quad \text{або} \quad (x-4)(y+2)=0.$$

Таким чином, рівняння визначає дві прямі $x-4=0$ і $y+2=0$, одна з яких паралельна осі x, а друга паралельна осі y.▷

Вправи

О1. Систему координат повернено на кут $\alpha=\pi/6$. Знайти нові координати точки $_0(\sqrt{3};3)$.

О2. Дано точку $(9/2;11/2)$. За нові координатні осі взято прямі $2x-1=0$ (вісь $'y'$), $2y-5=0$ (вісь $O'x'$). Знайти координати точки M у новій системі координат.

О3. Які лінії визначають рівняння:

1) $4x^2+9y^2-40x+36y+100=0$;

2) $x^2-9y^2+2x+36y-44=0$;

3) $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$;
4) $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$? Зробити рисунки.

С1. Які лінії визначають рівняння:
1) $36x^2 + 36y^2 - 36x - 24y - 23 = 0$;
2) $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 8 = 0$;
3) $2x^2 - 4x + 2y - 3 = 0$;
4) $14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y - 139 = 0$;
5) $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$;
6) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$? Зробити рисунки.

Домашнє завдання

Д1. Які лінії визначають рівняння:
1) $2x^2 + 3y^2 - 4x + 6y - 7 = 0$;
2) $x^2 - y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$? Побудувати дані криві.

Д2. Звести до канонічного вигляду і побудувати графіки заданих кривих:
1) $5x^2 - 4xy + 2y^2 = 24$;
2) $2x^2 + 4xy - y^2 = 12$;
3) $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x - 4y - 12 = 0$;
4) $x^2 - 6xy + y^2 - 4x - 4y + 12 = 0$;
5) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 20x + 10y - 50 = 0$;
6) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x + 12y + 8 = 0$.

Відповіді

О1. $x' = 3, y' = \sqrt{3}$. О2. $x' = 4, y' = 3$. О3. 1) $\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$; 2) $\frac{x'^2}{9} - \frac{y'^2}{1} = 1$; 3) $\frac{\bar{x}^2}{1} - \frac{\bar{y}^2}{9} = 1$, $\mathrm{tg}\alpha = 3$, $\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $x = \frac{1}{\sqrt{10}}(x' - 3y')$, $y = \frac{1}{\sqrt{10}}(3x' + y')$, $x' - \frac{\sqrt{10}}{2} = \bar{x}$, $y' - \frac{\sqrt{10}}{2} = \bar{y}$; 4) $\bar{y}^2 = 4\sqrt{2} \cdot \bar{x}$, $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y')$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$, $x' - \frac{3}{\sqrt{2}} = \bar{x}$, $y' + \frac{\sqrt{2}}{2} = \bar{y}$. С1. 1) $(x - 1/2)^2 + (y - 1/3)^2 = 1$; 2) $'(2;1)$; 3) $x'^2 = -y'$; 4) $\frac{\bar{x}^2}{5} + \frac{\bar{y}^2}{30} = 1$; 5) $\frac{\bar{x}^2}{9} - \frac{\bar{y}^2}{36} = 1$; 6) $\bar{y}^2 = -2\bar{x}$. Д1. 1) $\frac{x'^2}{6} + \frac{y'^2}{4} = 1$; 2) $x'^2 - y'^2 = 7$. Д2. 1) $\frac{\bar{x}^2}{24} + \frac{\bar{y}^2}{4} = 1$; 2) $\frac{\bar{x}^2}{4} - \frac{\bar{y}^2}{6} = 1$; 3) $\frac{\bar{x}^2}{8} + \frac{\bar{y}^2}{4} = 1$; 4) $\frac{\bar{x}^2}{8} - \frac{\bar{y}^2}{4} = 1$; 5) $\bar{x}^2 = -2\sqrt{5}\bar{y}$; 6) $x - 2y = 3 \pm 1$.

Тема 11. Змінні величини і функції

Змінною називається така величина, яка в умовах даного процесу (явища) набуває різних числових значень. **Сталою** називається величина, яка має певне числове значення або незалежно від умов даного процесу, або лише при виконанні певних умов. Сукупність усіх можливих значень змінної величини утворює множину значень цієї величини.

Нехай X – довільна множина дійсних чисел. Якщо кожному числу $x \in X$ поставлено у відповідність деяке цілком визначене дійсне число $f(x)$, то кажуть, що на множині X визначена числова функція f. Множина X називається **областю визначення**, а множина $Y = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x), x \in X\}$ – **множиною значень** числової функції f. Символічно функція записується у вигляді $f : X \to Y$, або $y = f(x)$, $x \in X$. Часто область визначення функції f позначають через $D(f)$, а множину значень – через $E(f)$. Змінну x називають **аргументом** функції, а $f(x)$ – **частинним значенням** функції. Найпоширенішим є **аналітичний спосіб задання** функції. Він полягає в тому, що за допомогою формули конкретно задається алгоритм обчислення значень функції для кожного значення аргумента x. У цьому випадку під $D(f)$ розуміють ту множину значень x, для якої дана формула має зміст.

Приклад 1. Знайти область визначення і множину значень функції $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$\triangleleft$ Очевидно, що $1 - x^2 > 0$, бо інакше вираз втрачає зміст. Таким чином, $D(f) = \{x : |x| < 1\} = (-1; 1)$. Множиною значень є $E(f) = \{y : y \geq 1\} = [1; \infty)$. $\triangleright$

Нехай функція $f : D(f) \to E(f)$ така, що для довільних $\{x_1, x_2\} \subset D(f)$, $x_1 \neq x_2$: $f(x_1) \neq f(x_2)$. У цьому випадку будь-якому числу $y \in E(f)$ можна поставити у відповідність деяке цілком визначене число $x \in D(f)$ таке, що $f(x) = y$; тим самим визначена нова функція $f^{-1} : E(f) \to D(f)$, яка називається **оберненою** до заданої функції f.

Приклад 2. Чи має обернену функція $y = x^2 + 1$?

$\triangleleft$ Для функції $y = x^2 + 1$ областю визначення є $D(f) = (-\infty, +\infty)$, а множиною значень – $E(f) = [1, +\infty)$. Оскільки для довільного $y \in E(f)$ рівняння $x^2 + 1 = y$ має два різних розв 'язки $x_1(y) = \sqrt{y-1}$ і $x_2(y) = -\sqrt{y-1}$, то дана функція не має оберненої.

У той же час кожна з функцій $y_1 = x^2 + 1$, $D_1(f) = [0, +\infty)$; $y_2 = x^2 + 1$, $D_2(f) = (-\infty, 0]$, має обернену, вигляд яких відповідно $x_1(y) = \sqrt{y-1}$ і $x_2(y) = -\sqrt{y-1}$, $y \in [1; +\infty)$. $\triangleright$

Нехай задані функції $f : X \to Y$ і $g : Y \to Z$. **Складеною** функцією (або композицією) називається функція : $h = g \circ f : X \to Z$, яка визначається рівністю $h(x) = g(f(x)), x \in X$.

Функція f називається **парною** (**непарною**), якщо її область визначення симетрична відносно точки $x = 0$ і $f(-x) = f(x)$ $(f(-x) = -f(x))$, $x \in D(f)$.

Функція f називається **періодичною**, якщо існує додатне число T (період функції) таке, що для довільного $x \in D(f)$: $f(x + T) = f(x)$. **Основним періодом** функції називається найменше додатне число T_0, яке має дану властивість.

Графіком функції називається множина $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in D(f), y = f(x)\}$, де $\mathbb{R}^2$ – множина точок площини.

При побудові графіків часто використовують такі прості геометричні міркування. Якщо Γ – графік функції $y = f(x)$, то:

1) графік функції $y = -f(x)$ – дзеркальне відображення Γ відносно осі Ox;

2) графік функції $y = f(-x)$ – дзеркальне відображення Γ відносно осі Oy;

3) графік функції $y = f(x - a)$ – зсув Γ вздовж осі Ox на величину a;

4) графік функції $y = f(x) + b$ – зсув Γ вздовж осі Oy на величину b;

5) графік функції $y = f(kx)$, $k > 0$, $k \neq 1$ – стиск в k разів при $k > 1$ або розтяг в $1/k$ разів при $k < 1$ Γ вздовж осі Ox;

6) графік функції $y = Af(x)$, $A > 0$, $A \neq 1$, – розтяг в A разів при $A > 1$ або стиск в $1/A$ разів при $A < 1$ Γ вздовж осі Oy.

Приклад 3. Чи є парною (непарною) функція $f(x) = \lg\frac{x+3}{x-3}$.

◁ Маємо $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x+3}{x-3} > 0\} = (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$ – симетрична множина відносно $x = 0$. Для довільного $x \in D(f)$ маємо

$$f(-x) = \lg\frac{-x+3}{-x-3} = \lg\frac{x-3}{x+3} = \lg\left(\frac{x+3}{x-3}\right)^{-1} = -\lg\frac{x+3}{x-3} = -f(x)$$

і, отже, f — непарна функція. ▷

Приклад 4. Знайти основний період функцій:

1) $f(x) = 2\cos(8x+1) - 3$; 2) $f(x) = \sin\frac{3x}{5} + 7\mathrm{tg}4x$.

◁ Скористаємось тим, що найменшим періодом функцій $y = A\cos(\omega x + \varphi)$ та $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ є число $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$, а для функцій $y = A\mathrm{tg}(\omega x + \varphi)$ та $y = A\mathrm{ctg}(\omega x + \varphi)$ – число $T_0 = \frac{\pi}{\omega}$.

1) Оскільки стала є періодичною з довільним періодом, а $\cos(8x+1)$ має найменший період $T = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$, то вся функція має основний період $T_0 = \frac{\pi}{4}$.

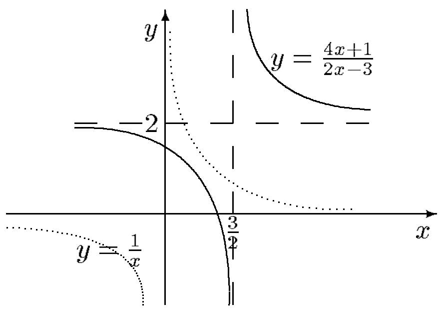
2) Основним періодом для $f_1(x) = \sin\frac{3x}{5}$ є число $T_1 = \frac{2\pi}{3/5} = \frac{10\pi}{3}$, а для $f_2(x) = 7\mathrm{tg}4x$ – число $T_2 = \frac{\pi}{4}$, а тому для заданої функції f – найменше спільне кратне чисел T_1 і T_2, тобто $T_0 = 10\pi$. ▷

Приклад 5. Побудувати графік функції $y = \frac{4x+1}{2x-3}$.

◁ Запишемо функцію у вигляді

$$y = \frac{2(2x-3)+7}{2x-3} = 2 + \frac{7}{2x-3} = 2 + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{x - 3/2}.$$

Графік даної функції можна одержати з графіка функції $y = \frac{1}{x}$, застосувавши послідовно перетворення 3), 6) і 4), де $a = 3/2$, $A = 7/2$, $b = 2$: ▷



Вправи

О1. Побудувати множину значень змінної величини x, яка задана нерівностями: 1) $x^2 \le 9$; 2) $|x-4| < 1$; 3) $(x-2)^2 \le 4$; 4) $x^2 - 4x + 5 = 0$; 5) $x^2 - 3x - 4 \le 0$.

О2. Знайти області визначення функцій: 1) $y = -|x-2|$; 2) $y = \left|\frac{x-1}{x-2}\right|$; 3) $y = -\sqrt{x^2 - 4x + 4}$; 4) $y = \sqrt{9 - x^2}$; 5) $y = |x| + x$; 6) $y = |x^2 - 3x - 4|$; 7) $y = x + \mathrm{sgn}\frac{1}{x}$, де $\mathrm{sgn}x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0; \end{cases}$

8) $y = \begin{cases} -x^2, & x < 0, \\ 3x, & x \ge 0; \end{cases}$ 9) $y = \log_2(x-2)$; 10) $y = \frac{4x-3}{x-1}$; 11) $y = \sqrt{x-3} + \frac{1}{\sqrt{x-6}}$; 12) $y = x + \cos 2x$.

О3. Знайти множину значень функцій: 1) $y = 2 - x - x^2$; 2) $y = \sin x + \cos x$; 3) $y = \frac{1}{x^2}$; 4) $y = |x| + 1$; 5) $y = 4^{-x^2}$.

О4. Дослідити на парність або непарність функції: 1) $f(x) = x^2, \sqrt[3]{x} + 2\sin x$; 2) $f(x) = |x| - 5e^{x^2}$; 3) $f(x) = x^2 + 5x$.

О5. Знайти основний період функцій: 1) $f(x) = 6\mathrm{tg}\frac{3\pi x}{4}$; 2) $f(x) = \sin^2(x-1)$; 3) $f(x) = \cos 2x \cos 6x$.

О6. З'ясувати, які з наведених нижче функцій мають обернені; знайти відповідні обернені функції та їх області визначення:
1) $y = ax + b$; 2) $y = \ln 2x$; 3) $y = 2^{x/2}$.

С1. Яка з елементарних функцій має властивості $f(1) = 0$, $f(a) = 1$, $f(xy) = f(x) + f(y)$?

С2. Довести, що наведені функції задовольняють відповідні функціональні рівняння: 1) $f(x_1)f(x_2) = f(x_1 + x_2)$, $f(x) = a^x$; 2) $f(x+2) - 2f(x+1) + f(x) = 0$, $f(x) = kx + b$.

С3. Які з поданих нижче функцій є парними, які непарними, а які ні парними, ні непарними: 1) $f(x) = \frac{x}{2^x - 1}$; 2) $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$?

С4. Знайти $f(-4)$, $f(1)$, якщо:
1) $f(x) = \frac{2x-3}{x^2+1}$; 2) $f(x) = \begin{cases} 2x - |x|, & x > -1, \\ 2^{x+1}, & x \le -1. \end{cases}$

C5. Чи є функція $f(x) = x^4 + x^2$, визначена на проміжку $-2 \leq x < 10$, парною?

Домашнє завдання

Д1. Знайти область визначення функцій:
1) $y = \sqrt{x} - \lg(2x-3)$; 2) $y = \sqrt{3x-1} + \frac{1}{\sqrt{5-x}}$;
3) $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{3-x}$; 4) $y = \arccos\frac{2x}{x^2+1}$;
5) $y = \sqrt{x \sin^2 \pi x}$; 6) $y = \frac{1}{\lg(1-x)} + \sqrt[3]{x+2}$;
7) $y = 2^{\frac{1}{x}}$; 8) $y = \log_3(2x-6)$.

Д2. Знайти множини значень x, які задовольняють нерівності:
1) $x^2 > 16$; 2) $|2x+3| < 1$; 3) $x^2 - 2x + 5 < 0$; 4) $x^2 - 11x + 10 > 0$.

Д3. Знайти множину значень функцій:
1) $y = \ln(x+1)$; 2) $y = \sqrt{4-x^2}$; 3) $y = \sqrt{3}\sin x + \cos x$;
4) $y = 2 + \frac{1}{x}$, $x \geq 1$; 5) $y = \frac{6x}{1+x^2}$.

Д4. Побудувати графіки функцій:
1) $y = x^2 - 4|x| + 3$; 2) $y = 3^{|x+1|} - 1$; 3) $y = \frac{x+1}{x^2-1}$;
4) $y = 1 - \cos x$ для $|x| \leq 2\pi$; 5) $y = 2^{|\log_2 x|}$; 6) $y = |\log_2|x||$.

Д5. Знайти основні періоди функцій:
1) $y = \sin 2x + \sin^2 3x$; 2) $y = \mathrm{tg}\frac{x}{2} - 3\mathrm{tg}\frac{x}{3}$; 3) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$;
4) $y = |\sin(\sqrt{2}x+1)|$; 5) $y = \sin x + \sin\frac{x}{\sqrt{2}}$.

Д6. Дослідити на парність або непарність функції:
1) $y = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$; 2) $y = \arccos x - \frac{\pi}{2}$; 3) $y = \ln^2(\sqrt{x^2+1} + x)$;
4) $y = \left|\frac{10^x+1}{10^x-1}\right|$; 5) $y = (x-1)^2 \sin^2 x$.

Д7. Знайти обернену функцію й область її визначення, якщо вихідна функція задана на вказаному проміжку: 1) $y = x^2 - 1$:
a) $x \in (-\infty, -1/2]$, b) $x \in [1/2, +\infty)$; 2) $y = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ 2x, & x > 0. \end{cases}$

Д8. Знайти композиції $f \circ g$ і $g \circ f$ функцій:
1) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$; 2) $f(x) = 1 - x$, $g(x) = x^2$;
3) $f(x) = e^x$, $g(x) = \ln x$.

Відповіді

О1. 1) [-3; 3]; 2) (3; 5); 3) [0; 4]; 4) $\emptyset$; 5) $[-1;4]$. **О2.** 1) $\mathbb{R}$; 2) $\mathbb{R}\setminus\{2\}$; 3) $\mathbb{R}$; 4) [-3; 3]; 5) $\mathbb{R}$; 6) $\mathbb{R}$; 7) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; 8) $\mathbb{R}$; 9) $(2;+\infty)$; 10) $\mathbb{R}\setminus\{1\}$; 11) $(6;+\infty)$; 12) $\mathbb{R}$. **О3.** 1) $(-\infty,9/4]$; 2) $[-\sqrt{2};\sqrt{2}]$; 3) $(0,+\infty)$; 4) $[1,+\infty)$; 5) (0, 1]. **О4.** 1) Непарна; 2) парна; 3) ні парна, ні непарна. **О5.** 1) 4/3; 2) π; 3) $\pi/2$. **О6.** 1) Якщо $a=0$, то обернена функція не існує; якщо $a\neq 0$, то $x=\frac{y-b}{a}$ – обернена функція і $D=(-\infty;+\infty)$; 2) $x=\frac{1}{2}e^y$, $D(f)=(-\infty;+\infty)$; 3) $x=2\log_2 y$, $D(f)=(0;+\infty)$. **С1.** $f(x)=\log_a x$. **С3.** 1) Ні парна, ні непарна; 2) непарна. **С4.** 1) -11/17; -1/2; 2) 1/8; 1. **С5.** Ні. **Д1.** 1) $(3/2;+\infty)$; 2) $[1/3;5)$; 3) [-1; 3]; 4) $\mathbb{R}$; 5) $\mathbb{Z}\cup(0;+\infty)$; 6) $(-\infty;0)\cup(0;1)$; 7) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; 8) $(3;+\infty)$. **Д2.** 1) $(-\infty;-4)\cup(4;\infty)$; 2) $(-2;-1)$; 3) $\emptyset$; 4) $(-\infty,1)\cup(10;\infty)$. **Д3.** 1) $\mathbb{R}$; 2) $[0;2]$; 3) $[-2;2]$; 4) (2; 3]; 5) $[-3;3]$. **Д5.** 1) π; 2) 6π; 3) 2π; 4) $\pi/\sqrt{2}$; 5) не існує. **Д6.** 1) Парна; 2) непарна; 3) парна; 4) парна; 5) ні парна, ні непарна. **Д7.** 1) a) $y=-\sqrt{x+1}$, $D(f)=[-3/4;+\infty)$; b) $y=\sqrt{x+1}$, $D(f)=[-3/4;+\infty)$; 2) $y=\left\{\begin{array}{ll} x, & x\le 0,\\ x/2, & x>0.\end{array}\right.$ **Д8.** 1) $f\circ g=x$, $g\circ f=|x|$; 2) $f\circ g=1-x^2$, $g\circ f=(1-x)^2$; 3) $f\circ g=x$, $x>0$, $g\circ f=x$.

Тема 12. Границя послідовності дійсних чисел

Послідовністю дійсних чисел називається функція $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, визначена на множині всіх натуральних чисел. Число $f(n)$ називається n-им членом послідовності та позначається символом x_n, а формула $x_n = f(n)$ називається формулою загального члена послідовності $\{x_n, n \geq 1\}$.

Число a називається **границею послідовності** $\{x_n, n \geq 1\}$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує номер n_0 такий, що при $n > n_0$ виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$. У символічній формі :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0 : \quad |x_n - a| < \varepsilon.$$

Послідовність, яка має границю, називається **збіжною**, а яка її не має – **розбіжною**.

Легко бачити, що коли число a є границею послідовності $\{x_n, n \geq 1\}$, то в довільний ε-окіл $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ точки a, взагалі кажучи, як завгодно малий, потрапляють всі члени послідовності, за винятком їх скінченного числа. Тому, якщо послідовність збігається, то вона має тільки одну границю.

Послідовність $\{\alpha_n, n \geq 1\}$ називається **нескінченно малою**, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Сума двох нескіненно малих послідовностей є нескінченно малою. Добуток обмеженої послідовності на нескінченно малу – нескінченно мала послідовність.

Послідовність $\{y_n, n \geq 1\}$ називається **нескінченно великою**, якщо

$$\forall E > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n > n_0 \colon |y_n| > E.$$

Записують це символічно так: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$.

Для того, щоб $\{\alpha_n, n \geq 1\}$ $(\alpha_n \neq 0)$ була нескінченно малою, необхідно й достатньо, щоб $\{1/\alpha_n, n \geq 1\}$ була нескінченно великою.

Практичне обчислення границь грунтується на такому твердженні: якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то:

1) $\forall\alpha \in \mathbb{R}: \quad \lim\limits_{n\to\infty}(\alpha x_n) = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha a$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \pm b$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \lim\limits_{n\to\infty} y_n = ab$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0.$

Дане твердження не можна застосовувати, наприклад, при обчисленні границі частки $\frac{x_n}{y_n}$, коли $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. У цьому випадку вираз $\frac{x_n}{y_n}$ називають невизначеністю типу $\frac{0}{0}$. Існують невизначеності типу $\frac{\infty}{\infty}$; 1^∞; $0 \cdot \infty$; $\infty - \infty$ та інші. Обчислення границь таких виразів називають **розкриванням** відповідних невизначеностей.

Невизначеності $0 \cdot \infty$ і $\infty - \infty$ зводять до невизначеності $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$, а при розкриванні невизначеності 1^∞ використовують таку важливу границю:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \qquad e = 2,71828... \tag{1}$$

Приклад 1. Довести, що послідовність $\{2 + \frac{1}{n}, n \geq 1\}$ має границею число 2.

$\lhd$ Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$ і виберемо n настільки великим, щоб виконувалась нерівність $|x_n - 2| = \frac{1}{n} < \varepsilon$. Для цього досить взяти $n > \frac{1}{\varepsilon}$, $n_0 \equiv \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ ($\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ – ціла частина числа $\frac{1}{\varepsilon}$). При такому виборі n_0 дістанемо, що для всіх $n \geq n_0 : |x_n - 2| < \varepsilon$. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$. $\rhd$

Приклад 2. Знайти границі:

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^3 + 2n^2 + 3n + 4}{4n^3 + 3n^2 + 5}; \quad 2)\ \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n}\right).$$

$\lhd$ 1) Маємо невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$. Поділимо чисельник і знаменник дробу на n^3. Тоді

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2n^2+3n+4}{4n^3+3n^2+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{4}{n^3}\right)}{n^3\left(4+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^3}\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{4}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(4+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^3}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n^3}}{\lim\limits_{n\to\infty}4+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n^3}}=$$

$$=\frac{1+0+0+0}{4+0+0}=\frac{1}{4}.$$

2) Очевидно, що не можна відразу застосовувати теорему про границю різниці, бо маємо невизначеність типу $\infty-\infty$. Зведемо її до невизначеності типу $\frac{\infty}{\infty}$, помноживши чисельник і знаменник на $\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}$ — вираз, спряжений до $\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}\right)\left(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}\right)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^2+n\right)-\left(n^2-n\right)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{2}{1+1}=1. \quad \triangleright$$

Зауваження. Міркування, аналогічні тим, які ми провели при обчисленні границі 1) з прикладу 2, дозволяють записати таку границю :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_m n^m+a_{m-1}n^{m-1}+...+a_0}{b_s n^s+b_{s-1}n^{s-1}+...+b_0}=\begin{cases}0, & m<s,\\ \frac{a_m}{b_s}, & m=s,\\ \infty, & m>s.\end{cases} \qquad (2)$$

Приклад 3. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n$.

◁ Маємо невизначеність типу 1^{∞}. Тому перетворимо її, звівши до вигляду (1):

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n+1)-1}{2n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{-1}{2n+1}\right)^{-(2n+1)}\right)^{\frac{-n}{2n+1}} =$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-(2n+1)}\right)^{-(2n+1)}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-n}{2n+1}} = e^{-\frac{1}{2}},$$

бо $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-(2n+1)}\right)^{-(2n+1)} =$, а $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-n}{2n+1} = -1/2$, згідно з (2). ▷

Нехай капітал величиною K інвестовано під p відсотків річних, які нараховуються методом складних відсотків n разів на рік. Майбутня вартість капіталу A за формулою складних відсотків обчислюється так:

$$A = K\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt},$$

де t – кількість років, на які інвестовано капітал, а $r = \frac{p}{100}$. Якщо кількість періодів нарахування відсотків за рік n необмежено зростає ($n \to \infty$), тобто мова йде про неперервне нарахування складних відсотків, то

$$A = \lim_{n\to\infty} K\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} = \lim_{n\to\infty} K\left(\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n/r}\right)^{rt} =$$

$$= K\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n/r}\right)^{rt} = Ke^{rt}.$$

Дану формулу використовують для обчислення майбутньої вартості капіталу при неперервному нарахуванні складних відсотків.

Приклад 4. Гроші вклали під 12% річних з неперервним нарахуванням складних відсотків. Яка майбутня вартість вкладу 25000 грн., інвестованого на п'ять років?

◁ За формулою $A = Ke^{rt}$, де $K = 25000$, $r = 0,12$, $t = 5$, маємо $A = 25000 \cdot e^{0,12 \cdot 5} = 25000 \cdot e^{0,6} \approx 25000 \cdot 1,8221 = 45552,5$ грн. ▷

Вправи

О1. Записати перші п'ять членів послідовності $\{x_n, n \geq 1\}$, якщо: 1) $x_n = \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2}$; 2) $x_n = n(1 - (-1)^n)$; 3) $x_n = \frac{3n+5}{2n-3}$.

О2. Записати формулу загального члена послідовності:
1) $-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \ldots$; 2) $0; 2; 0; 2; \ldots$; 3) $1; 0; -3; 0; 5; 0; -7; 0; \ldots$;
4) $-3; \frac{5}{3}; -\frac{7}{5}; \frac{9}{7}; -\frac{11}{9}; \ldots$.

О3.
Використовуючи означення границі послідовності, довести, що:
1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n+1} = 1$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \frac{2}{5\sqrt[3]{n}+1} = 0$.

О4. Знайти границі: 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3-100n^2+1}{100n^2+15n}$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^4-(n-1)^4}{(2n+1)^4+(n-1)^4}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$;
5) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n}\right)$;
7) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n-1}{2^n+1}$; 8) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}$; 9) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{5}{n}\right)^{n+5}$;
10) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^2-3n+1}{2n^2-3n}$; 11) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n})$; 12) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3n+2}-\sqrt{n}}{n}$.

О5. Приріст населення країни становить 3% за рік. За скільки років населення країни подвоїться?

О6. Початкова сума вкладу дорівнює 6 млн. грн. Банк сплачує 10% річних. Знайти розмір вкладу через 5 років при нарахуванні відсотків: 1) щорічно; 2) щоквартально; 3) неперервно.

С1. Знайти границі:
1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+\ldots+n}{n+2} - \frac{n}{2}\right)$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{5n^3+n+1}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right)$;
4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{3}{5n}\right)^n$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\ln(2n+3) - \ln 2n)$.

С2. Довести, що послідовність $x_n = 1+(-1)^n$, $n \geq 1$, розбіжна.

Домашнє завдання

Д1. Записати перші п'ять членів послідовності $\{x_n, n \geq 1\}$, якщо: 1) $x_n = 2^n + \frac{1}{2^n}$; 2) $x_n = \sin \pi n$; 3) $x_n = n!$.

Д2. За допомогою означення границі послідовності довести, що:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+4}{n} = 3$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{n^2} = 0$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{4} = 0$.

Д3. Знайти границі : 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n}{1-2n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n^2+1}}{2n-1}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2+...+n}{\sqrt{9n^4+1}}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2^{1/n} + \frac{5n^2}{1-n^2}\right)$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+3+5+...+(2n-1)}{1+2+...+n}$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+3n} - n\right)$; 7) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-10^n}{1+10^{n+1}}$; 8) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+2n^2} - n\right)$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$; 10) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n-2}{n+1}\right)^n$.

Відповіді

О1. 1) $1, 0, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}$; 2) $2, 0, 6, 0, 10$; 3) $-8, 11, \frac{14}{3}, \frac{17}{5}, \frac{20}{7}$.
О2. 1) $x_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$; 2) $x_n = 1 + (-1)^n$; 3) $x_n = n \cos \frac{\pi(n-1)}{2}$; 4) $x_n = (-1)^n \frac{2n+1}{2n-1}$. **О4.** 1) ∞; 2) $\frac{15}{17}$; 3) 4; 4) 0; 5) $\frac{4}{3}$; 6) 1; 7) 1; 8) 0; 9) e^5; 10) 2; 11) 0; 12) 1/2. **О5.** ≈ 23 роки. **О6.** 1) $6(1+\frac{10}{100})^5 \approx 9,663$ (млн. грн.); 2) $6(1+\frac{10}{400})^{20} \approx 9,832$ (млн. грн.); 3) $6e^{(1+\frac{10}{100})5} \approx 9,892$ (млн. грн.) **С1.** 1) $-\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{15}$; 3) 0; 4) $e^{-3/5}$; 5) $\frac{3}{2}$.
Д1. 1) $2\frac{1}{2}, 4\frac{1}{4}, 8\frac{1}{8}, 16\frac{1}{16}, 32\frac{1}{32}$; 2) $0, 0, 0, 0, 0$; 3) $1, 2, 6, 24, 120$.
Д3. 1) - 1,5; 2) $1/\sqrt{2}$; 3) $\frac{1}{6}$; 4) -4; 5) 2; 6) 1,5; 7) - 0,1; 8) $\frac{2}{3}$; 9) 1; 10) e^{-3}.

Тема 13. Границя функції. Неперервність

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на множині X. Припустимо, що точка x_0 ($x_0 \in X$ або $x_0 \notin X$) – гранична точка множини X, тобто така, в довільному околі якої є точки даної множини, відмінні від x_0.

Число b називається **границею функції** f при $x \to x_0$ і записується $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X,\ 0 < |x - x_0| < \delta\colon |f(x) - b| < \varepsilon.$$

У випадку, коли $x_0 = \infty$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists \Delta > 0\ \forall x \in X,\ |x| > \Delta : |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Функція f називається **нескінченно малою** при $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$. Нескінченно малі функції мають ті самі властивості, що й нескінченно малі послідовності.

Функція f називається **нескінченно великою** при $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall E > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X,\ 0 < |x - x_0| < \delta$: $|f(x)| > E$.

Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = c$, то

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = b \pm c; \tag{1}$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) g(x)) = bc; \tag{2}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}, \quad c \neq 0. \tag{3}$$

У випадку, коли f і g є нескінченно великі при $x \to x_0$, то формули (1) і (3) не діють. Аналогічно не діє формула (3) у випадку, коли f і g – нескінченно малі при $x \to x_0$, а формула (2), коли f є нескінченно малою, а g – нескінченно великою при $x \to x_0$ чи навпаки. Тут маємо невизначеності типу $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$ або $0 \cdot \infty$.

При знаходженні границі відношення двох нескінченно малих функцій доцільно скористатися тим, що дана границя не зміниться, якщо ці нескінченно малі замінити еквівалентними.

Нагадаємо, що нескінченно малі при $x \to a$ функції α і β називаються **еквівалентними**, якщо $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$. Позначають даний факт так: $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to a$.

Наведемо приклади **основних еквівалентностей**: якщо $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = 0$, то $\alpha(x) \sim \sin\alpha(x) \sim \mathrm{tg}\alpha(x) \sim \arcsin\alpha(x) \sim$

$$\sim \mathrm{arctg}\alpha(x) \sim \ln(1+\alpha(x)) \sim (e^{\alpha(x)}-1) \text{ при } x \to a.$$

Приклад 1. Нехай $f(x) = 3x - 1$. Користуючись означенням границі функції, довести, що $\lim\limits_{x\to 1}(3x-1) = 2$.

◁ Згідно з означенням треба довести, що

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in\mathbb{R},\ 0<|x-1|<\delta$: $|f(x)-2| = |3x-1-2| < \varepsilon$.

Оскільки $|3x-1-2| = 3|x-1|$, то, взявши $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, з нерівності $0 < |x-1| < \delta$ одержуємо, що $|f(x)-2| < \varepsilon$ для будь-якого $\varepsilon > 0$, тобто $\lim\limits_{x\to 1}(3x-1) = 2$. ▷

Приклад 2. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+6x-16}{x^2-4}$.

◁ Оскільки $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+6x-16) = 0$ і $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4) = 0$, то маємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$. Для її розкриття перетворимо дану функцію, скоротивши чисельник і знаменник на $(x-2)$:

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+6x-16}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{(x+8)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{x+8}{x+2} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}(x+8)}{\lim\limits_{x\to 2}(x+2)} = \frac{2+8}{2+2} = \frac{5}{2}$. ▷

Приклад 3. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}$.

◁ Маємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$. Домноживши і розділивши на вираз спряжений з $\sqrt{x+1}-2$, тобто на $\sqrt{x+1}+2$, дістанемо

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3} =$

$$= \lim\limits_{x\to 3}(x+3)(\sqrt{x+1}+2) = 6\cdot 4 = 24. \text{ ▷}$$

Важливу роль при знаходженні границь відіграють такі **"чудові"границі**:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1; \tag{4}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = e. \tag{5}$$

Крім того, часто використовуються також такі формули:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a,\ a>0,\ a\neq 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1; \tag{6}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e,\ a>0,\ a\neq 1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1; \qquad (7)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha,\quad \alpha\in\mathbb{R}.$$

Приклад 4. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}5x}{x}$.

◁ Маємо $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{1}{\cos 5x}\cdot 5=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos 5x}\cdot 5=1\cdot 1\cdot 5=5.$ ▷

Приклад 5. Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x$.

◁

Маємо невизначеність типу 1^∞, яку розкриватимемо, використовуючи (5): $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}-1\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^x=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}}\right)^{\frac{x(8x-3)}{x^2-3x+7}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^2-3x}{x^2-3x+7}}=e^8. \text{ ▷}$$

Приклад 6. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\arcsin x}{3x}$.

◁ Маємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$. Оскільки $\arcsin x\sim x$ при $x\to 0$, то $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\arcsin x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}$. ▷

Зауваження. При знаходженні границі $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}$, де $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=1$, $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=\infty$, зручно користуватися формулою

$$\lim_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}v(x)(u(x)-1)}. \qquad (8)$$

Приклад 7. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

◁ Оскільки маємо невизначеність типу 1^∞, то можна скористатись формулою (8):

$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ctg}^2 x(1+x^2-1)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cos^2 x}=e^{1\cdot 1}=e.$ ▷

Число b називається **правою (лівою) границею функції** f **при** $x\to x_0$, якщо

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in X,\ x_0<x<x_0+\delta\ (x_0-\delta<x<x_0)$: $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Праву границю позначають символом $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$ або $f(x_0+0)$, а ліву границю – символом $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)$ або $f(x_0-0)$.

Для існування границі функції f при $x \to x_0$ необхідно й достатньо, щоб $f(x_0+0) = f(x_0-0)$.

Функція $y = f(x)$ з областю визначення X називається **неперервною в точці** x_0, якщо виконуються такі умови:

а) функція $y = f(x)$ визначена в точці x_0, тобто $x_0 \in X$;

б) існує $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

в) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Якщо умова а) виконується, то умови б) і в) еквівалентні такому:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0,$$

де $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ – приріст функції f у точці x_0, що відповідає приростові аргумету $\Delta x = x - x_0$.

Якщо в точці x_0 не виконується принаймні одна з умов а) - в), то x_0 називається точкою розриву функції f. При цьому розрізняють такі випадки:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ існує, але функція не визначена в точці x_0 або $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$. У цьому випадку x_0 називається точкою **усувного** розриву функції.

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ не існує. Якщо при цьому існують обидві однобічні границі $f(x_0+0)$ і $f(x_0-0)$ (очевидно, не рівні між собою), то x_0 називається точкою розриву **першого роду**.

3) У решті випадків x_0 називається точкою розриву **другого роду**.

Приклад 8. Дослідити на неперервність функцію $f(x) = \frac{x^3+2x+1}{x^2-5x+4}$ у точці $x_0 = 2$.

$\lhd$ Маємо $f(2) = \frac{2^3+2\cdot 2+1}{2^2-5\cdot 2+4} = -\frac{13}{2}$, $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3+2x+1}{x^2-5x+4} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^3+2x+1)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-5x+4)} = -\frac{13}{2}$. Оскільки $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$, то функція неперервна в точці $x_0 = 2$. $\rhd$

Приклад 9. Дослідити функцію $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \le 0, \\ x-1, & x > 0 \end{cases}$ на неперервність і визначити характер точки розриву.

$\lhd$ Функція задана різними формулами на різних проміжках. На кожному з проміжків $(-\infty, 0)$ і $(0, +\infty)$ вона як елементарна функція є неперервною. Отже, можливий розрив лише в точці $x_0 = 0$.

Маємо $f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0-0}(x^2+1)=1=f(0)$, $f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0+0}(x-1)=-1$. Оскільки $f(0-0)\neq f(0+0)$, то функція f розривна в точці $x_0=0$, яка є точкою розриву першого роду. $\triangleright$

Приклад 10. Дослідити функцію $f(x)=2^{-\frac{1}{x}}$ на неперервність і визначити характер точки розриву.

$\triangleleft$ Дана функція визначена на множині $X=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ і неперервна як суперпозиція неперервних функцій. У точці $x_0=0$ функція f не визначена і $f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0-0}2^{-\frac{1}{x}}=+\infty$, $f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0+0}2^{-\frac{1}{x}}=0$. Отже, згідно з класифікацією точок розриву точка $x_0=0$ є точкою розриву другого роду. $\triangleright$

Вправи

О1. Використовуючи означення границі функції, довести, що: 1) $\lim\limits_{x\to 4}(6-5x)=-14$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}x^2=4$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x-3}{2x+1}=2$.

О2. Знайти границі: 1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^3+2x+1}{x-4}+1\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)$; 5) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\frac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}2x}{\sin 5x}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x\cdot\sin 2x}$; 10) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{tg}x$; 11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$; 12) $\lim\limits_{x\to 1/2}\frac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\sin x}{\frac{1}{\cos x}-1}$; 14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$; 15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$;

16) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\mathrm{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$; 17) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$; 18) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}$;

19) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$; 20) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x$; 21) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$.

О3. Дослідити функції на неперервність і визначити характер точок розриву: 1) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}(2x^2+3), & -\infty<x\le 1,\\ 6-5x, & 1<x<3,\\ x-3, & 3\le x<+\infty;\end{cases}$

2) $f(x)=\frac{|2x-3|}{2x-3}$; 3) $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 5, & x=0;\end{cases}$ 4) $f(x)=\frac{x}{x+2}$.

О4. Залежність кількості населення деякої області від часу t, що вимірюється роками, виражається формулою $y(t) = 10000 + 1000t - 120t^2$. Знайти середню швидкість зростання населення за період від $t_1 = 3$ до $t_2 = 5$.

С1. Знайти границі: 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^x-2^x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{\sin 3x}$;
3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2^x-x^2}{x-2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{10^x-1}$; 5) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\frac{x+1}{x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}$;
7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos 5x}{\ln\cos 7x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{2x^2}}$; 9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\mathrm{tg}^2 x}$; 10) $\lim\limits_{x\to\infty}x(\ln x-\ln(x+2))$.

С2. Підібрати такі значення a і b, при яких функція
$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x\le 0,\\ ax+b, & 0<x<1,\\ \sqrt{x}, & x\ge 1\end{cases}$$
є неперервною в області визначення.

Домашнє завдання

Д1. Використовуючи означення границі функції, довести, що:
1) $\lim\limits_{x\to 3}(2x-1)=5$; 2) $\lim\limits_{x\to -1}(3-2x-x^2)=4$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{2x-3}=-1$.

Д2. Знайти границі: 1) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{3x+6}{x^3+8}$; 2) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$;
3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2-3x+2}{2x^2+4x+1}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2}{1-x^2}+2^{1/x}\right)$; 5) $\lim\limits_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$;
6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+2x^2}{x^2+1}-x\right)$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4x^4+13x^2+7}-2x^2)$;
8) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2-x}-\sqrt[3]{x}}{x-1}$; 9) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sqrt{1-\mathrm{tg}x}-\sqrt{1+\mathrm{tg}x}}{\sin 2x}$; 10) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\frac{\sin 2x-\cos 2x-1}{\cos x-\sin x}$;
11) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$; 12) $\lim\limits_{x\to 64}\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$.

Д3. Знайти границі: 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^3}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$;
3) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}-\mathrm{tg}^2 x\right)$; 4) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\frac{\sqrt[3]{\mathrm{tg}x}-1}{2\sin^2-1}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}}\right)$;
6) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}$; 7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x-\arcsin x}{2x+\mathrm{arctg}x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}$;
9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x-\mathrm{arctg}x}{x^3}$; 10) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x+\cos x}$; 11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$;
12) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(2x\,\mathrm{tg}\,x-\frac{\pi}{\cos x})$.

Д4. Знайти границі: 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{2x}-1}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{1-x}{x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\mathrm{tg}^2 x)^{\mathrm{ctg}^2 x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+\sin x)^{1/x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\sin x}{1+\mathrm{tg} x}\right)^{1/x}$;
6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\lg(1+2x)}{3x}$; 7) $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\mathrm{ctg}\pi x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\mathrm{ctg}^2 2x}$;
9) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(\ln(1+\frac{x^2}{3})-\ln\frac{x^2}{3}\right)$; 10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\lg(1+x^2)}{x\sin 2x}$.

Д5. Дослідити на неперервність і встановити характер розривів:

1) $f(x)=\begin{cases}\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x}, & x\neq 1,\\ 1, & x=1;\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}2x+1, & -2\le x\le 0,\\ x^2+2, & 0<x\le 2;\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases}2x, & x\le 0,\\ 1-x, & 0<x\le 2,\\ \frac{1}{2-x}, & x>2;\end{cases}$ 4) $f(x)=\mathrm{arctg}\frac{1}{x}$; 5) $f(x)=2^{\frac{1}{\sin\pi x}}$.

Д6. Економісти деякого підприємства встановили, що витрати на виготовлення x одиниць виробів виражаються формулою

$$y=0,001x^3-0,3x^2+40x+1000.$$

Знайти: 1) приріст витрат, коли кількість виробів зросте з 50 одиниць до 100 одиниць; 2) середні витрати на виготовлення кожної одиниці виробу, коли їх кількість зросте з 50 до 60.

Відповіді

О2. 1) 3/4; 2) 0; 3) -1; 4) 0; 5) $-1/\sqrt{2}$; 6) 4; 7) 0; 8) 2/5; 9) 3/4; 10) 1; 11) $\sqrt{2}/8$; 12) $-1/2$; 13) 4; 14) $e^{-2/3}$; 15) 1; 16) $\sqrt{e}$; 17) $1/a$; 18) -1; 19)3; 20) e^2; 21) $\frac{3}{2}$. **О3.** 1) $x=3$ – точка розриву першого роду; 2) $x=3/2$ – точка розриву першого роду; 3) $x=0$ – точка усувного розриву; 4) $x=-2$ – точка розриву другого роду. **О4.** 40. **С1.** 1) $\ln\frac{3}{2}$; 2) 5/3; 3) $4(\ln 2-1)$; 4) $\lg e$; 5) 1; 6) $-\frac{1}{2}$; 7) $\frac{25}{49}$; 8) $e^{-1/4}$; 9) $e^{-1/2}$; 10) -2. **С2.** $a=0$; $b=1$. **Д2.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) -12; 3) $\frac{5}{2}$; 4) -4; 5) $-\frac{1}{56}$; 6) 2; 7) $\frac{13}{4}$; 8) -$\frac{2}{3}$; 9) $-\frac{1}{2}$; 10) $-\sqrt{2}$; 11) $-\frac{1}{3}$; 12) 3. **Д3.** 1) 1/2; 2) 8; 3) 1/2; 4) 1/3; 5) 1/4; 6) -2; 7) 1/3; 8) $2/\pi$; 9) 1/2; 10) 1; 11) 8; 12) -2. **Д4.** 1) $2\ln a$; 2) $^{-4}$; 3) ^{3}; 4) e; 5) 1; 6) $\frac{2}{3}\lg e$; 7) e^{-1}; 8) $e^{-1/2}$; 9) 3; 10) $\frac{1}{2}\lg e$. **Д5.** 1) $x=1$ – точка усувного розриву; 2) $x=0$ – точка розриву першого роду; 3) $x=0$ – точка розриву першого роду, $x=2$ – точка розриву другого роду; 4) $x=0$ – точка розриву першого роду; 5) $x=n$, $n\in\mathbb{Z}$, – точки розриву другого роду. **Д6.** 1) 625; 2) 16,1.

Тема 14. Похідна. Техніка диференціювання

Нехай на деякому проміжку X визначена функція $y = f(x)$. Візьмемо довільну точку $x_0 \in X$ і надамо аргументу приросту $\Delta x \neq 0$ такого, що точка $x_0 + \Delta x \in X$. Функція набуде при цьому приросту $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Похідною (або похідною першого порядку, першою похідною) функції $y = f(x)$, $x \in X$, в точці x_0 називається границя

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Числа

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \tfrac{\Delta f}{\Delta x} \quad \text{і} \quad f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \tfrac{\Delta f}{\Delta x}$$

називаються відповідно **лівою і правою похідними** функції $y = f(x)$, $x \in X$, в точці x_0. Для існування похідної $f'(x_0)$ функції f в точці x_0 необхідно і достатньо, щоб її ліва і права похідні в цій точці існували і були рівними, тобто $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

Похідна функції f, яка розглядається на множині тих точок, де вона існує, сама є функцією. Процес знаходження похідної називають **диференціюванням**. Якщо функція має похідну в деякій точці, то її називають **диференційовною** у цій точці (див. тему 14).

Наведемо **таблицю похідних** основних елементарних функцій.

1) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \neq 0$; $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$; $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$;

2) $(a^x)' = a^x \ln a$, $a > 0$; $\quad (e^x)' = e^x$, $x \in \mathbb{R}$;

3) $(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e$, $\; a > 0, a \neq 1, x > 0$; $\quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$, $x > 0$;

4) $(\sin x)' = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$;

5) $(\cos x)' = -\sin x$, $x \in \mathbb{R}$;

6) $(\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$;

7) $(\mathrm{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, $x \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$;

8) $(\arcsin x)' = -(\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1 < x < 1$;

9) $(\mathrm{arctg}\, x)' = -(\mathrm{arcctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Правила диференціювання функцій:

а) нехай C – стала і f, g – диференційовні функції, тоді:
1) $(C)' = 0$; 2) $(f \pm g)' = f' \pm g'$; 3) $(Cf)' = Cf'$;
4) $(fg)' = f'g + fg'$; 5) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$, $g \neq 0$;

б) нехай функція $x = \varphi(t)$, $t \in T$, має похідну в точці t_0, а функція $y = f(x)$, $x \in X$, має похідну в точці $x_0 = \varphi(t_0)$, тоді складена функція $y = f(\varphi(t))$, $t \in T$, в точці t_0 має похідну, яка дорівнює

$$(f(\varphi(t_0)))' = f'(\varphi(t_0))\varphi'(t_0);$$

в) якщо функція $y = f(x)$, $x \in X$, має в точці x_0 похідну $f'(x_0) \neq 0$, то обернена функція $x = f^{-1}(y)$, $y \in Y$, якщо вона існує, також має похідну в точці $y_0 = f(x_0)$, причому $(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)}$;

г) якщо на деякому проміжку диференційовна функція $y = y(x)$, $x \in X$, задана неявно рівнянням $F(x, y) = 0$, то її похідну y' можна знайти з рівняння $\frac{d}{dx}F(x, y) = 0$, де F розглядається як складена функція змінної x.

Приклад 1. Використовуючи означення похідної, знайти похідну функції $f(x) = \sin 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

◃ Згідно з (1)

$$(\sin 2x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin 2(x + \Delta x) - \sin 2x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin \Delta x \cos(2x + \Delta x)}{\Delta x} =$$
$$= 2 \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} \cos(2x + \Delta x) = 2 \cos 2x. \ ▹$$

Приклад 2. Знайти похідні функцій: а) $y = \frac{2^x \cos x}{\ln x}$; б) $y = \operatorname{tg}\sqrt{1 + x}$.

◃ Користуючись правилами знаходження похідних добутку й частки, а також формулами з таблиці похідних, маємо: а)

$$y' = \frac{(2^x \cos x)' \ln x - 2^x \cos x (\ln x)'}{\ln^2 x} =$$
$$= \frac{(2^x \ln 2 \cdot \cos x - 2^x \sin x) \ln x - 2^x \cos x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} =$$
$$= \frac{2^x}{x \ln^2 x}(\ln 2 \cdot \cos x \cdot x \cdot \ln x - \sin x \cdot \ln x - \cos x);$$

б)
$$y' = \frac{1}{\cos^2\sqrt{1+x}} \cdot (\sqrt{1+x})' = \frac{1}{\cos^2\sqrt{1+x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \cdot (x+1)' =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{1+x} \cdot \cos^2\sqrt{1+x}}. \ \triangleright$$

Часто при знаходженні похідних від деяких функцій зручно спочатку прологарифмувати дану функцію, а потім диференціювати одержану рівність.

Приклад 3. Знайти похідну степенево-показникової функції
$$y = (x^2+1)^{4x}.$$

$\triangleleft$ Оскільки $y > 0$, то $\ln y = \ln(x^2+1)^{4x}$, $\ln y = 4x\ln(x^2+1)$. Продиференціюємо дану рівність, враховуючи те, що y є функцією від x: $\frac{1}{y} \cdot y' = 4\ln(x^2+1) + 4x\frac{1}{x^2+1} \cdot 2x$, $y' = y\left(4\ln(x^2+1) + \frac{8x^2}{x^2+1}\right)$. Підставивши у даний вираз $y = (x^2+1)^{4x}$, одержимо $y' = (x^2+1)^{4x}\left(4\ln(x^2+1) + \frac{8x^2}{x^2+1}\right)$. $\triangleright$

Приклад 4. Знайти похідну y' диференційовної функції $y = y(x)$, заданої неявно рівнянням $xy + \sin y = 0$.

$\triangleleft$ Шукану похідну знаходимо з рівняння $\frac{d}{dx}(xy + \sin y) = 0$, звідки $y + xy' + \cos y \cdot y' = 0$ і, отже, $y' = \frac{-y}{x+\cos y}$. $\triangleright$

Вправи

О1. Користуючись означенням похідної, знайти похідні функцій:

1) $y = x^4$; 2) $y = \frac{1}{x^2}$; 3) $y = \sqrt{1+x^2}$.

О2. За допомогою основних правил диференціювання та таблиці похідних обчислити похідні функцій:

1) $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x - 5$; 2) $y = x + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{5x^5}$; 3) $y = 6\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[4]{x}$;
4) $y = x^2\cos x$; 5) $y = \frac{\mathrm{tg} x}{\sqrt{x}}$; 6) $S = \frac{t}{2} - \frac{2}{t}$; 7) $y = \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^3$;
8) $y = \frac{1+\ln x}{x}$; 9) $y = -\mathrm{arctg} x - \frac{1}{x}$; 10) $y = \frac{2\ln x}{e^x + e^{-x}}$;
11) $y = 5^x + 6^x + (\frac{1}{5})^x$; 12) $y = \log_2 x - 3\log_3 x$.

О3. Знайти похідні складених функцій:

1) $y=\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}$; 2) $y=\sqrt{2x-\sin 2x}$; 3) $y=\mathrm{ctg}^3\frac{x}{3}$;
4) $y=\frac{1}{(1+\cos 4x)^5}$; 5) $y=\ln(1+\cos x)$; 6) $y=\ln\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$;
7) $y=\ln\sin x-\frac{1}{2}\sin^2 x$; 8) $y=a^{\sin x}$; 9) $y=e^{x/a}\cos\frac{x}{a}$;
10) $y=\ln\sqrt{\frac{e^{4x}}{e^{4x+1}}}$; 11) $y=x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$; 12) $y=\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}$;
13) $y=\ln\cos(\mathrm{arctg}\frac{e^x-e^{-x}}{2})$; 14) $y=\arcsin\frac{x^2}{\sqrt{3}}$; 15) $y=\cos(x^2-2x+1)$;
16) $y=\ln\ln x$.

О4. Обчислити похідні таких степенево-показникових функцій:

1) $y=x^{\sin x}$; 2) $y=x^{1/x}$; 3) $y=(\mathrm{tg}2x)^{\mathrm{ctg}\frac{x}{2}}$.

О5. Знайти похідні функцій, заданих неявно:

1) $y^3+x^3-3axy=0$; 2) $\sin(xy)+\cos(xy)=\mathrm{tg}(x+y)$; 3) $x^y=y^x$.

С1. Знайти похідні:

1) $y=\ln x-\frac{2}{x}-\frac{1}{2x^2}$; 2) $y=\ln(e^{2x}+\sqrt{e^{4x}+1})$; 3) $y=\mathrm{arcctg}\frac{1+x}{1-x}$;
4) $y=\arcsin\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$; 5) $y=e^{\mathrm{arctg}\sqrt{1+\ln(2x+3)}}$; 6) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;
7) $y=e^{\frac{1}{\ln x}}$; 8) $y=\frac{1}{\mathrm{arctg}e^{-2x}}$; 9) $y=\sqrt[3]{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+4}}}$; 10) $y=e^x\sin x\cos^3 x$.

Домашнє завдання

Д1. Користуючись означенням похідної, знайти похідні функцій:

1) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$; 2) $y=\mathrm{tg}x$; 3) $y=\frac{1}{3x+2}$; 4) $y=\sqrt{1+2x}$.

Д2. Для поданих нижче функцій знайти похідні:

1) $y=\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}+x$; 2) $y=\left(1-\frac{x^2}{2}\right)^2$; 3) $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}$;
4) $y=x-\mathrm{tg}x$; 5) $y=\frac{\cos x}{x^2}$; 6) $y=\frac{\cos x}{1+2\sin x}$; 7) $y=2^x\mathrm{arctg}x$;
8) $y=x\sin x\ln x$; 9) $y=x^2+3^x$; 10) $y=\frac{1+e^x}{1-e^x}$;
11) $y=\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+x^4$; 12) $y=\sqrt[6]{x^5}-4x^6+2\ln x-\mathrm{ctg}\,x$;
13) $y=\frac{\ln x}{\cos x}+x\,\mathrm{tg}\,x$.

__Д3.__ Знайти похідні функцій:

1) $y = \mathrm{tg}^3 x - 3\mathrm{tg} x + 3x$; 2) $y = \frac{\sqrt{2x-1}}{x}$; 3) $y = \sqrt[3]{1+\cos 6x}$;
4) $y = \ln(x + \sqrt{a^2+x^2})$; 5) $y = \ln \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$; 6) $y = \ln \frac{e^x}{x^2+1}$;
7) $y = \sqrt{4x-1} + \mathrm{arcctg}\sqrt{4x-1}$; 8) $S = \sqrt{4t-t^2} + 4\arcsin\frac{\sqrt{t}}{2}$;
9) $y = \ln(x - \frac{a^2}{x})$; 10) $y = x(\cos\ln x + \sin\ln x)$; 11) $y = \log_2(\log_3(\log_5 x))$;
12) $y = 2^{3^x}$; 13) $y = \ln\sin\sqrt[3]{\mathrm{arctg}\, e^{3x}}$; 14) $y = \frac{1}{18}\sin^6 3x - \frac{1}{24}\sin^8 3x$.

__Д4.__ Знайти похідні функцій:

1) $y = x^{x^2}$; 2) $y = x^{x^x}$; 3) $y = (\ln x)^x$; 4) $y = (x+1)^{2/x}$;
5) $y = x^{\ln x}$; 6) $y = 2x^{\sqrt{x}}$; 7) $y = (x^2+1)^{\sin x}$; 8) $y = (\sin x)^{\cos x}$.

__Д5.__ Обчислити похідні функцій у заданих точках:

1) $f(x) = \frac{x}{2x-1}$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$; 2) $f(t) = \sqrt{1+\cos^2 t^2}$, $t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$;
3) $f(t) = \ln\frac{2+\mathrm{tg}t}{2-\mathrm{tg}t}$, $t = \pi/3$; 4) $f(x) = (x^2+a^2)\mathrm{arctg}\frac{x}{a} - ax$, $x = a$.

__Д6.__ Довести, що функція $f(z) = \frac{\cos^2 z}{1+\sin^2 z}$ задовольняє рівняння $f(\pi/4) - 3f'(\pi/4) = 3$.

__Д7.__ Знайти похідні функцій, які задані неявно:

1) $x^2 + xy + y^2 = 6$; 2) $e^y - e^{-x} + xy = 0$; 3) $x = y + \mathrm{arcctg} y$;
4) $e^x \sin y - e^{-y}\cos x = 0$.

__Відповіді__

О2. 1) $(x-2)^2$; 2) $(1-\frac{1}{x^3})^2$; 3) $\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$; 4) $x(2\cos x - x\sin x)$; 5) $\frac{4x-\sin 2x}{4x\sqrt{x}\cdot\cos^2 x}$; 6) $\frac{1}{2} + \frac{2}{t^2}$; 7) $-\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$; 8) $-\frac{\ln x}{x^2}$; 9) $\frac{1}{x^2+x^4}$; 10) $\frac{2(e^x(1-x\ln x)+e^{-x}(1+x\ln x))}{x(e^x+e^{-x})^2}$; 11) $5^x\ln 5 + 6^x \ln 6 - 5^{-x}\ln 5$; 12) $\frac{1}{x}\log_2 e - \frac{3}{x}\log_3 e$. **О3.** 1) $\frac{1}{2}(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2})$; 2) $\frac{2\sin^2 x}{\sqrt{2x-\sin 2x}}$; 3) $-\frac{\mathrm{ctg}^2\frac{x}{3}}{\sin^2\frac{x}{3}}$; 4) $\frac{20\sin 4x}{(1+\cos 4x)^6}$; 5) $-\mathrm{tg}\frac{x}{2}$; 6) $\frac{2}{1-4x^2}$; 7) $\mathrm{ctg}x\cdot\cos^2 x$; 8) $a^{\sin x}\cos x\ln a$; 9) $\frac{1}{a}e^{x/a}(\cos\frac{x}{a} - \sin\frac{x}{a})$; 10) $\frac{2}{e^{4x}+1}$; 11) $2\sqrt{1-x^2}$; 12) $\frac{1}{2x\sqrt{x-1}}$; 13) $\frac{e^{-x}-e^x}{e^{-x}+e^x}$. 14) $\frac{2x}{\sqrt{3-x^4}}$; 15) $2(1-x)\sin(x^2-2x+1)$; 16) $\frac{1}{x\ln x}$. **О4.** 1) $x^{\sin x}\times$ $\times(\cos x\ln x + \frac{\sin x}{x})$; 2) $x^{1/x}\frac{1-\ln x}{x^2}$; 3) $(\mathrm{tg}2x)^{\mathrm{ctg}\frac{x}{2}}\left(\frac{4\mathrm{ctg}\frac{x}{2}}{\sin 4x} - \frac{\ln\mathrm{tg}2x}{2\sin^2\frac{x}{2}}\right)$.
О5. 1) $\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$; 2) $-\frac{y\cos^2(x+y)(\cos(xy)-\sin(xy))-1}{x\cos^2(x+y)(\cos(xy)-\sin(xy))-1}$; 3) $\frac{y^2-xy\ln y}{x^2-xy\ln x}$.

С1. 1) $\frac{(x+1)^2}{x^3}$; 2) $\frac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}+1}}$; 3) $-\frac{1}{1+x^2}$; 4) $\frac{2}{e^x+e^{-x}}$;
5) $\frac{e^{\operatorname{arctg}\sqrt{1+\ln(2x+3)}}}{(2x+3)(2+\ln(2x+3))\sqrt{1+\ln(2x+3)}}$; 6) $\frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$; 7) $-\frac{e^{1/\ln x}}{x\ln^2 x}$;
8) $\frac{2e^{-2x}}{(1+e^{-4x})(\operatorname{arctg}e^{-2x})^2}$; 9) $\frac{3x^2+10x+20}{15(x^2+4)\sqrt[3]{(x-5)^2\sqrt[5]{x^2+4}}}$;
10) $e^x\sin x\cos^3 x(1+\operatorname{ctg}x-3\operatorname{tg}x)$.
Д1. 1) $-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$; 2) $\frac{1}{\cos^2 x}$; 3) $-\frac{3}{(3x+2)^2}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{1+2x}}$. **Д2.** 1) $(x^2-1)^2$;
2) x^3-2x; 3) $-\frac{x^2+2x+3}{x^4}$; 4) $-\operatorname{tg}^2 x$; 5) $-\frac{x\sin x+2\cos x}{x^3}$; 6) $-\frac{2+\sin x}{(1+2\sin x)^2}$;
7) $2^x(\ln 2\operatorname{arctg}x+\frac{1}{1+x^2})$; 8) $\sin x\ln x+x\cos x\ln x+\sin x$; 9) $2x+3^x\ln 3$;
10) $\frac{2e^x}{(1-e^x)^2}$; 11) $\frac{1}{3}x^{-2/3}-\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}+4x^3$; 12) $\frac{5}{6}x^{-1/6}-24x^5+\frac{2}{x}+\frac{1}{\sin^2 x}$;
13) $\frac{\cos x+x\sin x\ln x}{x\cos^2 x}+\operatorname{tg}x+\frac{x}{\cos^2 x}$.
Д3. 1) $3\operatorname{tg}^4 x$; 2) $\frac{1-x}{x^2\sqrt{2x-1}}$; 3) $-\frac{2\sin 6x}{\sqrt[3]{(1+\cos 6x)^2}}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$;
5) $\frac{1}{\cos x}$; 6) $\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$; 7) $\frac{\sqrt{4x-1}}{2x}$; 8) $\sqrt{\frac{4}{t}-1}$; 9) $\frac{x^2+a^2}{x(x^2-a^2)}$; 10) $2\cos\ln x$;
11) $\frac{1}{x\log_5 x\log_3(\log_5 x)\ln 2\ln 3\ln 5}$; 12) $2^{3^x}3^x\ln 2\ln 3$; 13) $\frac{\operatorname{ctg}\sqrt[3]{\operatorname{arctg}e^{3x}}\cdot e^{3x}}{(1+e^{6x})\sqrt[3]{(\operatorname{arctg}e^{3x})^2}}$;
14) $\sin^5 3x\cos^3 3x$. **Д4.** 1) $x^{x^2+1}(2\ln x+1)$; 2) $x^{x^x}\cdot x^x(\ln^2 x+\ln x+\frac{1}{x})$;
3) $(\ln x)^x\left(\frac{1}{\ln x}+\ln\ln x\right)$; 4) $2\sqrt[x]{(x+1)^2}\left(\frac{1}{x(x+1)}-\frac{\ln(x+1)}{x^2}\right)$; 5) $2x^{\ln x-1}\times$
$\times\ln x$; 6) $x^{\sqrt{x}-1/2}(2+\ln x)$; 7) $(x^2+1)^{\sin x}\left(\frac{2x\sin x}{x^2+1}+\cos x\cdot\ln(x^2+1)\right)$;
8) $(\sin x)^{\cos x-1}(\cos^2 x-\sin^2 x\ln\sin x)$. **Д5.** 1) $-1; -1/9$; 2) $-\sqrt{\pi/6}$;
3) 16; 4) $\frac{\pi a}{2}$. **Д7.** 1) $-\frac{2x+y}{x+2y}$; 2) $-\frac{e^{-x}+y}{e^y+x}$; 3) $\frac{1}{y^2}+1$; 4) $-\frac{e^x\sin y+e^{-y}\sin x}{e^x\cos y+e^{-y}\cos x}$.

Тема 15. Диференціал та його застосування. Похідні та диференціали вищих порядків

Функція $y = f(x)$, $x \in X$, називається **диференційовною в точці** x_0, якщо її приріст Δy можна подати у вигляді

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \tag{1}$$

де $A = \text{const}$, а $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

Головна лінійна частина $A\Delta x$ приросту Δy називається **диференціалом** цієї функції в точці x_0, що відповідає приросту Δx, і позначається символом dy, тобто

$$dy = A\Delta x. \tag{2}$$

Для того, щоб функція $y = f(x)$, $x \in X$, була диференційовною в точці $x_0 \in X$, необхідно і достатньо, щоб існувала похідна $f'(x_0)$; при цьому правильною є рівність $A = f'(x_0)$. Це дозволяє називати диференційовною будь-яку функцію, яка має похідну.

Вираз для диференціала має вигляд

$$dy = f'(x_0)dx,$$

де $dx = \Delta x$. З формули (1) випливає, що коли $f'(x_0) \neq 0$, то при $\Delta x \to 0$ приріст функції та її диференціал у фіксованій точці є еквівалентними нескінченно малими, що дозволяє записати наближену рівність

$$\Delta y \approx dy$$

або

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)dx,$$

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)dx. \tag{3}$$

Формула (3) дозволяє виконувати наближені обчислення, знаходячи при малих Δx значення функції f у точці $x_0 + \Delta x$, якщо відомі значення $f(x_0)$ і $f'(x_0)$.

Приклад 1. Знайти диференціал функції $y = \frac{2}{x} + \mathrm{arctg}\frac{x}{2}$.

◁ Маємо

$$dy = \left(\frac{2}{x} + \mathrm{arctg}\frac{x}{2}\right)' dx = \left(-\frac{2}{x^2} + \frac{1}{1+x^2/4} \cdot \frac{1}{2}\right) dx = -\frac{8dx}{x^2(x^2+4)}. \ ▷$$

Приклад 2. Знайти наближене значення функції $f(x) = e^{x^2-x}$ при $x = 1,2$.

◁ Оскільки $f'(x) = e^{x^2-x}(2x-1)$, то згідно з формулою (3), де $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,2$, маємо $f(1,2) \approx f(1) + f'(1) \cdot 0,2 = e^{1-1} + e^{1-1}(2-1) \cdot 0,2 =$ $= e^0 + e^0 \cdot 0,2 = 1 + 0,2 = 1,2$. ▷

Похідною другого порядку від функції $y = f(x)$, $x \in X$, називається похідна від її першої похідної, тобто

$$y''(x) = (y'(x))'.$$

Взагалі, **похідною n-го порядку** (або n-ою похідною) називається похідна від похідної $(n-1)$-го порядку, тобто

$$y^{(n)}(x) = (y^{(n-1)}(x))', \quad n \in \{2, 3, ...\}.$$

Часто використовують ще такі позначення для похідної n-го порядку:

$$f^{(n)}(x), \quad \frac{d^n f(x)}{dx^n}, \quad \frac{d^n y(x)}{dx^n}.$$

Функція, що має похідну порядку n на множині X, називається n **разів диференційовною** на цій множині.

Наведемо деякі формули для похідних n-го порядку від основних елементарних функцій:

1) $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-(n-1))x^{\alpha-n}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad x > 0;$

2) $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a, \quad a > 0, \ a \neq 1, \ x \in \mathbb{R}; \qquad (e^x)^{(n)} = e^x, \ x \in \mathbb{R};$

3) $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2}), \quad x \in \mathbb{R};$

4) $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{n\pi}{2}), \quad x \in \mathbb{R}.$

Якщо функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$, $x \in X$, є n разів диференційовними, то і функції Cu (C - стала), $u \pm v$, uv також n разів диференційовні, причому

$$(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)},$$

$$(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)},$$

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v^{(2)} + ... +$$
$$+ \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + ... + uv^{(n)}.$$

Формулу для обчислення $(uv)^{(n)}$ називають **формулою**

Лейбніца і записують у вигляді
$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)},$$
де $u^{(0)} = u$, $v^{(0)} = v$ і $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}$.

Диференціалом другого порядку d^2y двічі диференційовної на X функції $y = f(x)$ називається диференціал від диференціала першого порядку цієї функції, тобто $d^2y = d(dy)$, при цьому
$$d^2y = f''(x)dx^2.$$

У загальному випадку, якщо функція $y = f(x)$, $x \in X$, є n разів диференційовною на X, диференціал n-го порядку d^ny функції $y = f(x)$, $x \in X$, визначається формулою $d^ny = d(d^{n-1}y)$, при цьому $d^ny = f^{(n)}(x)dx^n$.

Приклад 3. Знайти y'', якщо $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

$\triangleleft$ Маємо
$y' = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
Отже, $y'' = \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = -\frac{1}{1+x^2}\left(\sqrt{1+x^2}\right)' = -\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$. $\triangleright$

Приклад 4. Знайти y'' від функції, яка задана неявно формулою
$$\sqrt{x^2+y^2} = ae^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}, \quad a > 0.$$

$\triangleleft$ Диференціюючи рівняння, яке визначає функцію $y = y(x)$, $x \neq 0$, дістаємо $\frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}} = ae^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}\frac{y'x-y}{x^2+y^2}$ або $\frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y'x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Звідси $x+yy' = xy'-y$ і, отже, $y' = \frac{x+y}{x-y}$. Диференціюючи цю рівність і використовуючи знайдене значення для y', дістаємо
$y'' = \frac{(1+y')(x-y)-(1-y')(x+y)}{(x-y)^2} = \frac{2(-y+xy')}{(x-y)^2} = \frac{2\left(-y+x\frac{x+y}{x-y}\right)}{(x-y)^2} = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^2}$. $\triangleright$

Приклад 5. Знайти другий диференціал функції $y = 3^{-x}$.

$\triangleleft$ Маємо $y' = -3^{-x}\ln 3$, $y'' = 3^{-x}(\ln 3)^2$, а тому
$$d^2y = y''(x)dx^2 = 3^{-x}(\ln 3)^2dx^2. \triangleright$$

Вправи

О1. Знайти диференціали даних функцій при довільних значеннях аргумента x і при довільному його прирості $\Delta x = dx$:
1) $y = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a} - 5$; 2) $y = \sin x - x\cos x + 4$;

3) $y = x\mathrm{arctg}x - \ln\sqrt{1+x^2}$; 4) $y = x\ln x - x + 1$; 5) $e^y = x + y$; 6) $y = 2^{-1/\cos x}$.

O2. Знайти $dy(x_0)$, якщо: 1) $y = \ln x + e^{-x}$, $x_0 = 1$; 2) $y = \mathrm{arctg}e^x$, $x_0 = 0$; 3) $y = \cos\frac{\pi x}{4}$, $x_0 = 2$.

O3. Знайти наближене значення функції f у точці x_0, якщо: 1) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 0,95$; 2) $f(x) = \cos x$, $x_0 = 45^0 20'$; 3) $f(x) = \arcsin x$, $x_0 = 0,49$; 4) $f(x) = e^{0,1x(1-x)}$, $x_0 = 1,05$; 5) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-3}{x^2+5}}$, $x_0 = 2,037$.

O4. Знайти похідні вказаного порядку n від функцій: 1) $y = x^2 - 3x + 2$, $n = 2$; 2) $y = (x+10)^6$, $n = 3$; 3) $y = x^3\ln x$, $n = 4$; 4) $y = (1+x^2)\mathrm{arctg}x$, $n = 2$; 5) $y = e^{2x-1}$, $n = 2$; 6) $y = x^x$, $n = 2$.

O5. Знайти загальний вираз для похідних порядку n таких функцій: 1) $y = xe^x$; 2) $y = \frac{x}{x^2-1}$; 3) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

O6. Знайти диференціали другого порядку вказаних функцій: 1) $y = 3^{-x^2}$; 2) $y = \frac{\sin x}{x}$; 3) $xy + y^2 = 1$; 4) $y = \ln(x + \sqrt{x^2+4})$.

C1. Знайти диференціали функцій: 1) $y = \mathrm{arctg}e^{2x}$; 2) $\mathrm{arctg}\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2}$.

C2. Знайти наближене значення приросту функції $y = \sin x$ при зміні x від 30^0 до $30^0 1'$. Чому дорівнює $\sin 30^0 1'$?

C3. Довести, що:
1) функція $y = \sqrt{2x - x^2}$ задовольняє рівняння $y^3 y'' + 1 = 0$;
2) функція $y = e^x + 2e^{2x}$ задовольняє рівняння $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$.

C4. За формулою Лейбніца знайти похідні вказаного порядку n від функцій: 1) $y = a^x x^3$, $n = 2$; 2) $y = x^2\ln x$, $n = 3$.

Домашнє завдання

Д1. Знайти диференціали функцій: 1) $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$; 2) $y = \ln\cos x$; 3) $y = \mathrm{arctg}\sqrt{4x-1}$; 4) $y^5 + y - x^2 = 1$.

Д2. Обчислити наближено: 1) $\arcsin 0,05$; 2) $\mathrm{arctg}1,04$; 3) $\ln 1,2$; 4) $\sqrt[4]{15,8}$.

Д3. Знайти похідні вказаного порядку n від функцій: 1) $y = \frac{x^2}{x-1}$, $n = 3$; 2) $y = x^2 e^x$, $n = 3$; 3) $y = x\cos x$, $n = 2$;

4) $y=x^2\sin 3x$, $n=2$; 5) $y=e^x\cos x$, $n=4$; 6) $y=e^x\sin x$, $n=3$; 7) $\mathrm{arctg} y=x+y$, $n=2$; 8) $y=x\ln x$, $n=3$; 9) $y=\sin^2 x$, $n=2$.

Д4. Знайти похідні порядку n від функцій:

1) $y=\ln(2x+3)$; 2) $y=\cos^2 x$; 3) $y=\sin 3x\,\cos 2x$;
4) $y=\frac{1}{1+2x}$; 5) $y=3^x$.

Д5. Знайти диференціали вказаного n-го порядку від функцій:

1) $y=x^4$, $n=4$; 2) $y=\mathrm{tg}x$, $n=2$; 3) $y=e^x\ln x$, $n=3$;
4) $y=x\sin x$, $n=10$.

Д6. Довести, що функція $y=e^x\cos x$ задовольняє рівняння $y^{(4)}+4y=0$.

Д7. За формулою Лейбніца знайти похідну 3-го порядку від функції: 1) $y=x^3e^x$; 2) $y=x^2\sin\frac{x}{a}$.

Відповіді

О1. 1) $2\sqrt{a^2-x^2}dx$; 2) $x\sin x dx$; 3) $\mathrm{arctg} x dx$; 4) $\ln x dx$; 5) $\frac{dx}{e^y-1}$; 6) $-2^{1/\cos x}\ln 2\frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x}$. **О2.** 1) $\frac{e-1}{e}dx$; 2) $\frac{1}{2}dx$; 3) $-\frac{\pi}{4}dx$. **О3.** 1) 0,983; 2) 0,703; 3) 0,512; 4) 0,995; 5) 0,3557. **О4.** 1) 2; 2) $120(x+10)^3$; 3) $\frac{6}{x}$; 4) $\frac{2x}{1+x^2}+2\mathrm{arctg}x$; 5) $4e^{2x-1}$; 6) $x^x((\ln x+1)^2+\frac{1}{x})$. **О5.** 1) $e^x(x+n)$; 2) $(-1)^n\frac{n!}{2}\left(\frac{1}{(x+1)^{n+1}}+\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right)$; 3) $4^{n-1}\cos(4x+n\frac{\pi}{2})$. **О6.** 1) $3^{-x^2}\ln 9\times$ $\times(2x^2\ln 3-1)dx^2$; 2) $\frac{(2-x^2)\sin x-2x\cos x}{x^3}dx^2$; 3) $\frac{2}{(x+2y)^3}dx^2$; 4) $-\frac{x}{(x^2+4)^{3/2}}dx^2$.
С1. 1) $\frac{2e^{2x}dx}{1+e^{4x}}$; 2) $\frac{x+y}{x-y}dx$. **С2.** $\Delta y\approx 0,00025$; $\sin 30^0 1'\approx 0,50025$.
С4. 1) $a^x(x^2\ln^2 a+6x\cdot\ln a+6)x$; 2) $\frac{2}{x}$.
Д1. 1) $\frac{(2-x)dx}{x^3}$; 2) $-\mathrm{tg}x dx$; 3) $\frac{dx}{2x\sqrt{4x-1}}$; 4) $\frac{2xdx}{1+5y^4}$. **Д2.** 1) 0,05; 2) 0,805; 3) 0,2; 4) 1,9938. **Д3.** 1) $\frac{-6}{(x-1)^4}$; 2) $e^x(x^2+6x+6)$; 3) $-2\sin x-x\cos x$; 4) $2\sin 3x+12x\cos 3x-9x^2\sin 3x$; 5) $-4e^x\cos x$; 6) $2e^x(\cos x-\sin x)$; 7) $-\frac{2(1+y^2)}{y^5}$; 8) $-x^{-2}$; 9) $2\cos 2x$. **Д4.** 1) $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!2^n}{(2x+3)^n}$; 2) $2^{n-1}\cos(2x+\frac{n\pi}{2})$; 3) $\frac{5^n}{2}\sin(5x+\frac{n\pi}{2})+\frac{1}{2}\sin(x+\frac{n\pi}{2})$; 4) $\frac{(-1)^n2^nn!}{(1+2x)^{n+1}}$; 5) $3^x\ln^n 3$. **Д5.** 1) $24dx^4$; 2) $\frac{2\sin x\,dx^2}{\cos^3 x}$; 3) $e^x(\ln x+\frac{3}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3})dx^3$; 4) $(10\cos x-x\sin x)dx^{10}$. **Д7.** 1) $e^x(x^3+9x^2+18x+6)$; 2) $\frac{1}{a^3}(6a^2\cos\frac{x}{a}-6ax\sin\frac{x}{a}-x^2\cos\frac{x}{a})$.

Тема 16. Застосування похідної до задач геометрії, фізики та економіки. Правило Лопіталя. Формула Тейлора

Якщо крива задана рівнянням $y=f(x)$, $x \in X$, то $f'(x_0) = \mathrm{tg}\alpha$, $x_0 \in X$, де α – кут, утворений з додатним напрямком осі Ox дотичною до кривої в точці з абсцисою x_0. Рівняння **дотичної** до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0; f(x_0))$ має вигляд

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \tag{1}$$

Нормаллю до кривої називається пряма, яка перпендикулярна до дотичної і проходить через точку дотику. Рівняння нормалі має вигляд

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \tag{2}$$

Кутом між двома кривими $y = f_1(x)$, $x \in X$, і $y = f_2(x)$, $x \in \in X$, в точці їх перетину $M_0(x_0; y_0)$ називається кут між дотичними до цих кривих у точці M_0. Цей кут знаходиться за формулою

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0) f_2'(x_0)}. \tag{3}$$

Якщо при прямолінійному русі точки задано закон руху $y=f(x)$, $x \in X$, то швидкістю руху точки в момент часу x_0 є похідна від шляху за часом, тобто $v = f'(x_0)$.

Нехай функція $y = f(x)$, $x \in X$, визначає витрати виробництва однорідної продукції обсягу x. Тоді $f'(x)$ дає граничні витрати виробництва продукції цього обсягу.

Для оцінки залежності між величинами в економіці часто використовується поняття еластичності функції (або відносної похідної). Границя відношення відносного приросту функції до відносного приросту аргумента, коли останній прямує до нуля, називається **еластичністю** функції і позначається символом $E_x(y)$ або $E_x(f)$, тобто

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x}{y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} y'(x).$$

Отже,

$$E_x(f) = \frac{x}{f(x)} f'(x). \tag{4}$$

Приклад 1. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $x^2 + 2xy^2 + 3y^4 = 6$ в точці $M_0(1; -1)$.

$\triangleleft$ З рівняння кривої знаходимо похідну: $2x + 2y^2 + 4xyy' + 12y^3y' = 0$, тобто $y' = -\frac{x+y^2}{2xy+6y^3}$. Тоді $y'(1) = -\frac{1+(-1)^2}{2\cdot1\cdot(-1)+6\cdot(-1)^3} = \frac{1}{4}$. Рівняння дотичної згідно з (1), таке: $y + 1 = \frac{1}{4}(x - 1)$ або $x - 4y - 5 = 0$. Рівняння нормалі, як випливає з (2): $y + 1 = -4(x - 1)$ або $4x + y - 3 = 0$. $\triangleright$

Приклад 2. Знайти кут між кривими $y = x^3$ і $y = \frac{1}{x^2}$.

$\triangleleft$ Розв'язавши систему $y = x^3$, $y = \frac{1}{x^2}$, дістанемо точку перетину кривих $M_0(1; 1)$. Знайдемо значення похідних $f_1'(x) = (x^3)' = 3x^2$, $f_2'(x) = \left(\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{-2}{x^3}$ у точці $x_0 = 1$ і підставимо у формулу (3):

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\left(-\frac{2}{1}\right) - 3\cdot1}{1 + 3\cdot\left(-\frac{2}{1}\right)} = \frac{-5}{1-6} = 1,$$

тобто $\varphi = \pi/4$. $\triangleright$

Приклад 3. Тіло рухається прямолінійно за законом $S(t) = t^2 + 4t + 1$. Знайти його швидкість у момент часу $t_0 = 4$.

$\triangleleft$ Знайдемо швидкість у будь-який момент часу t: $S'(t) = 2t + 4$. Тоді $v(t_0) = S'(t_0) = 2 \cdot 4 + 4 = 12$. $\triangleright$

Приклад 4. Обсяг продукції u, яка вироблена бригадою робітників, можна описати рівнянням $u = -\frac{5}{6}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 100t + 50$ (од.), $1 \le t \le 8$, де t – робочий час у годинах. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни за годину після початку роботи і за годину до її закінчення.

$\triangleleft$ Продуктивність праці виражається похідною

$$z(t) = u'(t) = -\tfrac{5}{2}t^2 + 15t + 100 \text{ (од./год)},$$

а швидкість і темп зміни продуктивності – відповідно похідною $z'(t)$ і логарифмічною похідною $T_z(t) = (\ln z(t))'$: $z'(t) = -5t + 15$ (од./год^2), $T_z(t) = \frac{z'(t)}{z(t)} = \frac{-5t+15}{-\frac{5}{2}t^2+15t+100} = \frac{2t-6}{t^2-6t-40}$ (од./год).

У задані моменти $t_1 = 1$ і $t_2 = 8 - 1 = 7$ відповідно маємо:
$z(1) = 112,5$ (од./год), $z'(1) = 10$ (од./год^2), $T_z(1) = 0,09$ (од./год)
і $z(7) = 82,5$ (од./год), $z'(7) = -20$ (од./год^2), $T_z(7) = -0,24$ (од./год).

Отже, до кінця роботи продуктивність праці істотно знижується; при цьому зміна знаку z' і T_z з плюса на мінус свідчить про те, що збільшення продуктивності праці в перші години робочого дня змінюється її зниженням в останні години. ▹

Якщо розглядати просту двосекторну макроекономічну модель, то національний доход x є сумою споживання c і заощаджень s (заощадження звичайно втілюються у капіталовкладеннях або інвестиціях):

$$x = c + s. \tag{5}$$

У свою чергу споживання і заощадження є функціями національного доходу, тобто $c = c(x), s = s(x)$.

Для аналізу того, як змінюється споживання і заощадження при збільшенні (зменшенні) національного доходу, використовується поняття **граничної схильності до споживання** і **граничної схильності до заощаджень**, які визначаються відповідно як $c'(x)$ і $s'(x)$.

Якщо продиференціювати (5) по x, вважаючи c і s функціями x, то дістанемо зв'язок між $c'(x)$ і $s'(x)$, а саме $1 = c'(x) + s'(x)$.

Приклад 5. Нехай залежність споживання від національного доходу має вигляд $c(x) = 0,01x^2 + 0,2x + 50$.

Треба знайти граничні схильності до споживання і заощадження, якщо національний доход складає 30 одиниць.

◃ Маємо $c'(x) = 0,02x + 0,2$. Тоді $c'(30) = 0,02 \cdot 30 + 0,2 = 0,8$;
а $s'(30) = 1 - c'(30) = 1 - 0,8 = 0,2$.

Таким чином, при заданому рівні національного доходу суспільство схильне проїдати його. Справді, якщо національний доход збільшується на одиницю від рівня у 30 од., споживання зростає на 0,8, а на інвестування витрачається лише 0,2 одиниці.

Приклад 6. Витрати виробництва залежать від обсягу продукції

x за формулою $y = 100x - \frac{x^3}{30}$. Знайти граничні витрати, якщо обсяг складає: 1) $x = 5$ одиниць; 2) $x = 10$ одиниць.

◃ Маємо $y'(x) = 100 - \frac{x^2}{10}$. Звідси $y'(5) = 100 - \frac{25}{10} = 97,5$; $y'(10) = 100 - \frac{10^2}{10} = 90$. Це означає, що при обсязі 5 одиниць продукції витрати для виготовлення наступної шостої одиниці продукції складуть 97,5; при обсязі виробництва у 10 одиниць вони складають 90. ▹

Приклад 7. Знайти еластичність функції $y = 3x - 6$, якщо $x = 10$.

◃ Згідно з (4) $E_x(y) = \frac{x}{y}y'(x) = \frac{x}{3x-6} \cdot 3 = \frac{x}{x-2}$. Тоді при $x = 10$ $E_x(y) = \frac{10}{10-2} = \frac{5}{4}$. Це означає, що коли x зростає на 1%, то y зростає на $\frac{5}{4}$%. ▹

Нехай при $x = a$ функції f і g обидві нескінченно малі або нескінченно великі. Тоді їх відношення не визначене в точці $x = a$, і в цьому випадку кажуть, що воно є невизначеністю типу $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$. Знаходження границі цього відношення називається **розкриванням** невизначеності. Простим і ефективним методом розкривання таких невизначеностей є **правило Лопіталя**. Нехай функції f і g: 1) диференційовні в деякому околі точки a, за винятком, можливо, самої точки a, причому $g'(x) \neq 0$ у цьому околі; 2) одночасно є нескінченно малими або нескінченно великими в точці a; 3) існує $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b$, можливо й нескінченна. Тоді існує $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, причому

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b. \tag{6}$$

Приклад 8. Знайти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\mathrm{arctg}5x}$.

◃ Маємо невизначеність $\frac{0}{0}$. На підставі формули (6)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\mathrm{arctg}5x} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^{2x}-1)'}{(\mathrm{arctg}5x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}}{\frac{1}{1+25x^2}\cdot 5} = \frac{2\lim\limits_{x\to 0} e^{2x}}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{5}{1+25x^2}} = \frac{2}{5}. \text{ ▹}$$

Приклад 9. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{xe^{x/2}}{x+e^x}$.

◃ Маємо невизначеність вигляду $\frac{\infty}{\infty}$. Використовуючи тричі правило Лопіталя , одержимо: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{xe^{x/2}}{x+e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{x/2}\left(1+\frac{x}{2}\right)}{1+e^x} =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2}e^{x/2}\left(2+\frac{x}{2}\right)}{e^x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{x}{2}}{e^{x/2}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty} \frac{1/2}{\frac{1}{2}e^{x/2}} = 0. \text{ ▹}$$

Невизначеності вигляду $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0 і 1^∞ за допомогою відповідних перетворень зводяться до невизначеності $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$.

Приклад 10. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x$.

$\triangleleft$ Маємо $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x = \lim\limits_{x\to 0} e^{\ln(\sin x)^x} = \lim\limits_{x\to 0} e^{x\,\ln(\sin x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x)}{1/x}} =$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x}{-1/x^2}} = e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot x\cdot\cos x} = e^0 = 1. \triangleright$$

Якщо функція $y = f(x)$, $x \in X$, має похідні до $(n+1)$-го порядку включно в деякому околі точки a, то для будь-якого x з цього околу правильною є **формула Тейлора**

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_{n+1}(x), \tag{7}$$

де $R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, c – деяка точка з інтервалу з кінцями a і x. Зокрема, при $a=0$ маємо **формулу Маклорена**

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x). \tag{8}$$

Приклад 11. Подати функцію $f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$, у вигляді многочлена третього степеня відносно x (розкласти в околі точки $x_0 = 0$).

$\triangleleft$ Скористаємося формулою Маклорена (8) з $n=3$. Маємо
$f(x) = a^x$, $f(0) = 1$, $f'(x) = a^x \ln a$, $f'(0) = \ln a$,
$f''(x) = a^x \ln^2 a$, $f''(0) = \ln^2 a$, $f^{(3)}(x) = a^x \ln^3 a$, $f^{(3)}(0) = \ln^3 a$,
а тому $a^x = 1 + x\ln a + \frac{x^2\ln^2 a}{2!} + \frac{x^3\ln^3 a}{3!} + R_4(x)$. $\triangleright$

Приклад 12. Користуючись формулою $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$, знайти $\sqrt{e}$.

$\triangleleft$ Маємо $\sqrt{e} = e^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} =$

$$= 1 + 0,5 + 0,12500 + 0,02083 = 1,64583. \triangleright$$

Вправи

О1. Складти рівняння дотичної і нормалі до кривої $x^3 + xy + y^3 = 0$ в точці $M_0(1;-1)$.

<u>О2.</u> Скласти рівняння дотичної до гіперболи $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{8} = 1$, проведеної в точці $M_0(-9; -8)$.

<u>О3.</u> Записати рівняння дотичних до лінії $xy = 4$ в точках $x_1 = 1$, $x_2 = -4$ і знайти кут між дотичними. Побудувати криву і дотичні.

<u>О4.</u> Знайти кут між лініями:
1) $y = 1 + \sin x, \quad y = 1;$ 2) $x^2 + y^2 = 5, \quad y^2 = 4x.$

<u>О5.</u> Закон руху при прямолінійному русі точки задано рівнянням $S = \frac{t^5}{5} + \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi t}{8}$ (t – в секундах, S – в метрах). Знайти швидкість руху в кінці другої секунди.

<u>О6.</u> Обсяг продукції u (ум.од.) цеху впродовж дня є функцією $u = -t^3 - 5t^2 + 75t + 425$, де t – час (год.). Знайти продуктивність праці за дв? години після початку роботи.

<u>О7.</u> Функція сукупних витрат має вигляд $y = 6\lg(1 + 3x)$. Знайти функцію граничних витрат.

<u>О8.</u> Залежність між витратами виробництва C (гр. од.) і обсягом виготовленої продукції x (од.) виражається функцією $C = 10x - 0,04x^3$. Знайти середні та граничні витрати, якщо обсяг продукції становить 5 од.

<u>О9.</u> Валовий продукт деякої області змінюється за законом $x = 100 + t$, а кількість населення описується формулою $L = 120 + 2t$, де t – час. Знайти швидкість зміни частки валового продукту області, що припадає на кожну особу.

<u>О10.</u> Залежність між собівартістю одиниці продукції c (тис. грн.) і випуском продукції x (млрд. грн.) виражається функцією $c = -0,5x + 80$. Знайти еластичність собівартості при випуску продукції, рівному 60 млрд. грн.

<u>О11.</u> Знайти еластичність функції $y = e^{5x}$. Визначити показник еластичності для випадків: 1) $x = 0$; 2) $x = 2$.

<u>О12.</u> Функція пропозиції на деякий товар $s = \frac{20+4p^2}{1+10p}$, функція попиту $d = \frac{25-p+4p^2}{1+10p}$. Знайти ціну рівноваги, тобто ціну, коли попит і пропозиція зрівноважуються, а також еластичність попиту і пропозиції для цієї ціни.

<u>О13.</u> За правилом Лопіталя знайти границі:
1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\mathrm{arctg}x}{x^3}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi-2\mathrm{arctg}x}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x\cdot\cos x}$;
5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\mathrm{tg}x}-e^x}{\mathrm{tg}x-x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln\sin x}$; 7) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^n e^{-x})$;
8) $\lim\limits_{x\to\infty}(\pi-2\mathrm{arctg}x)\ln x$; 9) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$; 10) $\lim\limits_{x\to 0}x^2e^{\frac{1}{x^2}}$;
11) $\lim\limits_{x\to 0}x^{\sin x}$; 12) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\mathrm{tg}x}$.

<u>О14.</u> Використовуючи формулу Тейлора, подати функції у вигляді многочленів:
1) $f(x)=x^4-5x^3+x^2-3x+4$ за степенями $x-4$;
2) $f(x)=(x^2-3x+1)^3$ за степенями x;
3) $f(x)=xe^x$ за степенями x.

<u>О15.</u> Нехай $f(x)=x^{10}-3x^6+x^2+2$. Знайти три перші члени розкладу функції f за формулою Тейлора при $x_0=1$. Підрахувати наближено $f(1,03)$.

<u>О16.</u> Використовуючи наближену формулу $e^x\approx 1+x+\frac{x^2}{2}$, знайти $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ та оцінити похибку.

<u>О17.</u> Залежність між витратами виробництва C і обсягом продукції x визначається функцією $C=30x-0,08x^3$. Знайти середні і граничні витрати при обсязі продукції: 1) $x=5$ од.,
2) $x=10$ од.

<u>О18.</u> Функції довготривалого попиту d і пропозиції s від ціни p на світовому ринку мають відповідно вигляд $d=30-0,9p$, $s=16+1,2p$.

1) Знайти еластичність попиту в точці рівноважної ціни.

2) Як зміниться рівноважна ціна та еластичність попиту при зменшенні пропозиції нафти на ринку на 25% ?

<u>О19.</u> Залежність обсягу випуску продукції y від капітальних витрат k визначається функцією $y=k_0\ln(4+k^3)$, де k_0 – початкові капітальні витрати. Знайти інтервал зміни k, на якому збільшення капітальних витрат неефективне.

С1. Довести, що дотичні до лінії $y = \frac{x-4}{x-2}$ у точках її перетину з осями координат паралельні між собою.

С2. Знайти кути, під якими перетинаються задані криві:

$$x^2 + y^2 = 8ax, \qquad y^2 = \frac{x}{2a-x}.$$

С3. Функції попиту $d = \frac{p+8}{p+2}$ і пропозиції $s = p + 0,5$, де p – ціна товару. Знайти: а) ціну рівноваги, тобто ціну, при якій попит і пропозиція зрівноважуються; б) еластичність попиту і пропозиції для цієї ціни; в) зміну доходу при збільшенні ціни на 5% від ціни рівноваги.

С4. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to 0}(x - \sin x)\ln x$; 2) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\pi - 2x)^{\cos x}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/x}$;

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x + 2^x)^{1/x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{3/x^2}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}(e^x + x)^{1/x}$.

С5. Для функції $y = (1 + x)^\alpha$ записати формулу Маклорена.

Домашнє завдання

Д1. Скласти рівняння дотичної і нормалі до графіка функції $y = f(x)$ в даній точці, якщо: 1) $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$, $x_0 = -2$; 2) $y = e^{1-x^2}$, $x_0 = -1$; 3) $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$, $M_0(3; 1)$.

Д2. Знайти кути, під якими перетинаються лінії:
1) $y = (x - 2)^2$ і $y = 4x - x^2 + 4$; 2) $y = \sin x$ і $y = \cos x$, $x \in [0, 2\pi]$.

Д3. Закон руху точки вздовж прямої $S(t) = 6t - t^3$ (S виражається у метрах, t – у секундах). Знайти швидкість руху точки при $t = 1$ і $t = 3$.

Д4. Знайти еластичність суми та різниці функцій $u(x)$ і $v(x)$, $x \in X$.

Д5. Функції попиту d і пропозиції s від ціни p виражаються рівностями $d = 7 - p$ і $s = p + 1$.

Знайти: а) ціну рівноваги; б) еластичність попиту і пропозиції для цієї ціни; в) зміну доходу (у відсотках) при збільшенні ціни на 5% від рівноважної.

Д6. Функція попиту d задається формулою $d = d_0 e^{-kp^2}$, де d_0 і k – відомі величини. При яких значеннях ціни p попит буде еластичним ($E_p(d) < -1$)?

Д7. Знайти еластичність функції $y = 5\ln x$. Обчислити значення показника еластичності для: 1) $x = 10$; 2) $x = e$.

Д8. Нехай виробнича функція y має вигляд $y = 300\sqrt{L} - 4L$, де y – кількість продукції, L – вкладена праця (чисельність працівників).

Знайти граничну продуктивність праці при $L_1 = 1$, $L_2 = 9$, $L_3 = 100$, $L_4 = 2500$, $L_5 = 22500$ і провести відповідний економічний аналіз.

Д9. Знайти границі: 1) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^4+3x-4}{x^3-1}$;
2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$; 3) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \frac{\cos 7x}{\cos 5x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\cos 5x}{x^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{2e^x - x^2 - 2x - 2}$;
6) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg} x - \mathrm{arctg} x}{\sin x - x\cos x}$; 7) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2}{e^x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right)$;
9) $\lim\limits_{x\to 1+0} (x-1)^{\ln x}$; 10) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}$; 11) $\lim\limits_{x\to \pi/2-0} (\mathrm{tg} x)^{\cos x}$.

Д10. Записати формулу Тейлора для функції f в точці x_0:
1) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 4$, $x_0 = -1$; 2) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = -1$;
3) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $x_0 = -1$.

Д11. Нехай $f(x) = x^8 - 2x^7 + 5x^6 - x + 3$. Знайти перші три члени розкладу функції f за формулою Тейлора при $x_0 = 2$. Обчислити наближено $f(2,02)$ і $f(1,97)$.

Відповіді

О1. $x + 2y + 1 = 0$, $2x - y - 3 = 0$. **О2.** $x - y + 1 = 0$. **О3.** $y = -4x + 8$, $y = -\frac{1}{4}x - 2$, $\varphi = \mathrm{arctg}\frac{15}{8}$. **О4.** 1) $\pi/4$, $3\pi/4$; 2) $\mathrm{tg}\varphi_1 = 3$; $\mathrm{tg}\varphi_2 = -3$. **О5.** $16 + \frac{\sqrt{2}}{8} \approx 16,18$/. **О6.** 43 од./год. **О7.** $\frac{18}{1+3x}\lg e$. **О8.** 9 гр.од.; 7 гр.од.

О9. $y(t) = \frac{100+t}{120+2t}$, $y'(t) = \frac{-20}{(60+t)^2}$. **О 10.** $E_x(c)|_{x=60} = -0,6$ (при випуску продукції на 60 млрд.грн. збільшення його на 1 відсоток веде до зниження собівартості на 0,6 відсотків). **О11.** $E_x(y) = 5x$; 1) 0; 2) 10. **О12.** $p_0 = 5$, $E_5(s) = 0,7$; $E_5(d) = 0,67$. **О13.** 1) 0; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 2; 4) 2; 5) 1; 6) 1; 7) 0; 8) 0; 9) $\frac{1}{2}$; 10) ∞; 11) 1; 12) 1. **О14.** 1) $(x-4)^4 + 11(x-4)^3 + +37(x-4)^2 + 21(x-4) - 56$; 2) $x^6 - 9x^5 + 30x^4 - 45x^3 + 30x^2 - 9x + 1$; 3) $x + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^3}{2!} + ... + \frac{x^n}{(n-1)!} + o(x^{n+1})$. **О15.** $f(x) = 1 - 6(x-1) + (x-1)^2 + ...$, $f(1,03) \approx 0,82$. **О16.** $0,78$, $\delta < 0,01$. **О17.** 1) $C_{\text{сер}} = 28$, $C_{\text{гр}} = 24$; 2) $C_{\text{сер}} = 22$, $C_{\text{гр}} = 6$. **О18.** 1) $p_0 = \frac{20}{3}$, $|E_{p_0}(d)| = 0,25$. 2) Рівноважна ціна зросте на 50%, еластичність попиту за абсолютною величиною збільшиться приблизно на 71%. **О19.** $(2; +\infty)$. **С2.** $\pi/4$, $\pi/2$. **С3.** а) $p = 2$; б) $E_p(d) = -\frac{6p}{(p+2)(p+8)}$, $E_p(s) = \frac{2p}{2p+1}$, $E_p(d)|_{p=2} = -0,3$; $E_p(s)|_{p=2} = 0,8$; в) зростає на $3,5\%$. **С4.** 1) 0; 2) 1; 3) 1; 4) 2; 5) e^{-6}; 6) e^2. **С5.** $1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$. **Д1.** 1) $y - 5 = 0$, $x + 2 = 0$; 2) $2x - y + 3 = 0$, $x + 2y - 1 = 0$; 3) $x + y - 4 = 0$, $x - y - 2 = 0$. **Д2.** 1) $\mathrm{arctg}\frac{8}{15}$; 2) $\mathrm{arctg} 2\sqrt{2}$. **Д3.** $3/; -21/$. **Д4.** $E_x(u \pm v) = \frac{x}{u \pm v}(u' \pm v')$. **Д5.** а) 3 гр.од.; б) $E_p(d) = -0,75$; $E_p(s) = 0,75$, в) $1,06\%$. **Д6.** $p > \frac{1}{\sqrt{2k}}$. **Д7.** 1)$\lg e$; 2) 1. **Д8.**$y(1) = 146, y(9) = 46, y(100) = 11$, $y(2500) = -1$, $y(22500) = -3$, тобто при подальшому збільшенні персоналу виробництво продукції зменшуватиметься. **Д9.** 1) 7/3; 2) 1; 3) -7/5; 4) -25/2; 5) $\frac{1}{2}$; 6) 2; 7) 0; 8) -1/3; 9) 1; 10) $e^{-1/2}$; 11) 1. **Д10.** 1) $(x+1)^3 - 5(x+1) + 8$; 2) $-1 - (x+1) - (x+1)^2 - ... - (x+1)^n + o(x^n)$; 3) $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$. **Д11.** $f(x) = 321 + 1087(x-2) + 1648(x-2)^2 + ...$, $f(2,02) \approx 343,4$; $f(1,97) \approx 289,9$.

Тема 17. Застосування похідних до дослідження функцій та побудови графіків

Функція $y = f(x)$, $x \in X$, називається **зростаючою** (**спадною**) на інтервалі $(a, b) \subset X$, якщо з нерівності $x_1 < x_2$, де $\{x_1, x_2\} \subset (a, b)$, випливає нерівність $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$.

Функція $y = f(x)$, $x \in X$, називається **неспадною** (**незростаючою**) на інтервалі $(a, b) \subset X$, якщо з нерівності $x_1 < x_2$, де $\{x_1, x_2\} \subset (a, b)$, випливає нерівність $f(x_1) \leq f(x_2)$ $(f(x_1) \geq f(x_2))$.

Якщо функція f диференційовна на інтервалі (a, b) і $f'(x) > 0$ $(f'(x) \geq 0)$ при всіх $x \in (a, b)$, то функція f зростає (не спадає) на (a, b); якщо ж $f'(x) < 0$ $(f'(x) \leq 0)$ при всіх $x \in (a, b)$, то f спадає (не зростає) на цьому інтервалі. Зазначимо, що якщо $f'(x) = 0$, $x \in (a, b)$, то на цьому інтервалі функція є сталою. Тому в простих випадках область визначення функції можна розбити на скінченне число **проміжків монотонності**. Кожний з інтервалів монотонності обмежений **критичними точками** – точками, в яких $f'(x) = 0$ або $f'(x)$ не існує. Точки x, у яких $f'(x) = 0$, називаються **стаціонарними**.

Якщо існує такий окіл точки x_0, що для всякої точки $x \neq x_0$ цього околу виконується нерівність $f(x) > f(x_0)$ $(f(x) < f(x_0))$, то точка x_0 називається **точкою локального мінімуму** (**максимуму**) функції $y = f(x)$, а число $f(x_0)$ – мінімумом (максимумом) цієї функції. Точки мінімуму та максимуму називаються її **точками екстремуму**.

Необхідні умови екстремуму. Нехай точка x_0 є точкою екстремуму функції f, тоді в цій точці або $f'(x_0) = 0$, або $f'(x_0)$ не існує. Екстремуми функції слід шукати серед критичних точок.

Достатні умови екстремуму диференційовної функції. Нехай функція $y = f(x)$, $x \in X$, диференційовна в деякому околі точки $x_0 \in X$, можливо, крім самої точки, в якій вона неперервна. Тоді точка x_0 буде точкою локального максимуму, якщо існує окіл точки x_0, в якому $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ і $f'(x) < 0$ при $x > x_0$. Якщо ж $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ і $f'(x) > 0$ при $x > x_0$, то точка x_0 буде точкою локального мінімуму.

Якщо функція f має в точці x_0 першу і другу похідну, причому $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) \neq 0$, то точка x_0 є точкою максимуму при $f''(x_0) < 0$ і точкою мінімуму при $f''(x_0) > 0$. Якщо ж $f''(x_0) = 0$, то треба проводити додаткові дослідження.

Графік диференційовної функції $y = f(x)$, $x \in X$, називається **опуклим вниз** (**вгору**) на інтервалі (a, b), якщо він розміщений вище (нижче) будь-якої дотичної до нього в довільній його точці.

Якщо функція f двічі неперервно диференційовна на (a, b) і $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$), то її графік є опуклим вниз (вгору) на цьому інтервалі. У простих випадках область визначення функції f можна розбити на скінченне число інтервалів із сталим напрямком опуклості. Кожний з цих інтервалів обмежений точками, в яких $f''(x) = 0$ або $f''(x)$ не існує. Точка $(x_0, f(x_0))$, в якій напрямок опуклості графіка функції змінюється на протилежний, називається **точкою перегину**.

Необхідною умовою існування точки перегину x_0 функції f є рівність $f''(x_0) = 0$ або те, що $f''(x_0)$ не існує. Якщо ж функція f є диференційовною в точці x_0 і має другу похідну в деякому її околі, можливо, крім самої точки x_0, і при переході через неї друга похідна змінює знак, то в точці $(x_0, f(x_0))$ графік функції має перегин.

Перед побудовою графіка функції необхідно вияснити, чи має функція вертикальні, горизонтальні та похилі асимптоти. Якщо для деякої точки розриву a функції f

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \infty \text{ або } \lim_{x \to a+0} f(x) = \infty,$$

то пряму $x = a$ називають **вертикальною** асимптотою графіка функції f.

Для того, щоб пряма $y = kx + b$ була асимптотою графіка функції f при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$), необхідно і достатньо, щоб

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k \qquad \left(\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=k\right);$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=b \qquad \left(\lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx)=b\right).$$

Якщо $k=0$, то маємо горизонтальну асимптоту, а при $k\neq 0$ – похилу.

Для побудови графіка функції $y=f(x)$, $x\in X$, з неперервною другою похідною (скрізь в області визначення функції, можливо, крім скінченного числа точок) спочатку з'ясовують деякі особливості функції: симетрію, періодичність, сталість знаку, нулі, точки перетину з осями, точки розриву і т.п. Потім, використовуючи першу і другу похідні, знаходять точки екстремуму і перегину, інтервали монотонності й опуклості, а також асимптоти.

Приклад 1. Знайти інтервали монотонності функції

$$f(x)=\begin{cases} 1/e, & x<e,\\ \frac{\ln x}{x}, & x\geq e.\end{cases}$$

$\triangleleft$ Функція диференційовна на всій числовій осі, причому

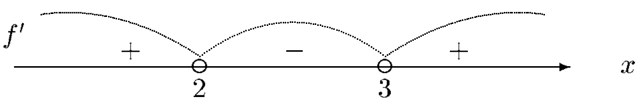
$$f'(x)=\begin{cases} 0, & x<e,\\ \frac{1-\ln x}{x^2}, & x\geq e.\end{cases}$$

Оскільки $f'(x)\leq 0$, $x\in\mathbb{R}$, то f є незростаючою на $\mathbb{R}$. Зауважимо, що на інтервалі $(-\infty;e)$ f є сталою, а на $(e;+\infty)$ – спадає. $\triangleright$

Приклад 2. Дослідити на екстремум функцію

$$f(x)=2x^3-15x^2+36x-14.$$

$\triangleleft$ Маємо $D(f)=\mathbb{R}$, $f'(x)=6x^2-30x+36$, або $f'(x)=6(x-2)(x-3)$. Звідси випливає, що $f'(x)=0$ при $x_1=2$, $x_2=3$. Отже, маємо дві критичні точки і залишилося перевірити, чи є в цих точках екстремум. Для цього методом інтервалів визначимо знак похідної



Таким чином, у точці $x_1=2$ функція f має максимум, а в точці $x_2=3$ – мінімум, причому $f_{\max}=f(2)=14$, $f_{\min}=f(3)=13$. $\triangleright$

Приклад 3. Функція повних витрат має вигляд $K(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$, де x – обсяг виробництва. Знайти, при якому обсязі виробництва середні витрати будуть мінімальними.

$\triangleleft$ Середні витрати $f(x) = \frac{K(x)}{x} = x^2 - 6x + 15$. Тоді $f'(x) = 2x - 6$ і $f'(x) = 0$ при $x_0 = 3$. Оскільки $f''(x) = 2 > 0$ для будь-якого x, то і $f''(3) > 0$, а це означає, що середні витрати мінімальні при $x_0 = 3$ і вони становлять $f(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 15 = 6$. $\triangleright$

Приклад 4. Виробник реалізує свою продукцію за ціною p грн. за одиницю, а витрати при цьому задаються залежністю $S(x) = ax + \lambda x^3$ ($a < p$, $\lambda > 0$). Знайти оптимальний для виробництва обсяг випуску продукції і прибуток, який йому відповідає.

$\triangleleft$ Позначимо обсяг виробленої продукції через x. Складемо функцію прибутку $C(x) = px - (ax + \lambda x^3)$, де px – доход від реалізації продукції. Маємо $C'(x) = (p - a) - 3\lambda x^2$, $C'(x) = 0$, тобто $(p - a) - 3\lambda x^2 = 0$, $x_1 = \sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}$, $x_2 = -\sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}$ (другий корінь не підходить за змістом задачі).

Знайдемо другу похідну і визначимо її знак у стаціонарній точці. $C''(x) = -6\lambda x$, $C''(x_1) = -6\lambda\sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}} = -6\sqrt{\frac{(p-a)\lambda}{3}} < 0$, а це означає, що в точці x_1 функція C має максимум, причому

$$C_{\max} = C(x_1) = p\sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}} - \left(a\sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}} + \lambda\left(\sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}\right)^3\right) = \frac{(p-a)\sqrt{p-a}}{3\sqrt{3\lambda}}. \triangleright$$

Приклад 5. Нехай для деякого товару криві попиту і пропозиції мають відповідно вигляд $p = -3x_1 + 80$, $p = x_2 + 8$, де x_1 – кількість товару, що відноситься до попиту, x_2 – до пропозиції, p – ціна. Кожна одиниця продукції обкладається податком t. Яку величину податку треба встановити, щоб надходження в казну були максимальними?

$\triangleleft$ Для того, щоб врахувати податки, досить у рівності, яке визначає пропозицію, замінити p на $p - t$, оскільки цю суму реально одержує виробник. Отже, можна переписати дану рівність у вигляді $p - t = x_2 + 8$ або $p = x_2 + 8 + t$.

У точці рівноваги $x_1 = x_2 = x$, тобто коли попит дорівнює пропозиції, тому одержуємо, що $\begin{cases} p = -3x + 80, \\ p = x + 8 + t. \end{cases}$ Тут ліві частини рівні, тоді будуть рівними і праві, тобто $-3x + 80 = x + 8 + t$ або $x = 18 - 0,25t$.

Відомо, що сумарний податок $T = tx$, $T = t(18 - 0,25t)$, $T = 18t - 0,25t^2$. Максимум цієї функції і треба знайти.

Маємо $T'(t) = 18 - 0,5t$. Прирівнявши цей вираз до нуля, знаходимо стаціонарну точку: $18 - 0,5t = 0$, $t_0 = 36$.

Оскільки $T''(t) = -0,5 < 0$, то в даній точці функція T має максимум, $T_{\max} = T(36) = 18 \cdot 36 - 0,25 \cdot 36^2 = 324$.

Таким чином, величина податку, з точки зору уряду, повинна складати 36 (гр. од.) на одиницю товару. ▷

Приклад 6. Знайти найбільше і найменше значення на відрізку $[0;6]$ функції $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x - 8$.

◁ Знайдемо спочатку критичні точки x_i, $i \in \{1, 2, ..., n\}$, функції f і розглянемо ті з них, які належать відрізкові $[0;6]$, а далі знаходимо значення функції f у цих точках і на кінцях відрізка. Найбільше з них є найбільшим значенням функції на даному відрізку, а найменше – найменшим значенням функції на даному відрізку.

Таким чином, $f'(x) = 6x^2 - 6x - 36 = 6(x+2)(x-3)$ і $f'(x) = 0$, коли $x_1 = -2$, $x_2 = 3$. Точка $x_2 = 3$ належить відрізкові $[0;6]$. Тоді $f(3) = -89$, $f(0) = -8$, $f(6) = 100$. Звідси випливає, що

$$\max_{x\in[0;6]} f(x) = f(6) = 100, \quad \text{а} \min_{x\in[0;6]} f(x) = f(3) = -89. \ \triangleright$$

Приклад 7. Капітал в 1 млрд. грн. можна помістити в банк під 50% річних або інвестувати у виробництво з очікуваною ефективністю в розмірі 100% і витратами, які виражаються залежністю αx^2. Прибуток оподатковується в розмірі p%. При яких значеннях p вкладення у виробництво є ефективнішим, ніж чисте розміщення капіталу в банку?

◁ Нехай x(млрд. грн.) інвестується у виробництво, а $(1-x)$(млрд. грн.) розміщується під проценти. Тоді капітал, який розміщений під проценти, через рік дорівнюватиме $(1-x)(1+\frac{50}{100}) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x$, а капітал, вкладений у виробництво — $x(1+\frac{100}{100}) = 2x$. Витрати виробництва складають αx^2, а тому прибуток $\Pi(x) = 2x - \alpha x^2$. Податки з цієї суми складуть $(2x - \alpha x^2)\frac{p}{100}$, тоді чистий прибуток дорівнюватиме $(1-\frac{p}{100})(2x - x^2)$.

Загальна сума через рік буде $A(x) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x + (1-\frac{p}{100})(2x - \alpha x^2) = \frac{3}{2} + (2(1-\frac{p}{100}) - \frac{3}{2})x - \alpha(1-\frac{p}{100})x^2$, і треба знайти максимальне значення цієї функції на відрізку $[0;1]$. Маємо $A'(x) = 2(1-\frac{p}{100}) - \frac{3}{2} - 2\alpha(1-\frac{p}{100})x$ і $A'(x) = 0$ при $x_0 = \frac{2(1-\frac{p}{100}) - \frac{3}{2}}{2\alpha(1-\frac{p}{100})}$.

Оскільки $A''(x) = -2\alpha(1-\frac{p}{100}) < 0$, то в точці x_0 функція A має максимум.

Очевидно, що точка x_0 належить відрізку $[0;1]$, коли $0 < 2(a - \frac{p}{100}) - \frac{3}{2} < 1$ або $p > 25$.

Таким чином, якщо $p > 25$, то вигідніше не інвестувати виробництво, а розмістити весь капітал під проценти в банку. Якщо

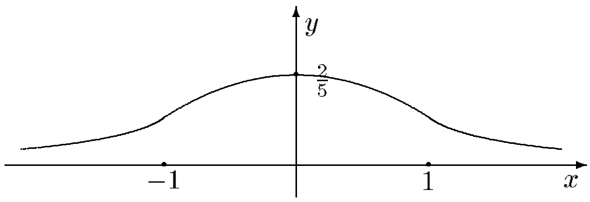
$p < 25$, то $A(x_0) = \frac{3}{2} + \frac{\left(2(1-\frac{p}{100})-\frac{3}{2}\right)^2}{4\alpha(1-\frac{p}{100})} > \frac{3}{2} = A(0)$, тобто вкладення у виробництво є вигіднішим, ніж чисте розміщення під проценти.

Приклад 8. Провести повне дослідження функції $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ та побудувати її графік.

$\triangleleft$ Функція визначена і неперервна на всій числовій осі, парна і додатна. Це означає, що її графік симетричний відносно осі Oy і лежить вище осі Ox. Оскільки $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}}{x} = 0$, $b = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} = 0$, то пряма $y = 0$ є горизонтальною асимптотою. Обчислимо першу похідну $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}(-x) = -xf(x)$. Звідси одержуємо, що $f'(x) = 0$, коли $x = 0$, бо $f(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Якщо $x < 0$, то $f'(x) > 0$, а якщо $x > 0$, то $f'(x) < 0$. Отже, в точці $x = 0$ функція має максимум $f_{\max} = f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^0 \approx 0,4$.

Для відшукання проміжків опуклості функції знайдемо другу похідну $f''(x) = f(x)x^2 - f(x) = f(x)(x^2-1)$. У точках $x_1 = -1$ і $x_2 = 1$ друга похідна дорівнює нулю. На інтервалах $(-\infty; -1)$ і $(1; \infty)$ друга похідна $f''(x) > 0$, тобто графік опуклий вниз, а на інтервалі $(-1; 1)$ $f''(x) < 0$, тобто графік опуклий вгору. Звідси випливає, що в точках $(-1; f(-1))$ і $(1; f(1))$ графік функції має перегин.

Графік функції має вигляд



$\triangleright$

Вправи

О1. Знайти інтервали монотонності функцій:
1) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 5$; 2) $f(x) = x - e^x$; 3) $f(x) = 2x^2 - \ln x$;
4) $f(x) = x^2 - 2\cos x$, $x \in [0; 2\pi]$.

О2. Знайти екстремуми функцій:
1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$; 2) $f(x) = \frac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$; 3) $f(x) = x - \ln(1+x)$;

4) $f(x) = 1 - (x-2)^{4/5}$.

О3. Знайти найбільше і найменше значення функції:

1) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$ на $[-2; 2]$;

2) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ на $[-1; 2]$; 3) $f(x) = \frac{1-x-x^2}{1+x-x^2}$ на $[0; 1]$.

О4. Підприємство виробляє x одиниць продукції за місяць. Залежність фінансових нагромаджень підприємства f від обсягу випуску

продукції визначається формулою $f = -0,01x^3 + 300x - 500$. Знайти, при якому обсязі випуску продукції фінансові нагромадження зменшуються.

О5. Нехай виробнича функція f залежить лише від чисельності персоналу фірми і має вигляд $f = 6x^2 - 0,2x^3$, де f – випуск продукції, x – число працівників.

Знайти чисельність штату, при якій випуск продукції досягає найбільшого значення.

О6. Відомо, що функція доходу $P(x) = 16x - x^2$, а функція витрат на виробництво продукції $S(x) = x^2 + 1$, де x – обсяг виробленої продукції . Підприємство сплачує податок t з одиниці продукції, а тому функція прибутку $\pi(x) = P(x) - S(x) - tx$. Яким повинен бути податок t, щоб величина сумарного податку $T = tx$ була найбільшою?

О7. Функція сумарних витрат має вигляд $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$, де x – обсяг виробленої продукції. При якому обсязі виробництва середні витрати $S(x) = f(x)/x$ будуть мінімальними?

О8. Число 8 подати у вигляді двох доданків так, щоб сума їх кубів була найменшою.

О9. Провести повне дослідження та побудувати графіки функцій:
1) $f(x) = \frac{x^3+2x^2+7x-3}{2x^2}$; 2) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-3}$; 3) $f(x) = 4x^2 - x^4 - 3$.

О10. Знайти інтервали опуклості і точки перегину графіків функцій: 1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + x$; 2) $f(x) = x^3 - 6x^2$;
3) $f(x) = 2x^2 + \ln x$; 4) $f(x) = e^{-x^2}$.

О11. Дослідити функції та побудувати їхні графіки:
1) $y = x^2 + x$; 2) $y = x^3 - 12x^2 + 36x$; 3) $y = (2+x)e^{-x}$.

C1. Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^x$ на проміжку $[0,1;\infty)$.

C2. Бічні сторони і менша основа трапеції дорівнюють 10 см. Знайти її більшу основу так, щоб площа трапеції була найбільшою.

C3. База сировини підприємства, яке необхідно збудувати над річкою, знаходиться у точці A на відстані $AA_1 = a$ від річки, пункт збуту – у точці B на відстані $BB_1 = b$ від річки. Відомо, що $A_1B_1 = c$. Розрахувати, в якій точці над річкою слід розмістити підприємство, щоб транспортні витрати були найменшими.

C4. Картину, висота якої 1,4 м, повісили на стіну так, що її нижній край є на 1,8 м вище від ока спостерігача. На якій відстані від стіни повинен стати спостерігач , щоб якнайкраще оглянути картину (тобто кут зору має бути найбільшим) ?

C5. Відомо, що прогнозована ціна пакета акцій має вигляд $C = C_0\frac{gr}{(r_e-r)+gr}$, де C_0 – номінальна ціна пакета, r – відносний прибуток корпорації, g – частка прибутку, яка йде на виплату дивідендів, r_e – найефективніша ставка, за якою можна реінвестувати дивіденди.

Розглядаються два пакети акцій одиничного номіналу з такими характеристиками: $r_1 = 0,2; r_2 = 0,4; g_1 = g_2 = g$. Відомо, що $r_e = 0,5$. Інвестор продав перший пакет акцій і купив другий. При яких значеннях g ця операція дасть найбільший прибуток?

C6. Провести повне дослідження та побудувати графік функції: 1) $f(x) = x^3 - 3x$; 2) $y = x - 2\mathrm{arctg}x$.

Домашнє завдання

Д1. Дослідити на монотонність функції: 1) $f(x) = x + \cos x$; 2) $f(x) = 4x - x^3$; 3) $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$, $x \in [0; 2\pi]$; 4) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$; 5) $y = \sqrt{2x - x^2}$, $x \in [0; 2]$.

Д2. Відомо, що функція середніх витрат $\Pi(x) = x$, а функція попиту $p(x) = 10 - 3x$. Знайти, при якому обсязі виробництва прибуток виробника буде найбільшим. (Врахувати, що повні витрати $K(x) = x\Pi(x)$, сумарний виторг $U(x) = x(x)$, а прибуток $Z(x) = U(x) - K(x)$).

Д3. Нехай функція доходу $P(x) = 100x - x^2$, а функція витрат $S(x) = x^3 - 37x^2 + 169x + 4000$, де x – кількість реалізованого товару. Дослідити на максимум функцію прибутку $\Pi(x) = P(x) - S(x)$.

Д4. Загальна вартість вироблених x одиниць продукції $f(x) = 100000 + 1500x + 0,2x^2$. Скільки одиниць продукції x слід випускати, щоб середня вартість одиниці продукції $S(x) = f(x)/x$ була мінімальною?

Д5. Знайти екстремуми функції: 1) $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3$; 2) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$; 3) $f(x) = x - \mathrm{arctg} 2x$; 4) $f(x) = (x-2)^{2/3}(2x+1)$.

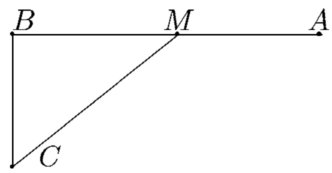
Д6. При якому значенні a функція $f(x) = a \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x$ має екстремум при $x = \pi/3$? Це буде максимум чи мінімум?

Д7. Сіткою довжиною 120м треба обгородити прилеглу до будинку прямокутну ділянку найбільшої площі. Знайти розміри даної ділянки.

Д8. Число 10 подати як суму двох доданків так, щоб їх добуток був найбільшим.

Д9. На параболі $y = x^2$ знайти точку, найближчу до прямої $y = 2x - 4$.

Д10. Вздовж прямої AB проходить залізниця. На відстані l від пункту B знаходиться пункт C, з якого треба перевезти вантаж у пункт A. Нехай з C можна по прямій дістатись до довільної точки M залізниці. По якій трасі треба перевозити вантаж з пункту C до залізниці,а далі залізницею до пункту A, щоб траспортні витрати були найменшими, якщо перевезення 1 тонни вантажу автотранспортом втричі дорожче, ніж залізницею. Вважається, що транспортні витрати пропорційні відстані.



Д11. Знайти найбільші та найменші значення функцій:
1) $f(x) = x + \sqrt{x}$, $x \in [0;4]$; 2) $f(x) = e^{2x} - e^{-2x}$, $x \in [-2;1]$;
3) $f(x) = xe^{-x^2/2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Д12. Знайти ділянки опуклості графіка кривої:
1) $f(x) = x^5 + 5x - 6$; 2) $f(x) = xe^x$.

Д13. Знайти точки перегину кривої:
1) $y = (x-5)^{5/3} + 2$; 2) $y = (x-4)^5 + 4x + 4$.

Д14. Провести повне дослідження та побудувати графіки функцій: 1) $y^2 = x^3$; 2) $y^2 = (x+3)^2$; 3) $y = \frac{e \cdot \ln x}{x}$;
4) $y = \frac{x^3+4}{x^2}$; 5) $y = \sqrt[3]{1-x^3}$; 6) $y = \frac{1}{x} + 4x^2$.

Відповіді

О1. 1) Спадає на $(-\infty; -1)$ і $(0; 1)$; зростає на $(-1; 0)$ і $(1; +\infty)$; 2) зростає на $(-\infty; 0)$, спадає на $(0; +\infty)$; 3) спадає на $(0; \frac{1}{2})$, зростає на $(\frac{1}{2}; +\infty)$; 4) спадає на $(0; \frac{\pi}{3})$ і $(\frac{5\pi}{3}; 2\pi)$, зростає на $(\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3})$.
О2. 1) $y_{\max} = y(0) = 0$, $y_{\min} = y(1) = -1$; 2) $y_{\max} = y(0) = 4$, $y_{\min} = y(-2) = \frac{8}{3}$; 3) $y_{\min} = y(0) = 0$; 4) $y_{\max} = y(2) = 1$. **О3.** 1) $M = 13$, $m = 4$; 2) $M = 2$; $m = -10$; 3) $M = 1$; $m = 3/5$. **О4.** Більше 100 одиниць.
О5. $x_0 = 20$, $f_{\max} = 800$. **О6.** $t_0 = 8$, $x_0 = 2$, $\Pi_{\max} = 7$, $T_{\max} = 16$ [знайти x (при відомому t), яке реалізує екстремум Π, і дослідити на екстремум $T = T(x)$)]. **О7.** $x_0 = 3$, $S(x_0) = 6$. **О8.** 4 і 4. **О9.** 1) $D(y) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $y_{\max} = y(1) = \frac{7}{2}$, $y_{\max} = y(-3) = -\frac{11}{6}$; $y_{\min} = y(2) = \frac{27}{8}$; перегин при $x = 9/7$; $x = 0$ – вертикальна асимптота, $y = \frac{1}{2}x + 1$ – похила асимптота; 2) $D(y) = (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; \infty)$, $y_{\max} = y(-3) = -9/2$; $y_{\min} = y(3) = 9/2$; перегин при $x = 0$; $x = \pm\sqrt{3}$ – вертикальні асимптоти; $y = x$ – похила асимптота; 3) $D(y) = \mathbb{R}$, $y_{\min} = y(0) = -3$, $y_{\max} = y(-\sqrt{2}) = y(\sqrt{2}) = 1$; перегин при $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; асимптот немає.
О10. 1) Опуклість вгору на інтервалах $(-\infty; -\sqrt{3})$ і $(\sqrt{3}; \infty)$; опуклість вниз на інтервалі $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$; $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$ – абсциси точок перегину; 2) опуклість вгору на інтервалі $(-\infty; 2)$; опуклість вниз на інтервалі $(2; \infty)$; точка перегину $(2; -16)$; 3) опуклість вгору на $(0; 1/2)$, опуклість вниз на $(1/2; \infty)$; точка перегину $(1/2; 1/2 - \ln 2)$; 4) опуклість вгору на $(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}})$, опуклість вниз на $-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}})$ і $(\frac{q}{\sqrt{2}}; \infty)$; точки перегину $(-\frac{1}{\sqrt{2}}; e^{-1/2})$ і $(\frac{1}{\sqrt{2}}; e^{-1/2})$. **О11.** 1) Функція спадає на $(-\infty; -\frac{1}{2})$, зростає на $(-\frac{1}{2}; +\infty)$; $y_{\min} = y(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$; опукла вниз на $(-\infty; \infty)$; 2) функція

зростає на $(-\infty; 2)$ і на $(6; \infty)$, спадає на $(2; 6)$; $y_{\max} = y(2) = 32$, $y_{\min} = y(6) = 0$; опукла вгору на $(-\infty; 4)$, опукла вниз на $(4; \infty)$; точка перегину $(4; 16)$; 3) правобічна асимптота $y = 0$; функція зростає на $(-\infty; -1)$, спадає на $(-1; \infty)$; $y_{\max} = y(-1) = 2$; опукла вгору на $(-\infty; 0)$, опукла вниз на $(0; \infty)$; точка перегину $(0; 2)$. **С1.** $m = \left(\frac{1}{e}\right)^{1/e}$; **С2.** $20c$. **С3.** На відстані $\frac{ac}{a+b}$ від точки A_1 або $\frac{bc}{a+b}$ від точки B_1. **С4.** $2,4$. **С5.** $g = \sqrt{\frac{3}{8}} \approx 0,61$ [дослідити на екстремум функцію $f(g) = C_2 - C_1)$]. **С6.** 1) $D(f) = \mathbb{R}$; $y_{\max} = y(-1) = 2$, $y_{\min} = y(1) = -2$; перегин при $x = 0$; асимптот немає; 2) $D(y) = \mathbb{R}$; $y_{\max} = y(-1) = \pi/2 - 1$, $y_{\min} = y(1) = 1 - \pi/2$; перегин при $x = 0$; $y = x \pm \pi$ – похилі асимптоти. **Д1.** 1) Зростає на $(-\infty; \infty)$; 2) спадає на $(-\infty; -\frac{2}{\sqrt{3}})$ і $(\frac{2}{\sqrt{3}}; +\infty)$, зростає на $(-\frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{2}{\sqrt{3}})$;
3) зростає на $(0; \frac{\pi}{6})$, $(\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6})$ і $(\frac{3\pi}{2}; 2\pi)$, спадає на $(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2})$ і $(\frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2})$;
4) зростає на $(-\infty; \infty)$; 5) зростає на $(0; 1)$, спадає на $(1; 2)$. **Д2.** $Z_{\max} = Z(\frac{5}{4}) = \frac{25}{4}$. **Д3.** $x_0 = 23$, $\Pi_{\max} = \Pi(23) = 1290$. **Д4.** $x_0 \approx 707$, $S(x_0) \approx 1782,8$. **Д5.** 1) $f_{\min} = f(3) = -27/4$; 2) $f_{\max} = f(0) = 1$; 3) $f_{\min} = f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$; $f_{\max} = f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$; 4) $y_{\max} = y(1) = 3$, $y_{\min} = y(2) = 0$. **Д6.** При $a = 2$ максимум. **Д7.** 30×60. **Д8.** 5 і 5. **Д9.** (1; 1). **Д10.** Пункт M повинен знаходитися на відстані $\frac{1}{4}l\sqrt{2}$ від пункту B. **Д11.** 1) $M = 6, m = 0$; 2) $M = e^2 - e^{-2}$, $m = e^{-4} - e^4$; 3) $M = \frac{1}{\sqrt{e}}$, $m = -\frac{1}{\sqrt{e}}$. **Д12.** 1) Опукла вгору на $(-\infty; 0)$ і вниз на $(0; \infty)$; 2) опукла вгору на $(-\infty; -2)$ і вниз на $(-2; \infty)$. **Д13.** 1) $(5; 2)$; 2) $(4; 20)$. **Д14.** 1) Симетрична відносно Ox, $D(y) = [0; \infty)$, верхня частина опукла вгору, а нижня – опукла вниз, обидві частини дотикаються в точці (0; 0); 2) графік аналогічний графіку в 1), але зсунутий на 3 одиниці вліво; 3) $D(y) = (0; \infty)$; $y_{\max} = y(e) = 1$; асимптоти – осі Ox і Oy; 4) $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; $y_{\min} = y(2) = 3$; $x = 0$ – вертикальна асимптота, $y = x$ – похила асимптота; 5) $D(y) = (-\infty; \infty)$; спадає на $(-\infty; \infty)$; $(0; 1)$ і $(1; 0)$ – точки перегину; $y = -x$ – похила асимптота; 6) $D(y) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $y_{\min} = y(1/2) = 3$; перегин при $x = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$; $x = 0$ – вертикальна асимптота.

Тема 18. Невизначений інтеграл. Найпростіші методи інтегрування

Функція F називається **первісною** для функції f, заданої на деякій множині X, якщо $F'(x) = f(x)$ для всіх $x \in X$. Якщо F і Φ – дві первісні для однієї і тієї самої функції f, то $\Phi(x) = F(x) + C$, де $C = const$, $x \in X$. Навпаки, якщо F – деяка первісна для функції f, то $F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$, $x \in X$ – сукупність усіх її первісних, яку називають **невизначеним інтегралом** від функції f і позначають символом $\int f(x)dx$. Таким чином, згідно з означенням

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad x \in X, \tag{1}$$

де F – одна із первісних для функції f , а C – довільна стала з $\mathbb{R}$.

Невизначений інтеграл має такі властивості:

1^0. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x), \quad d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$

2^0. $\int F'(x)dx = F(x) + C, \quad \int dF(x) = F(x) + C;$

3^0. $\int (af(x))dx = a \int f(x)dx, \quad a \in \mathbb{R};$

4^0. $\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx;$

5^0. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$,

то $\quad \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C; \{a, b\} \in \mathbb{R}, a \neq 0;$

6^0. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$ і $u = \varphi(x)$, то $\int f(u)du = F(u) + C$.

Якщо скористатись формулою (1) і таблицею похідних основних елементарних функцій, то одержимо **таблицю основних інтегралів**. Кожна наступна формула правильна на проміжку, що належить області визначення підінтегральної функції.

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \qquad \alpha \neq -1.$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$, $x \neq 0$.

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0,\ a \neq 1, \quad \int e^x dx = e^x + C.$
4. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$
5. $\int \cos x dx = \sin x + C.$
6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C.$
7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C.$
8. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \mid \mathrm{tg}\frac{x}{2} \mid +C.$
9. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \mid \mathrm{tg}(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) \mid +C.$
10. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0.$
11. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \mid \frac{x-a}{x+a} \mid +C.$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad \mid x \mid < \mid a \mid .$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln \mid x + \sqrt{x^2 - a^2} \mid +C, \quad \mid x \mid > \mid a \mid .$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln \mid x + \sqrt{x^2 + a^2} \mid +C.$

Знаходження невизначеного інтеграла за допомогою таблиці основних інтегралів і властивостей 3^0 і 4^0 називають **безпосереднім інтегруванням**.

Приклад 1. Знайти інтеграл $I = \int (x^5 - 2x^2 + 4x - 6)dx$.

$\triangleleft\ I = \int x^5 dx - 2\int x^2 dx + 4\int x dx - 6\int dx = \frac{x^6}{6} - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 6x + C.\ \triangleright$

Приклад 2. Знайти інтеграл $I = \int \frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$.

$$\triangleleft\ I = \left| \frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{x+2}{x^{\frac{2}{3}}} = x^{\frac{1}{3}} + 2x^{-\frac{2}{3}} \right| = \int x^{\frac{1}{3}} dx + 2\int x^{-\frac{2}{3}} dx =$$

$$= \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + 6x^{\frac{1}{3}} + C.\ \triangleright$$

Приклад 3. Знайти інтеграл $I = \int \mathrm{ctg}^2 x dx$.

$$\triangleleft\ I = \left| \mathrm{ctg}^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right| = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx =$$

$$= -\mathrm{ctg} x - x + C.\ \triangleright$$

Приклад 4. Знайти інтеграл $I = \int \frac{x^2}{2+x^2} dx$.

$$\triangleleft\ I = \left| \frac{x^2}{2+x^2} = \frac{(x^2+2)-2}{2+x^2} = 1 - \frac{2}{2+x^2} \right| = \int dx - 2\int \frac{dx}{2+x^2} =$$

$$= x - \frac{2}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C = x - \sqrt{2}\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C.\ \triangleright$$

Приклад 5. Знайти інтеграл $I = \int 3^{2x} 2^x dx$.

$\triangleleft\ I = \left| 3^{2x}2^x = 9^x 2^x = 18^x \right| = \int 18^x dx = \frac{18^x}{\ln 18} + C.\ \triangleright$

Приклад 6. Нехай для деякої фірми відомі граничні витрати $f'(x) = x^2+3x+5$. Треба знайти сумарні витрати за умови, що початкові витрати дорівнювали 90 ум.од.

$\triangleleft$ Оскільки $f(x) = \int f'(x)dx$, то маємо, що $f(x) = \int (x^2+3x+5)dx = = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 5x + C$. Для знаходження C скористаємося тим, що $f(0) = 90$. Тоді $\frac{0^3}{3} + \frac{3}{2}\cdot 0^2 + 5\cdot 0 + C = 90$, $C = 90$.

Отже, сумарні витрати $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 5x + 90.\ \triangleright$

Властивість 6^0 дозволяє значно розширити застосування таблиці інтегралів за допомогою підведення функцій під знак диференціала.

Приклад 7. Знайти інтеграл $I = \int (5x+3)^6 dx$.

$\triangleleft\ I = \left| dx = \frac{1}{5}d(5x+3) \right| = \frac{1}{5}\int (5x+3)^6 d(5x+3) = \frac{(5x+3)^7}{5\cdot 7} + C =$

$= \frac{(5x+3)^7}{35} + C.\ \triangleright$

Приклад 8. Знайти інтеграл $I = \int \frac{\ln x}{x} dx$.

$\triangleleft\ I = \left| \frac{dx}{x} = d\ln x \right| = \int \ln x d\ln x = \frac{(\ln x)^2}{2} + C.\ \triangleright$

Приклад 9. Знайти інтеграл $I = \int (x^2-3x+1)^3(2x-3)dx$.

$\triangleleft\ I = \left| d(x^2-3x+1) = (2x-3)dx \right| = \int (x^2-3x+1)^3 d(x^2-3x+1) =$

$= \frac{(x^2-3x+1)^4}{4} + C.\ \triangleright$

Приклад 10. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $A(\frac{1}{2}; \frac{\pi}{2})$ і для якої кутовий коефіцієнт у кожній її точці дорівнює $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$\triangleleft$ Згідно з умовою і геометричним змістом похідної маємо: $y'(x) = = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Тому $y(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$. Оскільки шукана крива проходить через точку $A(\frac{1}{2}; \frac{\pi}{2})$, то $\frac{\pi}{2} = \arcsin\frac{1}{2} + C$, або $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} + C$, $C = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$. Отже, рівняння шуканої кривої $y = \arcsin x + \frac{\pi}{3}.\ \triangleright$

Вправи

О1. Знайти інтеграли: 1) $\int (3x+2)dx$; 2) $\int (2x^4 - 6x^5 + 3x^2 + 7)dx$; 3) $\int (\sqrt{x})^5 dx$; 4) $\int \frac{t}{\sqrt[3]{t}}dt$; 5) $\int \frac{x^3-3x+1}{\sqrt{x}}dx$;

6) $\int \frac{x^2}{x^2+1}dx$; 7) $\int \mathrm{tg}^2 x dx$; 8) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}$; 9) $\int 2\sin^2\frac{x}{2}dx$;
10) $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx$; 11) $\int \frac{dx}{\cos 2x+\sin^2 x}$; 12) $\int \frac{3\cdot 2^x-2\cdot 3^x}{2^x}dx$; 13) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$;
14) $\int \sqrt{8-2x}dx$; 15) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$; 16) $\int \mathrm{tg} x dx$; 17) $\int \cos(1-2x)dx$;
18) $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx$; 19) $\int 2^{x^2}xdx$; 20) $\int \frac{3^x dx}{\sqrt{1-9^x}}$;
21) $\int (x^4+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})dx$; 22) $\int \frac{x^4+x^2+x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{x^2}dx$;
23) $\int \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx$.

O2. Для функції f знайти ту первісну, яка задовольняє умову $F(x_0)=y_0$, якщо: 1) $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=9$, $y_0=5$;
2) $f(x)=\frac{1}{x}$, $x_0=1$, $y_0=3$.

O3. Знайти функцію споживання f, якщо гранична схильність до споживання виражається рівністю $f'(y) = 0,5+\frac{0,1}{\sqrt{y}}$, де y – національний доход, а споживання складає 85 ум.од., коли національний доход дорівнює 100 ум.од.

O4. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку A(1;0), а кутовий коефіцієнт дотичної до неї у кожній її точці дорівнює $2x-1$.

C1. Знайти інтеграли: 1) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$; 2) $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x}dx$;
3) $\int \frac{x(1-x^2)}{1+x^4}dx$; 4) $\int \frac{3x-1}{x^2+9}dx$; 5) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^8}}$; 6) $\int \frac{2x-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$;
7) $\int \cos 3x dx$; 8) $\int (2\mathrm{tg} x+3\mathrm{ctg} x)^2 dx$; 9) $\int \frac{dx}{x\ln x}$; 10) $\int e^x(1-\frac{e^{-x}}{x^2})dx$;
11) $\int \frac{x^4}{1+x^2}dx$; 12) $\int \cos(\sin x)\cos x dx$.

Домашнє завдання

Д1. Знайти інтеграли:
1) $\int x\sqrt{x}dx$; 2) $\int \frac{2-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx$; 3) $\int \frac{2-x^4}{1+x^2}dx$; 4) $\int e^{3x}3^x dx$;
5) $\int \left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$; 6) $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}dx$; 7) $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx$; 8) $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx$;
9) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-3x^2}}$; 10) $\int e^x\sin e^x dx$; 11) $\int \sqrt{\sin x}\cos x dx$; 12) $\int \frac{x^2}{x^3+1}dx$;
13) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$; 14) $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$; 15) $\int 3^{x^3}x^2 dx$;
16) $\int (x^2\sqrt{x}+x\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}})dx$; 17) $\int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx$; 18) $\int \frac{x^5-x+1}{x^2+1}dx$.

Д2. Знайти сумарний доход p, якщо відомий граничний доход $p'(x) = 9 - 6x$, де x – кількість виробленої продукції, і $p(0) = 0$.

Відповіді

О1. 1) $\frac{3}{2}x^2 + 2x + C$; 2) $\frac{2}{5}x^5 - x^6 + x^3 + 7x + C$; 3) $\frac{2}{7}x^3\sqrt{x} + C$; 4) $\frac{3}{5}t\sqrt[3]{t^2} + C$; 5) $\frac{2}{7}x^3\sqrt[3]{x} - 2x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C$; 6) $x - \mathrm{arctg}x + C$; 7) $\mathrm{tg}x - x + C$; 8) $\mathrm{tg}x - \mathrm{ctg}x + C$; 9) $x - \sin x + C$; 10) $\ln \mid x \mid + 2\mathrm{arctg}x + C$; 11) $\mathrm{tg}x + C$; 12) $3x - 2\left(\frac{3}{2}\right)^x \frac{1}{\ln\frac{3}{2}} + C$; 13) $\sqrt{x^2+1} + C$; 14) $-\frac{\sqrt{(8-2x)^3}}{3} + C$; 15) $\frac{1}{\cos x} + C$; 16) $-\ln \mid \cos x \mid + C$; 17) $-\frac{1}{2}\sin(1-2x) + C$; 18) $\frac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + C$; 19) $\frac{2^{x^2}}{2\ln 2} + C$; 20) $\frac{1}{\ln 3}\arcsin 3^x + C$; 21) $\frac{x^5}{5} + \frac{4}{3}x^{3/2} + \frac{3}{4}x^{4/3} + \ln x - \frac{1}{x} + C$; 22) $\frac{x^3}{2} + x + \ln x - 2x^{-1/2} - \frac{3}{2}x^{-3/2} + C$; 23) $x^3 + \mathrm{arctg}\,x + C$. **О2.** 1) $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 13$; 2) $y = \ln \mid x \mid + 3$. **О3.** $f(y) = 0,5y + 0,2\sqrt{y} + 33$. **О4.** $y = x^2 - x$. **С1.** 1) $-\mathrm{tg}x - \mathrm{ctg}x + C$; 2) $e^x + e^{-x} + C$; 3) $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}x^2 - \frac{1}{4}\ln(x^4+1) + C$; 4) $\frac{3}{2}\ln(x^2 + 9) - \frac{1}{3}\mathrm{arctg}\frac{x}{3} + C$; 5) $\frac{1}{4}\arcsin x^4 + C$; 6) $-2\sqrt{1-x^2} - \frac{2}{3}\sqrt{(\arcsin x)^3} + C$; 7) $\frac{1}{3}\sin 3x + C$; 8) $4\mathrm{tg}x - 9\mathrm{ctg}x - x + C$; 9) $\ln \mid \ln x \mid + C$; 10) $e^x + \frac{1}{x} + C$; 11) $\frac{x^3}{3} - x + \mathrm{arctg}x + C$; 12) $\sin(\sin x) + C$. **Д1.** 1) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C$; 2) $2\arcsin x - x + C$; 3) $\mathrm{arctg}x - x - \frac{x^3}{3} + C$; 4) $\frac{e^{3x}3^x}{3+\ln 3} + C$; 5) $\frac{x^2}{2} - 2x + \ln \mid x \mid + C$; 6) $\frac{2x^2-12x-6}{3\sqrt{x}} + C$; 7) $\mathrm{arctg}x - \frac{1}{x} + C$; 8) $\frac{1}{2}(\mathrm{tg}x + x) + C$; 9) $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin x + C$; 10) $-\cos e^x + C$; 11) $\frac{2}{3}\sin x\sqrt{\sin x} + C$;12) $\frac{1}{3}\ln\|x^3+1\| + C$; 13) $\frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3} + C$; 14) $-\frac{1}{\arcsin x} + C$; 15) $\frac{3^{x^3}}{3\ln 3} + C$; 16) $\frac{2}{7}x^{7/2} + \frac{3}{7}x^{7/3} - 2\sqrt{x} + \frac{3}{2}x^{2/3} + C$; 17) $-\mathrm{ctg}\,x - x + C$; 18) $\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \mathrm{arctg}\,x + C$. **Д2.** $p(x) = 9x - 3x^2$.

Тема 19. Заміна змінної в невизначеному інтегралі. Інтегрування частинами

Заміна змінної в невизначеному інтегралі проводиться за допомогою підстановок двох видів:

1) $x = \varphi(t)$, де φ – монотонна, неперервно диференційовна функція нової змінної t; формула заміни у цьому випадку така:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))(\varphi)'(t)dt;$$

2) $v = \psi(x)$, де v – нова змінна; формула заміни змінної при такій підстановці

$$\int f(\psi(x))\psi'(x)dx = \int f(v)dv.$$

Приклад 1. Знайти інтеграл $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}$.

$\triangleleft\ I = \left| {\sqrt{x}=t, \atop x=t^2,} dx = 2tdt \right| = \int \frac{2tdt}{t(t^2-1)} = 2\int \frac{dt}{t^2-1} =$

$= 2 \cdot \frac{1}{2} \ln \mid \frac{t-1}{t+1} \mid +C = \ln \mid \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \mid +C.\ \triangleright$

Приклад 2. Знайти інтеграл $I = \int \frac{\ln x+2}{x\sqrt{\ln x}}dx$.

$\triangleleft\ I = \left| \ln x = t, \frac{1}{x}dx = dt \right| = \int \frac{t+2}{\sqrt{t}}dt = \int t^{\frac{1}{2}}dt + 2\int t^{-\frac{1}{2}}dt =$

$= \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + 4t^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + 4\sqrt{t} + \ = \frac{2}{3}(\sqrt{\ln x})^3 + 4\sqrt{\ln x} + C.\ \triangleright$

Приклад 3. Знайти інтеграл $I = \int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$.

$\triangleleft\ I = \left| {\sqrt{e^x-1}=t,\ e^x=t^2+1, \atop e^x-1=t^2,\ e^x dx=2tdt,} dx = \frac{2tdt}{t^2+1} \right| = \int \frac{2tdt}{(t^2+1)t} =$

$= 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2\mathrm{arctg}t + C = 2\mathrm{arctg}\sqrt{e^x-1} + C.\ \triangleright$

Якщо u і v – неперервно диференційовні функції, то правильна така формула інтегрування частинами:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

За допомогою цієї формули знаходження інтеграла $\int udv$ зводиться до знаходження іншого інтеграла $\int vdu$. Її застосування доцільне у випадку, коли останній інтеграл або простіший за вихідний, або подібний до нього. При цьому за u береться така функція, яка при диференціюванні спрощується, а за dv - та частина підінтегрального виразу, інтеграл від якої відомий або його можна легко знайти.

Наприклад, для інтегралів вигляду $\int P(x)e^{ax}dx, \int P(x)\sin axdx$, $\int P(x)\cos axdx$, де P – многочлен, за u треба брати P, а за dv – відповідно вирази $e^{ax}dx$, $\sin axdx$, $\cos axdx$; для інтегралів вигляду $\int P(x)\ln xdx$, $\int P(x)\arcsin xdx$, ..., $\int P(x)\mathrm{arcctg}xdx$ за u беруть відповідно функції $\ln x$, $\arcsin x$,..., $\mathrm{arcctg}x$, а за dv – вираз $P(x)dx$.

Приклад 4. Знайти інтеграл $I = \int x\sin xdx$.

$$\triangleleft\ I = \left| \begin{array}{ll} u = x\ , & dv = \sin xdx, \\ du = dx, & v = -\cos x \end{array} \right| = -x\cos x - \int(-\cos x)dx =$$

$$= -x\cos x + \sin x + C.\ \triangleright$$

Приклад 5. Знайти інтеграл $I = \int \mathrm{arctg}xdx$.

$$\triangleleft\ I = \left| \begin{array}{ll} u = \mathrm{arctg}x, & dv = dx, \\ du = \frac{dx}{1+x^2}, & v = x \end{array} \right| = x\mathrm{arctg}x - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} =$$

$$= x\mathrm{arctg}x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.\ \triangleright$$

Приклад 6. Знайти інтеграл $I = \int e^{ax}\cos bxdx$.

$$\triangleleft\ I = \left| \begin{array}{ll} u = e^{ax}, & dv = \cos bxdx, \\ du = ae^{ax}dx, & v = \frac{\sin bx}{b} \end{array} \right| = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bxdx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u=e^{ax}, & dv=\sin bxdx, \\ du=ae^{ax}dx, & v=-\frac{\cos bx}{b} \end{array} \right| = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}(-\frac{e^{ax}}{b}\cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bxdx) =$$

$$= \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}I,$$

звідки знаходимо, що $I = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax} + C$. ▷

Вправи

О1. Використовуючи формулу заміни змінної, знайти інтеграли:
1) $\int \sin\frac{x}{2}dx$; 2) $\int \frac{dx}{\cos^2 5x}$; 3) $\int \sqrt[3]{5-6x}dx$; 4) $\int \mathrm{tg}x dx$; 5) $\int e^{-x^2}xdx$;
6) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}$; 7) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$; 8) $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^x+1}}$; 9) $\int \sqrt{1+\cos^2 x}\cdot\cos 2x \sin 2x dx$;
10) $\int \frac{3x-4}{x^2-4}dx$; 11) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$ [підстановка $x = \frac{1}{t}$]; 12) $\int \frac{xdx}{1+x^2}$;
13) $\int x^2 e^{2x^3+1}dx$; 14) $\int e^{\cos x}\sin x dx$; 15) $\int \frac{lnxdx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

О2. Застосовуючи інтегрування частинами, знайти інтеграли:
1) $\int xe^{2x}dx$; 2) $\int x^2\cos x dx$; 3) $\int e^x \sin x dx$; 4) $\int (\ln x)^2 dx$; 5) $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$;
6) $\int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1+x}}$; 7) $\int \frac{x\cos x dx}{\sin^3 x}$; 8) $\int x\mathrm{arctg}x dx$; 9) $\int \cos(\ln x)dx$;
10) $\int x2^{-x}dx$; 11) $\int \ln(x^2+1)dx$; 12) $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx$.

О3. Знайти інтеграли, застосовуючи спочатку заміну змінної, а потім інтегрування частинами:
1) $\int e^{\sqrt{x}}dx$; 2) $\int \sin\sqrt[3]{x}dx$; 3) $\int \frac{x^2\mathrm{arctg}x}{1+x^2}dx$; 4) $\int \sqrt{x}\ln x dx$;
5) $\int \frac{\arcsin\frac{x}{2}}{\sqrt{2-x}}dx$; 6) $\int \mathrm{arctg}\sqrt{2x-1}dx$.

С1. Знайти інтеграли: 1) $\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$; 2) $\int \frac{(2\ln x+5)^3}{x}dx$;
3) $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$; 4) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$; 5) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$; 6) $\int \frac{\ln(\mathrm{tg}x)}{\sin x\cos x}dx$.

Домашнє завдання

Д1. Знайти інтеграли: 1) $\int e^{-3x}dx$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x}}$; 3) $\int \frac{\cos 2x}{\sin x\cos x}dx$;
4) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$; 5) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+2\cos x}}$; 6) $\int \frac{5x-2}{x^2+4}dx$; 7) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$; 8) $\int \frac{e^x dx}{2+e^x}$;
9) $\int \frac{\mathrm{arctg}^4 x}{1+x^2}dx$; 10) $\int \frac{2x-1}{x^2-2x+5}dx$.

Д2. Обчислити інтеграли: 1) $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$; 2) $\int \arcsin x dx$;
3) $\int \ln(x^2+1)dx$; 4) $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$; 5) $\int \sin(\ln x)dx$; 6) $\int x(\mathrm{arctg}x)^2 dx$;
7) $\int x3^x dx$; 8) $\int \frac{\ln(\ln x)}{x}dx$; 9) $\int (x^2-2x+3)\cos x dx$; 10) $\int \frac{\mathrm{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$;

11) $\int e^{\sqrt[3]{x}}dx$;   12) $\int \sin\sqrt{x}dx$.

Відповіді

О1. 1) $-2\cos\frac{x}{2}+C$; 2) $\frac{1}{5}\mathrm{tg}5x+C$; 3) $-\frac{1}{8}(5-6x)^{\frac{4}{3}}+C$; 4) $-\ln|\cos x|+C$; 5) $-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$; 6) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{\sqrt{3}}+C$; 7) $\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C$; 8) $2(\frac{1}{3}\sqrt{(e^x+1)^3}-\sqrt{e^x+1})+C$; 9) $\frac{2}{5}(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}(3-2\cos^2 x)+C$; 10) $\frac{3}{2}\ln(x^2-4)-\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$; 11) $-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}+C$; 12) $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$; 13) $\frac{1}{6}e^{2x^3+1}+C$; 14) $e^{-\cos x}+C$; 15) $\frac{2}{3}(-2+\ln x)\sqrt{1+\ln x}+C$. О2. 1) $\frac{1}{2}e^{2x}(x-\frac{1}{2})+C$; 2) $x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C$; 3) $\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$; 4) $x((\ln|x|-1)^2+1)+C$; 5) $-x\mathrm{ctg}x+\ln|\sin x|+C$; 6) $2\sqrt{1+x}\arcsin x+4\sqrt{1-x}+C$; 7) $-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sin^2 x}+\mathrm{ctg}x\right)+C$; 8) $\frac{x^2+1}{2}\mathrm{arctg}x-\frac{x}{2}+C$; 9) $\frac{x}{2}(\sin(\ln x)+\cos(\ln x))+C$; 10) $-\frac{x\ln 2+1}{2^x\ln^2 2}+C$; 11) $x\ln(x^2+1)-2x+2\,\mathrm{arctg}\,x+C$; 12) $x-\frac{1-x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+C$. О3. 1) $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C$; 2) $3((2-\sqrt[3]{x^2})\cos\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x}\sin\sqrt[3]{x})+C$; 3) $x\mathrm{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}(\mathrm{arctg}x)^2+C$; 4) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\left(\ln|x|-\frac{2}{3}\right)+C$; 5) $4\sqrt{2+x}-2\sqrt{2-x}\arcsin\frac{x}{2}+C$; 6) $x\mathrm{arctg}\sqrt{2x-1}-\frac{\sqrt{2x-1}}{2}+C$. С1. 1) $-3\cos\sqrt[3]{x}+C$; 2) $\frac{1}{8}(2\ln x+5)^4+C$; 3) $2(\sqrt{x}-\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x})+C$ [підстановка $\arcsin\sqrt{x}=t$]; 4) $\frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}+C$ [підстановка $\sqrt{x^2-a^2}=t$]; 5) $\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C$; 6) $\frac{1}{2}\ln^2\mathrm{tg}x+C$. Д1. 1) $-\frac{1}{3}e^{-3x}+C$; 2) $-\sqrt{3-2x}+C$; 3) $\ln|\sin 2x|+C$; 4) $2e^{\sqrt{x}}+C$; 5) $-\sqrt{1+2\cos x}+C$; 6) $\frac{5}{2}\ln(x^2+4)-\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+C$; 7) $\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{1+\sqrt{x^2+1}}\right|+C$ [підстановка $\sqrt{x^2+1}=t$]; 8) $\ln(2+e^x)+C$; 9) $\frac{1}{5}\mathrm{arctg}^5 x+C$; 10) $\ln(x^2-2x+5)+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{x-1}{2}+C$. Д2. 1) $-\frac{\ln|x|+1}{x}+C$; 2) $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$; 3) $x\ln(x^2+1)-2x+2\mathrm{arctg}x+C$; 4) $x\mathrm{tg}x+\ln|\cos x|+C$; 5) $\frac{x}{2}(\sin\ln x-\cos\ln x)+C$; 6) $\frac{x^2+1}{2}(\mathrm{arctg}x)^2+x\mathrm{arctg}x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$; 7) $\frac{3^x}{\ln^2 3}(x\ln 3-1)+C$; 8) $(\ln(\ln x)-1)\ln x+C$; 9) $(x^2-2x+1)\sin x+2(x-1)\cos x+C$; 10) $2\sqrt{x}\,\mathrm{arctg}\sqrt{x}-\ln(1+x)+C$; 11) $3e^{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2)+C$; 12) $2\sin\sqrt{x}-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+C$.

Тема 20. Інтегрування основних класів елементарних функцій

1. Інтегрування раціональних дробів. Інтегрування довільного раціонального дробу $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_m\ x^m+\cdots+a_1x+a_0}{b_n\ x^n+\cdots+b_1x+b_0}$ з дійсними коефіцієнтами в загальному випадку проводиться таким чином.

1) Якщо $m \geq n$, тобто дріб $\frac{P_m}{Q_n}$ неправильний, то слід спочатку виділити цілу частину, подавши його у вигляді

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = R_{m-n}(x) + \frac{P_r(x)}{Q_n(x)}, \quad x \in D(Q_n), \tag{1}$$

де R_{m-n} і P_r – многочлени степенів $m-n \geq 0$ і r відповідно, причому $r < n$, тобто дріб $\frac{P_r}{Q_n}$ правильний.

2) Як випливає з формули (1), операція виділення цілої частини зводить інтегрування довільного раціонального дробу до інтегрування многочлена і правильного раціонального дробу.

Інтегрування правильного раціонального дробу $\frac{P_r}{Q_n}$, $r < n$, за допомогою розкладу в суму найпростіших дробів зводиться до інтегрування дробів вигляду $\frac{A}{x-a}$, $\frac{A}{(x-a)^k}$, $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$, $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^l}$, де $\{k,l\} \subset \{2,3,...\}$; A, B, C, a, p, q – сталі, причому $p^2-4q<0$.

Для того, щоб подати правильний раціональний дріб $\frac{P_r}{Q_n}$ у вигляді суми найпростіших дробів, спочатку треба розкласти знаменник дробу Q_n на прості множники, тобто подати у вигляді

$$Q_n(x) = (x-a)^k \cdots (x^2+px+q)^l \cdots,$$

де $p^2-4q<0$, а потім записати розклад

$$\frac{P_r(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^k} + \frac{A_2}{(x-a)^{k-1}} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)} +$$

$$+\frac{B_1x+C_1}{(x^2+px+q)^l} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^{l-1}} + \cdots + \frac{B_lx+C_l}{x^2+px+q} + \cdots \tag{2}$$

Коефіцієнти A_i, B_j і C_j у розкладі (2) визначаються прирівнюванням коефіцієнтів при однакових степенях x у многочлена P_r і многочлена, який одержується в чисельнику правої частини (2) після зведення її до спільного знаменника **(метод невизначених коефіцієнтів).**

Приклад 1. Знайти інтеграл $I = \int \frac{dx}{x^5 - x^2}$.

$\triangleleft$ Дріб $\frac{1}{x^5-x^2}$ є правильним, його розклад на суму найпростіших дробів має вигляд $\frac{1}{x^2\ (x-1)\ (x^2+x+1)} = \frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}$.

Зводячи праву частину до спільного знаменника і прирівнюючи чисельники, дістаємо

$1 = A_1(x-1)(x^2+x+1) + A_2x(x-1)(x^2+x+1) + Bx^2\ (x^2+x+1) +$
$+ (Cx+D)\ x^2\ (x-1)$.

Звідси, прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, одержуємо:

$$\begin{array}{c|ll} x^4 & 0 = A_2 + B + C, & A_1 = -1;\ A_2 = 0; \\ x^3 & 0 = A_1 + B + D - C, & B = \frac{1}{3};\ C = -\frac{1}{3}; \\ x^2 & 0 = B - D, & D = \frac{1}{3}. \\ x^1 & 0 = -A_2\ , & \\ x^0 & 1 = -A_1\ , & \end{array}$$

Отже,

$$\frac{1}{x^5 - x^2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3}\ \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3}\ \frac{x-1}{x^2+x+1},$$

а тому

$I = -\int \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\ dx = \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\ \ln|x-1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\ dx +$
$+\frac{1}{2}\ \int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\ \ln|x-1| - \frac{1}{6}\ \int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\ \int \frac{d(x+\frac{1}{2})}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$
$= \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\ \ln|x-1| - \frac{1}{6}\ \ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$ $\triangleright$

2.Інтегрування тригонометричних функцій.

а) Інтеграли вигляду $\int \sin^m x\ \cos^n x\ dx$.

Якщо принаймні одне з чисел m або n – непарне додатне ціле число, то відщеплюючи від непарного степеня один множник і виражаючи за допомогою формули $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ парний степінь, який залишився, через другу функцію приходимо до табличного інтеграла.

Приклад 2. Знайти $I = \int \frac{\sin^3 x\ dx}{\sqrt[5]{\cos x}}$.

$\triangleleft$ Маємо: $I = \int \frac{\sin^2 x}{\sqrt[5]{\cos x}}\ \sin x\ dx = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^{\frac{1}{5}} x}\ d\cos x =$

$= -\int \cos^{-\frac{1}{5}} x \, d\cos x + \int \cos^{\frac{9}{5}} x \, d\cos x = -\frac{5\cos^{\frac{4}{5}} x}{4} + \frac{5\cos^{\frac{14}{5}} x}{14} + C =$
$= -\frac{5}{4} \sqrt[5]{\cos^4 x} + \frac{5}{14} \sqrt[5]{\cos^{14} x} + C.$ ▷

Якщо ж m і n – парні невід'ємні цілі числа, то степені знижуються за допомогою переходу до подвійного аргументу за формулами:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \ \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \ \sin x \ \cos x = \frac{1}{2} \ \sin 2x.$$

__Приклад 3.__ Знайти інтеграл $I = \int \sin^4 x \ \cos^2 x \, dx$.

◁ Оскільки $\sin^4 x \ \cos^2 x = (\sin x \cos x)^2 \sin^2 x = \frac{1}{8} \sin^2 2x (1-\cos 2x) =$
$= \frac{1}{8} \ \sin^2 2x - \frac{1}{8} \ \sin^2 2x \ \cos 2x = \frac{1-\cos 4x}{16} - \frac{\sin^2 2x \ \cos 2x}{8}$, то
$I = \frac{1}{16} \int (1-\cos 4x) \, dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \ \cos 2x \, dx = \frac{1}{16} \left(x - \frac{\sin 4x}{4}\right) -$
$- \frac{1}{16} \int \sin^2 2x \, d\sin 2x = \frac{1}{16} \left(x - \frac{\sin 4x}{4}\right) - \frac{1}{48} \ \sin^3 2x + C.$ ▷

б) Інтеграли вигляду $\int \sin mx \cos nx dx$, $\int \cos nx \cos mx dx$, $\int \sin mx \sin nx dx$. Для обчислення інтегралів даного вигляду застосовують тригонометричні формули:

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2} \left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right);$$
$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2} \left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right);$$
$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2} \left(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right).$$

__Приклад 4.__ Знайти $I = \int \cos 5x \ \cos 7x \, dx$.

◁ Маємо $I = \left| \cos 5x \ \cos 7x = \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 12x) \right| =$
$= \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx + \frac{1}{2} \int \cos 12x \, dx = \frac{1}{4} \ \sin 2x + \frac{1}{24} \ \sin 12x + C.$ ▷

в) Інтеграли вигляду $\int R(\sin x, \ \cos x) \ dx$, де R – раціональна функція двох змінних, зводяться до інтегралів від раціональної функції нового аргумента t підстановкою $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t$. При цьому використовуються формули

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \ dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

__Приклад 5.__ Знайти інтеграл $I = \int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x + 5}$.

◁ Покладемо $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t$. Тоді $I = 2 \int \frac{dt}{\left(4 \ \frac{1-t^2}{1+t^2} + 3 \ \frac{2t}{1+t^2} + 5\right)(1+t^2)} =$
$= 2 \int \frac{dt}{t^2+6t+9} = 2 \int \frac{dt}{(t+3)^2} = -\frac{2}{t+3} + C = -\frac{2}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}+3} + C.$ ▷ Якщо під інтегралом $\sin x$ *і* $\cos x$ містяться тільки в парних степенях, то зручніше використовувати підстановку $\mathrm{tg} x = t$.

3. Інтегрування деяких ірраціональних функцій.

а) Інтеграли вигляду $\int R(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \cdots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}})\, dx$, де R – раціональна функція своїх аргументів $x, y, \ldots, v$; m_1, $n_1, \ldots, m_k, n_k$ – цілі числа, обчислюються за допомогою підстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^s$, де s – спільний знаменник дробів $\frac{m_1}{n_1}, \cdots, \frac{m_k}{n_k}$.

__Приклад 6.__ Знайти інтеграл $I = \int \frac{\sqrt{x}\ dx}{x(\sqrt[3]{x}+1)}$.

◁ Маємо

$$\mathrm{I} = \left| \begin{array}{l} \sqrt[6]{x} = t, \\ x = t^6, \end{array} \quad dx = 6t^5 dt \right| = \int \frac{t^3\ 6t^5\ dt}{t^6(t^2+1)} = 6 \int \frac{t^2\ dt}{t^2+1} = 6 \int \frac{(t^2+1)-1}{t^2+1}\ dt =$$

$$= 6\int dt - 6\int \frac{dt}{t^2+1} = 6t - 6\mathrm{arctg}t + C = 6\ \sqrt[6]{x} - 6\mathrm{arctg}\sqrt[6]{x} + C. \ \triangledown$$

б) Знаходження інтегралів типу $\int R(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c})\ dx$, де R – раціональна функція двох змінних, проводиться за допомогою тригонометричних підстановок таким чином. За допомогою виділення повного квадрата в квадратному тричлені і наступної заміни $u = x + \frac{b}{2a}$ вихідний інтеграл зводиться до інтеграла одного з таких трьох типів: 1) $\int R(u, \sqrt{a^2-u^2})du$; 2) $\int R(u, \sqrt{a^2+u^2})du$; 3) $\int R(u, \sqrt{u^2-a^2})du$. Останні інтеграли за допомогою підстановки відповідно: 1) $u = a\sin t$, 2) $u = a\mathrm{tg}t$, 3) $u = \frac{a}{\sin t}$ зводяться до інтеграла вигляду $\int R(\sin t,\ \cos t)\ dt$.

__Приклад 7.__ Знайти інтеграл $I = \int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\ dx$.

◁ Маємо $I = \left| \begin{array}{l} x = a\sin t, \\ dx = a\cos t dt \end{array} \right| = \int \frac{\sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}}{a\sin t} a\cos t dt = \int \frac{a\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t} \times$
$\times \cos t dt = a\int \frac{\cos^2 t}{\sin t}\ dt = a\int \frac{1-\sin^2 t}{\sin t}\ dt = a\int \frac{dt}{\sin t} - a\int \sin t dt = a\ln\left|\mathrm{tg}\frac{t}{2}\right| +$
$+ a\cos t + C = a\ln\left|\mathrm{tg}\frac{\arcsin\frac{x}{a}}{2}\right| + a\ \cos(\arcsin\frac{x}{2}) + C.$ ▷

__Вправи__

__О1.__ Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{x-4}{(x-2)(x-3)}dx$; 2) $\int \frac{(x+1)^3}{x^2-x}$; 3) $\int \frac{dx}{x^3+8}$; 4) $\int \frac{dx}{x^4+3x^2}$; 5) $\int \frac{dx}{x(x^2+2)}$; 6) $\int \frac{dx}{x^2+x-2}$; 7) $\int \frac{2x-3}{x^2-4}dx$.

О2. Знайти інтеграли:
1) $\int(1+2\cos x)^2 dx$; 2) $\int \sin^4 x\cos^4 x dx$; 3) $\int \cos^7 x dx$; 4) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx$;
5) $\int \sin 3x \cos x dx$; 6) $\int \sin 10x \sin 15x dx$; 7) $\int \frac{dx}{3-2\sin x+\cos x}$;
8) $\int \sin^5 x dx$; 9) $\int \sin^2 x \cos x dx$.

О3. Знайти інтеграли: 1) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$;
3) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^5}}$; 4) $\int \frac{x^3}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$; 5) $\int \sqrt{3+2x-x^2}dx$.

О4. Для функції $f(x) = \frac{1}{5-3\cos x}$ знайти ту первісну F, яка задовольняє умову $F(0) = -1$.

С1. Знайти інтеграли: 1) $\int \frac{2x^4+1}{x^3-x}dx$; 2) $\int \frac{(x-1)dx}{(x+3)^2}$;
3) $\int \frac{1}{(x+1)^2}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}dx$; 4) $\int \frac{2x+3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx$; 5) $\int \sin^4 x dx$; 6) $\int \frac{dx}{2+\sin x}$;
7) $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx$; 8) $\int \frac{1+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-1}dx$; 9) $\int \sin^2 2x dx$; 10) $\int \frac{dx}{(x^2-3)\sqrt{4-x^2}}$.

Домашнє завдання

Д1. Знайти інтеграли: 1) $\int \frac{3x^2+2x-3}{x^3-x}dx$; 2) $\int \frac{dx}{x^3-8}$; 3) $\int \frac{x^4 dx}{x^4-16}$;
4) $\int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}dx$; 5) $\int \frac{x^2 dx}{x^2-4x+3}$; 6) $\int \frac{dx}{x^2+2x-3}$; 7) $\frac{2x+3}{x^2+3x-10}dx$.

Д2. Знайти інтеграли:
1) $\int(1-\sin 2x)^2 dx$; 2) $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$; 3) $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$;
4) $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^2 x}$; 5) $\int \sin 3x \sin 5x dx$; 6) $\int \sin x \sin 2x \sin 3x dx$.

Д3. Знайти інтеграли:
1) $\int \frac{x\ dx}{\sqrt{2x+1}+1}$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$; 3) $\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$;
4) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt[4]{x^3}}dx$; 5) $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$; 6) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$; 7) $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}dx$.

Відповіді

О1. 1) $\ln\frac{(x-2)^2}{C(x-3)}$; 2) $\frac{x^2}{2}+4x+\ln\frac{(x-1)^8}{|x|}+C$; 3) $\frac{1}{24}\ln\frac{(x+2)^2}{x^2-2x+4}+\frac{1}{4\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C$; 4) $-\frac{1}{3x}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C$; 5) $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{x^2+2}+C$; 6) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C$; 7) $\ln|x^2-4|-\frac{3}{4}\ln\left|\frac{2-x}{2+x}\right|+C$. **О2.** 1) $3x+4\sin x+\sin 2x+C$; 2) $\frac{3x}{128}-$

$\frac{\sin 4x}{128}+\frac{\sin 8x}{1024}+C$; 3) $\sin x-\sin^3 x+\frac{3}{5}\sin^5 x-\frac{1}{7}\sin^7 x+C$; 4) $\frac{1}{\cos x}+\cos x+C$; 5) $-\frac{1}{8}(\cos 4x+2\cos 2x)+C$; 6) $-\frac{\sin 25x}{50}+\frac{\sin 5x}{10}+C$; 7) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1)+C$; 8) $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{8}\sin 4x+C$; 9) $\frac{\sin^3 x}{3}+C$. **О3.** 1) $\frac{x+2}{5}\sqrt[3]{(3x+1)^2}+C$; 2) $6(\frac{\sqrt{x}}{3}-\frac{\sqrt[3]{x}}{2}+\sqrt[6]{x}-\ln(1+\sqrt[6]{x}))+C$; 3) $\frac{x^3}{3a^2\sqrt{(a^2+x^2)^3}}+C$; 4) $-a^3\times$ $\times(\cos(\arcsin\frac{x}{a})-\frac{\cos^3(\arcsin\frac{x}{a})}{3})+C$; 5) $2\arcsin\frac{x-1}{2}-\frac{(x-1)\sqrt{3+2x-x^2}}{2}+C$. **О4.** $F(x)=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\frac{x}{2})-1$. **С1.** 1) $x^2-\ln|x|+\frac{3}{2}\ln|x^2-1|+C$; 2) $\ln|x+3|+\frac{4}{x+3}+C$; 3) $\frac{1}{3}\sqrt[4]{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3}+C$; 4) $-2\sqrt{1+2x-x^2}+5\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}}+C$; 5) $\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$; 6) $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}+C$; 7) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+6\sqrt[6]{x}-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$; 8) $x+4\sqrt{1+x}+2\ln|\sqrt{1+x}-1|+C$; 9) $\frac{x}{2}-\frac{1}{8}\sin 4x+C$; 10) $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}\sqrt{4-x^2}}{x+\sqrt{3}\sqrt{4-x^2}}\right|+C$. **Д1.** 1) $\ln\frac{Cx^3(x-1)}{x+1}$; 2) $\frac{1}{24}\ln\frac{(x-2)^2}{x^2+2x+4}-\frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C$; 3) $x+\frac{1}{2}\ln|\frac{x-2}{x+2}|-\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$; 4) $\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{3}{2}\ln(x^2+2)+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$; 5) $x+\frac{9}{2}\ln|x-3|-\frac{1}{2}\ln|x-1|+C$;6) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|+C$; 7) $\ln|x-2|+\ln|x-5|+C$. **Д2.** 1) $\frac{3x}{2}+\cos 2x-\frac{\sin 4x}{8}+C$; 2) $\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}+\frac{\sin^3 2x}{48}+C$; 3) $\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\sin^5 x}{5}+C$; 4) $-\frac{1}{\sin x}-\sin x+C$; 5) $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{16}\sin 8x+C$; 6) $\frac{1}{24}\cos 6x-\frac{1}{16}\cos 4x-\frac{1}{8}\cos 2x+C$. **Д3.** 1) $\frac{2x+1}{12}(2\sqrt{2x+1}-3)+C$; 2) $\frac{x}{4\sqrt{4+x^2}}+C$; 3) $2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sin(4\arcsin\frac{x}{2})+C$; 4) $\ln\left|\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[4]{x}+1}\right|-2\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x}+C$; 5) $\ln\left|\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}\right|-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+C$; 6) $x-2\sqrt{x}+2\ln(\sqrt{x}+1)+C$; 7) $-8\sqrt{2-x}+\frac{8}{3}\sqrt{(2-x)^3}-\frac{2}{5}\sqrt{(2-x)^5}+C$.

Тема 21. Визначений інтеграл і методи його обчислення. Невласні інтеграли

Нехай f – функція, яка неперервна на відрізку $[a, b]$, де $a < b$, і F – деяка її первісна на $[a, b]$, тобто $F'(x) = f(x)$, $x \in [a, b]$. Під визначеним інтегралом $\int\limits_a^b f(x)dx$ від функції f по відрізку $[a, b]$ розуміємо відповідний приріст її первісної $F(b) - F(a)$, тобто

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \qquad (1)$$

або

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Формула (1) називається **формулою Ньютона – Лейбніца**. Числа a і b називають нижньою і верхньою межею інтегрування.

Основні властивості визначеного інтеграла:

1) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx, \quad a < b; \quad \int\limits_a^a f(x)dx = 0;$

2) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx, \quad a \leq c \leq b;$

3) $\int\limits_a^b (Af(x) + Bg(x))dx = A\int\limits_a^b f(x)dx + B\int\limits_a^b g(x)dx,$

де A і B – довільні сталі;

4) якщо $m \leq f(x) \leq M$ на $[a, b]$,

то $m(b - a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq M(b - a).$

Заміна змінної у визначеному інтегралі. Якщо функція f неперервна на $[a, b]$, а функція $x = \varphi(t)$ неперервно диференційовна на $[\alpha, \beta]$, причому $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (2)$$

Інтегрування частинами. Якщо функції u, v та їх похідні u' і v' неперервні на відрізку $[a, b]$, то

$$\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu. \qquad (3)$$

Приклад 1. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_0^1 (2x^3 + 1)dx$.

◁ Згідно з властивостями визначеного інтеграла
$I = 2\int\limits_0^1 x^3dx + \int\limits_0^1 dx = 2\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 + x\Big|_0^1 = 2\left(\frac{1}{4} - \frac{0}{4}\right) + (1-0) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$. ▷

Приклад 2. Знайти інтеграл $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$.

◁ Маємо $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \; d\sin x = \frac{\sin^3 x}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)^3}{3} - \frac{\sin 0}{3} = \frac{1}{3}$. ▷

Приклад 3. Знайти інтеграл $I = \int\limits_0^1 \frac{e^x \; dx}{1+e^{2x}}$.

◁ Скористаємося формулою заміни змінної (2):

$$\mathrm{I} = \left| \begin{array}{ll} e^x = t, x = \ln t, & \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline t & 1 & e \end{array} \\ dx = \frac{dt}{t}, & \end{array} \right| = \int\limits_1^e \frac{tdt}{t(1+t^2)} = \int\limits_1^e \frac{dt}{1+t^2} =$$

$= \mathrm{arctg} t\Big|_1^e = \mathrm{arctg} e - \mathrm{arctg} 1 = \mathrm{arctg} e - \frac{\pi}{4}$. ▷

Приклад 4. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_{-1}^0 xe^{2x} \; dx$.

◁ Маємо за допомогою формули (3):

$$\mathrm{I} = \left| \begin{array}{l} u = x, dv = e^{2x} \; dx \\ du = dx, v = \frac{1}{2} \; e^{2x} \end{array} \right| = x\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_{-1}^0 - \frac{1}{2}\int_{-1}^0 e^{2x} \; dx =$$

$= \frac{1}{2} \cdot 0e^{2\cdot 0} - (-1)\frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{4}e^{2x}\Big|_{-1}^{0} = \frac{1}{2e^2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4e^2} = \frac{3-e^2}{4e^2}$. ▷

Вище при означенні інтеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ ми припускали, що: а) проміжок інтегрування $[a,b]$ скінченний; б) підінтегральна функція f визначена і неперервна на $[a,b]$. Такий інтеграл часто називають **власним**.

Якщо ж порушується принаймні одна з цих умов, то символ $\int\limits_a^b f(x)dx$ називають **невласним інтегралом**. З'ясуємо зміст цього поняття для двох найпростіших випадків.

Інтеграли з нескінченними межами. Якщо функція f неперервна при $a \le x < +\infty$, то за означенням

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)dx. \tag{4}$$

Якщо існує скінченна границя в правій частині (4), то невласний інтеграл називається **збіжним**, якщо ж ця границя не існує, – **розбіжним**.

Аналогічно означається інтеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$$

та інтеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty} \int\limits_c^b f(x)dx.$$

Інтеграли від необмежених функцій. Якщо функція f неперервна при $a \le x < b$ і $f(b) = \infty$, то за означенням

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\mu\to0+0} \int\limits_a^{b-\mu} f(x)dx. \tag{5}$$

Якщо існує скінченна границя в правій частині формули (5), то невласний інтеграл називається **збіжним**, якщо ж ця границя не існує, то – **розбіжним**.

Аналогічно визначається невласний інтеграл при $f(a)=\infty$.

У випадку, коли $\in (a,b)$ – точка розриву і $f(c)=\infty$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\mu\to 0+0}\int\limits_a^{c-\mu} f(x)\,dx + \lim_{\vartheta\to 0+0}\int\limits_{c+\vartheta}^{b} f(x)\,dx. \qquad (6)$$

Приклад 5. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ або довести його розбіжність.

◁ Оскільки підінтегральна функція парна, то

$I = 2\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = 2\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_0^{b}\frac{dx}{1+x^2} = 2\lim\limits_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_0^b = 2\lim\limits_{b\to+\infty}(\operatorname{arctg}b-$

$-\operatorname{arctg}0) = 2\lim\limits_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}b = 2\ \frac{\pi}{2}$. ▷

Приклад 6. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_0^1\frac{dx}{x}$ або довести його розбіжність.

◁ Маємо згідно з означенням

$I = \lim\limits_{\vartheta\to 0+0}\int\limits_{\vartheta}^{1}\frac{dx}{x} = \lim\limits_{\vartheta\to 0+0}\ln x\Big|_{\vartheta}^{1} = \lim\limits_{\vartheta\to 0+0}(\ln 1-\ln\vartheta) = -\lim\limits_{\vartheta\to 0+0}\ln\vartheta = +\infty$, тобто даний інтеграл розбігається. ▷

Вправи

О1. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_1^2 (x^2+\frac{1}{x^4})dx$; 2) $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$; 3) $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$; 4) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{(1+\operatorname{tg}x)^2}dx$;

5) $\int\limits_0^4\frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$; 6) $\int\limits_0^1\ln(x+1)dx$; 7) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x dx$; 8) $\int\limits_1^3\frac{dx}{x+x^2}$;

9) $\int\limits_0^1\frac{e^{2x}dx}{1+e^{4x}}$; 10) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^3 x dx$; 11) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\ dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x}}$; 12) $\int\limits_1^4\frac{1+\sqrt{x}}{x^2}dx$;

13) $\int\limits_{e}^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$ 14) $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x dx$; 15) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$; 16) $\int\limits_{(1/2)^6}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$;

17) $\int\limits_{0}^{\ln 5} xe^{-x}dx$; 18) $\int\limits_{0}^{1} \frac{xdx}{x^2+3x+2}$.

<u>О2.</u> Обчислити інтеграли або встановити їхню розбіжність:

1) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$; 2) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x}$; 3) $\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$; 4) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x}$; 5) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;

6) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x dx}{x^2}$; 7) $\int\limits_{1}^{2} \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$; 8) $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$; 9) $\int\limits_{0}^{2} \ln x\ dx$; 10) $\int\limits_{0}^{1} \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^3}$;

<u>С1.</u> Обчислити інтеграли: 1) $\int\limits_{1}^{4} \frac{dx}{(1+\sqrt{x})^2}$; 2) $\int\limits_{1}^{5} \frac{xdx}{\sqrt{4x+5}}$;

3) $\int\limits_{2}^{4} \frac{x^3+2x^2-x-1}{x^2-1}dx$; 4) $\int\limits_{0}^{\sqrt{2}} xe^{x^2}dx$; 5) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \frac{x}{2}dx$;

6) $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{3-2x-x^2}dx$, [підстановка $x+1=2\sin t$]; 7) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$.

<u>С2.</u> Обчислити інтеграли або встановити їхню розбіжність:

1) $\int\limits_{2}^{6} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$; 2) $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{(x-1)^2}$; 3) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^4}dx$;

4) $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}\sin x dx$; 5) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2xdx}{x^2+1}$; 6) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+x^4}$.

<u>Домашнє завдання</u>

<u>Д1.</u> Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_{1}^{4} \sqrt{x}dx$; 2) $\int\limits_{a}^{a\sqrt{3}} \frac{dx}{a^2+x^2}$; 3) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x dx$; 4) $\int\limits_{4}^{9} \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$;

5) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$; 6) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{e^x+1}$; 7) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$; 8) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx$;

9) $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 6} \frac{e^x\sqrt{e^x-2}}{e^x+2}dx$; 10) $\int\limits_{-3}^{0} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$; 11) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2}{1+x^6}dx$; 12) $\int\limits_{1}^{2} \frac{e^{1/x}dx}{x^2}$;

13) $\int\limits_1^2 \frac{e^x}{e^x-1}dx$; 14) $\int\limits_{-1}^1 x \operatorname{arctg} x dx$; 15) $\int\limits_1^6 \frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}$; 16) $\int\limits_1^4 \frac{xdx}{\sqrt{2+4x}}$;

17) $\int\limits_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2}$.

Д2. Обчислити інтеграли або встановити їхню розбіжність:

1) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$; 2) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n}$; 3) $\int\limits_0^{\infty} e^{-x}\, dx$; 4) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$;

5) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2+5)^3}}$; 6) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$; 7) $\int\limits_0^{\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \cos\frac{1}{x^2}\frac{dx}{x^3}$.

Відповіді

О1. 1) $\frac{21}{8}$; 2) $\frac{\pi}{6}$; 3) $\ln(1+\sqrt{2})$; 4) $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$; 5) $2-\ln 2$; 6) $2\ln 2-1$; 7) $\frac{\pi^2}{4}-2$; 8) $\ln\frac{3}{2}$; 9) $\frac{1}{2}(\operatorname{arctg} e^2-\frac{\pi}{4})$; 10) $\frac{1-\ln 2}{2}$; 11) $4-2\sqrt[4]{8}$; 12) $\frac{7}{4}$; 13) $\ln 2$; 14) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\ln 2$; 15) $2\ln 2-1$; 16) $3-\frac{3}{2}\pi+6\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$; 17) $1-\frac{1}{5}(\ln 5+1)$; 18) $\ln\frac{9}{8}$. **О2.** 1) 1; 2) розбігається; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\ln 2$; 5) $\frac{\pi}{6}$; 6) $\frac{\pi}{4}+\frac{\ln 2}{2}$; 7) $\frac{8}{3}$; 8) 2; 9) $2(\ln 2-1)$; 10) розбігається. **С1.** 1) $2\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{3}$; 2) $\frac{17}{6}$; 3) $10+\frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}$; 4) $\frac{1}{2}(e^2-1)$; 5) $\frac{\pi}{2}$; 6) π; 7) $\frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}}-1)$. **С2.** 1) $6\sqrt[3]{2}$; 2) розбігається; 3) розбігається; 4) $\frac{1}{2}$; 5) розбігається; 6) $1-\frac{\pi}{4}$. **Д1.** 1) $\frac{14}{3}$; 2) $\frac{\pi}{12a}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $2(1+\ln 2)$; 5) $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 6) $\ln\frac{2e}{e+1}$; 7) $\frac{\pi}{2}-1$; 8) $\pi\sqrt{2}-4$; 9) $4-\pi$; 10) $\frac{2}{3}$; 11) $\frac{\pi}{12}$; 12) $e-\sqrt{e}$; 13) $\ln(e+1)$; 14) $\frac{\pi}{2}-1$; 15) $\frac{2}{3}(3-\ln\frac{5}{2})$; 16) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; 17) $\ln\frac{4}{3}$. **Д2.** 1) розбігається; 2) $\frac{1}{n-1}$, коли $n>1$ і розбігається при $n\le 1$; 3) 1; 4) $\frac{\pi}{4}$; 5) $\frac{1}{3}$; 6) 6; 7) розбігається.

Тема 22. Застосування визначеного інтеграла

1. Площа плоскої фігури. Площа фігури, обмеженої графіком неперервної функції $y = f(x)$ $(f(x) \geq 0)$, $x \in [a; b]$, двома прямими $x = a$ і $x = b$ і віссю Ox (площа криволінійної трапеції), обчислюється за формулою

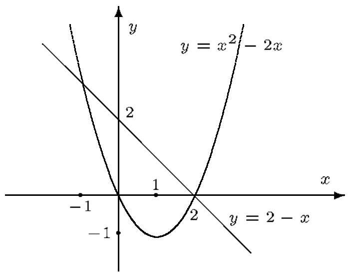
$$S = \int_a^b f(x)dx. \tag{1}$$

Площа фігури, обмеженої графіками неперервних функцій $y = f_1(x)$ *і* $y = f_2(x), f_1(x) \leq f_2(x)$, $x \in [a; b]$, і двома прямими $x = a$, $x = b$, визначається за формулою

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx. \tag{2}$$

Приклад 1. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2 - 2x$ і прямою $y = 2 - x$.

◁ Знайдемо абсциси точок перетину ліній, розв'язавши систему рівнянь $y = x^2 - 2x$, $y = 2 - x$:



$x^2 - 2x = 2 - x$; $x^2 - x - 2 = 0$,
$x_1 = -1$, $x_2 = 2$.
Згідно з формулою (2), маємо

$S = \int\limits_{-1}^{2} (2 - x - x^2 + 2x)\ dx =$

$= \int\limits_{-1}^{2} (2 + x - x^2)\ dx =$

$= (2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3})\Big|_0^1 = 4,5$ (кв. од.) ▷

Інколи зручно використовувати формули, аналогічні (1) і (2), але відносно змінної y (вважаючи x функцією від y), зокрема,

$$S = \int_c^d (f_2(y) - f_1(y))dy. \tag{3}$$

У формулах (1) - (3) межі інтегрування можуть бути і нескінченними.

Приклад 2. Знайти площу фігури, обмеженої кривою $y = \frac{1}{x^2}$, віссю Ox і прямою $x = 1$, і яка лежить правіше цієї прямої.

$\triangleleft$ Шукана площа виражається невласним інтегралом

$S = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{b\to+\infty} (-\frac{1}{x})\Big|_1^b = \lim\limits_{b\to+\infty} (-\frac{1}{b} + 1) = 1.$ $\triangleright$

2. Довжина дуги кривої. Якщо гладка крива задана рівнянням $y = f(x)$, $x \in X$, то довжина ℓ її дуги, яка відповідає $x \in [a, b] \subset X$, дорівнює

$$\ell = \int\limits_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx,$$

де a і b – абсциси кінців дуги.

Якщо дуга задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, то

$$\ell = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt.$$

Приклад 3. Знайти довжину напівкубічної параболи $y^2 = x^3$ між точками з абсцисами $x = 0$ і $x = 4$.

$\triangleleft$ Маємо $y = x^{\frac{3}{2}}$, $y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$,

$\ell = \int\limits_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}dx = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3}(1 + \frac{9}{4}x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4 = \frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1).$ $\triangleright$

3. Об'єм тіла. Якщо площа S перерізу тіла площиною, перпендикулярною до осі Ox, є неперервною функцією на відрізку $[a, b]$, то об'єм тіла обчислюється за формулою

$$V = \int\limits_a^b S(x)dx.$$

Якщо ми маємо тіло обертання, то S знаходиться достатньо просто. Так, якщо криволінійна трапеція, обмежена кривою $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, обертається навколо осі Ox, то $S(x) = \pi f^2(x)$, $x \in [a, b]$, і

$$V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx.$$

Приклад 4. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої кривими $y = x^2$ і $y = \sqrt{x}$.

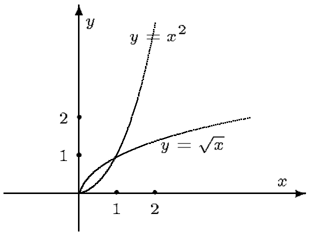
◁ Знайдемо абсциси точок перетину кривих, розв'язавши систему рівнянь $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$:

$x^2 = \sqrt{x}$; $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Тоді $V = \pi \int\limits_0^1 (\sqrt{x})^2 dx - \pi \int\limits_0^1 (x^2)^2\ dx =$

$= \pi \int\limits_0^1 x dx - \pi \int\limits_0^1 x^4 dx =$

$= \pi \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \pi \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \pi\frac{1}{2} - \pi\frac{1}{5} = \frac{3\pi}{10}$. ▷



4. Робота змінної сили. Робота змінної сили f, що діє вздовж осі Ox на відрізку $[a, b]$, виражається інтегралом

$$A = \int\limits_a^b f(x) dx.$$

Приклад 5. Яку роботу треба виконати, щоб розтягнути пружину на 4 см, якщо від навантаження в 1 Н вона розтягається на 1 см?

◁ Згідно із законом Гука, сила f Н, яка розтягує пружину на x м, дорівнює $f(x) = kx$. Коефіцієнт пропорційності k знайдемо з умови: $f(0,01) = 1$ Н , тобто $k\cdot$ 0,01 = 1, звідки $k = 100$. Отже, $f(x) = 100x$. Тому

$$A = \int\limits_0^{0,04} 100x dx = 50x^2\Big|_0^{0,04} = 0,08(\text{ Дж}). \ ▷$$

5. Використання визначеного інтеграла в економіці. Розглянемо задачу про знаходження капіталу (основних фондів) за відомими чистими інвестиціями. Під чистими інвестиціями (капіталовкладеннями) розуміють загальні інвестиції, здійснювані в економіці протягом певного проміжку часу (найчастіше року) без інвестицій, які йдуть на заміщення основних фондів (капіталу). Таким чином, за одиницю часу капітал збільшується на величину чистих інвестицій.

Якщо позначити капітал, який залежить від часу t, через $K(t)$, а чисті інвестиції – через $I(t)$, то описане вище можна записати у вигляді $I(t) = \frac{dK(t)}{dt}$.

Часто виникає необхідність знайти приріст капіталу за період часу від t_1 до t_2, тобто величину $\Delta K = K(t_2) - K(t_1)$. Якщо скористатися означенням визначеного інтеграла, то дану величину можна подати у вигляді $\Delta K = \int\limits_{t_1}^{t_2} I(t)dt$.

Приклад 6. Нехай чисті інвестиції визначаються формулою $I(t) = 7000\sqrt{t}$. Треба знайти приріст капіталу за три роки.

$\triangleleft$ Маємо $\Delta K = K(3) - K(0) = \int\limits_0^3 7000\sqrt{t}dt = 7000\ \frac{2t^{3/2}}{3}\Big|_0^3 =$
$= 7000 \cdot \frac{2}{3} \cdot (3^{3/2} - 0^{3/2}) = 7000 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 7000 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \approx 24248,71$ $\triangleright$

Функцією Кобба-Дугласа називається виробнича функція, яка описує залежність обсягу q випуску продукції від витрат капіталу x_1 і витрат трудових ресурсів x_2 і яка має вигляд $q = b_0 x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$, де $b_0 > 0$ – параметр продуктивності конкретної технології, $\alpha \in (0,1)$ – частка капіталу в доході.

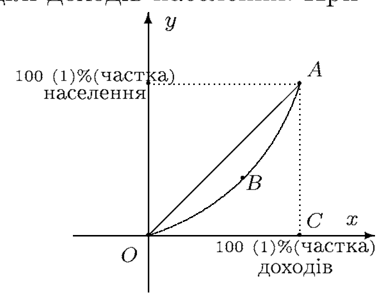
Якщо вважати, що витрати капіталу сталі, а витрати трудових ресурсів лінійно залежать від часу, то $q(t) = (\alpha t + \beta)e^{\gamma t}$, де α, β, γ – параметри задачі. У цьому випадку обсяг продукції, яка випускається за проміжок часу від $t = 0$ до $t = T$, дорівнює

$$Q = \int\limits_0^T (\alpha t + \beta)e^{\gamma t}dt.$$

Приклад 7. Знайти обсяг продукції, виробленої фірмою за 4 роки, якщо функція Кобба-Дугласа $q(t) = (1 + t)e^{3t}$.

$\triangleleft$ Маємо $Q = \int\limits_0^4 (1+t)e^{3t}dt = \frac{1}{3}\int\limits_0^4 (1+t)de^{3t} = \frac{1}{3}\big((1+t)e^{3t}\big|_0^4 - \int\limits_0^4 e^{3t}dt\big) =$
$= \frac{1}{3}(5e^{12} - 1 - \frac{1}{3}e^{3t}\big|_0^4) = \frac{1}{3}(5e^{12} - 1 - \frac{1}{3}e^{12} + \frac{1}{3}) = \frac{1}{3}(\frac{14}{3}e^{12} - \frac{2}{3}) = \frac{14}{9}e^{12} - \frac{2}{9} \approx$
$\approx 2,53 \cdot 10^5$. $\triangleright$

Досліджуючи **криву Лоренца** – залежність процента доходів від процента тих осіб, які його мають (крива OBA), ми можемо оцінити міру нерівності при розподілі доходів населення. При рівномірному розподілі доходів крива Лоренца вироджується в пряму (бісектрису OA), тому площа фігури OAB між бісектрисою OA і кривою Лоренца, поділена на площу трикутника OAC (**коефіцієнт Джіні**) характеризує міру нерівності



в розподілі доходів населення.

Приклад 8. Відомо, що крива Лоренца визначається рівнянням $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$, де x – частка населення, y – частка доходів населення. Обчислити коефіцієнт Джіні.

◁ Очевидно, коефіцієнт Джіні (див. рисунок)
$K = \frac{S_{OAB}}{S_{\Delta OAC}} = 1 - \frac{S_{OBAC}}{S_{\Delta OAC}} = 1 - 2S_{OBAC}$, оскільки $S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2}$.

$$S_{OBAC} = \int\limits_0^1 (1 - \sqrt{1 - x^2})dx = \int\limits_0^1 dx - \int\limits_0^1 \sqrt{1 - x^2}dx = x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \sqrt{1 - x^2}dx =$$

$$= 1 - \int\limits_0^1 \sqrt{1 - x^2}dx = \left| \begin{array}{c} x = \sin t, dx = \cos t dt \\ \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline t & 0 & \pi/2 \end{array} \end{array} \right| = 1 - \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 t dt =$$

$$= 1 - \int\limits_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = 1 - \frac{1}{2}(t + \frac{\sin 2t}{2})\Big|_0^{\pi/2} = 1 - \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} + 0)1 - \frac{\pi}{4}.$$

Тому $K = 1 - 2(1 - \frac{\pi}{4}) = 1 - 2 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0,57$.

Досить велике значення K вказує на те, що доходи серед населення розподіляються нерівномірно. ▷

При знаходженні економічної ефективності капіталовкладень зустрічаються задачі **дисконтування**, тобто визначення початкової суми K через час t за відомою її кінцевою K_t величиною при відомій процентній ставці p.

Якщо відсотки прості, то $K_t = K_0(1 + rt)$, де $r = \frac{p}{100}$ – питома процентна ставка. Тоді $K_0 = \frac{K_t}{1+rt}$. У випадку складних відсотків $K_t = K_0(1 + rt)^t$ і тому $K_0 = \frac{K_t}{(1+rt)^t}$. При неперервному нарахуванні процентів кінцева сума $K_t = K_0 e^{rt}$. Якщо сума K_t також є функцією часу $f(t)$, то дисконтована сума до моменту часу t складе $K_0 = f(t)e^{-rt}$.

Повна дисконтована сума за час t обчислюється за формулою

$$K_d = \int\limits_0^t f(\tau)e^{-r\tau}d\tau.$$

Приклад 9. Знайти дисконтовану суму K_d при $f(t) = K_0(1 + kt)$, де K_0 – початкові капіталовкладення, k – щорічна частка їх збільшення. Іншими словами, при заданих величинах p і k треба оцінити, що вигідніше: нарощувати капіталовкладення чи вкласти їх одноразово при процентній ставці, яка нараховується неперервно.

$\triangleleft$ Маємо $K_d = \int\limits_0^t K_0(1+k\tau)e^{-r\tau}d\tau = -K_0\frac{1}{r}\int\limits_0^t(1+k\tau)de^{-r\tau} =$

$$= -\frac{K_0}{r}\left((1+k\tau)e^{-r\tau}\Big|_0^t - \int\limits_0^t ke^{-r\tau}d\tau\right) = -\frac{K_0}{r}\Big((1+kt)e^{-kt} - 1 +$$

$$+\frac{k}{r}e^{-r\tau}\Big|_0^t\Big) = -\frac{K_0}{r}\left((1+kt)e^{-kt} - 1 + \frac{k}{r}e^{-rt} - \frac{k}{r}\right) =$$

$$= K_0\left(\frac{1}{r}(1+\frac{k}{r}) - \frac{1}{r}(1+kt+\frac{k}{r})e^{-rt}\right).$$

З одержаної формули можна зробити певні висновки:

1. Чим вища процентна ставка p, а отже, і r, тим менша дисконтована сума K_d, тому вищий доход, який обчислюється як різниця між сумою щорічно зростаючих капіталовкладень за t років і величиною K_d. Якщо розглядати K_d як дисконтований доход, то збільшення процентної ставки знижує рентабельність розміщення капіталу.

2. Збільшення інтенсивності щорічних капіталовкладень k приводить до збільшення K_d.

3. При незмінних p і k дисконтований доход зростає зі збільшенням проміжку часу t (кількості років). $\triangleright$

Якщо $f(t)$ – величина неперервного доходного потоку, то загальний доход, який одержується за період часу від $t = a$ до $t = b$, обчислюється за формулою $P = \int\limits_a^b f(t)dt$.

Припустимо, що $f(t)$ – величина неперервного доходного потоку, і доход, який від нього отримують, одразу ж вкладають з процентною ставкою r відсотків і неперервним нарахуванням. Тоді вартість через T років становитиме

$$P_T = \int\limits_0^T f(t)e^{r(T-t)}dt = e^{rT}\int\limits_0^T f(t)e^{-rt}dt.$$

Майбутня вартість неперервного доходного потоку – це загальна сума всіх коштів, які отримають від неперервного доходного потоку (доход і процентний прибуток) через T років.

Вправи

О1. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

1) $y=4-x^2$, $y=0$; 2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; 3) $xy=4$, $x=1$, $x=4$, $y=0$; 4) $xy=6$, $x+y-7=0$; 5) $y=\frac{1}{1+x^2}$, $y=0$.

О2. Знайти довжину дуги кривої: 1) $y^2=x^3$, що відтинається прямою $x=\frac{4}{3}$; 2) $y=\ln(\sin x)$, $\frac{\pi}{3}\leq x\leq\frac{2\pi}{3}$.

О3. Обчислити об'єми тіл, утворених при обертанні навколо відповідних осей фігур, обмежених кривими:
1) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $y=\pm b$, навколо осі Oy;
2) $y^2=x^3$, $0\leq x\leq\pi$, навколо осі Ox;
3) $y=\sin 2x$, $0\leq x\leq 2\pi$, $y=0$, навколо осі Ox;
4) $y=2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$, $x\geq 1$, навколо осі Ox;
5) $y=xe^{-\frac{x}{2}}$, $x>0$, навколо її асимптоти.

О4. Чисті інвестиції визначаються за формулою $I(t)=$ $=7000\sqrt{t}$. Знайти значення t, при якому приріст капіталу складе 50000 грн.

О5. Знайти дисконтований доход за три роки при процентній ставці 8% і початкових вкладеннях в 10 млрд. грн., якщо передбачається збільшувати щорічно капіталовкладення на 1 млрд.грн.

О6. Знайти середній час, затрачений на освоєння одного виробу в період освоєння виробництва від 100 до 121 виробу, якщо функція, яка описує зміни затрат часу на виготовлення виробу, має вигляд $t=\frac{600}{\sqrt{x}}$, де x – порядковий номер виробу.

О7. Швидкість зміни видатків та доходу підприємства після початку його діяльності визначалися формулами: $S'(t)=5+2t^{2/3}$ та $P'(t)=17-t^{2/3}$, де S і P вимірювалися мільйонами гривень, а t – роками. Визначити, як довго підприємство було прибутковим, та знайти загальний прибуток, одержаний за цей час.

О8. Відомо, що крива Лоренца визначається рівнянням $y=$ $=\frac{19}{20}x^2+\frac{1}{20}x$. Знайти коефіцієнт Джіні, а також частину податку, яку сплачують 20% найбіднішого населення.

О9. Величина неперервного доходного потоку визначається формулою $f(t)=5000e^{0{,}04t}$, де t – час (у роках). Знайти загальний доход, який можна отримати за п'ять перших років роботи підприємства.

О10. Компанія повинна обрати одну з двох можливих стратегій розвитку: 1) вкласти 10 млн. грн. у нове обладнання і одержувати 3 млн. грн. прибутку кожного року протягом 10 років; 2) закупити на 15 млн. грн. досконаліше обладнання, яке дасть змогу одержувати 5 млн. грн. прибутку щороку протягом 7 років. Яку стратегію розвитку треба обрати компанії, якщо мінімальна облікова щорічна ставка становить 10%?

С1. Обчислити площі, обмежені кривими:
1) $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = 1$; 2) $y^2 = x - 2$, $x = 4$;
3) $y = \frac{1}{1+x^2}$, $y = \frac{x^2}{2}$; 4) $xy = 20$, $x^2 + y^2 = 41$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

С2. Обчислити довжини дуг кривих:
1) $y = 1 - \ln\cos x$ від $x = 0$ до $x = \frac{\pi}{6}$;
2) $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$ від $t = 0$ до $t = \ln\pi$.

С3. Обчислити об'єми тіл, утворених при обертанні навколо відповідних осей фігур, обмежених кривими: 1) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ навколо осі x; 2) $y = \frac{1}{1+x^2}$ навколо її асимптоти.

С4. Швидкість руху точки $v = 0,1te^{-0,02t}$ (м/с). Знайти шлях, пройдений точкою від початку руху до повної зупинки ($v(t_2) = 0$).

С5. Дві точки рухаються вздовж однієї прямої: перша зі швидкістю $v_1 = 3t^2 - 4t$(м/с), друга зі швидкістю $v_2 = 4(t+3)$(м/с). Якщо в початковий момент вони були разом, то в який момент і на якій відстані від початку руху вони знову будуть разом?

С6. Знайти середнє значення витрат $K(x) = 3x^2 + 4x + 1$, виражених у грошових одиницях, якщо обсяг продукції x змінюється від 0 до 3 одиниць. Вказати обсяг продукції, при якому витрати набувають даного середнього значення.

Домашнє завдання

Д1. Обчислити площі фігур, обмежених лініями:
1) $y^2 = 2px$, $x = h$; 2) $y^2 = x^3$, $y = 8$, $x = 0$; 3) $y = x^2$, $y = 2 - x^2$;
4) $y = \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$, $x \in (1, e]$; 5) $y = \mathrm{tg} x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$.

Д2. Обчислити довжини дуг кривих:

1) $y=2\sqrt{x^3}$ від $x=0$ до $x=11$; 2) $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y$ від $y=1$ до $y=e$; 3) $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ від $x=0$ до $x=1$.

Д3. Обчислити об'єми тіл, утворених при обертанні навколо відповідних осей фігур, обмежених кривими: 1) $xy=4$, $x=1$, $x=4$, $y=0$ навколо осі Ox; 2) $y^2=x$, $x^2=y$ навколо осі Ox; 3) $y=\frac{x^2}{2}+2x+2$, $y=2$ навколо осі Oy; 4) $y=\frac{x^2}{2}$, $y=\frac{x^3}{8}$ навколо осі Ox.

Д4. Електропоїзд, що виходить із залізничної станції, їде з прискоренням $a=f(t)$, де t – час перебування в дорозі. Витрати електроенергії (в кВт-год) на рух електропоїзда задаються формулою $M=\int\limits_0^t f(\tau)d\tau$. Обчислити витрати електроенергії впродовж перших трьох годин руху, якщо $f(t)=te^{t^2}$.

Д5. Яку роботу треба виконати для того, щоб тіло маси m підняти з поверхні Землі, радіус якої R, на висоту h? Чому дорівнює робота, коли тіло віддаляється у нескінченність? (Вказівка: скористатися тим, що сила $F(x)=mg\frac{R^2}{x^2}$, де x – відстань тіла маси m від центра Землі, а $A=\int\limits_R^{R+h} F(x)\,dx$).

Д6. Продуктивність праці робітника впродовж дня визначається формулою $f(t)=-0,00625\,t^2+0,05\,t+0,5$ (гр.од./год.), де t – час від початку роботи, $0\le t\le 8$. Знайти функцію $u(t)$, $t\in[0,8]$, яка дає обсяг продукції (у вартісному виразі) і його величину за робочий день.

Д7. Вартість перевезення однієї тонни вантажу на один кілометр (тариф перевезення) задається функцією $f(x)=\frac{10}{x+2}$ (гр.од. /км). Знайти витрати на перевезення однієї тонни вантажу на відстань 20 км.

Д8. Знайти середнє значення витрат $K(x)=6x^2+4x+1$, виражених у гривнях, якщо обсяг продукції x змінюється від 0 до 5 одиниць. Вказати обсяг продукції, при якому витрати набувають даного середнього значення.

Д9. Знайти час, за який підприємство одержить максимальний прибуток, і знайти цей прибуток, якщо граничний доход становить $P'(x) = 10-2\sqrt[3]{x}$, а граничні витрати – $S'(x) = 2+2\sqrt[3]{x}$. Вважається, що x вимірюється роками, P' і S' – млн.грн.

Д10. Крива Лоренца визначається рівнянням $y = 0,94x^2+$ $+0,06x$. Знайти коефіцієнт Джині, а також частину податку, яку сплачують 50% населення.

Д11. Нехай $f(t) = 5000e^{0,04t}$ – величина доходного потоку, який матимемо від роботи підприємства. Знайти майбутню вартість цього доходного потоку, якщо річна процентна ставка – 12% і проценти нараховуються неперервно протягом п'яти років.

Відповіді

О1. 1) $\frac{32}{3}$; 2) πba; 3) $8\ln 2$; 4) $\frac{35}{2} - 6\ln 6$; 5) π. **О2.** 1) $\frac{112}{27}$; 2) $\ln 3$. **О3.** 1) $\frac{8\pi a^2 b}{3}$; 2) $\frac{\pi^5}{4}$; 3) π^2; 4) $\frac{4\pi}{3}$; 5) 2π. **О4.** $t_0 = (10,71)^{2/3} \approx 4,86$. **О5.** $K_d = 30,5$ млрд.грн. ($f(t) = 10 + t$, $r = 0,08$). **О6.** $t_{\text{сер}} \approx 57,2$ хв ($t_{\text{сер}} = \frac{1}{x_2-x_1}\int\limits_{x_1}^{x_2} t(x)dx$). **О7.** 38,4 млн.грн. **О8.** $K = 19/60$; 4,8%. **О9.** 27 675 грн. **О10.** $P_1 = 8,964$ млн.грн.; $P_2 = 10,17$ млн.грн. – друга стратегія доцільніша. **С1.** 1) $e+\frac{1}{e}-2$; 2) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$; 3) $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}$; 4) $\frac{41}{2}(\arcsin\frac{5}{41} - \arcsin\frac{4}{41}) - 20\ln\frac{5}{4}$. **С2.** 1) $\frac{\ln 3}{2}$; 2) $\sqrt{2}(\pi-1)$. **С3.** 1) $\frac{32}{105}\pi a^3$; 2) $\frac{\pi^2}{2}$. **С4.** 250 м; **С5.** 2) $t = 6$с, $S = 144$м. **С6.** $K(\xi) = 16$, $\xi = 5/3$. **Д1.** 1) $\frac{4}{3}\sqrt{2phh}$; 2) $19,2$; 3) $\frac{8}{3}$; 4) 2; 5) $\ln 2$. **Д2.** 1) 74; 2) $\frac{1}{4}(e^2+1)$; 3) $\frac{e-e^{-1}}{2}$. **Д3.** 1) 12π; 2) $\frac{3\pi}{10}$; 3) $\frac{64\pi}{3}$; 4) $\frac{512}{35}\pi$. **Д4.** $(e^9-1)/2$ кВт-год. **Д5.** $mg\frac{Rh}{R+h}$, mgR. **Д6.** $u(t) = \int\limits_0^t f(\tau)d\tau$, $u(8) \approx 4,533$ гр.од. **Д7.** $10\ln 11 \approx 23,98$ гр.од. **Д8.** $K(\xi) = 61$, $\xi = \frac{-1+\sqrt{91}}{3} \approx 2,846$. **Д9.** $x_0 = 8$ років, $\pi(x_0) = 16$ млн.грн. **Д10.** $K = 0,314$; 26,5%. **Д11.** 37 546,648 грн.

Тема 23. Функції багатьох змінних: означення, границя та неперервність, похідні і диференціали

Як відомо, будь-який упорядкований набір з n дійсних чисел $x_1, \dots, x_n$ позначається $(x_1, \dots, x_n)$ або $M(x_1, \dots, x_n)$ і називається точкою n-вимірного арифметичного простору $\mathbb{R}^n$; числа $x_1, \dots, x_n$ називаються координатами точки $M(x_1, \dots, x_n)$. Відстань між точками $M(x_1, \dots, x_n)$ і $M'(x_1', \dots, x_n')$ визначається за формулою

$$\rho(M, M') = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + ... + (x_n - x_n')^2}.$$

Нехай $D \subset \mathbb{R}^n$ – задана множина точок n-вимірного арифметичного простору. Якщо кожній точці $M(x_1, \dots, x_n) \in D$ поставлено у відповідність деяке цілком визначене дійсне число $f(M) = f(x_1, \dots, x_n)$, то кажуть, що на множині D задана числова функція $f : D \to \mathbb{R}$ від n змінних $x_1, \dots, x_n$. Множина D називається областю визначення, а множина $E = \{u \in \mathbb{R} \; |u = f(M), M \in D\}$ – множиною значень функції f.

Зокрема, при $n = 2$ функцію двох змінних $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \in D$, можна розглядати як функцію точок площини в тривимірному просторі з фіксованою системою координат $Oxyz$. Графіком цієї функції називається множина точок

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y),\ (x, y) \in D\},$$

яка визначає, взагалі кажучи, деяку поверхню в $\mathbb{R}^3$.

Приклад 1. Знайти область визначення функції $u = \arcsin(x + y)$.

$\lhd$ Функція визначена при $-1 \le x + y \le 1$. Отже, область визначення є множиною точок $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, яка лежить між прямими $x + y = -1$ і $x + y = 1$. $\rhd$

Приклад 2. Нехай $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{xy}$. Знайти $f(3; -2), f(y, x), f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$.

$\lhd$ Маємо: $f(3; -2) = \frac{3^2 - (-2)^2}{3(-2)} = -\frac{5}{6}$, $\quad f(y, x) = \frac{y^2 - x^2}{xy}$,

$$f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - \left(\frac{1}{y}\right)^2}{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}} = \frac{y^2 - x^2}{xy} = -f(x, y). \rhd$$

Нехай функція f визначена в деякому околі точки $_0$, можливо, за винятком самої точки M_0. Число b називається **границею** функції $u = f(M)$ при прямуванні точки $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ до точки $M_0(a_1, a_2, \dots, a_n)$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що з умови $0 < \rho(M, M_0) < \delta$ випливає

$$|f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - b| < \varepsilon.$$

При цьому записують: $b = \lim\limits_{M \to M_0} f(M) = \lim\limits_{\substack{x_1 \to a_1 \\ \cdots \\ x_n \to a_n}} f(x_1, \ldots, x_n)$.

Приклад 3. З'ясувати, чи має функція $u = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ границю при $x \to 0$, $y \to 0$.

◁ Нехай точка $M(x,y)$ прямує до точки $M_0(0,0)$. Розглянемо зміну x і y вздовж прямої $y = kx$. Тоді дістаємо, що $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2-k^2x^2}{x^2+k^2x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1-k^2}{1+k^2} = \frac{1-k^2}{1+k^2}$. Результат має різні значення в залежності від вибраного k, і тому функція границі не має. ▷

Функція $u = f(M)$ називається **неперервною в точці** M_0, якщо: 1) функція f визначена в точці M_0; 2) існує $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)$; 3) $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$.

Функція називається **неперервною** в області, якщо вона неперервна в кожній точці цієї області. Якщо в точці M_0 принаймні одна з умов 1) - 3) порушується, то точка M_0 називається точкою розриву функції f.

Приклад 4. Знайти точки розриву функції $u = \frac{1-xy}{2x+3y+4}$.

◁ Функція не визначена в точках, в яких знаменник дорівнює нулеві. Тому всі точки прямої $2x + 3y + 4 = 0$ є точками її розриву ▷

Нехай $(x_1^0, \ldots, x_k^0, \ldots, x_n^0)$ – довільно фіксована точка з області визначення функції $u = f(x_1, \ldots, x_n)$. Надаючи значенню змінної x_k приросту Δx_k, $k \in \{1, \ldots, n\}$, розглянемо границю

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(x_1^0, \ldots, x_k^0 + \Delta x_k, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0, \ldots, x_k^0, \ldots, x_n^0)}{\Delta x_k}.$$

Ця границя (якщо вона існує) називається **частинною похідною 1-го порядку від функції f по змінній x_k в точці** $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ і позначається $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ або $f'_{x_k}(x_1^0, \ldots, x_n^0)$.

Обчислюються частинні похідні за звичайними правилами і формулами диференціювання, але при цьому всі змінні, крім x_k, розглядаються як сталі.

Приклад 5. Знайти частинні похідні функції $z = 2^{x^2-y}$.

◁ Вважаючи y сталим, дістанемо $\frac{\partial z}{\partial x} = 2^{x^2-y} \ln 2 \cdot (2x) = 2^{x^2-y+1} x \ln 2$. Вважаючи x сталим, одержимо $\frac{\partial z}{\partial y} = 2^{x^2-y} \ln 2 \cdot (-1) = -2^{x^2-y} \ln 2$. ▷

Частинними похідними 2-го порядку від функції $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ називаються частинні похідні від її частинних похідних першого порядку. Похідні другого порядку означаються і позначаються так:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = f''_{x_k x_k}(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n);$$

$$\frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_m} = f''_{x_k x_m}(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n),\ \{k, m\} \subset \{1, \ldots, n\}.$$

Аналогічно означаються і позначаються частинні похідні порядку вищого, ніж другий.

Результат багатократного диференціювання функції по різних змінних не залежать від черговості диференціювання за умови, що одержані при цьому змішані частинні похідні неперервні.

Приклад 6. Знайти частинні другі похідні функції $z = 2^{x^2-y}$.

$\triangleleft$ Маємо (приклад 5) $\frac{\partial z}{\partial x} = 2^{x^2-y+1}x\ln 2$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -2^{x^2-y}\ln 2$.
Диференціюючи повторно, дістанемо: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(2^{x^2-y+1}x\ln 2) =$
$= 2^{x^2-y+1}x\ln 2 \cdot \ln 2 \cdot 2x + 2^{x^2-y+1}\ln 2 = 2^{x^2-y+1}\ln 2(2x^2\ln 2 + 1)$;
$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2^{x^2-y+1}x\ln 2) = -2^{x^2-y+1}x\ln^2 2$;
$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(-2^{x^2-y}\ln 2) = -2^{x^2-y}\ln 2 \cdot 2x \cdot \ln 2 = -2^{x^2-y+1}x\ln^2 2$;
$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(-2^{x^2-y}\ln 2) = 2^{x^2-y}\ln^2 2$. $\triangleright$

Повним приростом функції $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ в точці $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, який відповідає приростам аргументів Δx_1, Δx_2, …, Δx_n, називається різниця

$$\Delta u = f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \ldots, x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0, x_1^0, \ldots, x_n^0).$$

Функція $u = f(M)$ називається **диференційовною в точці** M_0**,** якщо скрізь в околі цієї точки повний приріст функції можна подати у вигляді

$$\Delta u = A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \ldots + A_n\Delta x_n + o(\rho),$$

де $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \ldots + \Delta x_n^2}$, $A_1, \ldots, A_n$ – числа, не залежні від $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$.

Диференціалом 1-го порядку du **функції** $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається вираз

$$du = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + ... + A_n \Delta x_n.$$

Диференціали незалежних змінних за означенням беруться рівними їх приростам : $dx_1 = \Delta x_1,\ dx_2 = \Delta x_2,\ \ldots,\ dx_n = \Delta x_n$.

Для диференціала du правильна формула

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n.$$

Якщо ρ достатньо мале, то для диференційовної функції правильна формула: $\Delta u \approx du$ або $f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_1, \ldots, x_n^0 + \Delta x_1) \approx f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) + df(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$.

Приклад 7. Обчислити наближено $\sqrt{(4,05)^2 + (3,07)^2}$.

◁ Шукане значення подамо як значення функції $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ при $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, де $x_0 = 4$, $y_0 = 3$, $\Delta x = 0,05$, $\Delta y = 0,07$. Маємо $f(4,3) = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$,

$\Delta f(x, y) \approx df(x, y) = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; $\Delta f(4,3) \approx \frac{4 \cdot 0,05 + 3 \cdot 0,07}{5} \approx 0,08$.

Отже, $\sqrt{(4,05)^2 + (3,07)^2} \approx 5 + 0,08 = 5,08$. ▷

Диференціалом 2-го порядку d^2u **функції** $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ називається диференціал від її диференціала 1-го порядку , розглядуваного як функція змінних $x_1, \ldots, x_n$ при фіксованих значеннях $dx_1, \ldots, dx_n$: $d^2u = d(du)$. Аналогічно визначається диференціал 3-го порядку $d^3u = d(d^2u)$. Взагалі, $d^k u = d(d^{k-1}u)$.

Диференціал k-го порядку функції $u = f(x_1, \ldots, x_n)$, де $x_1, \ldots, x_n$ – незалежні змінні, символічно записується у вигляді формули

$$d^k u = (\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n)^k u,$$

яка формально розкривається за біномним законом.

Зокрема, у випадку функції двох змінних $u = f(x, y)$, маємо

$$d^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2;$$

$$d^3u = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}dy^3.$$

Приклад 8. Знайти диференціали 1-го та 2-го порядків функції $u = e^{xy}$.

$\lhd$ Маємо $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{xy} \cdot y$; $\quad \frac{\partial u}{\partial y} = e^{xy} \cdot x$; $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{xy} \cdot y^2$;
$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = e^{xy} \cdot xy + e^{xy} = e^{xy}(1 + xy)$; $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{xy} \cdot x^2$,
а тому $\quad du = ye^{xy}dx + xe^{xy}dy = e^{xy}(ydx + xdy)$;

$$d^2u = e^{xy}(y^2dx^2 + 2(1 + xy)dxdy + x^2dy^2). \rhd$$

Градієнт функції $u = f(x_1, x_2, x_3)$ – це вектор, що визначається формулою $\mathrm{grad}u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3}\right)$. Він визначає напрямок найшвидшого зростання функції.

Приклад 9. Нехай $u = x_1^2 - \frac{3}{2}x_2^2 + 2x_3^2x_1$, $M_0(1; -1; 2)$. Знайти $\mathrm{grad}u(M_0)$.

$\lhd$ Маємо $\frac{\partial u}{\partial x_1} = 2x_1 + 2x_3^2$, $\frac{\partial u}{\partial x_2} = -3x_2$, $\frac{\partial u}{\partial x_3} = 4x_1x_3$.
Тоді $\frac{\partial u(M_0)}{\partial x_1} = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2^2 = 10$, $\frac{\partial u(M_0)}{\partial x_2} = -3 \cdot (-1) = 3$, $\frac{\partial u(M_0)}{\partial x_3} = 4 \cdot 1 \cdot 2 = 8$, а тому $\mathrm{grad}u(M_0) = (10; 3; 8) = 10\vec{i} + 3\vec{j} + 8\vec{k}$. $\rhd$

Вправи

О1. Знайти область визначення таких функцій: 1) $z = \frac{x}{x-y}$; 2) $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1}$; 3) $u = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$; 4) $u = \ln\sqrt{\frac{y}{x}}$.

О2. Довести, що для функції $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$ не існує границі при $x \to 0$, $y \to 0$.

О3. Знайти границі: 1) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 2}} (1 + xy)^{\frac{2}{x^2+xy}}$,
2) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (1 + x^2y^2)^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$; 3) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to a}} \frac{\sin xy}{x}$; 4) $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} (x^2 + y^2)e^{-(x+y)}$.

О4. Знайти частинні похідні першого порядку наступних функцій: 1) $z = x^3y - y^3x$; 2) $z = \frac{u}{v} + \frac{v}{u}$;
3) $u = (5x^2y - y^3 + 7)^3$; 4) $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$; 5) $z = \ln \mathrm{tg}\frac{x}{y}$;

6) $u = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{y}{x}}$; 7) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; 8) $u = x^{y/z}$;
9) $z = \mathrm{arctg}\sqrt{x^y}$; 10) $z = \rho^2 \sin^4 \varphi$.

<u>О5.</u> Знайти повні диференціали таких функцій:
1) $z = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$; 2) $z = \sin xy$;
3) $u = x^{yz}$; 4) $z = e^{x+y}(x\cos y + y\sin x)$.

<u>О6.</u> Обчислити наближено:
1) $(2,01)^{3,03}$; 2) $\sqrt{(1,02)^3 + (1,97)^3}$.

<u>О7.</u> Для наступних функцій знайти вказані похідні:
1) $z = e^{xy^2}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$; 2) $z = \mathrm{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$;
3) $z = \ln(x + y^2)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; 4) $z = \left(\frac{y}{x}\right)^2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

<u>О8.</u> Знайти диференціали 2-го порядку функцій:
1) $z = x^3+3x^2y-y^3$; 2) $z = \cos(x+y)$; 3) $z = (x+y)e^{xy}$; 4) $u = e^{xyz}$.

<u>О9.</u> Відома виробнича функція $z = \ln(x^3 + 2y^3)$, що дає залежність між обсягом виробництва z і факторами виробництва x і y. Знайти: 1) закон зміни виробничої функції відносно кожного з факторів x та y; 2) еластичність функції щодо кожного з факторів та коефіцієнти еластичності при $x = 1$, $y = 1$.

<u>С1.</u> Довести, що наступні функції задовольняють відповідне рівняння:
1) $z = \cos(x^2 + y^2)$, $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$;
2) $z = e^{\frac{x}{y}}$, $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$;
3) $z = \sin(x - ay) + \cos(x + ay)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$;
4) $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

<u>С2.</u> Функція $f(x, y) = 20x + 10y - 2x^2 - 4y^2 + 6xy$ виражає залежність обсягу виробництва від факторів виробництва X і Y, які наявні в кількості відповідно x і y одиниць. Знайти граничні продуктивності факторів X і Y.

<u>Домашнє завдання</u>

<u>Д1.</u> Знайти область визначення функцій:

1) $z=x+y$; 2) $z=\frac{4}{x+y}$; 3) $z=x+\sqrt{x^2-y^2}$; 4) $z=\arccos\frac{y}{x}$;
5) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$; 6) $z=\ln x-\ln\sin y$; 7) $u=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{z}}$;
8) $z=\mathrm{ctg}\pi(x+y)$; 9) $z=\frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$; 10) $z=\arcsin(2y(1+x^2)-1)$.

Д2. Знайти границі: 1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sin xy}{xy}$;
3) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to0}}(\cos xy)^{\frac{1}{x^2y^2}}$; 4) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(|x|+|y|)$; 5) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to0}}\frac{\mathrm{tg}xy}{y}$.

Д3. Знайти частинні похідні функцій:
1) $z=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; 2) $z=2^{x^2-y}$; 3) $z=\ln\sin(x-y)$;
4) $z=(1+x^3)^y$; 5) $u=\left(\frac{x}{y}\right)^z$; 6) $u=xe^{-xy}$.

Д4. Для наступних функцій знайти диференціали першого і другого порядків: 1) $z=x^3y^4$; 2) $z=\left(\frac{y}{x}\right)^2$; 3) $z=2^{xy}$;
4) $u=xy+yz+xz$; 5) $u=\sin(x+y+z)$.

Д5. Обчислити наближено: 1) $\sqrt{3,95^2+3,15^2}$; 2) $\mathrm{arctg}\frac{1{,}02}{0{,}95}$, виходячи із значення функції $z=\mathrm{arctg}\frac{y}{x}$ при $x=1$, $y=1$.

Д6. Знайти величину і напрямок градієнта: 1) $u=xyz$ в точці $M_0(2;1;1)$; 2) $u=\mathrm{tg}x-x+3\sin y-\sin^3 y+z+\mathrm{ctg}z$ в точці $M_0(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2})$.

Д7. Знайти: 1) закон зміни виробничої функції $z=f(x,y)$ щодо кожного з факторів x та y; 2) еластичність виробничої функції щодо кожного з факторів та коефіцієнти еластичності при $x=1$, $y=1$. Розглянути випадки:
а) $f(x,y)=e^{xy}$; б) $f(x,y)=x^3-y^2+6xy+39x+18y-20$.

Відповіді

О1. 1) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x\neq y\}$; 2) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid |x|\leq1,|y|\geq1\}$; 3) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2-z^2\geq0\}$; 4) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid xy>0\}$. **О3.** 1) e^2; 2) 1; 3) a; 4) 0. **О4.** 1) $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y-y^3$; $\frac{\partial z}{\partial y}=x^3-3y^2x$; 2) $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{1}{v}-\frac{v}{u^2}$, $\frac{\partial z}{\partial v}=-\frac{u}{v^2}+\frac{1}{u}$; 3) $\frac{\partial z}{\partial x}=30xy(5x^2y-y^3+7)^2$, $\frac{\partial z}{\partial y}=3(5x^2y-y^3+7)^2(5x^2-3y^2)$; 4) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}}$; 5) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2}{y\sin\frac{2x}{y}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2x}{y^2\sin\frac{2x}{y}}$;

6) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{x^2}3^{-\frac{y}{x}}\ln 3$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}3^{-\frac{y}{x}}\ln 3$; 7) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; 8) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x$, $\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x$; 9) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y\sqrt{x^y}}{2x(1+x^y)}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\sqrt{x^y}\ln x}{2(1+x^y)}$; 10) $\frac{\partial z}{\partial \rho}=2\rho\sin^4\varphi$, $\frac{\partial z}{\partial \varphi}=4\rho^2\sin^3\varphi\cos\varphi$. **О5.** 1) $\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$; 2) $(xdy+ydx)\cos xy$; 3) $x^{zy-1}(yzdx+zx\ln xdy+xy\ln xdz)$; 4) $e^{x+y}(((x+1)\cos y+y(\sin x+\cos x))dx+(x(\cos y-\sin y)+(y+1)\sin x)dy)$. **О6.** 1) 8,29; 2) 2,95. **О7.** 1) $2y^3(2+xy^2)e^{xy^2}$; 2) 0; 3) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{(x+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{2y}{(x+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2}$; 4) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{6y^2}{x^4}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{4y}{x^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2}{x^2}$. **О8.** 1) $d^2z=6((x+y)dx^2+2xdxdy-ydy^2)$; 2) $d^2z=-\cos(x+y)(dx+dy)^2$; 3) $d^2z=e^{xy}(y(y^2+xy+2)dx^2+2(x+y)(xy+2)dxdy+x(x^2+xy+2)dy^2)$; 4) $d^2u=e^{xyz}((yzdx+zxdy+xydz)^2+2(zdxdy+xdydz+ydzdx))$. **О9.** 1) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{3x^2}{x^3+2y^3}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{6y^2}{x^3+2y^3}$; 2) $E_x(z)=\frac{3x^3}{x^3+2y^3}\cdot\frac{1}{\ln(x^3+2y^3)}$, $E_x(z)|_{(1,1)}=\frac{1}{\ln 3}$; $E_y(z)=\frac{6y^3}{x^3+2y^3}\cdot\frac{1}{\ln(x^3+2y^3)}$, $E_y(z)|_{(1,1)}=\frac{2}{\ln 3}$. **С2.** $\frac{\partial f}{\partial x}=20-4x+6y$; $\frac{\partial f}{\partial y}=10-8y+6x$. **Д1.** 1) $\mathbb{R}^2$; 2) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\neq -x\}$; 3) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |y|\le|x|\}$; 4) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |y|\le|x|, x\neq 0\}$; 5) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\ge 0, y\ge 0, x^2\ge y\}$; 6) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0, 2\pi n<y<2\pi(n+1), n\in\mathbb{Z}\}$; 7) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x>0, y>0, z>0\}$; 8) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y\neq n, n\in\mathbb{Z}\}$; 9) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1, y^2\le 4x, x\neq 0, y\neq 0\}$; 10) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le y\le\frac{1}{1+x^2}\}$. **Д2.** 1) $-\frac{1}{4}$; 2) 1; 3) $e^{-1/2}$; 4) 0; 5) 1. **Д3.** 1) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$; 2) $\frac{\partial z}{\partial x}=2x\ln 2\cdot 2^{x^2-y}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\ln 2\cdot 2^{x^2-y}$; 3) $\frac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{ctg}(x-y)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\mathrm{ctg}(x-y)$; 4) $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y(1+x^3)^{y-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=(1+x^3)^y\ln(1+x^3)$; 5) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{z}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^z$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z$, $\frac{\partial u}{\partial z}=\left(\frac{x}{y}\right)^z\ln\frac{x}{y}$; 6) $\frac{\partial u}{\partial x}=e^{-xy}(1-xy)$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-x^2e^{-xy}$. **Д4.** 1) $dz=3x^2y^4dx+4x^3y^3dy$; $d^2z=6xy^2(y^2dx^2+4xydxdy+2x^2dy^2)$; 2) $dz=-\frac{2y}{x^3}(ydx-xdy)$, $d^2z=\frac{2}{x^4}(3y^2dx^2-4yxdxdy+x^2dy^2)$; 3) $dz=2^{xy}\ln 2(ydx+xdy)$, $d^2z=2^{xy}\ln 2(y^2\ln 2dx^2+2(1+xy\ln 2)dxdy+x^2\ln 2dy^2)$; 4) $du=(y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$, $d^2u=2(dxdy+dydz+dzdx)$; 5) $du=\cos(x+y+z)(dx+dy+dz)$, $d^2u=-\sin(x+y+z)(dx+dy+dz)^2$. **Д5.** 1) 5,05; 2) 0,82. **Д6.** 1) $\mathrm{grad}u=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$, $|\mathrm{grad}u|=3$; 2) $\mathrm{grad}u=\vec{i}+\frac{3}{8}\vec{j}$, $|\mathrm{grad}u|=\frac{\sqrt{73}}{8}$. **Д7.** а) 1) $\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy}$; 2) $E_x(z)=xy$, $E_x(z)|_{(1,1)}=1$; $E_y(z)=xy$, $E_y(z)|_{(1,1)}=1$; б) 1) $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2+6y+39$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-2y+6x+18$; 2) $E_x(z)=\frac{(3x^2+6y+39)x}{x^3-y^2+6xy+39x+18y-20}$, $E_x(z)|_{(1,1)}=1,116$; $E_y(z)=\frac{(-2y+6x+18)y}{x^3-y^2+6xy+39x+18y-20}$, $E_y(z)|_{(1,1)}=0,512$.

Тема 24. Екстремум функції багатьох змінних

Функція $u = f(M)$, $M \in \Omega$, має **локальний максимум** (**мінімум**) у точці $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0) \in \Omega$, якщо існує такий окіл $U(M_0)$ точки M_0, для всіх точок $M(x_1, \dots, x_n)$ якого виконується нерівність $f(M_0) > f(M)$ ($f(M_0) < f(M)$). Максимум або мінімум функції називається її **екстремумом.**

Необхідна умова екстремуму. Якщо диференційовна функція f досягає екстремуму в точці M_0, то в цій точці

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(M_0) = 0, \qquad k \in \{1, 2, \dots, n\}, \tag{1}$$

або $df(M_0, dx_1, \dots, dx_n) = 0$ для всіх $dx_1, \dots, dx_n$.

Точки, в яких виконується умова (1), називаються **стаціонарними** точками функції f. Таким чином, якщо M_0 – точка екстремуму, то або M_0 – стаціонарна точка, або в цій точці функція не диференційовна .

Достатні умови екстремуму. Нехай $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$ – стаціонарна точка функції f, причому ця функція двічі диференційовна в деякому околі точки M_0 і всі її другі частинні похідні неперервні в точці M_0. Тоді:

а) якщо $d^2u(M_0, dx_1, \dots, dx_n)$ як функція $dx_1, \dots, dx_n$ має сталий знак при будь-яких наборах значень $dx_1, \dots, dx_n$, які не дорівнюють одночасно нулю, то функція $u = f(M)$ має в точці M_0 екстремум, а саме максимум при $d^2u(M_0, dx_1, \dots, dx_n) < 0$ і мінімум при $d^2u(M_0, dx_1, \dots, dx_n) > 0$;

б) якщо $d^2u(M_0, dx_1, \dots, dx_n)$ є знакозмінною функцією dx_1, $\dots$, dx_n, тобто набуває як додатних, так і від'ємних значень, то точка M_0 не є точкою екстремуму функції $u = f(M)$;

в) якщо $d^2u(M_0, dx_1, ..., dx_n) \ge 0$ або $d^2u(M_0, dx_1, ..., dx_n) \le 0$, причому існують такі набори значень $dx_1, \dots, dx_n$, що не дорівнюють одночасно нулю, для яких значення другого диференціала дорівнює нулеві, то функція $u = f(M)$ у точці M_0 може мати екстремум, але може і не мати його.

У випадку функції двох змінних достатні умови екстремуму можна сформулювати по-іншому. Нехай $M_0(x_0, y_0)$ - стаціонарна точка функції $z = f(x, y)$ і $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$, $\Delta = AC - B^2$. Тоді:

1) якщо $\Delta > 0$, то M_0 – точка екстремуму, причому при $A < 0$ – точка максимуму, при $A > 0$ – мінімуму;

2) якщо $\Delta < 0$, то в точці M_0 екстремуму немає.

У випадку $\Delta = 0$ функція f у стаціонарній точці M_0 екстремум може мати або ні.

Приклад 1. Знайти екстремум функції $z = \frac{1}{2}xy + (47 - x - y)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right)$.

◁ Маємо: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{12}y - \frac{2}{3}x + \frac{47}{3}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{2}y - \frac{1}{12}x + \frac{47}{4}$. Скориставшись необхідною умовою екстремуму, знаходимо стаціонарну точку: $\begin{cases} -\frac{1}{12}y - \frac{2}{3}x + \frac{47}{3} = 0, \\ -\frac{1}{2}y - \frac{1}{12}x + \frac{47}{4} = 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} 8x + y = 188, \\ x + 6y = 141. \end{cases}$ Звідси $x = 21$, $y = 20$; стаціонарна точка $M_0(21, 20)$.

Знайдемо значення других похідних у точці M_0:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0) = -\frac{2}{3}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_0) = -\frac{1}{12}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_0) = -\frac{1}{2};$$

тоді $\quad \Delta = AC - B^2 = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{12}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{144} > 0.$

Оскільки $A < 0$, то в точці M_0 (21,20) функція має максимум

$$z_{\max} = z(M_0) = 282. \ \triangleright$$

Приклад 2. Фірма хоче освоїти два ринки, один з них внутрішній, а другий зовнішній. Відомо, що функції попиту дорівнюють відповідно $p_1 = 500 - x_1$, $p_2 = 360 - 1,5x_2$, а сумарні витрати $C = 50000 + 20x_1 + 20x_2$, де x_1 – кількість продукції, яка йде на внутрішній ринок, а x_2 – на зовнішній ринок. Яку цінову політику повинна проводити фірма, щоб прибуток був максимальний?

◁ Сумарний доход у випадку першого ринку дорівнює $P_1 = x_1 p_1 = x_1(500 - x_1) = 500x_1 - x_1^2$, а у випадку другого – $P_2 = x_2 p_2 = x_2(360 - 1,5x_2) = 360x_2 - 1,5x_2^2$. Тоді прибуток $\pi(x_1, x_2) = P_1 + P_2 - C = 500x_1 - x_1^2 + 360x_2 - 1,5x_2^2 - 50000 - 20x_1 - 20x_2$, тобто $\pi(x_1, x_2) = 480x_1 - x_1^2 + 340x_2 - 1,5x_2^2 - 50000$. Дану функцію і треба дослідити на екстремум.

З необхідної умови екстремуму одержуємо, що $\frac{\partial \pi}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial \pi}{\partial x_2} = 0$ або

$480 - 2x_1 = 0$, $340 - 3x_2 = 0$, тобто $x_1^0 = 240$, $x_2^0 = \frac{340}{3}$.

Скористаємося достатньою умовою екстремуму:

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial x_1^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_2^2} = -3,$$

$\Delta = (-2) \cdot (-3) - 0^2 = 6 > 0$, а це означає, що в точці $M_0(240; \frac{340}{3})$ функція π має максимум, бо $\frac{\partial^2 \pi}{\partial x_1^2} = -2 < 0$.

Таким чином, на внутрішньому ринку треба продати 240 од. продукції за ціною $p_1 = 500 - 240 = 260$ грн., а на зовнішньому – $\frac{340}{3}$ од. за ціною $p_2 = 360 - 1,5 \cdot \frac{340}{3} = 180$ грн. Прибуток при цьому складе $\pi(240; \frac{340}{3}) = 26866,67$ грн. ▷

Функція $u = f(M)$ має **умовний максимум (мінімум)** у точці $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, якщо існує такий окіл точки M_0, для всіх точок якого, що задовольняють рівняння зв'язку

$$\varphi_k(M) = 0, \ k \in \{1, \ldots, m\}, \ m < n,$$

виконується нерівність $f(M_0) > f(M)$ $(f(M_0) < f(M))$.

Задача знаходження умовного екстремуму зводиться до дослідження на звичайний екстремум **функції Лагранжа**

$$L(x_1, \ldots, x_n; \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k(x_1, \ldots, x_n);$$

$\lambda_k, \ k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, називаються **множниками Лагранжа .**

Необхідні умови екстремуму виражаються такою системою $n+m$ рівнянь:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L(N)}{\partial x_i} = 0, \ i \in \{1, \ldots, n\}, \\ &\varphi_k(N) = 0, \ k \in \{1, \ldots, m\}, \\ &N = (x_1, ..., x_n; \lambda_1, ..., \lambda_m), \end{aligned} \qquad (2)$$

з яких можна знайти невідомі $x_1, \ldots, x_n; \lambda_1, \ldots, \lambda_m$, де $x_1, \ldots, x_n$ – координати точки, в якій можливий умовний екстремум.

Достатні умови умовного екстремуму пов'язані з вивченням знаку другого диференціала функції Лагранжа $d^2L(x_1^0, \ldots, x_n^0; \lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0; dx_1, \ldots, dx_n)$ для кожної системи значень $x_1^0, \ldots, x_n^0;\ \lambda_1^0,$

$\ldots, \lambda_m^0$, одержаної з (2) за умови, що $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ задовольняють рівняння

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{\partial x_j}\, dx_j = 0,\ k \in \{1, 2, \ldots, m\}, \qquad (3)$$

при $dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2 \neq 0$. А саме, функція f має умовний максимум у точці $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, якщо для довільних значень $dx_1, \ldots, dx_n$, які задовольняють умови (3) і не дорівнюють нулю одночасно, виконується нерівність $d^2L(x_1^0, \ldots, x_n^0; \lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0, dx_1, \ldots, dx_n) < 0$, і умовний мінімум, якщо за цих умов $d^2L(x_1^0, \ldots, x_n^0; \lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0, dx_1, \ldots, dx_n) > 0$.

У випадку функції $z = f(x, y)$ з рівнянням зв'язку $\varphi(x, y) = 0$ функція Лагранжа має вигляд

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y).$$

Система (2) складається з трьох рівнянь:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \qquad \varphi(x, y) = 0.$$

Нехай $M_0(x_0, y_0), \lambda_0$ – будь-який розв'язок цієї системи і

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial\varphi(M_0)}{\partial x} & \frac{\partial\varphi(M_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi(M_0)}{\partial x} & \frac{\partial^2 L(M_0,\lambda_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L(M_0,\lambda_0)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial\varphi(M_0)}{\partial y} & \frac{\partial^2 L(M_0,\lambda_0)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L(M_0,\lambda_0)}{\partial y^2} \end{vmatrix}.$$

Якщо $\Delta < 0$, то функція $z = f(x, y)$ має в точці $M_0(x_0, y_0)$ умовний максимум; якщо $\Delta > 0$ – то умовний мінімум.

Приклад 3. Знайти умовний екстремум функції $z = x + 2y$ при $x^2 + y^2 = 5$.

◁ Складемо функцію Лагранжа: $L(x, y, \lambda) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5)$. Маємо $\frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\lambda x$, $\frac{\partial L}{\partial y} = 2 + 2\lambda y$, а тому система (2) набуває вигляду

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda x &= 0, \\ 2 + 2\lambda y &= 0, \\ x^2 + y^2 &= 5\ . \end{cases}$$

Дана система має два розв'язки: $x_1 = -1$, $y_1 = -2$, $\lambda_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = 1$, $y_2 = 2$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$.

Оскільки $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\lambda$, то $d^2L = 2\lambda(dx^2 + dy^2)$.

При $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ $d^2L > 0$. Тому функція має умовний мінімум у точці $M_1(-1, -2)$ і $z_{\min} = -5$. При $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ $d^2L < 0$, а це означає, що функція має умовний максимум у точці $M_2(1, 2)$ і $z_{\max} = 5$.

Покажемо, як це дослідження можна провести по-іншому.

Нехай $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 5$. Тоді $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 2y$. Очевидно, що $\frac{\partial\varphi(-1,-2)}{\partial x} = -2$, $\frac{\partial\varphi(-1,-2)}{\partial y} = -4$, $\frac{\partial^2 L(-1,-2,\frac{1}{2})}{\partial x^2} = 1$; $\frac{\partial^2 L(-1,-2,\frac{1}{2})}{\partial x \partial y} = 0$; $\frac{\partial^2 L(-1,-2,\frac{1}{2})}{\partial y^2} = 1$, а тому $\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 20 > 0$,
тобто функція має умовний мінімум у точці $M_1(1, -2)$. Аналогічно для точки $M_2(1, 2)$ і $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ $\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -20 < 0$,
тобто $M_2(1; 2)$ є точкою умовного максимуму. $\triangleright$

Приклад 4. Фірма-монополіст виробляє два види товарів S_1 і S_2 у кількостях відповідно x_1 і x_2. Функція витрат має вигляд $C = 10x_1 + x_1x_2 + 10x_2$, а функції попиту для даних товарів мають відповідно вигляд $p_1 = 50 - x_1 + x_2$ і $p_2 = 30 + 2x_1 - x_2$. Крім того, фірма зв'язана обмеженням $x_1 + x_2 = 15$. Знайти максимальний прибуток, який одержить фірма при реалізації товарів S_1 і S_2.

$\triangleleft$ Відомо, що прибуток $\pi(x_1, x_2) = P_1 + P_2 - C = p_1x_1 + p_2x_2 - C = (50 - x_1 + x_2)x_1 + (30 + 2x_1 - x_2)x_2 - 10x_1 - x_1x_2 - 10x_2 = 40x_1 - x_1^2 + 2x_1x_2 + 20x_2 - x_2^2$.

Отже, треба дослідити на екстремум функцію $\pi(x_1, x_2) = 40x_1 - x_1^2 + 2x_1x_2 + 20x_2 - x_2^2$ за умови, що $x_1 + x_2 = 15$.

З умови зв'язку $x_1 + x_2 = 15$ виразимо x_2 через x_1 і підставимо у функцію π $x_2 = 15 - x_1$: $\tilde{\pi} = 40x_1 - x_1^2 + 2x_1(15 - x_1) + 20(15 - x_1) - (15 - x_1)^2 = 80x_1 - 4x_1^2 + 75$.

Дослідимо функцію $\tilde{\pi}$ на безумовний (звичайний) екстремум.

Маємо $\tilde{\pi}'(x_1) = 80 - 8x_1$. Прирівнявши цю похідну до нуля, дістанемо, що $x_1^0 = 10$. Оскільки $\tilde{\pi}''(x_1) = -8 < 0$, то у цій точці x_1^0 функція $\tilde{\pi}$ досягає максимуму, причому $\tilde{\pi}_{\max} = \tilde{\pi}(10) = 80 \cdot 10 - 4 \cdot 10^2 + 75 = 475$.

Звідси випливає, що функція π має максимум у точці $M_0(10; 5)$ і $\pi_{\max} = 475$. $\triangleright$

Якщо функція f диференційовна в обмеженій замкненій області, то вона досягає свого найбільшого (найменшого) значення або в стаціонарній точці, або в точці межі області.

Вправи

О1. Знайти екстремуми функцій двох змінних:
1) $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$; 2) $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$;
3) $z = 2xy - 4x - 2y$; 4) $z = x^3 + y^3 - 15xy$;
5) $z = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y + 1$.

О2. Невелика фірма виробляє два види товарів S_1 і S_2 і продає їх за ціною 1000 і 800 грн. відповідно. Функція витрат має вигляд $C = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$, де x_1 і x_2 – обсяги випуску товарів S_1 і S_2 відповідно.

Знайти такі значення x_1 та x_2, при яких прибуток, який одержить фірма, буде максимальним.

О3. Знайти умовні екстремуми функцій:
1) $z = xy$ за умови $2x + 3y - 5 = 0$; 2) $z = x + y$ при $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}$;
3) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ при $x + y = 2$; 4) $z = xy^2$ при $x + 2y = 1$.

О4. Виробнича функція для даної фірми має вигляд $q = 4x_1x_2 + x_2^2$, де x_1 – капітал, x_2 – праця. Витрати на одиницю капіталу складають 1 гр.од., а на одиницю праці – 2 гр.од. Знайти рівні витрат на капітал і працю, за яких випуск продукції буде максимальним, якщо $x_1 + 2x_2 = 105$.

О5. Реакція на ін'єкцію x одиниць деяких ліків описується функцією $y = x^2(a - x)te^{-t}$, де t – час з моменту ін'єкції. Коли і при якій дозі ліків реакція буде максимальною?

О6. Видатки підприємства за певний період описуються функцією $f(x_1, x_2) = 20 + 12(x_1 + x_2) + \frac{72}{x_1+x_2} + \frac{4}{x_1} + \frac{16}{x_2}$. Знайти значення x_1 і x_2, за яких ці видатки будуть найменшими. Визначити коефіцієнти еластичності f при $x_1 = 1$, $x_2 = 1$.

С1. Знайти найбільше і найменше значення функції в заданій області: 1) $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ в прямокутнику, обмеженому прямими $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 2$; 2) $z = x^2 + 3y^2 + x - y$ в трикутнику, обмеженому прямими $x = 1$, $y = 1$, $x + y = 1$.

Домашнє завдання

Д1. Знайти екстремуми функцій двох змінних:
1) $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$; 2) $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$;
3) $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$; 4) $z = xy^2(1 - x - y)$.

Д2. Підприємство виробляє два види продукції S_1 і S_2 у кількостях x_1 і x_2 відповідно. Ціна одиниці продукції виду S_1 дорівнює 8 гр.од., а одиниці продукції виду S_2 – 10 гр.од. Функція витрат $C = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$. Знайти, при яких x_1 і x_2 прибуток буде максимальним.

Д3. Знайти умовні екстремуми функцій:
1) $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$ при $x + y + 3 = 0$;
2) $z = \frac{x-y-4}{\sqrt{2}}$ при $x^2 + y^2 = 1$; 3) $z = 2x + y$ при $x^2 + y^2 = 1$.

Д4. Знайти найбільші значення функції $z = x - 2y + 5$ в областях: 1) $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 1$; 2) $x \leq 0$, $y \geq 0$, $y - x \leq 1$.

Д5. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 + y^2 - xy - x - y$ в області $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 3$.

Д6. Підприємство використовує два види сировини у кількості x_1 і x_2 одиниць. Вартість одиниці сировини складає відповідно 1 і 2 грн. Для придбання сировини виділено 10000 грн. Знайти оптимальні витрати сировини, що мають забезпечити підприємству максимальний прибуток, якщо відомо, що сумарний прибуток виражається формулою $q = 2x_1 + 10x_2 - x_2^2$.

Д7. Реакція $R(x,t)$ на x одиниць ліків на момент часу t описується залежністю $R(x,t) = x^2(a-x)t^2e^{-t}$. При якій кількості ліків реакція буде максимальною? Коли настане ця максимальна реакція?

Д8. Річні видатки підприємства виражаються функцією $f(x_1, x_2) = 1 + 9x_1 + 64x_2 + \frac{36}{x_1} + \frac{4}{x_2}$. За яких значень x_1 і x_2 ці видатки будуть мінімальними? Знайти коефіцієнти еластичності f при $x_1 = 1$, $x_2 = 1$.

Д9. Фірма вирішила щомісячно асигнувати 100 000 грошових одиниць (гр.од.) на виробництво деякої продукції. Середня заробітна платня у фірмі складає 2000 гр.од., а вартість сировини – 1000 гр.од. Визначити, яку кількість робітників x треба мати і яку кількість сировини y необхідно придбати, щоб одержати найбільший обсяг продукції z за умови, що він прямо пропорційний x і y з коефіцієнтом пропорційності 5.

Відповіді

О1. 1) $z_{\min} = z(0,3) = -9$; 2) $z_{\max} = z(4,4) = 12$; 3) не існує; 4) $z_{\min} = -125$; 5) $z_{\min} = z(4,1) = -151$; $z_{\max} = z(-4,-1) = 153$. **О2.** $x_1 = 100$, $x_2 = 300$, $\pi_{\max} = 170000$. **О3.** 1) $z_{\max} = z(\frac{5}{4}, \frac{5}{6}) = \frac{25}{24}$; 2) $z_{\min} = z(2,2) = 4$, $z_{\max} = z(-2,-2) = -4$; 3) $z_{\min} = z(1,1) = 2$; 4) $z_{\min} = z(1,0) = 0$, $z_{\max} = z(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{1}{27}$. **О4.** $x_1 = 45$, $x_2 = 30$, $q_{\max} = 6300$ гр.од. **О5.** $x_0 = \frac{2}{3}a$,$t_0 = 1$. **О6.** $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $\min f = 92$, $E_{x_1}(f)|_{(1,1)} \approx -0,1$, $E_{x_2}(f)|_{(1,1)} \approx -0,22$. **С1.** 1) $\min z = z(1,0) = -3$, $\max z = z(1,2) = 17$; 2) $\min z = z(0,1/6) = -1/2$, $\max z = z(0,1) = z(1,0) = 2$. **Д1.** 1) $z_{\min} = z(-4,1) = -1$; 2) $z_{\min} = z(1,\frac{1}{2}) = 0$; 3) $z_{\min} = z(0,-\frac{2}{3}) = -\frac{4}{3}$; в стаціонарній точці $(2,-\frac{2}{3})$ екстремуму немає; 4) $z_{\max} = 1/64$. **Д2.** $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $\pi_{\max} = 28$ гр.од. **Д3.** 1) $z_{\min} = z(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}) = -\frac{19}{4}$; 2) $z_{\min} = z(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}) = -1-2\sqrt{2}$; $z_{\max} = z(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}) = 1-2\sqrt{2}$; 3) $z_{\min} = z(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}) = -\sqrt{5}$; $z_{\max} = z(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}) = \sqrt{5}$. **Д4.** 1) $\max z = z(1,0) = 6$; 2) $\max z = z(0,0) = 5$. **Д5.** $\max z = z(3,0) = z(0,3) = 6$; $\min z = z(1,1) = -1$. **Д6.** $x_1 = 9994$, $x_2 = 3$. **Д7.** $x_0 = \frac{2}{3}a$, $t_0 = 2$. **Д8.** $x_1 = 2$, $x_2 = 1/4$, $\min f = 69$, $E_{x_1}(f)|_{(1,1)} \approx -0,237$, $E_{x_2}(f)|_{(1,1)} \approx 0,526$. **Д9.** 25 працівників, 50 одиниць сировини.

Тема 25. Ряди

Вираз

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad (1)$$

де $\{a_k, k \geq 1\}$ – задана числова послідовність, називається **числовим рядом**. Суми

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \quad \dots, \quad S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n, \quad \dots \qquad (2)$$

називаються **частинними сумами ряду** (1).

Якщо існує скінченна границя послідовності частинних сум (2) $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то ряд (1) називається **збіжним**, а число S – **сумою ряду**. Якщо ж $S = \pm\infty$ або $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не існує, то ряд (1) називається **розбіжним**.

Приклад 1. Знайти суму ряду $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} + ...$

$\lhd$ Оскільки дріб $\frac{1}{n(n+1)}$ можна подати у вигляді $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, $n \geq 1$, то частинна сума ряду запишеться так: $S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n+1}) = 1$, тобто заданий ряд збігається та його сума $S = 1$. $\rhd$

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$ та у випадку збіжності знайти його суму.

$\lhd$ Маємо $\quad S_n = a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1}$.
Якщо $q \neq 1$, то $S_n = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q}q^n$;
при $q = 1$ $S_n = na$, а при $q = -1$ $\quad S_n = \begin{cases} 0, n = 2k, \\ a, n = 2k+1. \end{cases}$ Отже,
1) при $|q| < 1$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q}q^n) = \frac{a}{1-q}$, бо $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$;
2) при $|q| > 1$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q}q^n) = \infty$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$;
3) при $q = 1$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} na = \infty$;
4) при $q = -1$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не існує .

Отже, наш ряд збігається при $|q| < 1$ та його сума $S = \frac{1}{1-q}$ і розбігається при $|q| \geq 1$.$\triangleright$

Якщо ряд (1) збігається, то

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \tag{3}$$

більше того,

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} + ... + a_{2n}) = 0. \tag{4}$$

Умови (3) і (4) є **необхідними умовами** збіжності ряду.

Приклад 3. Довести, що гармонічний ряд

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + ... + \tfrac{1}{n} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n}$$

розбігається, хоч його загальний член прямує до нуля при $n \to \infty$.

$\triangleleft$ Перевіримо, чи виконується умова (4): $\lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) =$
$= \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}) \geq \lim\limits_{n\to\infty} n\frac{1}{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0.$
Отже, ряд розбігається. $\triangleright$

Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ з невід'ємними членами, який збіжний тоді й лише тоді, коли послідовність його частинних сум обмежена зверху. Збіжність або розбіжність такого ряду найчастіше встановлюється шляхом порівняння його з рядом, про поведінку якого вже відомо. При цьому використовуються **ознаки порівняння.**

Нехай $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (A) і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ (B) - два ряди з невід'ємними членами. Тоді: 1) якщо $a_n \leq b_n, n \in \mathbb{N}$, то із збіжності ряду (B) випливає збіжність ряду (A), а з розбіжності ряду (A) - розбіжність ряду (B) ; 2) якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0 (b_n > 0, n \geq 1)$, то обидва ряди збіжні або розбіжні одночасно.

Серед числових рядів важливу роль еталона відіграє так званий гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$, який збігається при $\alpha > 1$ і розбігається при $\alpha \leq 1$.

Приклад 4. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{sin^2 n}{3^n}$.

$\lhd$ Маємо $\frac{sin^2 n}{3^n} \leq \frac{1}{3^n}, n \in \mathbb{N}$, бо $sin^2 n \leq 1, n \in \mathbb{N}$. Якщо покласти $a_n = \frac{sin^2 n}{3^n}, b_n = \frac{1}{3^n}$, $n \in \mathbb{N}$, то збіжність даного ряду випливає з першої ознаки порівняння і результату прикладу 2. $\rhd$

Однією з ознак збіжності, які часто використовуються, є **ознака Даламбера:** нехай для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ з додатними членами існує $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, тоді при $l < 1$ ряд збігається, а при $l > 1$ – розбігається.

Приклад 5. Дослідити на збіжність ряд $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + ... + \frac{n}{2^n} + ...$

$\lhd$ Враховуючи те, що $a_n = \frac{n}{2^n}$, $a_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$, знаходимо

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1) \cdot 2^n}{2^{n+1} \cdot n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1.$$

За ознакою Даламбера ряд збігається. $\rhd$

Зазначимо, що знакозмінний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, тобто такий, серед членів якого є як додатні, так і від'ємні, досліджується складніше. Так, якщо збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, то вихідний ряд також збігається і він називається **абсолютно збіжним**. Знакозмінний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ називається **умовно збіжним,** якщо він сам збігається, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ розбігається.

Часто зустрічаються ряди, знаки членів яких чергуються:

$$p_1 - p_2 + p_3 - ... + (-1)^{n-1} p_n + ..., \quad p_n > 0, \quad n \in \mathbb{N}. \qquad (5)$$

Такі ряди називаються **знакопереміжними**.

Для дослідження їх на збіжність зручно використовувати **ознаку Лейбніца**: якщо виконуються умови: 1) $p_{n+1} < p_n$, $n \in \mathbb{N}$, 2) $\lim\limits_{n \to \infty} p_n = 0$, то ряд (5) збігається, причому його сума додатна і не перевищує першого члена ряду.

Приклад 6. Дослідити на збіжність ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + ...$$

◁ Оскільки $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}$, а $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, то згідно з ознакою Лейбніца ряд є збіжним. ▷

Нехай функції $f_n(x), n \in \mathbb{N}$, визначені в області Ω. Вираз

$$f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x) + ... = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in \Omega, \tag{6}$$

називається **функціональним рядом**. Якщо для $x_0 \in \Omega$ числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ збігається, то кажуть, що функціональний ряд (6) збігається в точці x_0. Якщо в кожній точці $x \in \Omega_1 \subset \Omega$ числові ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ збігаються, то ряд (6) називається **збіжним в області** Ω_1.

Функціональний ряд вигляду

$$c_0 + c_2x + c_3x^2 + ... + c_nx^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n \tag{7}$$

називається **степеневим** за степенями x. Числа $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ - це коефіцієнти ряду.

Для будь-якого степеневого ряду (7) існує число R таке, що скрізь у середині інтервалу $(-R, R)$ ряд (7) збігається абсолютно, а для всіх x, які задовольняють нерівність $|x| > R$, степеневий ряд (7) розбігається. У точках $x = \pm R$ ряд (7) може як збігатися, так і розбігатися. Число R – половина довжини **інтервалу збіжності** $(-R, R)$ – називається **радіусом збіжності** ряду (7). Якщо серед коефіцієнтів ряду $c_0, c_1, ..., c_n, ...$ немає нульових, тобто ряд містить усі цілі додатні степені x, то

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}$$

за умови, що ця границя (скінченна або нескінченна) існує.

Приклад 7. Знайти область збіжності степеневого ряду

$$x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + ... + \frac{1}{n}x^n + ...$$

◁ Тут $c_n = \frac{1}{n}$, $c_{n+1} = \frac{1}{n+1}$. Знайдемо радіус збіжності ряду: $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}) = 1$. Отже, ряд збігається для значень x, які задовольняють нерівність $-1 < x < 1$.

Дослідимо збіжність ряду на кінцях проміжку. Якщо $x = 1$, то дістанемо гармонічний ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...$, який, як відомо, розбігається. Якщо $x = -1$, то маємо ряд $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-...$. Цей ряд збігається, оскільки виконуються умови ознаки Лейбніца.

Отже, область збіжності степеневого ряду має вигляд $[-1, 1)$. ▷

Якщо функція f нескінченно диференційовна в інтервалі $(x_0 - R, x_0 + R)$, то вона однозначно розкладається в збіжний степеневий **ряд Тейлора**

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + ...,$$

якщо на цьому інтервалі виконується умова $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$, де $R_{n+1}(x)$ - залишковий член формули Тейлора.

При $x_0 = 0$ дістаємо так званий **ряд Маклорена**

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + ...$$

Наведемо розклади в ряд Маклорена таких функцій:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ..., \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ..., \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ..., \quad x \in \mathbb{R};$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + ...,$$
$$|x| < 1, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}.$$

Вправи

О1. Знайти суми рядів: 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$;
2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{6^n}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

О2. Дослідити на збіжність ряди:
1) $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{8}+\frac{4}{11}+...+\frac{n}{3n-1}+...$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}$;
3) $\frac{2}{3}+\frac{3}{8}+...+\frac{n+1}{n(n+2)}+...$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n}{n^4+1}}$; 5) $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{11}+....$

О3. Дослідити за ознакою Даламбера збіжність рядів:
1) $\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+...+\frac{1}{(2n+1)!}+...$; 2) $\frac{2}{2}+\frac{2\cdot3}{2\cdot4}+...+\frac{(n+1)!}{2^n\cdot n!}+...$;
3) $\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2^{10}}+\frac{2^3}{3^{10}}+...+\frac{2^n}{n^{10}}+...$; 4) $\frac{10}{1!}+\frac{10^2}{2!}+\frac{10^3}{3!}+...+\frac{10^n}{n!}+...$;
5) $\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{5}{\sqrt{2\cdot3^2}}+\frac{9}{\sqrt{3\cdot3^3}}+\frac{13}{\sqrt{4\cdot3^4}}+....$

О4. Дослідити на збіжність ряди:
1) $1-\frac{1}{3}+...+(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}+...$;
2) $\frac{1}{2}-\frac{2}{2^2+1}+\frac{3}{3^2+1}-\frac{4}{4^2+1}+...+(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}+...$;
3) $1,1-1,01+1,001-1,0001+...+(-1)^{n-1}(1+\frac{1}{10^n})+...$;
4) $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}+....$

О5. Знайти області збіжності степеневих рядів:
1) $(x-2)+\frac{1}{2^2}(x-2)^2+\frac{1}{3^2}(x-2)^3+...$;
2) $1!(x-5)+2!(x-5)^2+3!(x-5)^3+...$;
3) $\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+...$;
4) $\frac{1}{9}x^2+\frac{1}{81}x^4+...+\frac{1}{9^n}x^{2n}+....$

О6. Розкласти в степеневий ряд функції: 1) $f(x)=2^x,\ x\in\mathbb{R}$;
2) $f(x)=\sin^2 x,\ x\in\mathbb{R}$; 3) $f(x)=e^{-x^2},\ x\in\mathbb{R}$;
4) $f(x)=\ln x$ за степенями $x-1$.

С1. Дослідити на збіжність ряди:
1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n+1}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^2}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^n}$;
5) $\frac{10}{11}+\left(\frac{10}{11}\right)^2\cdot2^5+\left(\frac{10}{11}\right)^3\cdot3^5+\left(\frac{10}{11}\right)^4\cdot4^5+...$;

6) $\frac{11}{10}+\left(\frac{11}{10}\right)^2\cdot\frac{1}{2^5}+\left(\frac{11}{10}\right)^3\cdot\frac{1}{3^5}+\left(\frac{11}{10}\right)^4\cdot\frac{1}{4^5}+...;$
7) $\frac{2+1}{5+1}+\frac{2^2+1}{5^2+1}+\frac{2^3+1}{5^3+1}+....$

С2. Знайти області збіжності степеневих рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n};$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 4^n};$ 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n};$
4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n\cdot 3^n};$ 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{2n-1}}{2n-1}.$

С3. Розкласти за степенями x функції:

1) $f(x)=3^x,\ x\in\mathbb{R};$ 2) $f(x)=\cos^2 x,\ x\in\mathbb{R};$

Домашнє завдання

Д1. Знайти суми рядів: 1) $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+...;$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}.$

Д2. За допомогою ознак порівняння дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, якщо: 1) $a_n=\frac{\sin^2 n}{n\sqrt{n}}$; 2) $a_n=\frac{n}{n^2+1}$; 3) $a_n=\frac{1}{\sqrt{2n^3+1}}$.

Д3. Дослідити за ознакою Даламбера збіжність рядів:

1) $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{6}{27}+\frac{8}{81}+...;$ 2) $1+\frac{2}{2!}+\frac{4}{3!}+\frac{8}{4!}+...;$
3) $1+\frac{3}{2\cdot3}+\frac{3^2}{2^2\cdot5}+\frac{3^3}{2^3\cdot7}+...;$ 4) $1+\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{3\cdot5^2}+\frac{1}{4\cdot5^3}+...;$
5) $\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+...+\frac{n^2}{3^n}+...$

Д4. Дослідити на збіжність ряди:

1) $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+...;$ 2) $1-2+3-4+5-6+...;$
3) $1-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-...;$ 4) $1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^3}+....$

Д5. Знайти області збіжності рядів:

1) $1+\frac{x}{3\cdot2}+\frac{x^2}{3^2\cdot3}+\frac{x^3}{3^3\cdot4}+...;$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}\cdot n!;$
3) $\frac{x+1}{1!}+\frac{(x+1)^2}{2!}+\frac{(x+1)^3}{3!}+...;$ 4) $\frac{x-1}{1\cdot2}+\frac{(x-1)^2}{3\cdot2^2}+\frac{(x-1)^3}{5\cdot2^3}+....$

Д6. Розкласти в ряд за степенями x функції:

1) $\cos(x-\alpha),\ x\in\mathbb{R};$ 2) $xe^x,\ x\in\mathbb{R};$ 3) $y=\sin\frac{x}{2},\ x\in\mathbb{R}.$

Відповіді

О1. 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{23}{90}$; 3) $\frac{3}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$. **О2.** 1) Розбігається; 2) збігається; 3) розбігається; 4) збігається; 5) розбігається. **О3.** 1) Збігається; 2) збігається; 3) розбігається; 4) збігається; 5) збігається. **О4.** 1) Збігається; 2) збігається; 3) розбігається; 4) збігається. **О5.** 1) $[1;3]$; 2) $\{5\}$; 3) $(-\infty;+\infty)$; 4)$(-3;3)$. **О6.** 1) $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n\ \ln^n 2}{n!}$; 2) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$; 3) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$; 4) $f(x)=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+...,0<x\leq 2$.

С1. 1) Розбігається; 2) збігається; 3) збігається; 4) збігається; 5) збігається; 6) розбігається; 7) збігається [порівняти з рядом $\frac{2}{5}+(\frac{2}{5})^2+$ $+(\frac{2}{5})^3+...$]. **С2.** 1) (-1, 1); 2) $[-4,4)$; 3) $(-3,3)$; 4) $[-4,2)$; 5) $(2,4)$. **С3.** 1) $f(x)=1+x\ln 3+\frac{x^2\ln^2 3}{2!}+\frac{x^3\ln^2 3}{3!}+...,-\infty<x<+\infty$; 2) $1-\frac{2}{2!}x^2+\frac{2^3}{4!}x^4-\frac{2^5}{6!}x^6+...,-\infty<x<+\infty$. **Д1.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) 1.

Д2. 1) Збігається; 2) розбігається; 3) збігається. **Д3.** 1) Збігається; 2) збігається; 3) розбігається; 4) збігається; 5) збігається. **Д4.** 1) Збігається абсолютно; 2) розбігається; 3) збігається умовно; 4) збігається абсолютно. **Д5.** 1) $[-3,3)$; 2) $\{0\}$; 3) $(-\infty;+\infty)$; 4) $-1\leq x<3$. **Д6.** 1) $f(x)=\sin\alpha\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cos\alpha\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$; 2) $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}$; 3) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2^{2n-1}(2n-1)!}$.

Тема 26. Диференціальні рівняння першого порядку

Рівняння

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

або

$$y' = f(x, y), \tag{2}$$

яке зв'язує між собою незалежну змінну x, шукану функцію y і її похідну y', називається **диференціальним рівнянням 1-го порядку.**

Розв'язком або частинним розв'язком рівняння (1) або (2) на проміжку X називається функція $y = \varphi(x)$, яка після її підстановки в це рівняння разом зі своєю похідною φ' перетворює його в тотожність стосовно $x \in X$. Рівняння $\Phi\ (x, y) = 0$, яке визначає цей розв'язок як неявну функцію, називається **інтегралом** або **частинним інтегралом** диференціального рівняння. На площині з вибраною декартовою прямокутною системою координат рівняння $\Phi(x, y) = 0$ визначає деяку лінію, яка називається **інтегральною кривою**.

Загальним розв'язком диференціального рівняння (1) або (2) називається така функція $y = \varphi(x, C)$, яка залежить від довільного параметра C, для будь-якого C є розв'язком цього рівняння і при відповідному виборі C вона визначає довільний розв'язок даного рівняння. Рівняння $\Phi(x, y, C) = 0$, яке визначає загальний розв'язок як неявну функцію, називається **загальним інтегралом** диференціального рівняння.

Процес знаходження розв'язків диференціального рівняння називають **інтегруванням** цього рівняння.

Задача, в якій треба знайти частинний розв'язок диференціального рівняння (2), що задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$, називається **задачею Коші.**

Розглянемо найпростіші типи диференціальних рівнянь першого порядку та методи їх інтегрування.

Рівняння з відокремлюваними змінними. Рівняння вигляду

$$y' = f(x)\ g(y) \tag{3}$$

або

$$f_1(x)\ g_1(y)\ dx + f_2(x)\ g_2(y)\ dy = 0 \tag{4}$$

називається рівнянням з **відокремлюваними змінними.**

Оскільки $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то рівняння (3) часто записують у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\ g(y). \tag{3'}$$

Вважатимемо, що функції f, f_1, f_2 неперервні на множині X, а функції g, g_1, g_2 – неперервні на множині Y.

Якщо жодна з функцій f, g, f_1, f_2, g_1, g_2 не дорівнює тотожно нулю, то, відокремлюючи змінні, зведемо рівняння $(3')$ і (4) відповідно до вигляду

$$f(x)dx = \tfrac{dy}{g(y)}, \qquad \tfrac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = -\tfrac{g_2(y)}{g_1(y)}dy.$$

Інтегруючи ліві частини цих рівнянь за x, а праві за y, дістанемо загальні інтеграли цих рівнянь:

$$\int f(x)dx = \int \frac{dy}{g(y)} + C, \tag{3''}$$

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = -\int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy + C. \tag{4'}$$

Якщо в рівнянні (3) функція g має дійсний нуль y_0, тобто $g(y_0) = 0$, то функція $y(x) = y_0$ є розв'язком цього рівняння. При діленні обох частин цього рівняння на g (відокремленні змінних) розв'язок $y(x) = y_0$ можна втратити. Аналогічно при інтегруванні рівняння (4) можна втратити інтегральні лінії $x(y) = x_0$ і $y(x) = y_0$, де x_0 – дійсний нуль функції f_2, y_0 – дійсний нуль функції g_1.

Тому, одержавши вираз ($3''$) або ($4'$) відповідно для рівняння (3) або (4), треба перевірити, чи входять до його складу (при відповідних значеннях параметра C) згадані вище частинні розв'язки. Якщо входять, то втрати розв'язків немає. Якщо ж не входять, то їх треба включити до складу ($3''$) або ($4'$).

Приклад 1. Розв'язати рівняння $x^2ydx + x^3dy = 0$.

◁ Відокремимо змінні, поділивши праву і ліву частину рівняння на $x^3y \neq 0$: $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$.
Інтегруємо: $\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} + C_1$ або $\ln|y| = -\ln|x| + C_1$, $\ln|yx| = C_1$.
Для зручності потенціювання одержаної рівності подамо параметр C_1 в логарифмічній формі, поклавши $C_1 = \ln|C_2|$, $C_2 \neq 0$ (при цьому C_1 набуває довільних значень від $-\infty$ до $+\infty$). Тоді $\ln|yx| = \ln|C_2|$ і, потенціюючи, дістанемо загальний інтеграл у вигляді $yx = C_2$, звідки $y = \frac{C_2}{x}$.

Зауважимо, що вихідне диференціальне рівняння має, очевидно, ще розв'язок $y = 0$, який не входить в одержаний загальний інтеграл, оскільки $C_2 \neq 0$. Введемо новий параметр , який набуває, на відміну від C_2, також і нульове значення. Тоді розв'язок $y = 0$ ввійде до складу загального розв'язку $y = \frac{C}{x}$. ▷

За допомогою підстановки $u(x) = ax + by(x) + d$ до диференціального рівняння з відокремлюваними змінними зводиться і диференціальне рівняння вигляду $y' = f(ax + by + d), b \neq 0$.

Однорідні рівняння. Диференціальне рівняння 1-го порядку (1) називається **однорідним**, якщо його можна подати у вигляді

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{5}$$

За допомогою підстановки $\frac{y}{x} = u(x)$ однорідне рівняння (5) зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $y' = \frac{y}{x} + \cos\frac{y}{x}$.

◁ Покладемо $\frac{y}{x} = u$ або $y = ux$. Тоді $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$, що, після підстановки у вихідне рівняння, дає рівняння з відокремлюваними змінними

$$u + x\frac{du}{dx} = u + \cos u \quad \text{або} \quad x\frac{du}{dx} = \cos u.$$

Відокремлюючи змінні та інтегруючи, дістаємо: $\frac{du}{\cos u} = \frac{dx}{x}$,
$\int \frac{du}{\cos u} = \int \frac{dx}{x} + C_1$, $\ln|\mathrm{tg}(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4})| = \ln|x| + \ln|C|$, $\mathrm{tg}(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}) = Cx$
або $u = 2\mathrm{arctg}Cx - \frac{\pi}{2}$, $C \in \mathbb{R}$.
Повертаючись до функції y, знаходимо, що $y = x(2\mathrm{arctg}Cx - \frac{\pi}{2})$, $C \in \mathbb{R}$.

При діленні на $cos u$ ми втратили розв'язки $y = x(\frac{\pi}{2} + \pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Долучаючи їх до одержаних розв'язків, знаходимо загальний роз'язок у вигляді $y = x(2\mathrm{arctg}Cx + \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.$\triangleright$

Лінійні рівняння. Диференціальне рівняння 1-го порядку називається **лінійним**, якщо воно має вигляд

$$y' = p(x)y + q(x), \tag{6}$$

де p і q – функції, які неперервні на $[a; b]$.

При $q(x) \equiv 0$ рівняння (6) набуває вигляду $y' = p(x)y$ і називається **лінійним однорідним.** Воно є рівнянням з відокремлюваними змінними, і його загальним розв'язком є

$$y = Ce^{\int p(x)dx}, \tag{7}$$

де C - довільна стала, а $\int p(x)dx$ - одна з первісних функції p.

Інтегрування **лінійного неоднорідного** рівняння (6) проводиться методом **варіації сталої** . Шукаємо роз'язок рівняння (6) у вигляді

$$y = C(x)e^{\int p(x)dx}, \tag{8}$$

який одержується з (7), якщо замінити сталу C на функцію $C = C(x)$. Підставляючи вираз (8) в рівняння (6), дістанемо для невідомої функції $C = C(x)$ рівняння з відокремлюваними змінними:

$$C'(x)e^{\int p(x)dx} + C(x)p(x)e^{\int p(x)dx} = p(x)C(x)e^{\int p(x)dx} + q(x)$$
$$\text{або} \quad C'(x) = q(x)e^{-\int p(x)dx}.$$

Інтегруючи, дістанемо загальний розв'язок

$$C(x) = \int q(x)e^{-\int p(x)dx}dx + C_1,$$

де C_1 - довільна стала, а $\int q(x)e^{-\int p(x)dx}dx$ - одна із первісних. Підставляючи одержаний вираз для $C = C(x)$ у формулу (8), знаходимо загальний ров'язок рівняння (6):

$$y = e^{\int p(x)dx}\Big(C_1 + \int q(x)e^{-\int p(x)dx}dx\Big).$$

Приклад 3. Розв'язати рівняння $y' \cos^2 x + y = \mathrm{tg}x$.

$\lhd$ Розглянемо спочатку відповідне однорідне лінійне рівняння

$$y' \cos^2 x + y = 0.$$

Розв'язуючи його, дістанемо його загальний розв'язок:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{\cos^2 x}, \quad \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{\cos^2 x} + \ln C, \quad \ln|y| = -\mathrm{tg}x + \ln|C|,$$

$$y = Ce^{-\mathrm{tg}x},\ C \in \mathbb{R}.$$

Загальний розв'язок вихідного рівняння шукаємо у вигляді $y = C(x)e^{-\mathrm{tg}x}$. Підставляючи y і $y' = C(x)e^{-\mathrm{tg}x} - C(x)e^{-\mathrm{tg}x}\frac{1}{\cos^2 x}$ в дане рівняння, одержимо

$$cos^2x(C'(x)e^{-\mathrm{tg}x} - C(x)e^{-\mathrm{tg}x}\frac{1}{\cos^2 x}) + C(x)e^{-\mathrm{tg}x} = \mathrm{tg}x,$$

$C'(x)e^{-\mathrm{tg}x}cos^2x = \mathrm{tg}x$. Звідси $C'(x) = \mathrm{tg}xe^{\mathrm{tg}x}\frac{1}{\cos^2 x}$ і тоді

$$C(x) = \int \mathrm{tg}xe^{\mathrm{tg}x}\frac{1}{\cos^2 x}dx = \int \mathrm{tg}xe^{\mathrm{tg}x}d\mathrm{tg}x = \Big|\mathrm{tg}x = t\Big| = \int te^t dt = \int tde^t =$$

$$= te^t - \int e^t dt = te^t - e^t + C_1 = e^{\mathrm{tg}x}(\mathrm{tg}x - 1) + C_1.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння має вигляд $y = C_1e^{\mathrm{tg}x} + \mathrm{tg}x - 1, C_1 \in \mathbb{R}$. $\rhd$

Розглянемо деякі найпростіші задачі макроекономічної динаміки.

Нехай $y(t)$ – обсяг продукції деякої галузі, який реалізований на момент часу t. Вважатимемо, що вся продукція реалізується за ціною p, тобто виконується умова ненасиченості ринку. Тоді доход на момент часу t дорівнюватиме $Y = py(t)$.

Позначимо через $I(t)$ величину інвестицій, які направляються на розширення виробництва за час t. У моделі природного росту вважають, що швидкість випуску продукції (акселерація) пропорційна величині інвестицій, тобто

$$y'(t) = lI(t). \tag{9}$$

При цьому нехтують часом між закінченням виробництва продукції та її реалізацією, тобто вважають, що інвестиційний лаг дорівнює нулю.

Важаючи, що величина інвестицій $I(t)$ складає фіксовану частину доходу, дістанемо

$$I(t) = mY(t) = mpy(t), \tag{10}$$

де коефіцієнт пропорційності m (норма інвестицій) – стала величина, $0 < m < 1$.

Підставляючи (10) в (9), дістанемо диференціальне рівняння першого порядку

$$y' = ky, \quad \text{де } k = mpl. \tag{11}$$

Розв'язуючи рівняння (11), одержуємо
$\frac{dy}{y} = kdt, \quad \int \frac{dy}{y} = k \int dt, \quad \ln|y| = kt + \ln|C|, \quad y = Ce^{kt}, C \in \mathbb{R}.$

Якщо на момент часу t_0 $y(t_0) = y_0$, то, задовольнивши цю початкову умову, матимемо $y_0 = Ce^{kt_0}, \quad C = e^{-kt_0}$.
Тому розв'язком задачі є $y = y_0 e^{k(t-t_0)}$.

У загальному випадку p є спадною функцією, бо із збільшенням обсягу виробленої продукції її ціна знижується як результат насичення ринку.

Отже, модель росту в умовах конкурентного ринку набуває вигляду

$$y' = mlyp(y). \tag{12}$$

Оскільки всі співмножники в правій частині (12) додатні, то $y' > 0$ і це рівняння описує зростаючу функцію y. При дослідженні функцій y на опуклість природно використовується поняття еластичності функції.

Справді, з (12) випливає, що

$$y'' = mly'(\frac{dp}{dy}y + p) \text{ або } y'' = mly'p(\frac{1}{E_p(y)} + 1),$$

оскільки $E_p(y) = \frac{p}{y}\frac{dp}{dy}$.

Очевидно, що $y'' = 0$ рівносильне $E_p(y) = -1$.

Таким чином, якщо попит еластичний, тобто $|E_p(y)| > 1$ (а саме $E_p(y) < -1$), то $y'' > 0$ і функція опукла вниз. Якщо ж попит нееластичний, тобто $|E_p(y)| < 1$ (точніше $-1 < E_p(y) < 0$), то $y'' < 0$ і функція y опукла вгору.

Приклад 4. Знайти обсяг реалізованої продукції y, якщо відомо, що попит визначається рівністю $p = 2 - y$, норма акселерації $\frac{1}{l} = 2$, норма інвестицій $m = 0,5$; $y(0) = 0,5$.

◁ Рівняння (12) у даному випадку має вигляд $y' = y(2 - y)$. Відокремивши змінні та проінтегрувавши, дістанемо

$$\frac{dy}{y(2-y)} = dt, \quad \int \frac{dy}{y(2-y)} = \int dt, \quad \frac{1}{2}\int(\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y})dy = -t + \ln|C|,$$

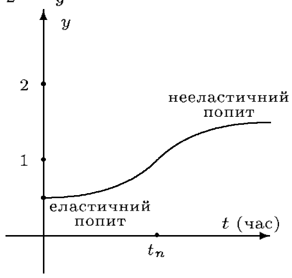
$\ln|y-2| - \ln|y| = -2t + \ln|C|$,

$\frac{y-2}{y} = Ce^{-2t}, C \in \mathbb{R}$.

Якщо задовольнити початкову умову $y(0) = 0,5$, то одержимо

$\frac{0,5-2}{0,5} = C, \quad C = -3.$

Отже, обсяг реалізованої продукції y знаходиться з формули $\frac{y-2}{y} = -3e^{-2t}$ і він дорівнює $y = \frac{2}{1+3e^{-2t}}$.



Графік цієї функції зображено на рис. Дану криву називають **логістичною кривою**. ▷

Нехай $Y(t)$ – доход, який одержано до моменту часу t деякою галуззю, є сумою інвестицій $I(t)$ і величини $C(t)$ (функції споживання), тобто

$$Y(t) = I(t) + C(t). \tag{13}$$

Як і раніше в моделі природного росту, вважатимемо, що швидкість збільшення доходу пропорційна величині інвестицій,

тобто
$$bY'(t) = I(t), \tag{14}$$
де b – коефіцієнт капіталоємності приросту доходу (це рівносильно (9) при сталій ціні p на продукцію і $l = \frac{1}{pb}$).

Вивчимо поведінку функції доходу Y в залежності від зміни C.

Нехай $C(t)$ є фіксованою частиною одержуваного доходу на момент часу t, тобто $C(t) = (1-m)Y(t)$, де m – норма інвестицій. Тоді з (13) і (14) випливає, що
$$Y'(t) = \tfrac{m}{b}Y(t).$$

Приклад 5. Знайти функцію доходу Y, якщо відомо, що величина споживання визначається функцією $C = 2t$, коефіцієнт капіталоємності приросту доходу $b = 1/2$, $Y(0) = 2$.

$\triangleleft$ Із співвідношень (13) і (14) одержуємо, що
$$Y(t) = \frac{1}{2}Y'(t) + 2t \quad \text{або} \quad Y'(t) - 2Y(t) = -4t. \tag{15}$$

Отже, маємо лінійне неоднорідне рівняння. Спочатку розв'яжемо відповідне лінійне однорідне рівняння
$$Y'(t) = 2Y(t), \quad \tfrac{dY}{dt} = 2Y(t), \quad \tfrac{dY}{Y} = 2dt,$$
$$\textstyle\int \frac{dY}{Y} = 2\int dt, \quad \ln|Y| = 2t + \ln|C|, \quad Y(t) = Ce^{2t}, C \in \mathbb{R}.$$

Розв'язки лінійного неоднорідного рівняння (15) шукатимемо у вигляді
$$Y(t) = z(t)e^{2t}. \tag{16}$$
Підставивши (16) в рівняння (15), одержимо
$$z'(t)e^{2t} + 2z(t)e^{2t} - 2z(t)e^{2t} = -4t, \quad z'(t) = -4te^{-2t},$$
$$\tfrac{dz}{dt} = -4te^{-2t}, \quad dz = -4te^{-2t}dt, \quad \textstyle\int dz = 2\int tde^{-2t},$$
$$z = 2(te^{-2t} - \textstyle\int e^{-2t}dt) + C = 2(te^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-2t}) + C,$$
$$z = e^{-2t}(2t+1) + C, C \in \mathbb{R}. \tag{17}$$
Підставивши (17) в (16), дістанемо загальний розв'язок рівняння (15)
$$Y(t) = Ce^{2t} + 2t + 1.$$

Задовольнимо початкову умову $Y(0) = 2$: $\quad 2 = C + 1, \quad C = 1$.
Тому $Y(t) = e^{2t} + 2t + 1$. ▹

Вправи

О1. Розв'язати рівняння:
1) $xy' - y = 0$, якщо $y = 4$ при $x = -2$;
2) $x + xy + y'(y + xy) = 0$; 3) $2st^2\ ds = (1 + t^2)\ dt$;
4) $y' = (2y + 1)\ \mathrm{ctg}x$, якщо $y = \frac{1}{2}$ при $x = \frac{\pi}{4}$.

О2. Розв'язати рівняння: 1) $(x^2 + 2xy)\ dx + xy\ dy = 0$,
2) $y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}$, якщо $y = \frac{\pi}{2}$ при $x = 1$; 3) $xy' \cos\frac{y}{x} = y\cos\frac{y}{x} - x$.

О3. Розв'язати рівняння: 1) $y' - \frac{3y}{x} = x$;
2) $y' \cos x - y \sin x = \sin 2x$; 3) $t^2 \frac{ds}{dt} = 2ts - 3$, якщо $s = 1$ при $t = -1$.

О4. Нехай є N потенційних покупців деякого товару. Після рекламного оголошення інформація про даний товар поширюється через спілкування покупців між собою. Враховуючи, що швидкість зміни числа покупців, які знають про товар, пропорційна як числу проінформованих про товар, так і числу покупців, які про нього нічого не знають, скласти математичну модель задачі і знайти закон залежності числа проінформованих покупців від часу.

О5. За який час тіло, нагріте до 100^o, охолодиться до 25^o в кімнаті з температурою 20^o, якщо до 60^o воно охолоджується за 10 хв ? (За законом Ньютона швидкість охолодження пропорційна різниці температур).

О6. Повні витрати y і граничні витрати y' виробництва зв'язані рівністю $y' - 4y + x = 0$. Знайти функцію y повних витрат, що задовольняє початкову умову $y(0) = 0$.

О7. Еластичність функції $y = f(x)$ стосовно змінної x описується співвідношенням $E_x(y) = \frac{x - 2x^2}{1 + x - x^2}$. Визначити саму функцію, якщо її графік проходить через точку $M_0(1;2)$.

<u>О8.</u> Відомо, що ціна p на деякий товар залежить від часу t, а попит q і пропозиція s визначаються формулами $q = 4p' - 2p + 39$, $s = 44p' + 2p - 1$. Знайти якою повинна бути ціна p, щоб попит і пропозиція зрівноважились, якщо $p(0) = 1$.

<u>С1.</u> Розв'язати рівняння: 1) $\sqrt{xy}\;dx + x^2y\;dy = 0$; 2) $y' = e^{x+y}\sin x$; 3) $y' = \frac{x^2+y^2}{xy}$; 4) $y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2}$; 5) $y = xy' + y'\ln y$.

<u>С2.</u> Через який проміжок часу відбудеться подвоєння сукупного суспільного продукту P, якщо його залежність від часу визначається рівнянням розширеного відтворення $\frac{dP}{dt} = 0,1\,P$.

<u>С3.</u> Проінтегрувати диференціальне рівняння розширеного відтворення $\frac{dP}{dt} = \frac{H-S}{f}P$, де H, S і f – сталі, та визначити, через який проміжок часу відбудеться подвоєння сукупного продукту, якщо $H = 0,6$, $S = 0,5$, $f = 1$.

<u>С4.</u> Залежність кількості населення міста від часу t (у роках) описується диференціальним рівнянням $y' = 0,1y(1 - 10^{-6}y)$. Через скільки років кількість населення цього міста зросте з 100 000 до 500 000?

<u>Домашнє завдання</u>

<u>Д1.</u> Для поданих рівнянь знайти загальний розв'язок і виділити той з розв'язків, який задовольняє дану початкову умову:
1) $xy' + y = 0, y = 4$ при $x = -2$; 2) $yy' + x = 0, y = 4$ при $x = -2$;
3) $x^2y' + y = 0, y = e$ при $x = 1$; 4) $2y'\sqrt{x} = y, y = 1$ при $x = 4$;
5) $x^2y' + y^2 = 0, y = 1$ при $x = -1$;
6) $(1 + x^2)y' = 1 + y^2, y = 1$ при $x = 0$.

<u>Д2.</u> Розв'язати рівняння: 1) $\frac{ds}{dt} = \frac{s}{t} - \frac{t}{s}$; 2) $y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}$; 3) $y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}$; 4) $xy' + y = \ln x + 1$; 5) $y' + y\cos x = \sin 2x$.

Д3. Знайти обсяг реалізованої продукції $y(t)$ і його значення при $t = 2$, якщо відомо, що функція попиту має вигляд $p(y) = 3 - 2y$, норма акселерації $\frac{1}{l} = 1,5$; норма інвестицій $m = 0,6$; $y(0) = 1$.

Д4. Про попит обсягом x одиниць деякого товару вартістю p за кожну одиницю відомо, що $\frac{p}{x}\frac{dx}{dp} = \frac{x-200}{x}$. Визначити функцію попиту вигляду $p = f(x)$, якщо $0 < x < 200$ і $p = 5$ при $x = 190$.

Д5. Граничний прибуток фірми визначається співвідношенням $y'(x) = 50\,000 - x$. Знайти сумарний прибуток фірми, якщо нульовий випуск продукції дає нульовий прибуток.

Відповіді

О1. 1) $y = -2x$; 2) $x + y = \ln C(x+1)(y+1)$; 3) $S^2 = t - \frac{1}{t} + C$; 4) $y = 2\sin^2 x - \frac{1}{2}$. **О2.** 1) $\ln|x+y| + \frac{x}{x+y} = C$; 2) $y = 2x\mathrm{arctg}x$; 3) $\sin\frac{y}{x} + \ln|x| = C$. **О3.** 1) $y = Cx^3 - x^2$; 2) $y = \frac{C}{\cos x} - \frac{\cos 2x}{2\cos x}$; 3) $S = \frac{1}{t} + 2t^2$. **О4.** $\frac{dx}{dt} = kx(N - x)$, $x(0) = \frac{N}{\psi}$; $x = \frac{N}{1+(\psi-1)e^{-Nkt}}$. **О5.** $\frac{dT}{dt} = k(T - 20)$, $t_0 = 40$хв. **О6.** $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{16} - \frac{1}{16}e^{4x}$. **О7.** $E_x(y) = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx}$, $y = 2(1 + x - x^2)$. **О8.** $p = 10 - 9e^{t/10}$. **С1.** 1) $\frac{2}{3}\sqrt{y^3} - \frac{2}{\sqrt{x}} = C$; 2) $\frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + e^{-y} = C$; 3) $y^2 = 2x^2\ln|Cx|$, $C \neq 0$; 4) $y = Cx - \frac{1}{2x}$; 5) $x = Cy - 1 - \ln|y|$. **С2.** $t = \frac{\ln 2}{0,1} \approx 7$ років. **С3.** $P(t) = P_0 e^{\frac{H-S}{f}\cdot t}$, $t_0 = 10\ln 2 = 10\cdot 0,6931 \approx 7$. **С4.** $t_0 = 20\cdot\ln 3 = 20\cdot 1,0986 \approx 22$ роки. **Д1.** 1) $xy = C$, $xy = -8$; 2) $x^2 + y^2 = C^2$, $x^2 + y^2 = 20$; 3) $y = Ce^{\frac{1}{x}}$, $y = e^{\frac{1}{x}}$; 4) $y = Ce^{\sqrt{x}}$, $y = e^{\sqrt{x}-2}$; 5) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = C$, $y = -x$; 6) $\mathrm{arctg}y = \mathrm{arctg}x + C$, $\mathrm{arctg}y = \mathrm{arctg}x + \frac{\pi}{4}$. **Д2.** 1) $S^2 = 2t^2\ln\frac{C}{t}$; 2) $y = \frac{2x}{1-Cx^2}$; 3) $y = \frac{C-e^{-x^2}}{2x^2}$; 4) $y = \ln x + 1 - \frac{\ln x}{x} + \frac{C}{x}$; 5) $y = 2(\sin x - 1) + Ce^{-\sin x}$. **Д3.** $y' = 0,4(3 - 2y)\cdot y$, $y(t) = \frac{3e^{1,2t}}{1+2e^{1,2t}}$, $y(2) = \frac{3e^{2,4}}{1+2e^{2,4}} \approx 1,43$. **Д4.** $p = 100 - 0,5x$. **Д5.** $y = 50000x - x^2/2$.

Тема 27. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку

Лінійним диференціальним рівнянням другого порядку називається рівняння вигляду

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \qquad (1)$$

Тут функції p, q, f задані і неперервні на деякому проміжку .

Рівняння (1) називається **лінійним неоднорідним.** Якщо ж $f(x) \equiv 0$, то рівняння називається **лінійним однорідним.** Однорідне рівняння з тією самою лівою частиною, що й дане неоднорідне, називається **відповідним йому**.

Важливою властивістю лінійних однорідних рівнянь є те, що загальний розв'язок таких рівняннь можна подати у вигляді

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \qquad (2)$$

де y_1 і y_2 – лінійно незалежні частинні розв'язки рівняння

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad (3)$$

а C_1 і C_2 – довільні сталі.

Лінійно незалежні частинні розв'язки лінійного однорідного рівняння легко знаходяться, коли коефіцієнти рівняння p і q є сталими, тобто рівняння має вигляд

$$y'' + py' + qy = 0. \qquad (4)$$

Для знаходження частинних розв'язків рівняння (4) складають **характеристичне рівняння**

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0, \qquad (5)$$

яке одержується з рівняння (4) заміною в ньому похідних від шуканої функції відповідними степенями λ, причому сама функція замінюється одиницею. Корені рівняння (5) знаходяться за формулою

$$\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Якщо: 1) $\frac{p^2}{4} - q > 0$, то корені дійсні і різні

$$\lambda_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad \lambda_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q};$$

2) $\frac{p^2}{4} - q = 0$, то корені дійсні і рівні $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{p}{2}$;

3) $\frac{p^2}{4} - q < 0$, то корені комплексні і різні

$$\lambda_1 = -\frac{p}{2} + i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}, \quad \lambda_2 = -\frac{p}{2} - i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}},$$

де $i = \sqrt{-1}$ - уявна одиниця; їх зручно записувати у вигляді $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \ \ \lambda_2 = \alpha - i\beta, \ \ \alpha = -\frac{p}{2}, \ \ \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$.

У залежності від коренів характеристичного рівняння сукупність лінійно незалежних розв'язків рівняння (4) має вигляд:

1) $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$; 2) $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = xe^{\lambda_1 x}$;

3) $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$, $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - y' - 2y = 0$.

$\triangleleft$ Складемо характеристичне рівняння і знайдемо його корені: $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0, \ \lambda_1 = 2; \ \lambda_2 = -1$. Тоді сукупність лінійно незалежних розв'язків має вигляд: $y_1 = e^{2x}, y_2 = e^{-x}$.

Отже, згідно з формулою (2) загальний розв'язок рівняння

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}. \triangleright$$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - y' = 0$.

$\triangleleft$ Характеристичне рівняння $\lambda^2 - \lambda = 0$ має корені $\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 1$, а тому сукупність лінійно незалежних розв'язків рівняння така: $y_1 = e^{0 \cdot x} = 1; \ y_2 = e^x$. Тоді загальний розв'язок $y = C_1 + C_2 e^x$.$\triangleright$

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - 10y' + 25y = 0$.

$\triangleleft$ Маємо характеристичне рівняння $\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0$. Коренями його є $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$. Тоді $y_1 = e^{5x}, \ y_2 = xe^{5x}$, а отже, загальний розв'язок має вигляд $y = (C_1 + C_2 x)e^{5x}$. ▷

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + 25y = 0$.

◁ Характеристичне рівняння $\lambda^2 + 25 = 0$ має корені $\lambda_1 = 5i$, $\lambda_2 = -5i$, а тому $y_1 = e^{0 \cdot x} \cos 5x = \cos 5x$, $y_2 = e^{0 \cdot x} \sin 5x = \sin 5x$. Загальний розв'язок має вигляд $y = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x$. ▷

Структура загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння (1) має вигляд

$$dy = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \tilde{y}, \tag{6}$$

де $\tilde{y}$ – деякий частинний розв'язок рівняння (1), а y_1, y_2 – лінійно незалежні розв'язки відповідного лінійного однорідного рівняння (3). Ми вміємо знаходити лінійно незалежні розв'язки рівняння (3), а тому розглянемо, як знаходиться частинний розв'язок рівняння (1). Виявляється, що коли у правій частині рівняння (1) є або многочлен, або показникова функція, або тригонометрична функція $\cos \beta x$ чи $\sin \beta x$, або лінійна комбінація цих функцій, то частинний розв'язок можна знайти за допомогою методу **невизначених коефіцієнтів.**

а) Нехай $f(x) = e^{px} P_n(x)$, де $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n$ – многочлен степеня n, а p – дійсне число. У цьому випадку частинний розв'язок $\tilde{y}$ треба шукати у вигляді

$$\tilde{y} = Q_n(x) e^{px} x^r. \tag{7}$$

Тут Q_n – многочлен того ж самого степеня, що й многочлен P_n, але з невідомими коефіцієнтами, а r – число коренів характеристичного рівняння (5), які дорівнюють p.

б) Права частина рівняння (1) $f(x) = e^{px}(P_n(x) \cos qx + P_m(x) \sin qx)$, де P_n і P_m – многочлени степеня відповідно n і m, а p і q – дійсні числа. У цьому випадку частинний розв'язок $\tilde{y}$ слід шукати у вигляді

$$y = x^r e^{px}(Q_s(x)\cos qx + R_s(x)\sin qx), \tag{8}$$

де Q_s і R_s – многочлени степеня $s = \max\{m, n\}$, а r – число коренів характеристичного рівняння (5), які збігаються з $p + qi$.

Приклад 5. Знайти загальний розв'язок рівняння $y''+4y = 5\sin 2x$.

◁ Коренями характеристичного рівняння $\lambda^2 + 4 = 0$ є $\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -2i$. Лінійно незалежні розв'язки відповідного однорідного рівняння $y'' + 4y = 0$ мають вигляд $y_1 = \cos 2x$, $y_2 = \sin 2x$.

Оскільки $p + qi = 0 + 2i = 2i$, то $r = 1$. Крім того, $s = 0$, бо в правій частині рівняння стоїть многочлен нульового степеня. Згідно з (8) частинний розв'язок нашого рівняння слід шукати у вигляді

$$\tilde{y} = (A\cos 2x + B\sin 2x)x.$$

Продиференціювавши даний вираз, підставимо його в рівняння і прирівняємо коефіцієнти при $\cos 2x$ і $\sin 2x$:

$\tilde{y}' = (-2A\sin 2x + 2B\cos 2x)x + (A\cos 2x + B\sin 2x);$

$\tilde{y}'' = (-4A\cos 2x - 4B\sin 2x)x + 2(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x);$

$(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x)x + (-4A\sin 2x + 4B\cos 2x) + 4(A\cos 2x +$
$+ B\sin 2x)x = 5\sin 2x;$

$-4A\sin 2x + 4B\cos 2x = 5\sin 2x, \qquad \begin{cases} -4A=5; \\ 4B=0, \end{cases} \qquad A = -\frac{5}{4},\ B = 0.$

Таким чином, $\tilde{y} = -\frac{5}{4}x\cos 2x$. Згідно з формулою (6) маємо

$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \frac{5}{4}x\cos 2x$. ▷

Приклад 6. Нехай функція попиту $y(t) = 3p'' - p' - 2p + 18$, а функція пропозиції $z(t) = 4p'' + p' + 3p + 3$. Знайти залежність ціни p від часу.

◁ Оскільки рівновага ринку характеризується рівністю $y(t) = z(t)$, то

$$3p'' - p' - 2p + 18 = 4p'' + p' + 3p + 3, \quad p'' + 2p' + 5p = 15. \tag{9}$$

Одержали лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку.

Розв'яжемо спочатку відповідне лінійне однорідне рівняння

$$p'' + 2p' + 5p = 0: \qquad \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0, \quad \lambda_{1,2} = -1 \pm 2i,$$
$$p = C_1 e^{-t}\cos 2t + C_2 e^{-t}\sin 2t.$$

Частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді $\tilde{p} = A$. Тоді матимемо після підстановки в рівняння $5A = 15$, $A = 3$, а отже, $\tilde{p} = 3$. Тому загальний розв'язок рівняння (9)

$$p(t) = C_1 e^{-t}\cos 2t + C_2 e^{-t}\sin 2t + 3.$$

Якщо нам відомі значення p і p' в початковий момент часу $t = 0$, то ми зможемо знайти C_1 і C_2.

Нехай $p(0) = 4$, а $p'(0) = 1$. Тоді $4 = C_1 + 3$, $p'(t) = -(C_1\cos 2t + C_2\sin 2t)e^{-t} + (-2C_1\sin 2t + 2C_2\cos 2t)e^{-t}$, $1 = -C_1 + 2C_2$; $C_1 = 1$, $C_2 = 1$, а тому

$$p(t) = e^{-t}(\cos 2t + \sin 2t) + 3.$$

Якщо ж нам відомо, що $p(0) = 4$, а $y(0) = 16$, то тоді поступаємо так: $C_1 = 2C_2 - 1$, $\quad p'(t) = e^{-t}((2C_2 - 1)\cos 2t - (C_2 + 2)\sin 2t)$, $p''(t) = -e^{-t}((4C_2 + 3)\cos 2t + (3C_2 - 5)\sin 2t)$, $\quad p'(0) = 2C_2 - 1$, $p''(0) = -4C_2 - 3$. Тому

$$\begin{cases} 16 = 3(-4C_2 - 3) - 2C_2 + 1 - 8 + 18, \\ 6 = -12C_2 - 9 - 2C_2; \end{cases}$$

$C_2 = -1$, $C_1 = -3$, а отже, $p(t) = e^{-t}(-3\cos 2t - \sin 2t) + 3$. $\triangleright$

Вправи

О1. Розв'язати рівняння: 1) $y'' - 4y' + 3y = 0$; 2) $y'' - 4y' + 4y = 0$; 3) $y'' - 4y' + 13y = 0$; 4) $y'' + 4y = 0$; 5) $y'' + 4y' = 0$; 6) $\frac{d^2s}{dt^2} + 2\frac{ds}{dt} + 2s = 0$, якщо $s = 1$, $s' = 1$ при $t = 0$.

О2. Розв'язати рівняння: 1) $y'' - 2y' + y = e^{2x}$; 2) $y'' - 4y = 8x^3$; 3) $y'' + 3y' + 2y = \sin 2x + 2\cos 2x$; 4) $y'' + y = x + 2e^x$; 5) $y'' - 3y' + 2y = e^x$.

О3. Попит і пропозиція на деякий товар визначаються співвідношеннями $q = 2p'' - p' - p + 15$, $s = 3p'' + p' + p + 5$, де p – ціна товару, p' – тенденція формування ціни, p'' – темп зміни ціни. Знайти залежність ціни від часу за умови, що пропозиція і попит зрівноважені, а $p(0)=6$, $q(0)=10$, $s(0)=10$.

C1. Знайти загальні розв'язки рівнянь: 1) $y''+y'-2y=6x^2$; 2) $y''-3y'=2-6x$; 3) $y''+6y'+5y=e^{2x}$; 4) $y''-6y'+25y=2\sin x+3\cos x$; 5) $y''+y'=xe^{-x}$; 6) $y''+y=\sin x$.

Домашнє завдання

Д1. Розв'язати рівняння: 1) $y''-4y=0$; 2) $\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}-4x=0$; 3) $y''+3y'=0$, якщо $y(0)=1, y'(0)=2$; 4) $y''+2y'+5y=0$; 5) $y''+6y'+9y=0$.

Д2. Розв'язати рівняння: 1) $y''-5y'+6y=13\sin 3x$; 2) $y''+2y'+y=e^x$; 3) $y''-y=e^{-x}$; 4) $y''-6y'+8y=3x^2+2x+1$; 5) $2y''-y'=1$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

Відповіді

O1. 1) $y=C_1e^x+C_2e^{3x}$; 2) $y=(C_1+C_2x)e^{2x}$; 3) $y=e^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$; 4) $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$; 5) $y=C_1+C_2e^{-4x}$; 6) $s=e^{-t}(\cos t+2\sin t)$. **O2.** 1) $y=e^x(C_1+C_2x)+e^{2x}$; 2) $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}-2x^3-3x$; 3) $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+\frac{\sqrt{2}}{4}\cos(\frac{\pi}{4}-2x)$; 4) $y=C_1\cos x+C_2\cos x+x+e^x$; 5) $y=C_1e^{2x}+(C_2-x)e^x$. **O3.** $p(t)=5+e^{-t}\cos t$. **C1.** 1) $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}-3x^2-3x-\frac{9}{2}$; 2) $y=C_1+C_2e^{3x}+x^2$; 3) $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-5x}+\frac{1}{21}e^{2x}$; 4) $y=e^{3x}(C_1\cos 4x+C_2\sin 4x)+\frac{1}{102}(14\cos x+5\sin x)$; 5) $y=C_1+e^{-x}(C_2-\frac{x^2}{2}-x)$; 6) $y=(C_1-\frac{x}{2})\cos x+C_2\sin x$. **Д1.** 1) $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$; 2) $x=C_1e^t+C_2e^{-4t}$; 3) $y=\frac{1}{3}(5-2e^{-3x})$; 4) $y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$; 5) $y=(C_1x+C_2)e^{-3x}$. **Д2.** 1) $C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+\frac{1}{6}(5\cos 3x-\sin 3x)$; 2) $y=(C_1x+C_2)e^{-x}+\frac{1}{4}e^x$; 3) $y=C_1e^x+(C_2-\frac{x}{2})e^{-x}$; 4) $y=C_1e^{4x}+C_2e^{2x}+(24x^2+52x+41)\cdot\frac{1}{64}$; 5) $y=4e^{\frac{x}{2}}-x-4$.