А.Д. Тевяшев, О.Г. Литвин

В И Щ А   М А Т Е М А Т И К А
У ПРИКЛАДАХ ТА ЗАДАЧАХ

Частина 1.
Лінійна алгебра і аналітична геометрія. Диференціальне числення функцій однієї змінної

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів
вищих навчальних закладів

К и ї в
К о н д о р
2005

УДК 512 (07) + 514 (07) + 517 (07)

Тевяшев А.Д., Литвин О.Г.

Вища математика у прикладах та задачах. Ч.1. Лінійна алгебра і аналітична геометрія. Диференціальне числення функцій однієї змінної. 2-е вид. доп. і доопр. – К.: Кондор, 2005. – 588с.

Гриф надано Міністерством освіти і науки України. Лист №14/18.2 – 1268 від 10.09.2001р.

ISBN

Навчальний посібник є першою частиною збірника “Вища математика у прикладах та задачах”, який складається з чотирьох частин.

Посібник відповідає програмі курсу “Вища математика” з розділів “Лінійна алгебра і аналітична геометрія” та “Диференціальне числення функцій однієї змінної”. Структура посібника сприяє розвитку і активізації самостійної роботи студентів. У кожному параграфі посібника містяться короткі теоретичні відомості, питання для самоперевірки, велика кількість задач з розв’язаннями та призначених для практичних занять. Наведено також індивідуальні розрахункові завдання з зразками їх виконання. Довідковий матеріал з вказаних розділів та з елементарної математики складає окрему главу.

На відміну від традиційних, цей посібник можна використовувати як довідник, розв’язник та задачник із зазначених розділів курсу «Вища математика».

Для студентів та викладачів вищих навчальних закладів.

Іл.: 42. Бібл.: 25 назв.

Р е ц е н з е н т и : Л.В. Курпа, д-р техн. наук, проф. (НТУ ХПІ);
О.А.Молчанов, д-р техн. наук, проф. (НТУ КПІ).

ISBN

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА ДО ДРУГОГО ВИДАННЯ

У другому виданні глава 3 доповнена параграфом 4, присвяченим комплексним числам. Тобто, комплексним числам відведено окремий параграф з зазначеною у посібнику структурою.

Цикл задач, призначених для практичних занять у главі 7 §1, главі 8 §1,2, доповнено задачами на знаходження границь та похідних для різних функцій. При цьому задачі включено під старими номерами (з включенням пунктів а), б), ...), що не змінює решти нумерації.

Виправлено також помічені друкарські помилки, уточнені формулювання та відповіді низки задач.

Автори щиро дякують студентам, аспірантам та викладачам, які користувались навчальним посібником і допомогли у виявленні недоліків, що були виправлені у другому виданні.

У цілому навчальний посібник зазнав незначних змін, що забезпечує спадкоємність першого і другого видань.

ПЕРЕДМОВА ДО ПЕРШОГО ВИДАННЯ

Навчальний посібник призначено для студентів вищих навчальних закладів денної та заочної форм навчання і входить до збірника “Вища математика у прикладах та задачах”, що складається з чотирьох частин:

Частина I. Лінійна алгебра і аналітична геометрія. Диференціальне числення функцій однієї змінної.

Частина II. Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних.

Частина III. Диференціальні рівняння. Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення.

Частина IV. Аудиторні контрольні роботи. Індивідуальні завдання.

Вказаний збірник відповідає програмі курсу “Вища математика”, а розподіл його за частинами – розподілу викладання курсу за семестрами згідно з учбовим планом.

Розглядуваний посібник є першою частиною вказаного збірника і складається з десяти глав, кожна з яких розбивається на параграфи. Глави 1 – 6 присвячені лінійній алгебрі та аналітичній геометрії, глава 7 – вступу до математичного аналізу, зокрема теорії границь та неперервності функцій, глава 8 – диференціальному численню функцій однієї змінної.

Структура перших восьми глав така: матеріал кожного параграфа розбивається на чотири пункти.

У п. I – “Короткі теоретичні відомості” – наводяться основні теоретичні відомості і формули, необхідні для розв’язання задач.

У п. II – “Контрольні питання та завдання” – містяться питання з теорії та прості завдання, що добре ілюструють як вузлові моменти, так і тонкощі теоретичних положень. Враховуючи, що основна робота над теорією ведеться студентами за підручником та конспектами лекцій, цей пункт включає питання для перевірки готовності студента до практичного заняття.

У п. III – “Приклади розв’язання задач” – наводяться докладні розв’язання типових задач з розглянутої теми, причому велика увага приділяється не тільки розгляданню “технічних прийомів”, але й дослідженню умов застосовності тієї чи іншої теореми або формули. Кількість розібраних прикладів змінюється в залежності від обсягу та важливості теми. Початок і кінець розв’язання задач позначають відповідно знаками ► і ◄.

У п. IV – “Задачі для практичних занять” – міститься досить велика кількість різних за змістом задач, що призначені для практичних занять – як аудиторних, так і домашніх. Наприкінці посібника наведені відповіді до цих задач.

Нумерація задач проводиться у межах глави, тобто номер кожної задачі складається з номера глави та порядкового номера задачі у цій главі.

Глава 9 містить п’ять параграфів, в яких наведено п’ять індивідуальних розрахункових завдань, що відповідають матеріалу розділів курсу, викладених у главах 1 – 8. Кожне індивідуальне завдання складається з певної кількості задач, представлених у 31 варіанті, тобто різні для усіх студентів групи. Задачі супроводжуються посиланнями на аналогічні приклади з розв’язаннями, які наведені у відповідних главах у п. III кожного параграфа. Посилання містить номер глави, номер параграфа та номери прикладів. Зазначимо **надзвичайну важливість** цих посилань, бо вони є **путівником** для відшукання **зразка виконання** даної задачі, а отже, **зразка виконання** індивідуального розрахункового завдання.

Глава 10 складається з шести параграфів, які містять довідковий матеріал з усіх розділів вищої математики, представлених у навчальному посібнику, а також основні формули з курсу елементарної математики.

Для зручності користування навчальним посібником у змісті до кожного параграфа у відповідних пунктах наведено номери прикладів задач з розв’язаннями та номери задач для практичних занять; наведені також основні позначення та предметний вказівник.

У даному посібнику наведено словник ключових слів, що містить найбільш важливі терміни з вищої математики, які представлені українською, російською та англійською мовами.

З огляду на характеристику змісту цього посібника можна констатувати, що він може бути використаний як довідник, розв'язник і одночасно як задачник, що містить задачі для практичних занять та індивідуальні розрахункові завдання із зразками їх виконання. Це дуже зручно для студентів і надає їм широкі можливості для активної самостійної роботи – як аудиторної, так і домашньої.

При написанні навчального посібника автори використали багаторічний досвід викладання курсу "Вища математика" для технічних університетів.

Автори висловлюють вдячність співробітникам кафедри прикладної математики ХНУРЕ Акимовій Ю.Г. та Сергієнко Т.Є. за добросовісне виконання роботи по комп'ютерному набору та верстці навчального посібника.

Автори сподіваються, що даний посібник допоможе студентам оволодіти методикою розв'язання практичних задач з математики, активізує їх самостійну роботу та сприятиме підвищенню фундаментальної підготовки з вищої математики.

Автори з подякою сприймуть всі критичні зауваження, пропозиції та побажання, спрямовані на поліпшення змісту навчального посібника. Їх можна надсилати за адресою:

61166, Харків, пр. Леніна, 14, Харківський національний університет радіоелектроніки, кафедра Прикладної математики, тел. (0572) 7-021-436. E-mail: tevjashev@kture.kharkov.ua.

ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

$\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ – множини натуральних, цілих, раціональних, дійсних, комплексних чисел відповідно.

$\mathbf{R}^n$ – арифметичний дійсний n-вимірний простір.

$\mathbf{C}^n$ – арифметичний комплексний n-вимірний простір.

$\mathbf{V}_1$ – множина геометричних векторів, колінеарних деякому напрямку.

$\mathbf{V}_2$ – множина геометричних векторів, компланарних деякій площині.

$\mathbf{V}_3$ – множина всіх геометричних векторів.

L, L_n – лінійний простір, лінійний простір вимірності n.

$\mathbf{E}$, $\mathbf{E}_n$ – дійсний евклідів простір, дійсний евклідів простір вимірності n.

$\mathbf{U}$, $\mathbf{U}_n$ – комплексний евклідів простір (унітарний простір), комплексний евклідів простір вимірності n.

P_n – лінійний простір многочленів степеня $\le n-1$.

$\dim \mathsf{L}$ – вимірність лінійного простору L.

Ф.С.Р. – фундаментальна система розв'язків однорідної системи рівнянь.

O – нульова матриця.

E – одинична матриця.

A^{-1} – матриця, обернена матриці A.

A_{ij} – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} визначника матриці A.

$\mathscr{A}$ – лінійний оператор, A – матриця цього оператора у деякому базисі.

$(\vec{a}, \vec{b})$ або $\vec{a}\,\vec{b}$ – скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

$[\vec{a}, \vec{b}]$ або $\vec{a}\times\vec{b}$ – векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ або $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}$ – мішаний добуток векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

$k=\overline{1,n}$ – індекс k приймає всі натуральні значення від 1 до n.

$[a,b]$ – відрізок; (a,b) – інтервал; $[a,b)$, $(a,b]$ – півінтервал.

$[a,+\infty)$, $(a,+\infty)$, $(-\infty,a]$, $(-\infty,a)$ – півпряма.

$\exists x$ – існує таке x.

$\forall x$ – для будь-якого x.

$x \in \mathbf{X}$ ($x \notin \mathbf{X}$) – число x належить (не належить) множині $\mathbf{X}$.

$\mathbf{A} \bigcup \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \bigcap \mathbf{B}$ – об’єднання, перетин множин $\mathbf{A}$ та $\mathbf{B}$.

$\inf \mathbf{X}$, $\sup \mathbf{X}$ – точна нижня, точна верхня межа множини $\mathbf{X}$.

$\{x_n\}$ – числова послідовність.

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ – число a є границею послідовності.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $f(x) \to b$ при $x \to a$ – число b є границею функції $f(x)$ за умови, що x прагне (прямує) до a.

$\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a+0)$, $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a-0)$,

де $f(a+0)$ ($f(a-0)$) є границею функції $f(x)$, коли x прямує до a справа (зліва).

$\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty$ – функція $f(x)$ є нескінченно великою в точці a справа (зліва).

$[x]$ – ціла частина числа x.

$\operatorname{sign} x$ – функція “знак x”.

$\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to a$ – $\alpha(x)$, $\beta(x)$ еквівалентні нескінченно малі при $x \to a$.

$\alpha(x) = o(\beta(x))$ при $x \to a$ – $\alpha(x)$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж $\beta(x)$ при $x \to a$.

$\alpha(x) = O(\beta(x))$ при $x \to a$ – $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ нескінченно малі одного порядку при $x \to a$.

Δy – приріст функції в точці.

$f'(x)$, $y'(x)$, $\dfrac{dy}{dx}$ – похідна функції $y = f(x)$ в точці x.

$f'(x+0)$, $f'(x-0)$ – права та ліва похідні функції $f(x)$ в точці x.

dy – диференціал функції $y(x)$.

$f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n y}{dx^n}$ – похідна n-го порядку функції $f(x)$ в точці x.

$d^n y$ – диференціал n-го порядку функції $y(x)$.

ГЛАВА 1. **ВЕКТОРНА АЛГЕБРА**

§1. Геометричні вектори

I. Короткі теоретичні відомості

Лінійні операції над векторами. *Вектором* (геометричним вектором) $\vec{a}$ називається множина всіх напрямлених відрізків, що мають однакову довжину та напрямок. Про всякий відрізок AB з цієї множини кажуть, що він представляє вектор $\vec{a}$. З означення випливає, що вектори можна переносити паралельно самим собі. У зв'язку з цим розглядувані вектори називають *вільними*.

Довжина відрізка AB називається довжиною (модулем, нормою) вектора $\vec{a}$ і позначається символом $|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}|$.

Два вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих. Позначення: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Три вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називаються *компланарними*, якщо вони лежать на одній площині або на паралельних площинах.

Під лінійними операціями над векторами розуміють операцію множення вектора на число та додавання векторів.

Добутком вектора $\vec{a}$ на дійсне число λ називається вектор, що позначається $\lambda\vec{a}$, такий, що

1) $|\lambda \vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$;

2) вектори $\vec{a}$ та $\lambda \vec{a}$ однаково напрямлені, якщо $\lambda > 0$ та протилежно напрямлені, якщо $\lambda < 0$, тобто, $\vec{a} \uparrow\uparrow \lambda\vec{a}$, якщо $\lambda > 0$; $\vec{a} \uparrow\downarrow \lambda\vec{a}$, якщо $\lambda < 0$.

Нехай $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{BC}$, тоді вектор $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ називається *сумою* векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ і позначається $\vec{a} + \vec{b}$ (рис.1.1).

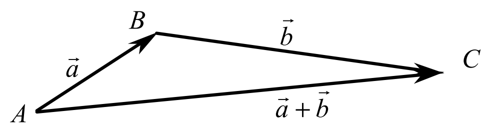


Рис. 1.1

Зауважимо, що *сума* векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, початки яких суміщені, зображується вектором з тим же початком, що співпадає з діагоналлю паралелограма, сторонами якого являються $\vec{a}$ та $\vec{b}$. *Різниця* $\vec{a} - \vec{b}$ цих векторів зображується вектором, що співпадає з другою діагоналлю того ж паралелограма, причому цей вектор напрямлений в бік зменшуваного (рис.1.2).

Сума будь-якого числа векторів може бути знайдена за правилом многокутника (рис.1.3).

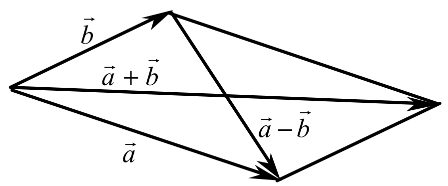


Рис.1.2

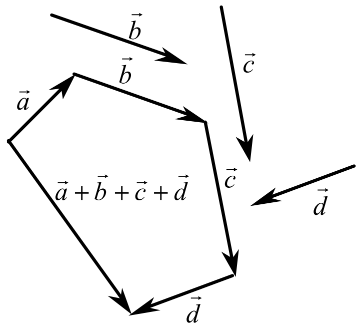


Рис.1.3

Розкладання вектора за базисом. Упорядкована трійка некомпланарних векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ називається *базисом* у множині всіх геометричних векторів $\mathbf{V_3}$.

Аналогічно, упорядкована пара неколінеарних векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ називається *базисом* у множині геометричних векторів $\mathbf{V_2}$, компланарних деякій площині. Будь-який ненульовий вектор $\vec{e}$ утворює базис у множині геометричних векторів $\mathbf{V_1}$, колінеарних деякому напрямку.

Усякий геометричний вектор $\vec{a} \in \mathbf{V_3}$ може бути представлений у вигляді

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{3} x_i \vec{e}_i ,$$

тобто розкладений за базисом $\beta = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Тут x_1, x_2, x_3 – числа, що називаються координатами вектора $\vec{a}$ у базисі β. Коротко: $\vec{a} = (x_1, x_2, x_3)$.

Базис β називається прямокутним або ортонормованим, якщо $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ попарно перпендикулярні та мають одиничну довжину. У цьому випадку прийнято позначення:

$$\vec{e}_1 = \vec{i}, \quad \vec{e}_2 = \vec{j}, \quad \vec{e}_3 = \vec{k} .$$

Проекцією вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{e}$ називається число $np_{\vec{e}}\, \vec{a} = |\vec{a}| \cos\varphi$, де $\varphi = (\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{e})$.

Якщо x, y, z – координати вектора $\vec{a}$ у прямокутному базисі, то вони співпадають з проекціями вектора $\vec{a}$ на базисні орти $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ відповідно: $x = np_{\vec{i}}\, \vec{a}$, $y = np_{\vec{j}}\, \vec{a}$, $z = np_{\vec{k}}\, \vec{a}$.

Довжина вектора $\vec{a}$ визначається так:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} .$$

Вектор $\vec{a}_0$ називається одиничним або нормованим, якщо $|\vec{a}_0| = 1$.

Вектор $\vec{a}_0 = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ являється одиничним вектором (ортом) вектора $\vec{a}$.

Числа

$$\cos\alpha = \cos(\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{i}) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} ,$$

$$\cos\beta = \cos(\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{j}) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} ,$$

$$\cos\gamma = \cos(\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{k}) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

називаються напрямними косинусами вектора $\vec{a}$.

Якщо $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ у базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) ,$$
$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3) .$$

Простір арифметичних векторів. Будь-яка упорядкована сукупність з n дійсних (комплексних (див. гл. 3 §4)) чисел називається *дійсним* (*комплексним*) *арифметичним вектором* і позначається символом

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) .$$

Над арифметичними векторами вводяться такі операції.

Додавання: якщо $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, то

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) .$$

Множення на число: якщо λ – число (дійсне або комплексне) і $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – арифметичний вектор, то

$$\lambda\vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) .$$

Множина всіх дійсних (комплексних) арифметичних n-компонентних векторів з введеними операціями додавання та множення на число називається *простором арифметичних векторів* (відповідно дійсним або комплексним). Позначення: $\mathbf{R}^n$ – дійсний арифметичний простір, $\mathbf{C}^n$ – комплексний арифметичний простір.

Система арифметичних векторів $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_s$ називається *лінійно залежною*, якщо існують такі числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$, які не всі рівні нулю, що має місце рівність

$$\sum_{i=1}^{s} \lambda_i \vec{x}_i = 0 . \qquad (1.1)$$

У протилежному випадку, коли рівність (1.1) має місце, якщо $\lambda_i = 0,\ i = \overline{1, s}$, система називається *лінійно незалежною*.

Система векторів $\beta = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ називається *базисом у* $\mathbf{R}^n$, якщо всі ці вектори належать $\mathbf{R}^n$, є лінійно незалежними та будь-який вектор $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ представляється у вигляді:

$$\vec{x} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{e}_k ,$$

де λ_k – деякі числа, координати вектора $\vec{x}$ у базисі β.

Число n називається *вимірністю простору* $\mathbf{R}^n$.

Коротко: $\dim \mathbf{R}^n = n$.

Система векторів

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0) ;$$
$$\vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0) ;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\vec{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$$

утворює базис у $\mathbf{R}^n$, який називається *канонічним*.

Декартова прямокутна система координат. Кажуть, що у тривимірному просторі введена *декартова прямокутна система координат*, якщо задано:

1) точка O – початок координат;

2) прямокутний базис $\beta = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ у множині усіх геометричних векторів.

Позначення: $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Осі Ox, Oy і Oz, що проведені через точку O у напрямку базисних ортів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, називаються координатними осями системи координат.

Вектор $\overrightarrow{OM}$ називають радіусом-вектором точки $M(x, y, z)$ і позначають $\vec{r}(M)$ або просто $\vec{r}$. Оскільки координати вектора $\vec{r}$ співпадають з координатами точки M, то розклад $\vec{r}$ за ортами має вигляд:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} .$$

Вектор $\overrightarrow{AB}$, де $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$, може бути записаний у вигляді:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 ,$$

де $\vec{r}_2$ – радіус-вектор точки B, $\vec{r}_1$ – радіус-вектор точки A.

Отже, розклад вектора $\overrightarrow{AB}$ за ортами має вигляд:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} .$$

Відстань між точками A та B

$$\rho(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} .$$

Поділ відрізка у даному відношенні. Нехай на прямій l задані точки A, B та C, причому $A \neq B$. Вектори $\overrightarrow{AC}$ та $\overrightarrow{CB}$ колінеарні, а отже знайдеться таке дійсне число λ, що $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$. Число λ називається відношенням, в якому точка C ділить напрямлений відрізок AB $(\lambda \neq -1)$.

Якщо відомі координати точок A і B та відношення λ, в якому точка C ділить напрямлений відрізок AB, то координати точки C знаходяться за формулами:

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda}, \qquad y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda}, \qquad z_C = \frac{z_A + \lambda z_B}{1 + \lambda}$$

або у векторній формі

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}_1 + \lambda \vec{r}_2}{1 + \lambda} ,$$

де $\vec{r} = \overrightarrow{OC},\ \vec{r}_1 = \overrightarrow{OA},\ \vec{r}_2 = \overrightarrow{OB}$.

II. Контрольні питання та завдання

1. Що називається вектором?
2. Які вектори називаються колінеарними; компланарними?
3. Які операції над векторами називаються лінійними?
4. Що називається сумою двох векторів?
5. Дайте означення добутку вектора $\vec{x}$ на число α.

6. Дайте означення базису у множині геометричних векторів $\mathbf{V}_3$.

7. Що називається розкладом вектора за базисом у множині геометричних векторів $\mathbf{V}_3$?

8. Нехай задані координати векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ у деякому базисі. Чому дорівнюють координати вектора $\vec{a}+\vec{b}$ у тому ж базисі?

9. Нехай задані координати вектора $\vec{a}$ у деякому базисі. Чому дорівнюють координати вектора $\lambda\vec{a}$ у тому ж базисі?

10. Який базис називається ортонормованим?

11. Що називається декартовою прямокутною системою координат у просторі?

12. Що називається радіусом-вектором точки M відносно декартової прямокутної системи координат?

13. Нехай у декартовій прямокутній системі координат задано точки $A(x_1, y_1, z_1)$ та $B(x_2, y_2, z_2)$. Чому дорівнюють координати вектора $\overrightarrow{AB}$ у цій системі координат?

14. Що означає поділити відрізок AB у відношенні λ $(\lambda \neq -1)$?

15. Нехай у декартовій прямокутній системі координат дано точки $A(x_1, y_1, z_1)$ та $B(x_2, y_2, z_2)$. Чому дорівнюють координати точки $C(x, y, z)$, що ділить відрізок AB у відношенні λ?

III. Приклади розв'язання задач

Приклад 1. У базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ задані вектори $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$. Знайти вектор $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$.

► $\vec{c} = 2(2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) + 3(\vec{i} + 3j - 4\vec{k}) = 7\vec{i} + 7\vec{j} - 10\vec{k}$. ◄

Приклад 2. Розкласти вектор $\vec{x}$ за базисом $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$:

$$\vec{x} = (2, 5, 0), \quad \vec{p} = (1, 2, -1), \quad \vec{q} = (3, 6, 1), \quad \vec{r} = (3, 9, 3).$$

► Знайдемо коефіцієнти розкладу $\vec{x} = \alpha_1 \vec{p} + \alpha_2 \vec{q} + \alpha_3 \vec{r}$. Підставимо координати векторів у цю рівність:

$$\alpha_1(1, 2, -1) + \alpha_2(3, 6, 1) + \alpha_3(3, 9, 3) = (2, 5, 0).$$

Звідси одержуємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 2; \\ 2\alpha_1 + 6\alpha_2 + 9\alpha_3 = 5; \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, знайдемо: $\alpha_1 = 1, \ \alpha_2 = 0, \ \alpha_3 = \frac{1}{3}$.

Зробивши перевірку, впевнюємося у правильності розв'язання системи. Таким чином, шуканий розклад має такий вигляд:

$$\vec{x} = 1 \cdot \vec{p} + 0 \cdot \vec{q} + \frac{1}{3}\vec{r}. \ ◄$$

Приклад 3. Задано точки $A(3,4,12)$ і $B(6,8,0)$. Знайти вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, його довжину $|\vec{a}|$ та напрямні косинуси, орт $\vec{a}_0$.

► $\vec{a} = (6-3, 8-4, 0-12) = (3, 4, -12)$;

$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-12)^2} = 13$;

$\cos\alpha = \frac{3}{13}, \cos\beta = \frac{4}{13}, \cos\gamma = -\frac{12}{13}$;

$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{3\vec{i} + 4\vec{j} - 12\vec{k}}{13} = \left(\frac{3}{13}, \frac{4}{13}, -\frac{12}{13}\right)$. ◄

Приклад 4. Точка $C(2, 2, 4)$ ділить відрізок AB у відношенні $\lambda = 2/3$. Знайти координати точки B, якщо $A(-2, 4, 0)$.

► Нехай $B(x_B, y_B, z_B)$. Враховуючи, що C ділить відрізок AB у відношенні $\lambda = 2/3$, маємо:

$$2 = \frac{-2 + 2x_B/3}{1 + 2/3}, \quad 2 = \frac{4 + 2y_B/3}{1 + 2/3}, \quad 4 = \frac{0 + 2z_B/3}{1 + 2/3}.$$

Звідси $x_B = 8, \ y_B = -1, \ z_B = 10$. ◄

Приклад 5. Відомі вершини трикутника ABC: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Визначити координати точки перетину медіан трикутника.

► Знаходимо координати точки D – середини відрізка AB; маємо, що:

$$x_D = \frac{(x_1 + x_2)}{2}, \quad y_D = \frac{(y_1 + y_2)}{2}.$$

Точка M, в якій перетинаються медіани, ділить відрізок CD у відношенні $2:1$, починаючи від точки C. Тому, координати точки M визначаються за формулами

$$x = \frac{x_3 + 2x_D}{1+2}, \quad y = \frac{y_3 + 2y_D}{1+2},$$

тобто

$$x = \frac{x_3 + 2(x_1 + x_2)/2}{3}, \quad y = \frac{y_3 + 2(y_1 + y_2)/2}{3}.$$

Отже,

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}. ◄$$

Приклад 6. Задано трикутник з вершинами $A(1, 1, 1)$, $B(5, 1, -2)$, $C(7, 9, 1)$. Знайти координати точки D перетину бісектриси кута A зі стороною CB.

► Знаходимо довжини сторін трикутника, які утворюють кут A:

$$|AC| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2} =$$
$$= \sqrt{(7-1)^2 + (9-1)^2 + (1-1)^2} = 10;$$

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} =$$
$$= \sqrt{(5-1)^2 + (1-1)^2 + (-2-1)^2} = 5.$$

Отже, $|CD|:|DB| = 10:5 = 2$, бо бісектриса ділить сторону CB на частини, пропорційні прилеглим сторонам. Таким чином,

$$x_D = \frac{x_C + \lambda x_B}{1+\lambda} = \frac{7 + 2\cdot 5}{1+2} = \frac{17}{3}, \quad y_D = \frac{y_C + \lambda y_B}{1+\lambda} = \frac{9 + 2\cdot 1}{1+2} = \frac{11}{3},$$
$$z_D = \frac{z_C + \lambda z_B}{1+\lambda} = \frac{1 + 2(-2)}{1+2} = -1;$$

шукана точка $D(17/3, 11/3, -1)$. ◄

IV. Задачі для практичних занять

1.1. Задано вектори $\vec{a}_1 = (-1,2,0), \vec{a}_2 = (3,1,1), \vec{a}_3 = (2,0,1)$ і $\vec{a} = \vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + \frac{1}{3}\vec{a}_3$. Обчислити:

а) $|\vec{a}_1|$ та координати орта $(\vec{a}_1)_0$ вектора $\vec{a}_1$;

б) $\cos(\widehat{\vec{a}_1, \vec{j}})$;

в) координату x вектора $\vec{a}$;

г) $np_{\vec{j}}\,\vec{a}$.

1.2. Задано вектори $\vec{e} = (-1, 1, \frac{1}{2})$ і $\vec{a} = (2, -2, -1)$. Переконатись, що вони колінеарні та знайти розклад вектора $\vec{a}$ за базисом $\beta = (\vec{e})$.

1.3. На площині задано вектори $\vec{e}_1 = (-1, 2)$, $\vec{e}_2 = (2, 1)$ і $\vec{a} = (0, -2)$. Переконатись, що $\beta = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ – базис у множині всіх векторів на площині. Побудувати задані вектори та виконати розклад вектора $\vec{a}$ за базисом β.

1.4. Показати, що трійка векторів $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (1,1,0)$ та $\vec{e}_3 = (1,1,1)$ утворює базис у множині усіх векторів простору. Обчислити координати вектора $\vec{a} = -2\vec{i} - \vec{k}$ у базисі $\beta = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ і виконати відповідний розклад за базисом.

1.5. Задано вектори

$$\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}, \quad \vec{b} = -3\vec{j} - 2\vec{k}, \quad \vec{c} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}.$$

Знайти:

а) координати орта $\vec{a}_0$;

б) координати вектора $\vec{d} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$;

в) розклад вектора $\vec{f} = \vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$ за базисом $\beta = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$;

г) $np_{\vec{j}}(\vec{a} - \vec{b})$.

1.6. Знайти координати орта $\vec{a}_0$, якщо $\vec{a} = (6, 7, -6)$.

1.7. Вектор $\vec{a} = 3\vec{i} - 9\vec{j} + z\vec{k}$. Знайти z, якщо $|\vec{a}| = 12$.

1.8. Знайти довжину та напрямні косинуси вектора $\vec{p} = 3\vec{a} - 5\vec{b} + \vec{c}$, якщо $\vec{a} = 4\vec{i} + 7\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$.

1.9. Знайти вектор $\vec{x}$, колінеарний вектору $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$ та такий, що утворює з ортом $\vec{j}$ гострий кут і має довжину $|\vec{x}| = 15$.

1.10. Знайти вектор $\vec{x}$, який утворює з усіма трьома базисними ортами рівні гострі кути, за умови, що $|\vec{x}| = 2\sqrt{3}$.

1.11. Знайти вектор $\vec{x}$, який утворює з ортом $\vec{j}$ кут 60°, з ортом $\vec{k}$ – кут 120°, за умови, що $|\vec{x}| = 5\sqrt{2}$.

1.12. За яких значень α і β вектори $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \alpha\vec{k}$ та $\vec{b} = \beta\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ колінеарні?

1.13. Задані три вершини $A(3, -4, 7)$, $B(-5, 3, -2)$ і $C(1, 2, -3)$ паралелограма $ABCD$. Знайти його четверту вершину D, протилежну B.

1.14. Задані дві суміжні вершини паралелограма $A(-2, 6)$, $B(2, 8)$ і точка перетину його діагоналей $M(2, 2)$. Знайти дві інші вершини.

1.15. Визначити координати вершин трикутника, якщо відомі середини його сторін: $K(2, -4)$, $M(6, 1)$, $N(-2, 3)$.

1.16. На осі абсцис знайти точку M, відстань від якої до точки $A(3, -3)$ дорівнює 5.

1.17. На осі ординат знайти точку M, рівновіддалену від точок $A(1, -4, 7)$ та $B(5, 6, -5)$.

1.18. Задані вершини трикутника $A(3, -1, 5)$, $B(4, 2, -5)$ і $C(-4, 0, 3)$. Знайти довжину медіани, проведеної з вершини A.

1.19. Відрізок з кінцями у точках $A(3, -2)$ і $B(6, 4)$ розділений на три рівні частини. Знайти координати точок ділення.

1.20. Визначити координати кінців відрізка AB, який точками $C(2, 0, 2)$ і $D(5, -2, 0)$ розділений на три рівні частини.

§2. Добутки векторів

I. Короткі теоретичні відомості

Скалярний добуток векторів. *Скалярним добутком* векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називається число, що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута φ між ними:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi .$$

Властивості скалярного добутку.

1^0. $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$ (комутативний закон).

2^0. $(\vec{a}, \alpha\vec{b}) = \alpha(\vec{a}, \vec{b})$, $\alpha \in \mathbf{R}$ (асоціативний закон).

3^0. $(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c})$ (дистрибутивний закон).

4^0. $\vec{i}\,\vec{i} = \vec{j}\,\vec{j} = \vec{k}\,\vec{k} = 1$; $\vec{i}\,\vec{j} = \vec{j}\,\vec{k} = \vec{k}\,\vec{i} = 0$.

5^0. Якщо

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}, \quad \vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k},$$

то

$$(\vec{a}, \vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 .$$

6^0. $(\vec{a}, \vec{a}) = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$; $|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}$.

7^0. $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 0$ або $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$ (умова перпендикулярності векторів).

Проекція вектора $\vec{a}$ на $\vec{b}$ та кут між цими векторами визначаються за формулами:

$$np_{\vec{b}}\,\vec{a} = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{b}|}; \qquad \cos\varphi = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}.$$

Робота A сили $\vec{F}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж прямої з положення B в C, $\overrightarrow{BC} = \vec{s}$, визначається за формулою:

$$A = (\vec{F}, \vec{s}).$$

Векторний добуток векторів. *Векторним добутком векторів* $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається третій вектор $\vec{c}$, що задовольняє такі умови (рис. 1.4):

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\varphi, \quad \varphi = (\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})$;

2) $\vec{c} \perp \vec{a},\ \vec{c} \perp \vec{b}$;

3) вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють праву трійку.

Зауважимо, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють *праву трійку*, якщо найкоротший поворот від вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ з кінця вектора $\vec{c}$ спостерігається проти годинникової стрілки.

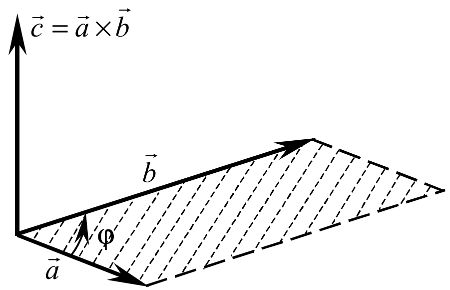


Рис. 1.4

Векторний добуток позначається $\vec{a} \times \vec{b}$ або $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Властивості векторного добутку.

1^0. $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ (антикомутативний закон).

2^0. $\vec{a} \times (\alpha\vec{b}) = \alpha(\vec{a} \times \vec{b})$, $\alpha \in \mathbf{R}$ (асоціативний закон).

3^0. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (дистрибутивний закон).

4^0. $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$; $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$.

5^0. Якщо $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, то

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix},$$

тобто $\vec{a} \times \vec{b}$ записується за допомогою визначника третього порядку; див. гл. 3 §1.

6^0. $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0$ або $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{z_1}{z_2}$ (умова колінеарності векторів).

Площа S_1 паралелограма та площа S_2 трикутника, побудованих на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, обчислюються за формулами:

$$S_1 = |\vec{a} \times \vec{b}|, \qquad S_2 = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Момент $\vec{M}$ сили $\vec{F}$, що прикладена до точки A тіла, відносно точки O, визначається за формулою:

$$\vec{M} = \overrightarrow{OA} \times \vec{F}.$$

Мішаний добуток векторів. *Мішаним добутком* векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називається скалярний добуток вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ на вектор $\vec{c}$, тобто $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}$.

Властивості мішаного добутку.

1^0. $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = -(\vec{b} \times \vec{a})\vec{c}$.

2^0. $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})$.

Завдяки цій властивості мішаний добуток записується у вигляді $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ або $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

3^0. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})$.

4^0. Якщо

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}; \qquad \vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}; \qquad \vec{c} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k},$$

то

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

5^0. Необхідна та достатня умова компланарності векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0 \text{ або } \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Об'єм V_1 паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ та об'єм V_2 утвореної цими векторами трикутної піраміди знаходяться за формулами:

$$V_1 = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|; \quad V_2 = \frac{1}{6}|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|.$$

Подвійний векторний добуток. *Подвійним векторним добутком* векторів $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ називається векторний добуток двох із них, помножений векторно на третій. Наприклад, $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$; $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$. Інше позначення: $[[\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}]$; $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]$.

Подвійний векторний добуток виражається за допомогою скалярного добутку таким чином:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a}\,\vec{c}) - \vec{a}(\vec{b}\,\vec{c}),$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\,\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\,\vec{b}).$$

При круговій перестановці векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ у подвійному векторному добутку приходимо до трьох різних векторів:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a}\,\vec{c}) - \vec{a}(\vec{b}\,\vec{c}),$$

$$(\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} = \vec{c}(\vec{b}\,\vec{a}) - \vec{b}(\vec{c}\,\vec{a}),$$

$$(\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a}(\vec{c}\,\vec{b}) - c(\vec{a}\,\vec{b}).$$

II. Контрольні питання та завдання

1. Що називається скалярним добутком двох векторів?

2. Як виражається скалярний добуток двох векторів з використанням проекції одного вектора на другий?

3. Перелічіть основні властивості скалярного добутку.

4. Як виражається скалярний добуток векторів через координати векторів у декартовій системі координат?

5. Чому дорівнює кут φ між ненульовими векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$?

6. У чому полягає умова ортогональності (перпендикулярності) векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; умова колінеарності векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$?

7. В якому випадку вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, взяті у заданому порядку, утворюють праву трійку?

8. Що називається векторним добутком двох векторів?

9. Який геометричний зміст модуля векторного добутку двох неколінеарних векторів?

10. Перелічіть основні властивості векторного добутку.

11. Запишіть формулу, за якою обчислюється векторний добуток векторів $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ та $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$.

12. Що називається мішаним добутком трьох векторів?

13. Який геометричний зміст модуля мішаного добутку трьох некомпланарних векторів?

14. У чому полягає необхідна та достатня умова компланарності трьох векторів?

15. Як виражається мішаний добуток трьох векторів через координати векторів у декартовій системі координат?

III. Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Знайти $(2\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - 3\vec{b})$, якщо $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2$, $(\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$.

► Використовуючи властивості та означення скалярного добутку, маємо

$$(2\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - 3\vec{b}) = 2(\vec{a}, \vec{a}) - 6(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{a}) - 3(\vec{b}, \vec{b}) =$$

$$= 2|\vec{a}|^2 - 5|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b}) - 3|\vec{b}|^2 = 2 - 10\cos\frac{\pi}{6} - 3 \cdot 4 = -10 - 10\frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= -10(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}). \blacktriangleleft$$

Приклад 2. У трикутнику з вершинами $A(2, -1, 3)$, $B(-2, 2, 5)$, $C(1, 2, 3)$ знайти косинус кута при вершині A.

► $\overrightarrow{AB}=(-4,3,2),\ \overrightarrow{AC}=(-1,3,0)$, тоді

$$\cos\varphi=\cos(\overrightarrow{AB}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AC})=\frac{-4(-1)+3\cdot3+2\cdot0}{\sqrt{(-4)^2+3^2+2^2}\sqrt{(-1)^2+3^2}}=$$

$$=\frac{13}{\sqrt{29}\sqrt{10}}\approx 0{,}763.$$ ◄

Приклад 3. Знайти векторний добуток векторів

$$\vec a=2\vec i+3\vec j+5\vec k \quad \text{та} \quad \vec b=\vec i+2\vec j+\vec k$$

► Маємо

$$\vec a\times\vec b=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 2 & 3 & 5\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=\vec i\begin{vmatrix}3 & 5\\ 2 & 1\end{vmatrix}-\vec j\begin{vmatrix}2 & 5\\ 1 & 1\end{vmatrix}+\vec k\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-7\vec i+3\vec j+\vec k=(-7,3,1).$$ ◄

Приклад 4. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec c=\vec a+3\vec b$ та $\vec d=3\vec a+\vec b$, якщо $|\vec a|=|\vec b|=1$, $(\vec a\,\hat{,}\,\vec b)=30^{\circ}$.

► Маємо

$$\vec c\times\vec d=(\vec a+3\vec b)\times(3\vec a+\vec b)=3(\vec a\times\vec a)+\vec a\times\vec b+9(\vec b\times\vec a)+3(\vec b\times\vec b)=$$

$$=3\cdot0+\vec a\times\vec b-9(\vec a\times\vec b)+3\cdot0=-8(\vec a\times\vec b)$$

(оскільки $\vec a\times\vec a=\vec b\times\vec b=0,\ \vec b\times\vec a=-(\vec a\times\vec b)$). Тоді

$$S=|\vec c\times\vec d|=8|\vec a\times\vec b|=8\cdot1\cdot1\cdot\sin30^{\circ}=4 \text{ (кв. од.)}.$$ ◄

Приклад 5. Обчислити площу трикутника ABC, де $A(2,-1,3),\ B(-2,2,5),\ C(1,2,3)$.

► Врахуємо, що $\vec a=\overrightarrow{AB}=(-4,3,2),\ \vec b=\overrightarrow{AC}=(-1,3,0)$. Тоді

$$\vec a\times\vec b=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ -4 & 3 & 2\\ -1 & 3 & 0\end{vmatrix}=-6\vec i-2\vec j-9\vec k,$$

звідки

$$|\vec a\times\vec b|=\sqrt{36+4+81}=\sqrt{121}=11;\qquad S=\frac12|\vec a\times\vec b|=\frac12 11=5{,}5 \text{ (кв. од.)}.$$ ◄

Приклад 6. Знайти мішаний добуток векторів

$$\vec a=2\vec i-\vec j-\vec k,\quad \vec b=\vec i+3\vec j-\vec k,\quad \vec c=\vec i+\vec j+4\vec k.$$

► $$(\vec a,\vec b,\vec c)=\begin{vmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & 3 & -1\\ 1 & 1 & 4\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 4\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 4\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=26+5+2=33.$$ ◄

Приклад 7. Задані вершини трикутної піраміди $A(3,2,1)$, $B(-2,1,-2),\ C(-1,2,3),\ D(1,-2,3)$. Знайти її об'єм.

► $\vec a=\overrightarrow{AB}=(-5,-1,-3),\ \vec b=\overrightarrow{AC}=(-4,0,2),\ \vec c=\overrightarrow{AD}=(-2,-4,2)$.

$$(\vec a,\vec b,\vec c)=\begin{vmatrix}-5 & -1 & -3\\ -4 & 0 & 2\\ -2 & -4 & 2\end{vmatrix}=-48+4-40-8=-92.$$

Отже, об'єм трикутної піраміди $V=\frac16|-92|=\frac{46}{3}$ (куб. од.). ◄

Приклад 8. Показати, що вектори

$$\vec a_1=(1,-1,2),\quad \vec a_2=(2,2,-1),\quad \vec a_3=(2,1,0)$$

утворюють базис у $\mathbf{V_3}$.

► Враховуючи, що базисом у $\mathbf{V_3}$ є три некомпланарні вектори, розв'язання зводиться до перевірки виконання умови компланарності трьох векторів:

$$(\vec a_1,\vec a_2,\vec a_3)=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix}=1\cdot1-(-1)\cdot2+2(2-4)=1+2-4=-1\neq0.$$

Таким чином, вектори некомпланарні, утворюють базис у $\mathbf{V_3}$. ◄

Приклад 9. Задано вектори $\vec a=(2,3,0)$, $\vec b=(1,-2,2)$, $\vec c=(3,2,1)$.

Визначити:

1) довжину вектора $\vec a$: $|\vec a|$;

2) скалярний добуток векторів $\vec a$ та $\vec b$: $(\vec a,\vec b)$;

3) косинус кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$;

4) векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$: $\vec{a}\times\vec{b}$;

5) мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$;

6) чи колінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

7) чи компланарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

► 1. $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{4+9+0} = \sqrt{13}$.

2. $(\vec{a},\vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 2\cdot 1 + 3\cdot(-2) + 0\cdot 2 = -4$.

3. $\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}) = \dfrac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{-4}{\sqrt{13}\sqrt{1+4+4}} = -\dfrac{4}{3\sqrt{13}}$.

4. $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\vec{k} =$

$= 6\vec{i} - 4\vec{j} - 7\vec{k} = (6,-4,-7)$;

$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \sqrt{6^2 + (-4)^2 + (-7)^2} = \sqrt{36+16+49} = \sqrt{101}$.

5. $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -5 & -6 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} = -12 + 15 = 3$.

6. Умова колінеарності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$;

$\dfrac{2}{1} \neq \dfrac{3}{-2} \neq \dfrac{0}{2} \Rightarrow$ $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не колінеарні.

7. Умова компланарності векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$: $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 0$;

$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 3 \neq 0 \Rightarrow$ вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ не компланарні. ◄

IV. Задачі для практичних занять

1.21. $|\vec{a}_1| = 3$, $|\vec{a}_2| = 4$, $(\vec{a}_1\,\hat{,}\,\vec{a}_2) = 2\pi/3$. Обчислити:

а) $\vec{a}_1{}^2 = \vec{a}_1\vec{a}_1$; б) $(3\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2)(\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2)$; в) $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)^2$.

1.22. $|\vec{a}_1| = 3$, $|\vec{a}_2| = 5$. Визначити, за якого значення α вектори $\vec{b} = \vec{a}_1 + \alpha\vec{a}_2$ та $\vec{c} = \vec{a}_1 - \alpha\vec{a}_2$ перпендикулярні.

1.23. Визначити довжину діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q}$, $\vec{b} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$, якщо відомо, що $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{q}| = 3$ та $(\vec{p}\,\hat{,}\,\vec{q}) = \pi/4$.

1.24. Визначити кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо відомо, що $(\vec{a} - \vec{b})^2 + (\vec{a} + 2\vec{b})^2 = 20$ та $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$.

1.25. Обчислити $пр_{\vec{a}+\vec{b}}(2\vec{a} - \vec{b})$, якщо $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ та $(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}) = 120^\circ$.

1.26. Знайти кут, утворений одиничними векторами $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$, якщо відомо, що вектори $\vec{a} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ та $\vec{b} = 5\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2$ перпендикулярні.

1.27. Задано вектори $\vec{a}_1 = (4,-2,-4)$ і $\vec{a}_2 = (6,-3,2)$. Обчислити: а) $\vec{a}_1\vec{a}_2$; б) $(2\vec{a}_1 - 3\vec{a}_2)(\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2)$; в) $(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^2$; г) $|2\vec{a}_1 - \vec{a}_2|$; д) $пр_{\vec{a}_1}\vec{a}_2$; е) $пр_{\vec{a}_2}\vec{a}_1$; є) напрямні косинуси вектора $\vec{a}_1$; ж) $пр_{\vec{a}_1+\vec{a}_2}(\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2)$; з) $\cos(\vec{a}_1\,\hat{,}\,\vec{a}_2)$.

1.28. Задано точки $A(2,2)$ і $B(5,-2)$. На осі абсцис знайти таку точку M, щоб $(\overrightarrow{AM}\,\hat{,}\,\overrightarrow{MB}) = \pi/2$.

1.29. Для заданих векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ обчислити $пр_{\vec{c}}(2\vec{a} - 3\vec{b})$:

а) $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$;

б) $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = 6\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

1.30. Обчислити роботу сили $\vec{F} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ при переміщенні матеріальної точки з положення $A(-1, 2, 0)$ у положення $B(2, 1, 3)$.

1.31. Знайти координати вектора $\vec{x}$, колінеарного вектору $\vec{a} = (2, 1, -1)$ і такого, що задовольняє умові $(\vec{a}, \vec{x}) = 3$.

1.32. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярний вектору $\vec{a}_1 = (2,3,-1)$ та вектору $\vec{a}_2 = (1,-2,3)$, задовольняє умову $\vec{x}(2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = -6$. Знайти координати вектора $\vec{x}$.

1.33. $|\vec{a}_1| = 1$, $|\vec{a}_2| = 2$ і $(\vec{a}_1 \hat{,} \vec{a}_2) = 2\pi/3$. Обчислити:

а) $|[\vec{a}_1, \vec{a}_2]|$; б) $|[2\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \ \vec{a}_1 + 2\vec{a}_2]|$;

в) $|[\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2, \ 3\vec{a}_1 - \vec{a}_2]|$.

1.34. Якій умові повинні задовольняти вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$, щоб вектори $\vec{b} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$ та $\vec{c} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$ були колінеарні?

1.35. Спростити вирази:

а) $[\vec{i}, \vec{j} + \vec{k}] - [\vec{j}, \vec{i} + \vec{k}] + [\vec{k}, \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}]$;

б) $[\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{c}] + [\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{b}] + [\vec{b} - \vec{c}, \vec{a}]$;

в) $[2\vec{a} + \vec{b}, \vec{c} - \vec{a}] + [\vec{b} + \vec{c}, \vec{a} + \vec{b}]$;

г) $2\vec{i}[\vec{j}, \vec{k}] + 3\vec{j}[\vec{i}, \vec{k}] + 4\vec{k}[\vec{i}, \vec{j}]$.

1.36. $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 5$, $(\vec{a} \hat{,} \vec{b}) = \pi/4$. Обчислити площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$ та $\vec{d} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$.

1.37. Задано вектори $\vec{a}_1 = (3, -1, 2)$ і $\vec{a}_2 = (1, 2, -1)$. Знайти координати векторів:

а) $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$; б) $[2\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \ \vec{a}_2]$; в) $[2\vec{a}_1 - \vec{a}_2, \ 2\vec{a}_1 + \vec{a}_2]$.

1.38. Обчислити площу трикутника з вершинами $A(1,1,1)$, $B(2, 3, 4)$ та $C(4, 3, 2)$.

1.39. У трикутнику з вершинами $A(1,-1, 2)$, $B(5,-6, 2)$ і $C(1, 3,-1)$ знайти висоту $h = |\overrightarrow{BD}|$.

1.40. Визначити значення α і β, за яких вектор $\vec{c} = \alpha\vec{i} + 3\vec{j} + \beta\vec{k}$ колінеарний вектору $\vec{d} = [\vec{a}, \vec{b}]$, якщо $\vec{a} = (3,-1, 1)$, $\vec{b} = (1, 2, 0)$.

1.41. Знайти вектор $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}] + [\vec{a}, [\vec{a}, \vec{b}]]$, якщо $\vec{a} = (2, 1,-3)$, $\vec{b} = (1,-1, 1)$.

1.42. Сила $\vec{F} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$ прикладена до точки $A(4,-2,3)$. Визначити момент цієї сили відносно точки $O(3, 2,-1)$.

1.43. Вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють ліву трійку, $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$ та $(\vec{a} \hat{,} \vec{b}) = 30^\circ$; $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$. Знайти $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

1.44. Задано вектори $\vec{a}_1 = (1, -1, 3)$, $\vec{a}_2 = (-2, 2, 1)$ і $\vec{a}_3 = (3,-2, 5)$. Обчислити $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$. Яка орієнтація трійок:

а) $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$; б) $\vec{a}_2, \vec{a}_1, \vec{a}_3$; в) $\vec{a}_1, \vec{a}_3, \vec{a}_2$?

1.45. Встановити, чи утворюють вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ і $\vec{a}_3$ базис у множині всіх векторів, якщо:

а) $\vec{a}_1 = (2, 3,-1)$, $\vec{a}_2 = (1,-1, 3)$, $\vec{a}_3 = (1, 9,-11)$;

б) $\vec{a}_1 = (3,-2, 1)$, $\vec{a}_2 = (2, 1, 2)$, $\vec{a}_3 = (3,-1,-2)$.

1.46. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах:

а) $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$;

б) $\vec{a} = 3\vec{i} + 6\vec{j} - 8\vec{k}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 6\vec{k}$, $\vec{c} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

1.47. Знайти довжину висоти паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a} = \vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$, якщо за основу прийняти паралелограм, побудований на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

1.48. Обчислити об'єм піраміди $OABC$, якщо $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = -3\vec{j} + \vec{k}$, $\overrightarrow{OC} = 2\vec{j} + 5\vec{k}$.

1.49. Обчислити об'єм піраміди з вершинами у точках $A(2, -3, 5)$, $B(0, 2, 1)$, $C(-2, -2, 3)$ та $D(3, 2, 4)$.

1.50. У піраміді з вершинами у точках $A(1, 1, 1)$, $B(2, 0, 2)$, $C(2, 2, 2)$ і $D(3, 4, -3)$ обчислити висоту $h = |\overrightarrow{DE}|$.

1.51. Перевірити, чи компланарні задані вектори:

а) $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{c} = 14\vec{i} - 13\vec{j} + 7\vec{k}$;

б) $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$.

1.52. Визначити значення λ, за яким вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ будуть компланарні?

а) $\vec{a} = (\lambda, 3, 1)$, $\vec{b} = (5, -1, 2)$, $\vec{c} = (-1, 5, 4)$;

б) $\vec{a} = (1, 2\lambda, 1)$, $\vec{b} = (1, \lambda, 0)$, $\vec{c} = (0, \lambda, 1)$.

1.53. Довести, що чотири точки $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1, 5)$, $C(-1, 2, 1)$ і $D(2, 1, 3)$ лежать в одній площині.

1.54. Довести тотожності:

а) $(\vec{a} + \vec{c})\vec{b}(\vec{a} + \vec{b}) = -\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$;

б) $(\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})(\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}) = 3\vec{a}\vec{b}\vec{c}$;

в) $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{b} + \vec{c})(\vec{c} + \vec{a}) = 2\vec{a}\vec{b}\vec{c}$;

г) $\vec{a}\vec{b}(\vec{c} + \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) = \vec{a}\vec{b}\vec{c} \quad \forall \alpha, \beta$.

1.55. Довести компланарність векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, якщо відомо, що $[\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{b}, \vec{c}] + [\vec{c}, \vec{a}] = 0$.

ГЛАВА 2. **АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ**

§1. Прямі лінії та площини

I. Короткі теоретичні відомості

Пряма на площині. Наведемо основні види рівнянь прямої на площині:

1) $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ – рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно до нормального вектора $\vec{n}=(A, B)$;

2) $Ax+By+C=0$ – загальне рівняння прямої, де вектор $\vec{n}=(A, B)$ – нормальний вектор прямої;

3) $y=kx+b$ – рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом; k – кутовий коефіцієнт прямої: $k=\operatorname{tg}\alpha$, де α – кут між прямою і додатним напрямом осі Ox, b – ордината точки перетину прямої з віссю Oy;

4) $y-y_0=k(x-x_0)$ – рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0)$ у заданому напрямі, який задається кутовим коефіцієнтом k;

5) $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}$ – рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ паралельно напрямному вектору $\vec{s}=(m, n)$ (канонічне рівняння);

6) $\begin{cases} x=x_0+mt; \\ y=y_0+nt \end{cases}$

– параметричні рівняння прямої, де $t\in\mathbf{R}$ – параметр.

Ці рівняння у векторній формі мають вигляд:

$$\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{s}\,t,$$

де $\vec{r}_0=(x_0, y_0)$ – радіус-вектор точки $M_0(x_0, y_0)$, що належить прямій, $\vec{s}=(m, n)$ – напрямний вектор прямої;

7) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ – рівняння прямої у відрізках, a і b – величини напрямлених відрізків, що відтинаються прямою на координатних осях;

8) $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$ – рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$;

9) $x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0$ – нормальне рівняння прямої, де $\cos\alpha$ та $\cos\beta$ – напрямні косинуси нормального вектора $\vec{n}$, $p \ge 0$ – відстань від початку координат до прямої.

Загальне рівняння прямої $Ax + By + C = 0$ приводиться до нормального вигляду множенням на нормувальний множник

$$\mu = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}},$$

де знак перед коренем вибирається протилежним знаку вільного члена C.

Якщо $\vec{n}_1 = (A_1, B_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2, B_2)$ – нормальні вектори прямих l_1 та l_2 відповідно, то кут між ними визначається за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|}.$$

Якщо k_1, k_2 – кутові коефіцієнти двох прямих, то кут φ між ними визначається за формулою

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \quad (k_1 k_2 \ne -1).$$

Умова паралельності та перпендикулярності прямих l_1 та l_2:

$$l_1 \parallel l_2 \;\Leftrightarrow\; \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}; \qquad l_1 \perp l_2 \;\Leftrightarrow\; A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

або

$$l_1 \parallel l_2 \;\Leftrightarrow\; k_1 = k_2; \qquad l_1 \perp l_2 \;\Leftrightarrow\; k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Якщо задано рівняння прямої $l:\ Ax + By + C = 0$ і точка $M_0(x_0, y_0)$, то відстань від цієї точки до даної прямої обчислюється за формулою

$$\rho(M_0, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Площина та пряма у просторі. Основні види рівнянь площини:

1) $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ – рівняння площини, що проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно до нормального вектора $\vec{n} = (A, B, C)$;

2) $Ax + By + Cz + D = 0$ – загальне рівняння площини, де вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ – нормальний вектор площини;

3) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$ – рівняння площини у відрізках, де a, b, c – довжини напрямлених відрізків, що відтинаються площиною на координатних осях;

4) $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$

– рівняння площини, що проходить через три задані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$;

5) $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ – нормальне рівняння площини, де $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – напрямні косинуси нормального вектора $\vec{n}$, $p \ge 0$ – відстань від початку координат до площини.

Загальне рівняння площини $Ax + By + Cz + D = 0$ приводиться до нормального вигляду множенням на нормувальний множник

$$\mu = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

де знак перед коренем вибирається протилежним знаку вільного члена D.

Кут між двома заданими площинами визначається за формулою

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\,\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Умови паралельності та перпендикулярності двох площин

$$Q_1:\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{і} \quad Q_2:\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

мають вигляд:

$$Q_1 \parallel Q_2 \;\Leftrightarrow\; \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}; \qquad Q_1 \perp Q_2 \;\Leftrightarrow\; A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Відстань $\rho(M_0, Q)$ від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини

$$Q:\ Ax + By + Cz + D = 0:$$

$$\rho(M_0, Q) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Пряма у просторі. Основні види рівнянь прямої у просторі:

1) $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

– загальні рівняння прямої, що визначена перетином двох непаралельних площин;

2) $\begin{cases} x = x_0 + mt\ ; \\ y = y_0 + nt\ ; \\ z = z_0 + pt \end{cases}$

– параметричні рівняння прямої в просторі, де $t \in \mathbf{R}$ – параметр.

Ці рівняння у векторній формі мають вигляд

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{s}\, t\,,$$

де $\vec{r}_0 = (x_0\,,\ y_0\,,\ z_0)$ – радіус-вектор точки $M_0(x_0\,,\ y_0\,,\ z_0)$, що належить прямій, $\vec{s} = (m\,,\ n\,,\ p)$ – напрямний вектор прямої;

3) $\dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p}$ – канонічні рівняння прямої, де $A(x_0\,,\ y_0\,,\ z_0)$ – задана точка прямої, а вектор $\vec{s} = (m,\ n,\ p)$ – напрямний вектор прямої;

4) $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} = \dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$ – рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1\,,\ y_1\,,\ z_1)$ і $M_2(x_2\,,\ y_2\,,\ z_2)$.

Кут між прямими

$$L_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{і} \quad L_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$$

обчислюється за формулою

$$\cos\varphi = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\,\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}\,.$$

Умови паралельності та перпендикулярності прямих L_1 та L_2:

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}; \qquad L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0\,.$$

Відстань $\rho(M_0, L)$ від точки M_0 до прямої L, де L: $\dfrac{x-x_1}{m} = \dfrac{y-y_1}{n} = \dfrac{z-z_1}{p}$, точка $A(x_1, y_1, z_1) \in L$, $\vec{s} = (m\,, n\,, p)$, визначається за формулою

$$\rho(M_0, L) = \frac{\left|\overrightarrow{AM_0} \times \vec{s}\right|}{|\vec{s}|}\,.$$

Щоб знайти точку перетину прямої $\dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p}$ і площини $Ax + By + Cz + D = 0$, слід розв'язати спільно ці рівняння.

Кут між прямою L: $\dfrac{x-x_1}{m} = \dfrac{y-y_1}{n} = \dfrac{z-z_1}{p}$ і площиною Q: $Ax + By + Cz + D = 0$ визначається за формулою

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}\,.$$

Умови паралельності та перпендикулярності прямої L та площини Q:

$$L \parallel Q \Leftrightarrow Am + Bn + Cp = 0\ ; \qquad L \perp Q \Leftrightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}\,.$$

Умова належності двох прямих

$$L_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{і} \quad L_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$$

одній площині така

$$(\overrightarrow{A_1A_2}\,,\ \vec{s}_1\,,\ \vec{s}_2) = 0 \quad \text{або} \quad \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0\,,$$

де $A_1(x_1, y_1, z_1) \in L_1$, $A_2(x_2, y_2, z_2) \in L_2$; $\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$, $\vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$.

Прямі L_1 та L_2 мимобіжні, якщо

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} \neq 0\,.$$

Відстань між двома мимобіжними прямими L_1 та L_2 визначається за формулою:

$$\rho(L_1\,,\ L_2) = \frac{|(\overrightarrow{A_1A_2}\,,\ \vec{s}_1\,,\ \vec{s}_2)|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|}\,.$$

II. Контрольні питання та завдання

1. Записати загальне рівняння прямої на площині.

2. Який геометричний зміст коефіцієнтів при x та y в загальному рівнянні прямої на площині?

3. Записати рівняння прямої на площині, що проходить через точку $M_0(x_0,\ y_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (A,\ B)$.

4. Записати канонічне рівняння прямої на площині та вказати геометричний зміст параметрів, що в нього входять.

5. Записати рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом і вказати геометричний зміст параметрів, що в нього входять.

6. Рівняння яких прямих не можуть бути записані у вигляді рівняння з кутовим коефіцієнтом?

7. Записати умову паралельності та умову перпендикулярності двох прямих, заданих рівняннями:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

8. Записати умову паралельності та умову перпендикулярності двох прямих, заданих рівняннями:

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1}; \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2}.$$

9. Записати рівняння площини, що проходить через точку $M(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (A, B, C)$.

10. Записати рівняння площини, що проходить через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$.

11. Записати формулу, за якою знаходиться кут φ між площинами

$$Q_1\colon\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{та} \quad Q_2\colon\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

12. Записати умову паралельності та перпендикулярності площин Q_1 та Q_2.

13. Записати формулу для обчислення відстані від точки $M(x_1, y_1, z_1)$ до площини $Q\colon\ Ax + By + Cz + D = 0$.

14. Записати канонічні рівняння прямої у просторі та вказати геометричний зміст параметрів, що входять в ці рівняння.

15. Записати параметричні рівняння прямої у просторі.

16. Записати рівняння прямої у просторі, що проходить через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

17. Записати формулу, за якою знаходиться кут між прямими у просторі L_1 та L_2.

18. Записати умову паралельності та умову перпендикулярності прямих у просторі L_1 та L_2, заданих канонічними рівняннями.

19. Записати формулу, за якою знаходиться кут φ між прямою у просторі L та площиною Q.

20. Записати умову паралельності та перпендикулярності прямої у просторі L та площини Q.

III. Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Задані вершини трикутника $A(-2,-3)$, $B(5, 4)$, $C(-1, 2)$. Скласти рівняння медіани AM.

► Точка M – середина сторони BC, тому

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{5-1}{2} = 2; \quad y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{4+2}{2} = 3; \quad M(2, 3).$$

Використовуючи рівняння прямої, що проходить через точки A і M, знайдемо рівняння медіани AM: $\frac{x+2}{2+2} = \frac{y+3}{3+3}$, звідки $3x - 2y = 0$. ◄

Приклад 2. Скласти рівняння прямої, що проходить таким чином:

1) через точку $M(1, 2)$ та точку $N(3, 5)$;

2) через точку $M(1, 2)$ паралельно вектору $\vec{s} = (0, -1)$;

3) через точку $M(1, 2)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (3, -5)$.

► Складаючи рівняння прямої, треба передусім вибрати той вигляд рівняння, який швидше приводить до мети.

1. Використаємо рівняння прямої, що проходить через дві точки $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

Маємо: $\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-2}{5-2}$; $\quad \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3}$; $\quad 3x - 2y + 1 = 0$.

2. Використаємо канонічне рівняння прямої $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$.

Маємо: $\frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{-1}$; $\quad x - 1 = 0$.

3. Використаємо рівняння прямої, заданої точкою та нормальним вектором: $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.

Маємо: $3(x-1) - 5(y-2) = 0$; $\quad 3x - 5y + 7 = 0$. ◄

Приклад 3. Знайти відстань $\rho(L_1, L_2)$ між прямими

$$L_1:\ 3x-4y+5=0,$$
$$L_2:\ 6x-8y-13=0.$$

► $L_1 \parallel L_2$, бо $\dfrac{3}{6}=\dfrac{-4}{-8}\neq\dfrac{5}{-13}$.

Щоб знайти відстань між прямими, візьмемо на одній із прямих деяку точку і знайдемо відстань від неї до іншої прямої. Поклавши, наприклад, у першому рівнянні $x=1$, отримаємо $y=2$. Таким чином, точка $M(1, 2)\in L_1$. Використовуючи формулу для визначення відстані від точки до прямої, одержуємо

$$\rho(L_1, L_2)=\rho(M, L_2)=\frac{|6\cdot 1-8\cdot 2-13|}{\sqrt{36+64}}=\frac{23}{10}=2{,}3.\ ◄$$

Приклад 4. Задано прямі l_1 та l_2 і точка M;

$l_1: 4x+y-8=0$, $l_2: x-5y-2=0$; $M(-4, 7)$.

Знайти:

1) кутовий коефіцієнт прямої l_1 і відрізок, який відтинає ця пряма на осі ординат;

2) рівняння прямих l_1 та l_2 у відрізках;

3) точку N перетину прямих l_1 і l_2;

4) рівняння прямої l_3, що проходить через точку M паралельно прямій l_2;

5) рівняння прямої l_4, що проходить через точку M перпендикулярно до прямої l_2;

6) відстань від точки M до прямої l_2: $\rho(M, l_2)$.

Усі результати ілюструвати графічно.

► 1. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом: $y=kx+b$, де k – кутовий коефіцієнт прямої, b – відрізок, що відтинається прямою на осі ординат (з точністю до знака).

Зведемо рівняння прямої l_1 до означеного вигляду:

$$l_1:\ y=-4x+8;\qquad k=-4,\ b=8.$$

2. Рівняння прямої у відрізках: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$, де a і b з точністю до знака визначають довжини відрізків, що відтинаються на осях координат;

$l_1:\ 4x+y-8=0$,	$l_2:\ x-5y-2=0$,
$4x+y=8$,	$x-5y=2$,
$\dfrac{x}{8/4}+\dfrac{y}{8}=1$,	$\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-2/5}=1$,
$a=2$; $b=8$,	$a=2$; $b=-0{,}4$.
$A_1(2;\,0)\in l_1$; $A_2(0;\,8)\in l_1$	$B_1(2;\,0)\in l_2$; $B_2(0;-0{,}4)\in l_2$.

3. Рівняння прямих l_1, l_2 утворюють систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв'язавши цю систему, знайдемо точку перетину l_1 і l_2:

$$\begin{cases}4x+\ \ y-8=0;\\ \ \ x-5y-2=0.\end{cases}$$

Помноживши перше рівняння на 5 та склавши ліві і праві частини рівнянь, отримаємо:

$$21x-42=0,\qquad x=2.$$

Підставимо в перше рівняння

$$y=2(-4)+8=0.$$

Точка $N(2, 0)$ – точка перетину прямих l_1 і l_2.

4. $l_2:\ x-5y-2=0$; $M(-4, 7)$.

Шукана пряма l_3; $l_3\parallel l_2$.

Очевидно, що $\vec n_{l_3}=\vec n_{l_2}$, $\vec n_{l_3}$, $\vec n_{l_2}$ – нормальні вектори прямих l_3, l_2 відповідно; $\vec n_{l_3}=(1,-5)$.

Рівняння прямої, що задана точкою і нормальним вектором $\vec n=(A, B)$:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0;\quad 1(x+4)-5(y-7)=0;$$
$$l_3:\ x-5y+39=0;\quad K_1(0;\,7{,}8)\in l_3.$$

5. Шукана пряма l_4; $l_4\perp l_2$.

Запишемо рівняння прямої l_2: $x-5y-2=0$ у канонічному вигляді

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}.$$

З цією метою проведемо такі перетворення рівняння прямої l_2:

$$x-2=5y;$$

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y}{1/5};$$

$$l_2:\quad \frac{x-2}{1}=\frac{y}{0{,}2}.$$

$\vec{s}_{l_2}=(1;0{,}2)$, $\vec{s}_{l_2}$ – напрямний вектор прямої l_2, але $\vec{s}_{l_2}=\vec{n}_{l_4}$, $\vec{n}_{l_4}$ – нормальний вектор прямої l_4. Запишемо рівняння l_4 як рівняння прямої, що задана точкою $M(-4,7)$ і нормальним вектором $\vec{n}_{l_4}=(1;\ 0{,}2)$:

$$1(x+4)+0{,}2(y-7)=0;$$

$$x+0{,}2y+2{,}6=0;$$

$$10x+2y+26=0;$$

$$l_4:\quad 5x+y+13=0;$$

$$K_2(-2{,}6\ ;\ 0)\in l_4.$$

6. Відстань від точки $M(x_0,\ y_0)$ до прямої $l:\ Ax+By+C=0$ визначається за формулою

$$\rho(M,l)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}};$$

$$M(-4,7);\quad l_2:\ x-5y-2=0;$$

$$\rho(M,l_2)=\frac{|1(-4)-5\cdot 7-2|}{\sqrt{1+25}}=\frac{41}{\sqrt{26}}.$$

Отримані результати проілюстровано на рис. 2.1.

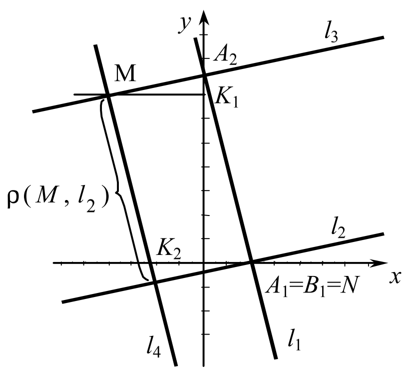


Рис. 2.1 ◄

Приклад 5. Написати рівняння площини P, що проходить через точку $M(2,\ 3,-1)$ паралельно площині Q: $5x-y+3z-5=0$.

► Скориставшись рівнянням площини, що проходить через задану точку, запишемо $A(x-2)+B(y-3)+C(z+1)=0$. Із паралельності площин P та Q випливає, що нормальний вектор $\vec{n}_P=\vec{n}_Q=(5,-1,\ 3)$, тому рівняння площини P має вигляд

$$5(x-2)-(y-3)+3(z+1)=0 \quad \text{або} \quad P:\ 5x-y+3z-4=0. ◄$$

Приклад 6. Написати рівняння площини P, що проходить через точки $M_1(1,1,1)$ і $M_2(0,2,1)$ паралельно вектору $\vec{a}=(2,0,1)$.

► Перший спосіб.

Знайдемо $\overrightarrow{M_1M_2}$; $\overrightarrow{M_1M_2}=(-1,1,0)$. За нормальний вектор до площини P візьмемо вектор $\vec{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\vec{a}$:

$$\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}=(1,1,-2).$$

Скористаємося далі рівнянням площини, заданої точкою $M_1(1,1,1)$ і нормальним вектором $\vec{n}=(1,1,-2)$:

$$(x-1)+(y-1)-2(z-1)=0;\qquad P:\ x+y-2z=0.$$

Другий спосіб.

Точка $M(x,\ y,\ z)$ належить шуканій площині P у тому, і тільки у тому випадку, коли вектори $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ та $\vec{a}$ компланарні. Отже,

$$(\overrightarrow{M_1M},\overrightarrow{M_1M_2},\vec{a})=\begin{vmatrix}x-1 & y-1 & z-1\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}=0,$$

тобто $P:\ x+y-2z=0$. ◄

Приклад 7. Знайти точку перетину прямої $L:\ \dfrac{x-12}{4}=$ $=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-1}{1}$ і площини $P:\ 3x+5y-z-2=0$.

► Зведемо канонічні рівняння прямої до параметричного вигляду:

$$\frac{x-12}{4}=\frac{y-9}{3}=\frac{z-1}{1}=t;$$

$$x=4t+12,\quad y=3t+9,\quad z=t+1.$$

Підставимо ці вирази в рівняння площини P та отримаємо

$$3(4t+12)+5(3t+9)-t-1-2=0,$$

звідки $t=-3$.

Задані пряма L та площина P перетинаються в точці з координатами $x=4(-3)+12=0$, $y=3(-3)+9=0$, $z=-3+1=-2$. ◄

Приклад 8. Пряма L задана загальними рівняннями:

$$\begin{cases} x+y-z \quad =0; \\ 2x-y+\quad 2=0. \end{cases}$$

Написати канонічні рівняння цієї прямої, а також рівняння її проекції на площину Oxz.

► Канонічні рівняння прямої:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

Знайдемо точку $A(x_0,y_0,z_0)\in L$. З цією метою задаємо одну з координат, наприклад $x=0$, а дві інші отримаємо з системи рівнянь, що одержана з даної при $x=0$. Система набуває вигляду

$$\begin{cases} y-z=0; \\ -y+2=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2; \\ y=2. \end{cases}$$

Маємо: $A(0,2,2)\in L$.

За напрямний вектор $\vec{s}$ візьмемо вектор $\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$, де $\vec{n}_1=(1,1,-1)$, $\vec{n}_2=(2,-1,0)$ – нормальні вектори площин, лінією перетину яких є задана пряма.

Таким чином,

$$\vec{s}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}=-\vec{i}-2\vec{j}-3\vec{k}=(-1,-2,-3),$$

і канонічні рівняння прямої

$$\frac{x-0}{-1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-2}{-3};\qquad L:\ \frac{x}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-2}{3}.$$

Отримана пропорція еквівалентна системі трьох рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{2}; \\ \dfrac{x}{1}=\dfrac{z-2}{3}; \\ \dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-2}{3}, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} -2x+y-2=0; \\ -3x+z-2=0; \\ -3y+2z+2=0, \end{cases}$$

які описують три площини, що проектують пряму на координатні площини Oxy, Oxz і Oyz відповідно (рівняння прямої в проекціях). Зокрема, рівняння $-3x+z-2=0$ є рівнянням проекції заданої прямої на площину Oxz. ◄

Приклад 9. Задано рівняння площини P_1, прямої L_1 і точка M:

$$P_1:\ 5x+3z-7=0,\quad L_1:\ \frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{3},\ M(2,-3,0).$$

Знайти:

1) рівняння площини P_2, що проходить через точку M паралельно площині P_1;

2) рівняння площини P_3, що проходить через точку M перпендикулярно до прямої L_1;

3) рівняння прямої L_2, що проходить через точку M перпендикулярно до площини P_1;

4) рівняння прямої L_3, що проходить через точку M паралельно прямій L_1;

5) точку N перетину прямої L_1 і площини P_1;

6) відстань від точки M до площини P_1: $\rho(M,P_1)$;

7) відстань від точки M до прямої L_1: $\rho(M,L_1)$.

► Згідно з умовою $\vec{n}_{P_1} = (5,\ 0,\ 3)$, $\vec{s}_{L_1} = (1,\ 2,\ 3)$, $\vec{n}_{P_1}$, $\vec{s}_{L_1}$ – нормальний вектор площини P_1 і напрямний вектор прямої L_1 відповідно.

1. Враховуючи, що $P_2 \parallel P_1$, маємо $\vec{n}_{P_2} = \vec{n}_{P_1}$, $\vec{n}_{P_2} = (5,\ 0,\ 3)$; $M(2, -3,\ 0) \in P_2$.

Рівняння площини, що задана точкою $M(x_0,\ y_0,\ z_0)$ і нормальним вектором $\vec{n} = (A,\ B,\ C)$, має вигляд

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Шукане рівняння : $5(x-2) + 0(y+3) + 3(z-0) = 0$,

$$P_2 :\ 5x + 3z - 10 = 0.$$

2. Враховуючи, що $P_3 \perp L_1$, отримуємо

$$\vec{n}_{P_3} = \vec{s}_{L_1}, \quad \vec{n}_{P_3} = (1,\ 2,\ 3), \quad M(2, -3,\ 0) \in P_3;$$

$1(x-2) + 2(y+3) + 3(z-0) = 0$,

$P_3 :\quad x + 2y + 3z + 4 = 0$.

3. Враховуючи, що $P_1 \perp L_2$, отримуємо

$$\vec{n}_{P_1} = \vec{s}_{L_2}, \quad \vec{s}_{L_2} = (5,\ 0,\ 3), \quad M(2, -3,\ 0) \in L_2.$$

Рівняння прямої, заданої точкою $M(x_0,\ y_0,\ z_0)$ і напрямним вектором $\vec{s} = (m,\ n,\ p)$, має вигляд

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}; \qquad L_2 :\quad \frac{x-2}{5} = \frac{y+3}{0} = \frac{z-0}{3}.$$

4. Завдяки тому, що $L_3 \parallel L_1$, отримуємо

$$\vec{s}_{L_1} = \vec{s}_{L_3}, \quad \vec{s}_{L_3} = (1,\ 2,\ 3), \quad M(2, -3,\ 0) \in L_3;$$

$$L_3 :\quad \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-0}{3}.$$

5. Рівняння площини P_1 і прямої L_1 утворюють систему, розв'язок якої дасть координати точки N перетину прямої і площини:

$$\begin{cases} 5x + 3z - 7 = 0\ ; \\ \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+1}{3} \end{cases}.$$

У рівнянні прямої перейдемо до параметричного задання:

$$\begin{cases} 5x + 3z - 7 = 0, \\ \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+1}{3} = t, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 3z - 7 = 0, \\ x = t, \\ y = 2t + 1, \\ z = 3t - 1; \end{cases}$$

$5t + 3(3t - 1) - 7 = 0$,

$5t + 9t - 3 - 7 = 0$,

$14t = 10$,

$t = \dfrac{5}{7}$;

$$\begin{cases} x = \dfrac{5}{7}, \\ y = 2 \cdot \dfrac{5}{7} + 1 = \dfrac{17}{7}, \\ z = 3 \cdot \dfrac{5}{7} - 1 = \dfrac{8}{7}, \end{cases} \qquad N\left(\frac{5}{7},\ \frac{17}{7},\ \frac{8}{7}\right).$$

6. $\rho(M, P_1) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \dfrac{|5 \cdot 2 + 0(-3) + 3 \cdot 0 - 7|}{\sqrt{5^2 + 0^2 + 3^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{34}}$.

7. $\rho(M, L_1) = \dfrac{|\overrightarrow{AM} \times \vec{s}_{L_1}|}{|\vec{s}_{L_1}|}$, де $A(x_1,\ y_1,\ z_1) \in L_1$.

З рівняння прямої L_1 випливає, що $A(0, 1, -1) \in L_1$; $M(2, -3, 0)$;

$\overrightarrow{AM} = (2-0,\ -3-1,\ 0+1) = (2,\ -4,\ 1)$; $\vec{s}_{L_1} = (1,\ 2,\ 3)$;

$$\overrightarrow{AM} \times \vec{s}_{L_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{k} =$$

$$= -14\vec{i} - 5\vec{j} + 8\vec{k} = (-14,\ -5,\ 8);$$

$|\overrightarrow{AM} \times \vec{s}_{L_1}| = \sqrt{196 + 25 + 64} = \sqrt{285}$;

$|\vec{s}_{L_1}| = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$;

$\rho(M,\ L_1) = \dfrac{\sqrt{285}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\dfrac{285}{14}}$. ◄

Приклад 10. Задані мимобіжні прямі

$$L_1: \ \frac{x}{-2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+2}{1} \quad \text{та} \quad L_2: \ \frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-1}.$$

Написати рівняння загального перпендикуляра L до цих прямих.

► Знайдемо рівняння площини P, яка проходить через пряму L_1 паралельно прямій L_2 (рис. 2.2). Точка $M_1(0,1,-2)$ знаходиться на прямій L_1, і, тому належить шуканій площині P. За нормальний вектор до цієї площини візьмемо вектор

$$\vec{n}=[\vec{s}_1,\vec{s}_2]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=-2\vec{i}-\vec{j}-4\vec{k}.$$

Рівняння площини P:

$$-2x-(y-1)-4(z+2)=0,$$

або, у загальному вигляді,

$$P: \ 2x+y+4z+7=0.$$

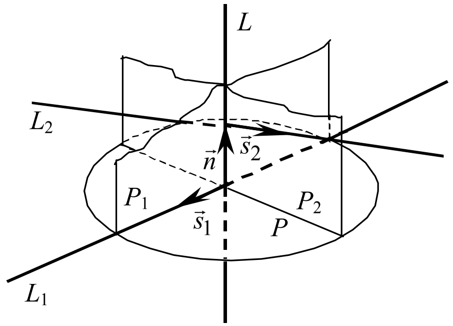


Рис. 2.2

Для того, щоб скласти рівняння загального перпендикуляра L, знайдемо рівняння площин P_1 та P_2, які проходять через задані прямі L_1 і L_2 відповідно, і перпендикулярні площині P. Маємо:

$$M_1(0,1,-2)\in P_1, \quad \vec{n}_1=[\vec{s}_1,\vec{n}]=\vec{i}-10\vec{j}+2\vec{k}, \quad \vec{n}_1\perp P_1,$$

звідки

$$P_1: \ x-10y+2z+14=0.$$

Аналогічно

$$M_2(-1,-1,2)\in P_2, \quad \vec{n}_2=[\vec{s}_2,\vec{n}]=-9\vec{i}+6\vec{j}+3\vec{k}, \quad \vec{n}_2\perp P_2,$$

звідки

$$P_2: \ 3x-2y-z+3=0.$$

Оскільки $L=P_1\cap P_2$, то

$$\begin{cases} x-10y+2z+14=0; \\ 3x-2y-z+3=0 \end{cases}$$

– загальні рівняння прямої L. ◄

Приклад 11. Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$. Знайти: 1) рівняння прямої L, що проходить через точки A_1 і A_2 та довжину ребра A_1A_2; 2) рівняння площини P, що проходить через точки A_1, A_2, A_3 та площу $S_{A_1A_2A_3}$ грані $A_1A_2A_3$; 3) рівняння висоти H, що опущена з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$ та її довжину h; 4) об'єм піраміди V; 5) кут α між ребрами A_1A_2 та A_1A_4; 6) кут β між ребром A_1A_4 та гранню $A_1A_2A_3$.

Координати вершин піраміди: $A_1(2,-1,1)$, $A_2(5,5,4)$, $A_3(3,2,-1)$, $A_4(4,1,3)$.

► 1. Знаходження рівняння прямої L, що проходить через точки $A_1(2,-1,1)$ та $A_2(5,5,4)$, та довжини ребра A_1A_2.

$$\overrightarrow{A_1A_2}=\vec{s}_L=(5-2,\,5+1,\,4-1)=(3,6,3)=3(1,2,1); \quad A_1(2,-1,1)\in L;$$

$$L: \ \frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{1};$$

$$\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|=3\sqrt{1^2+2^2+1^2}=3\sqrt{6}$$ – довжина ребра A_1A_2.

2. Знаходження рівняння площини P, що проходить через точки $A_1(2,-1,1)$, $A_2(5,5,4)$, $A_3(3,2,-1)$ та площі $S_{A_1A_2A_3}$ грані $A_1A_2A_3$.

$$P: \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-1\\ 3 & 6 & 3\\ 1 & 3 & -2\end{vmatrix}=0$$

або

$$-21(x-2)+9(y+1)+3(z-1)=0,$$

$$-7(x-2)+3(y+1)+(z-1)=0\,,$$

$$P:\ -7x+3y+z+16=0\,.$$

$$S_{A_1A_2A_3}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right|,$$

$$\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 6 & 3\\ 1 & 3 & -2\end{vmatrix}=(-21,\,9,\,3)=3(-7,\,3,\,1)\,,$$

$$S_{A_1A_2A_3}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\sqrt{49+9+1}=\frac{3}{2}\sqrt{59}\ \text{(кв. од.)}.$$

3. Знаходження рівняння висоти H, що опущена з вершини $A_4(4,\,1,\,3)$ на грань $A_1A_2A_3$ (площину P) та її довжини h.

$$P:\ -7x+3y+z+16=0\,;$$

$$\vec{n}_P=(-7,\,3,\,1)\,;\qquad A_4(4,\,1,\,3)\in H\,.$$

$$H:\ \frac{x-4}{-7}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{1}\,.$$

$$h=\rho(A_4,\,P)=\frac{|-7\cdot 4+3\cdot 1+1\cdot 3+16|}{\sqrt{(-7)^2+3^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{59}}\,.$$

4. Знаходження об'єму піраміди V.

$$V=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{A_1A_2},\,\overrightarrow{A_1A_3},\,\overrightarrow{A_1A_4})\right|.$$

$$(\overrightarrow{A_1A_2},\,\overrightarrow{A_1A_3},\,\overrightarrow{A_1A_4})=\begin{vmatrix}3 & 6 & 3\\ 1 & 3 & -2\\ 2 & 2 & 2\end{vmatrix}=3\cdot 2\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & -1 & 0\end{vmatrix}=$$

$$=6\cdot(-3)=-18\,.$$

$$V=\frac{1}{6}|-18|=3\ \text{(куб. од.)}.$$

5. Знаходження кута α між ребрами A_1A_2 та A_1A_4.

$$\overrightarrow{A_1A_2}=3(1,\,2,\,1)\,;\qquad |\overrightarrow{A_1A_2}|=3\sqrt{6}\,;$$

$$\overrightarrow{A_1A_4}=2(1,\,1,\,1)\,;\qquad |\overrightarrow{A_1A_4}|=2\sqrt{3}\,;$$

$$\cos\alpha=\frac{(\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_1A_4})}{|\overrightarrow{A_1A_2}|\,|\overrightarrow{A_1A_4}|}=\frac{3\cdot 2(1+2+1)}{3\sqrt{6}\ 2\sqrt{3}}=\frac{4}{3\sqrt{2}}\,.$$

6. Знаходження кута β між ребром A_1A_4 та гранню $A_1A_2A_3$.

$$\beta=(\vec{s}_{A_1A_4}\,\widehat{,}\,\vec{n}_P)\,;$$

$$\vec{s}_{A_1A_4}=2(1,\,1,\,1)\,;\qquad \vec{n}_P=(-7,\,3,\,1)\,;$$

$$|\vec{s}_{A_1A_4}|=2\sqrt{3}\,;\qquad |\vec{n}_P|=\sqrt{59}\,;$$

$$\sin\beta=\frac{|2(-7+3+1)|}{2\sqrt{3}\sqrt{59}}=\frac{6}{2\sqrt{3}\sqrt{59}}=\sqrt{\frac{3}{59}}\,.\ ◄$$

Приклад 12. Знайти: 1) проекцію точки M на пряму L; 2) точку M', симетричну відносно прямої L.

$$L:\ \frac{x-1{,}5}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{1},\quad M(0,\,1,\,2)\,.$$

► 1. Знайдемо рівняння площини P, такої, що $P\perp L$, $M\in P$. Врахуємо, що $\vec{n}_P=\vec{s}_L=(2,-1,\,1)$:

$$P:\quad 2(x-0)-1(y-1)+1(z-2)=0\,,$$

$$P:\quad 2x-y+z-1=0\,.$$

Точка K перетину прямої L та площини P і буде проекцією точки M на пряму L. Знайдемо цю точку.

$$\begin{cases}\dfrac{x-1{,}5}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{1}=t\,;\\ 2x-y+z-1=0\,,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2t+1{,}5\,;\\ y=-t\,;\\ z=t+2\,;\\ 2x-y+z-1=0\,,\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \begin{array}{l}2(2t+1{,}5)+t+t+2-1=0\\ 6t=-4,\qquad t=-\dfrac{2}{3}\,.\end{array}$$

$$x=-\frac{4}{3}+\frac{3}{2}=\frac{1}{6}\,;\quad y=\frac{2}{3}\,;\quad z=-\frac{2}{3}+2=\frac{4}{3}\,.$$

Точка $K(\frac{1}{6},\,\frac{2}{3},\,\frac{4}{3})$ – проекція точки M на пряму L.

2. Для знаходження точки M', симетричної відносно прямої L, скористаємося формулами:

$$x_K=\frac{x_M+x_{M'}}{2},\quad y_K=\frac{y_M+y_{M'}}{2},\quad z_K=\frac{z_M+z_{M'}}{2}\,.$$

Звідки

$$x_{M'} = 2x_K - x_M, \quad y_{M'} = 2y_K - y_M, \quad z_{M'} = 2z_K - z_M .$$

$$x_{M'} = 2\cdot\frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{3}, \quad y_{M'} = 2\cdot\frac{2}{3} - 1 = \frac{1}{3}, \quad z_{M'} = 2\cdot\frac{4}{3} - 2 = \frac{2}{3} .$$

Таким чином, $M'(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ – точка, симетрична точці M відносно прямої L. ◄

Приклад 13. Знайти: 1) проекцію точки M на площину Q; 2) точку M', симетричну відносно площини Q.

$$Q: \ 2x - 2y + 10z + 1 = 0, \quad M(-2, 0, 3).$$

► 1. Знайдемо рівняння прямої L такої, що $M \in L$, $L \perp Q$. Врахуємо, що $\vec{s}_L = \vec{n}_Q = (2, -2, 10)$:

$$L: \ \frac{x+2}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z-3}{10} .$$

Точка K перетину прямої L та площини Q і буде проекцією точки M на площину Q. Знайдемо цю точку.

$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z-3}{10} = t ; \\ 2x - 2y + 10z + 1 = 0 , \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t - 2 ; \\ y = -2t ; \\ z = 10t + 3 ; \\ 2x - 2y + 10z + 1 = 0 . \end{cases}$$

$$2(2t-2) - 2(-2t) + 10(10t+3) + 1 = 0 ,$$

$$108t = -27, \quad t = -\frac{27}{108} = -\frac{1}{4} ,$$

$$x = 2\cdot(-\frac{1}{4}) - 2 = -2{,}5; \quad y = -2\cdot(-\frac{1}{4}) = 0{,}5; \quad z = 10\cdot(-\frac{1}{4}) + 3 = 0{,}5 .$$

Точка $K(-2{,}5; 0{,}5; 0{,}5)$ – проекція точки M на площину Q.

2. Для знаходження точки M', симетричної відносно площини Q, скористаємося формулами:

$$x_{M'} = 2x_K - x_M , \quad y_{M'} = 2y_K - y_M , \quad z_{M'} = 2z_K - z_M .$$

$$x_{M'} = 2\cdot(-2{,}5) + 2 = -3, \quad y_{M'} = 2\cdot 0{,}5 - 0 = 1, \quad z_{M'} = 2\cdot 0{,}5 - 3 = -2 .$$

Таким чином, $M'(-3, 1, -2)$ – точка, симетрична точці M відносно площини Q. ◄

IV. Задачі для практичних занять

У задачах 2.1 – 2.3 необхідно:

1) написати рівняння прямої, звести його до загального вигляду та побудувати пряму;

2) звести загальне рівняння до нормального вигляду і вказати відстань від початку координат до прямої.

2.1. Пряма l задана точкою $M_0(x_0, y_0) \in l$ та нормальним вектором $\vec{n} = (A, B)$:

а) $M_0(-1, 2), \quad \vec{n} = (2, 2)$;

б) $M_0(2, 1), \quad \vec{n} = (2, 0)$;

в) $M_0(1, 1), \quad \vec{n} = (2, -1)$.

2.2. Пряма l задана точкою $M_0(x_0, y_0) \in l$ та напрямним вектором $\vec{s} = (m, n)$:

а) $M_0(-1, 2), \quad \vec{s} = (3, -1)$;

б) $M_0(1, 1), \quad \vec{s} = (0, -1)$;

в) $M_0(-1, 1), \quad \vec{s} = (2, 0)$.

2.3. Пряма l задана двома точками $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$:

а) $M_1(1, 2), \quad M_2(-1, 0)$;

б) $M_1(1, 1), \quad M_2(1, -2)$;

в) $M_1(2, 2), \quad M_2(0, 2)$.

2.4. Задані пряма l та точка M. Необхідно:

1) обчислити відстань $\rho(M, l)$ від точки M до прямої l;

2) написати рівняння прямої l', яка проходить через точку M перпендикулярно заданій прямій l;

3) написати рівняння прямої l'', яка проходить через точку M паралельно заданій прямій l.

Вихідні дані:

а) $l: \ -2x + y - 1 = 0, \quad M(-1, 2)$;

б) $l: \ 2y + 1 = 0, \quad M(1, 0)$;

в) $l: \ x + y + 1 = 0, \quad M(0, -1)$.

У задачах 2.5 – 2.8 дослідити взаємне розташування заданих прямих l_1 і l_2. При цьому, якщо $l_1 \parallel l_2$, знайти відстань $\rho(l_1, l_2)$ між прямими, а якщо ж прямі перетинаються, то знайти косинус кута між ними і точку M_0 перетину прямих.

2.5. $l_1: \ -2x + y - 1 = 0$, $\quad l_2: \ 2y + 1 = 0$.

2.6. $l_1: \ \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1}$, $\quad l_2: \ \frac{x+2}{1} = \frac{y}{0}$.

2.7. $l_1: \ x - y + 1 = 0$, $\quad l_2: \ 2x - 2y + 1 = 0$.

2.8. $l_1: \ x + y - 1 = 0$, $\quad l_2: \ \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-2}$.

2.9. Задані площина P і точка M. Написати рівняння площини P', яка проходить через точку M паралельно площині P, та обчислити відстань $\rho(P, P')$, якщо:

а) $P: \ -2x + y - z + 1 = 0, \ \ M(1, 1, 1)$;

б) $P: \ \ x - y \ \ \ -1 = 0, \ \ M(1, 1, 2)$.

2.10. Написати рівняння площини P', яка проходить через задані точки M_1 і M_2 перпендикулярно заданій площині P, якщо:

а) $P: \ -x + y - 1 = 0, \ \ M_1(1, 2, 0), \ \ M_2(2, 1, 1)$;

б) $P: \ 2x - y + z + 1 = 0, \ M_1(0, 1, 1), \ \ M_2(2, 0, 1)$.

2.11. Написати рівняння площини P, яка проходить через точку M паралельно векторам $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$, якщо:

а) $M(1, 1, 1), \ \vec{a}_1 = (0, 1, 2), \ \vec{a}_2 = (-1, 0, 1)$;

б) $M(0, 1, 2), \ \vec{a}_1 = (2, 0, 1), \ \vec{a}_2 = (1, 1, 0)$.

2.12. Написати рівняння площини P, яка проходить через точки M_1 і M_2 паралельно вектору $\vec{a}$, якщо:

а) $M_1(1, 2, 0), \ M_2(2, 1, 1), \ \ \vec{a} = (3, 0, 1)$;

б) $M_1(1, 1, 1), \ M_2(2, 3, -1), \ \vec{a} = (0, -1, 2)$.

2.13. Написати рівняння площини P, яка проходить через три задані точки M_1, M_2 та M_3, якщо:

а) $M_1(1, 2, 0), \ M_2(2, 1, 1), \ \ M_3(3, 0, 1)$;

б) $M_1(1, 1, 1), \ M_2(0, -1, 2), \ M_3(2, 3, -1)$.

У задачах 2.14 – 2.15 дослідити взаємне розташування заданих площин P_1 і P_2. При цьому, якщо $P_1 \parallel P_2$, знайти відстань $\rho(P_1, P_2)$ між площинами, а якщо ж площини перетинаються, знайти косинус кута між ними.

2.14. $P_1: -x + 2y - z + 1 = 0$, $P_2: \ y + 3z - 1 = 0$.

2.15. $P_1: 2x - y + z - 1 = 0$, $\quad P_2: \ -4x + 2y - 2z - 1 = 0$.

2.16. Обчислити об'єм піраміди, обмеженої площиною $P: \ 2x - 3y + 6z - 12 = 0$ та координатними площинами.

2.17. Скласти рівняння площини P, яка проходить через точку $A(1, 1, -1)$ та перпендикулярна до площин $P_1: \ 2x - y + 5z + 3 = 0$ і $P_2: \ x + 3y - z - 7 = 0$.

2.18. Пряма L задана загальними рівняннями. Написати для цієї прямої канонічне рівняння та рівняння у проекціях, якщо:

а) $L: \begin{cases} 2x - \ y + 2z - 3 = 0; \\ x + 2y - \ z - 1 = 0, \end{cases}$ б) $L: \begin{cases} x + 2y - 3z - 5 = 0; \\ 2x - \ y + \ z + 2 = 0. \end{cases}$

2.19. Написати канонічні рівняння прямої L, яка проходить через точку $M_0(2, 0, -3)$ паралельно:

а) вектору $\vec{s} = (2, -3, 5)$;

б) прямій $L_1: \ \frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-1}$;

в) осі Ox;

г) осі Oz;

д) прямій $L_2: \begin{cases} 3x - \ y + 2z - 7 = 0; \\ x + 3y - 2z - 3 = 0; \end{cases}$

е) прямій $L_3: \begin{cases} x = -2 + t \;; \\ y = \quad 2t \;; \\ z = \; 1 - t/2 \,. \end{cases}$

2.20. Написати рівняння прямої L, яка проходить через дві задані точки M_1 та M_2, якщо:

а) $M_1(1,-2,1)$, $M_2(3,1,-1)$;

б) $M_1(3,-1,0)$, $M_2(1,0,-3)$.

2.21. Задані пряма $L: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0}$ і точка $M(0,1,2) \notin L$ (перевірте!). Необхідно:

а) написати рівняння площини P, яка проходить через пряму L і точку M;

б) написати рівняння площини P_1, яка проходить через точку M перпендикулярно прямій L;

в) написати рівняння перпендикуляра, що опущений з точки M на пряму L;

г) обчислити відстань від точки M до прямої L $\rho(M, L)$;

д) знайти проекцію точки M на пряму L.

2.22. Задані площина $P: x + y - z + 1 = 0$ і пряма $L: \frac{x-1}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$, причому $L \notin P$ (перевірте!). Необхідно:

а) обчислити $\sin(P \,\hat{,}\, L)$ та координати точки перетину прямої і площини;

б) написати рівняння площини Q, яка проходить через пряму L перпендикулярно до площини P;

в) написати рівняння проекції прямої L на площину P.

2.23. Знайти відстань між паралельними прямими

$$L_1: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2} \quad \text{та} \quad L_2: \frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2}.$$

2.24. Знайти відстань від точки $A(2, 3, -1)$ до заданої прямої L:

а) $L: \begin{cases} 2x - 2y + z + 3 = 0; \\ 3x - 2y + 2z + 17 = 0, \end{cases}$ б) $L: \begin{cases} x = 3t + 5; \\ y = 2t; \\ z = -2t - 25. \end{cases}$

2.25. Довести, що прямі

$$L_1: \begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0; \\ x - y - z - 22 = 0 \end{cases} \quad \text{і} \quad L_2: \frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4}$$

паралельні та знайти відстань $\rho(L_1, L_2)$.

2.26. Скласти рівняння прямої L, яка проходить через точки перетину площини $P: x - 3y + 2z + 1 = 0$ з прямими

$$L_1: \frac{x-5}{5} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{-1} \quad \text{і} \quad L_2: \frac{x-3}{4} = \frac{y+4}{-6} = \frac{z-5}{2}.$$

2.27. За якого значення λ площина $P: 5x - 3y + \lambda z + 1 = 0$ буде паралельна прямій

$$L: \begin{cases} x - 4z - 1 = 0; \\ y - 3z + 2 = 0. \end{cases}$$

2.28. Знайти рівняння проекції прямої $L: \frac{x-4}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{4}$ на площину $P: x - 3y - z + 8 = 0$.

2.29. Визначити кут між прямою

$$L: \begin{cases} x + y + z - 2 = 0; \\ 2x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

і площиною P, яка проходить через точки $A(2,3,-1)$, $B(1,1,0)$, $C(0,-2,1)$.

У задачах 2.30 – 2.31 для заданих прямих L_1 і L_2 необхідно:

а) довести, що прямі не лежать в одній площині, тобто являються мимобіжними;

б) написати рівняння площини, яка проходить через пряму L_2 паралельно L_1;

в) обчислити відстань між прямими $\rho(L_1, L_2)$;

г) написати рівняння загального перпендикуляра до прямих L_1 і L_2.

2.30. $L_1: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-9}{4}=\dfrac{z+2}{-3}, \quad L_2: \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+7}{9}.$

2.31. $L_1: \dfrac{x+7}{3}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z-4}{3}, L_2: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+8}{2}=\dfrac{z+12}{-1}.$

§2. Криві та поверхні другого порядку

I. Короткі теоретичні відомості

Криві другого порядку. Загальне рівняння кривої другого порядку:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,$$

$$\text{де } |A|+|B|+|C|\neq 0.$$

Еліпс. Канонічне рівняння *еліпса*:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad 0<b\le a.$$

Еліпс має форму, що зображена на рис. 2.3.

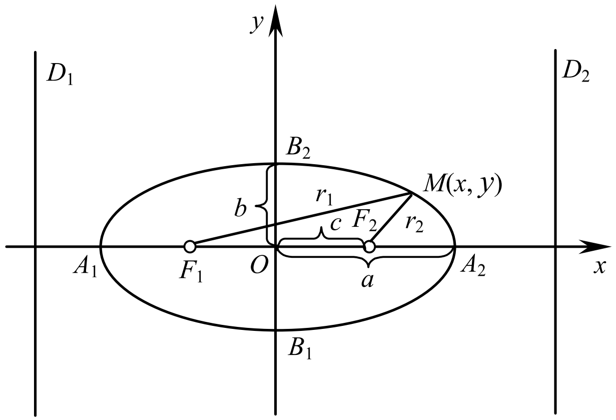


Рис. 2.3

Параметри a та b – півосі еліпса; точки $A_1(-a, 0), A_2(a, 0), B_1(0, -b), B_2(0, b)$ – його вершини; осі Ox, Oy – головні осі еліпса, вісь

Ox – фокальна вісь; точка O – центр еліпса. Точки $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$, де $c=\sqrt{a^2-b^2}\ge 0$ – фокуси еліпса; r_1, r_2 – фокальні радіуси точки M, що належить еліпсу. При $a=b$ маємо $x^2+y^2=a^2$ – рівняння кола.

Число $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$ $(0\le\varepsilon<1)$ – ексцентриситет еліпса (при $\varepsilon=0$ маємо коло).

Прямі $D_1: x=-\dfrac{a}{\varepsilon}$ та $D_2: x=\dfrac{a}{\varepsilon}$, що перпендикулярні фокальній осі, – директриси еліпса.

Гіпербола. Канонічне рівняння *гіперболи*:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad a, b>0.$$

Гіпербола має форму, що зображена на рис. 2.4.

Параметри a та b – півосі гіперболи; точки $A_1(-a, 0), A_2(a, 0)$ – її вершини; осі симетрії Ox та Oy – дійсна і уявна осі; точка O – центр гіперболи. Прямі $y=\pm\dfrac{b}{a}x$ – асимптоти гіперболи.

Точки $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$, де $c=\sqrt{a^2+b^2}>0$ – фокуси гіперболи; r_1, r_2 – фокальні радіуси точки M, що належить гіперболі.

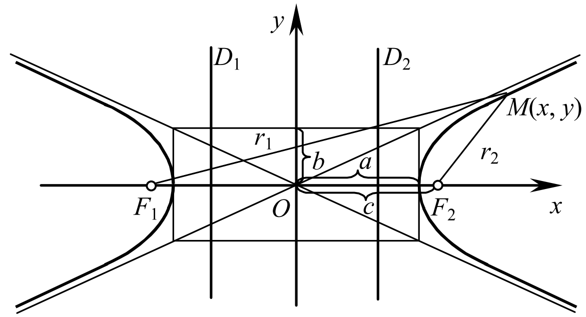


Рис. 2.4

Число $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$ $(1<\varepsilon<+\infty)$ – ексцентриситет гіперболи.

Прямі $D_1: x=-\dfrac{a}{\varepsilon}$ та $D_2: x=\dfrac{a}{\varepsilon}$, що перпендикулярні дійсній осі, – директриси гіперболи.

Парабола. Канонічне рівняння *параболи*:

$$y^2 = 2px, \quad p > 0.$$

Парабола має форму, що зображена на рис. 2.5.

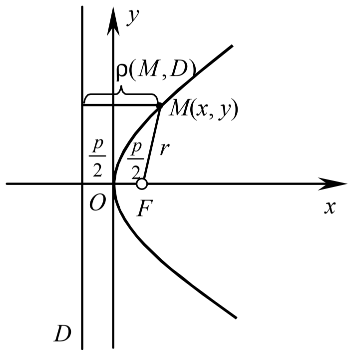


Рис. 2.5

Число p – параметр параболи, точка O – її вершина, вісь Ox – вісь симетрії параболи.

Точка $F(\frac{p}{2}, 0)$ – фокус параболи, r – фокальний радіус точки M параболи.

Пряма D: $x = -\frac{p}{2}$, що перпендикулярна осі симетрії параболи, – директриса параболи.

Величина $\rho = \rho(M, D)$ – відстань від точки M до її директриси.

Ексцентриситет параболи $\varepsilon = \frac{r}{\rho} = 1$.

Поверхні другого порядку. Загальне рівняння поверхні другого порядку:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + Gx + Hy + Iz + K = 0,$$

де $|A| + |B| + |C| + |D| + |E| + |F| \neq 0$.

Наведемо канонічні рівняння наступних поверхонь.

1. Еліпсоїд: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (рис. 2.6).

2. Гіперболоїд

а) однопорожнинний: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (рис. 2.7, а);

б) двопорожнинний: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ (рис. 2.7, б).

3. Конус другого порядку: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ (рис. 2.8).

4. Параболоїд

а) еліптичний: $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad pq > 0$ (рис. 2.9, а);

б) гіперболічний $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad pq > 0$ (рис. 2.9, б).

5. Циліндр другого порядку

а) еліптичний $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \ \forall z$ (рис. 2.10, а);

б) гіперболічний $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \ \forall z$ (рис. 2.10, б);

в) параболічний $y^2 = 2px, \quad p > 0, \ \forall z$ (рис. 2.10, в).

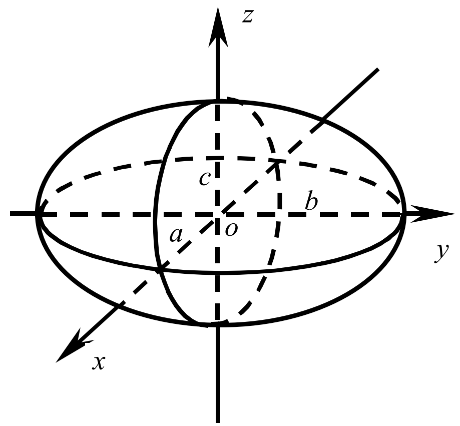
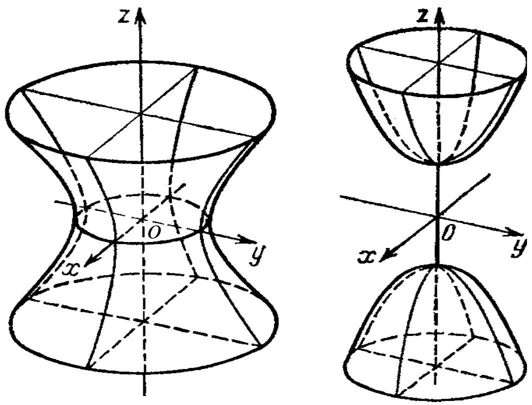


Рис. 2.6



а) б)

Рис. 2.7

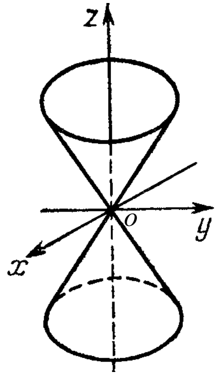
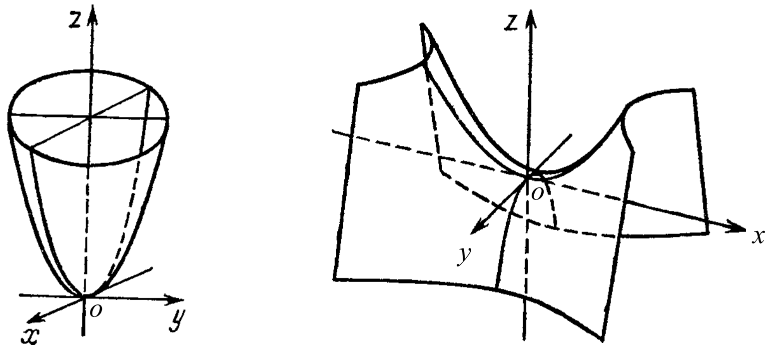
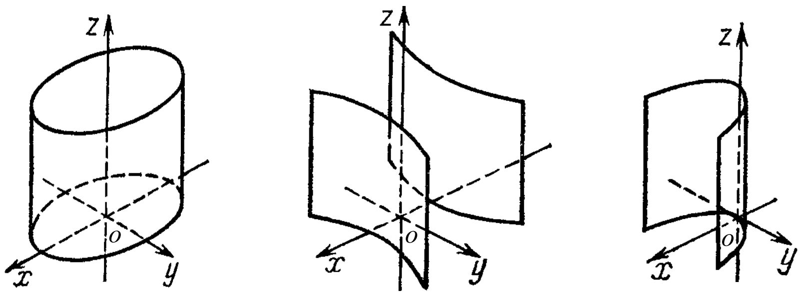


Рис. 2.8



а) б)

Рис. 2.9



а) б) в)

Рис. 2.10

Зауважимо, що з вказаних рівнянь поверхонь, як частинні випадки, отримуються рівняння таких поверхонь.

1. Сфера: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

2. Еліпсоїд обертання: $\dfrac{x^2 + y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

3. Гіперболоїди обертання:

а) однопорожнинний: $\dfrac{x^2 + y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$;

б) двопорожнинний: $\dfrac{x^2 + y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$.

4. Круговий конус: $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

5. Параболоїд обертання: $x^2 + y^2 = 2pz$.

6. Круговий циліндр: $x^2 + y^2 = a^2, \ \forall z$.

Зауважимо, що наведено рівняння поверхонь обертання з віссю обертання Oz.

II. Контрольні питання та завдання

1. Що називається еліпсом?

2. Записати канонічне рівняння еліпса. Вказати його осі симетрії, вершини, фокуси.

3. Що називається гіперболою?

4. Записати канонічне рівняння гіперболи. Вказати її осі симетрії, вершини, фокуси, дійсну вісь, уявну вісь, асимптоти.

5. Що називається параболою?

6. Записати канонічне рівняння параболи. Вказати її вершину; директрису; фокус; вісь симетрії.

7. Що називається ексцентриситетом еліпса; гіперболи; параболи?

8. Написати загальне рівняння кривої другого порядку на площині. В якому випадку це рівняння являється рівнянням еліптичного типу; гіперболічного типу; параболічного типу?

9. Які фігури визначають рівняння еліптичного типу; гіперболічного типу; параболічного типу?

10. Яка поверхня називається еліпсоїдом?

12. Яка поверхня називається однопорожнинним гіперболоїдом; двопорожнинним гіперболоїдом?

13. Яка поверхня називається еліптичним параболоїдом; гіперболічним параболоїдом?

14. Яка поверхня називається циліндричною?

15. Яку поверхню визначає в $\mathbf{R}^3$ рівняння $F(x, y) = 0$, якщо в $\mathbf{R}^2$ це рівняння визначає деяку лінію?

16. Яка поверхня називається конічною?

17. Яка поверхня називається поверхнею обертання?

18. Нехай у площині Oxy лінія задана рівнянням $F(x, y) = 0$. Написати рівняння поверхні, що отримана обертанням цієї лінії: а) навколо осі Ox; б) навколо осі Oy.

III. Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо відстань між його фокусами, що лежать на осі Ox, дорівнює 24, а ексцентриситет дорівнює $3/4$.

► Для того, щоб скласти канонічне рівняння еліпса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

необхідно знайти a та b. Враховуючи, що ексцентриситет $\varepsilon = c/a$, а $2c = 24$, маємо $3/4 = 12/a$, звідки $a = 16$. Використовуючи співвідношення $a^2 - c^2 = b^2$, отримаємо $b^2 = 256 - 144 = 112$, $b = 4\sqrt{7}$. Таким чином, шукане рівняння має вигляд

$$\frac{x^2}{256} + \frac{y^2}{112} = 1 \quad \text{або} \quad \frac{x^2}{16^2} + \frac{y^2}{(4\sqrt{7})^2} = 1. ◄$$

Приклад 2. Задана гіпербола $9x^2 - 16y^2 = 144$. Знайти ексцентриситет гіперболи та рівняння її асимптот.

► Поділивши обидві частини заданого рівняння на 144, отримаємо канонічне рівняння гіперболи

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1,$$

з якого видно, що $a^2 = 16$, $b^2 = 9$. Використовуючи співвідношення $a^2 + b^2 = c^2$, маємо, що $c^2 = 16 + 9 = 25$. Оскільки ексцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a}$, то $\varepsilon = 5/4$. Підставивши в рівняння асимптот гіперболи $y = \pm\frac{b}{a}x$ значення $a = 4$, $b = 3$, отримуємо рівняння асимптот заданої гіперболи $y = \pm\frac{3}{4}x$. ◄

Приклад 3. Скласти рівняння параболи, яка симетрична відносно осі Ox і проходить через точки $O(0,0)$ та $A(2,3)$.

► Оскільки парабола симетрична відносно осі Ox і проходить через початок координат, то її рівняння має вигляд

$$y^2 = 2px.$$

Враховуючи, що парабола проходить через точку $A(2,3)$, маємо $9 = 4p$, звідки $p = 9/4$. Отже,

$$y^2 = \frac{9}{2}x$$

– шукане рівняння. ◄

Приклад 4. З'ясувати, яка лінія відповідає заданому рівнянню:

1) $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$;

2) $x^2 - 9y^2 + 2x + 36y - 44 = 0$.

► **1.** Оскільки $A \cdot C = 4 \cdot 9 > 0$, то рівняння визначає фігуру еліптичного типу. Перетворимо задане рівняння таким чином:

$$4(x^2 - 2x) + 9(y^2 - 4y) = -4;$$

$$4(x^2 - 2x + 1 - 1) + 9(y^2 - 4y + 4 - 4) = -4;$$

$$4(x-1)^2 + 9(y-2)^2 = -4 + 4 + 36; \quad 4(x-1)^2 + 9(y-2)^2 = 36$$

або

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1.$$

Зробимо паралельний перенос осей координат, прийнявши за новий початок координат точку $O_1(1, 2)$. Скористаємося формулами перетворення координат:

$$x_1 = x - 1, \quad y_1 = y - 2.$$

Відносно нових осей координат рівняння кривої матиме вигляд:

$$\frac{x_1^2}{9}+\frac{y_1^2}{4}=1.$$

Таким чином, задана крива являється еліпсом.

2. Оскільки $A\cdot C=1(-9)<0$, то рівняння визначає фігуру гіперболічного типу. Перетворимо задане рівняння так:

$$(x^2+2x+1-1)-9(y^2-4y+4-4)=44;$$

$$(x+1)^2-9(y-2)^2=44+1-36,\quad (x+1)^2-9(y-2)^2=9$$

або

$$\frac{(x+1)^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{1}=1.$$

Зробимо паралельний перенос осей координат, прийнявши за новий початок координат точку $O_1(-1,\,2)$. Формули перетворення координат мають вигляд:

$$x_1=x+1,\quad y_1=y-2.$$

Після перетворення координат отримуємо рівняння

$$\frac{x_1^2}{9}-\frac{y_1^2}{1}=1.$$

Крива являється гіперболою. ◄

Приклад 5. З'ясувати, яку поверхню в $\mathbf{R}^3$ визначає рівняння $x^2-3z=0$.

► Враховуючи, що в заданому рівнянні відсутня змінна y, а на площині Oxz йому відповідає парабола, то рівняння $x^2-3z=0$ в $\mathbf{R}^3$ визначає циліндричну поверхню. Твірна цієї циліндричної поверхні паралельна осі Oy, напрямною є парабола, задана рівнянням $x^2-3z=0$ у площині Oxz. Отже, задане рівняння визначає параболічний циліндр. ◄

Приклад 6. Звести до канонічного вигляду рівняння

$$4x^2+9y^2+36z^2-8x-18y-72z+13=0.$$

► Згрупуємо члени, які містять x, y та z:

$$4(x^2-2x)+9(y^2-2y)+36(z^2-2z)=-13.$$

Доповнивши до повних квадратів вирази у дужках, отримуємо

$$4(x^2-2x+1)+9(y^2-2y+1)+36(z^2-2z+1)=-13+4+9+36$$

або

$$4(x-1)^2+9(y-1)^2+36(z-1)^2=36\ \Rightarrow\ \frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}+\frac{(z-1)^2}{1}=1.$$

Зробимо паралельний перенос осей координат, прийнявши за новий початок координат точку $O_1(1,\,1,\,1)$. Формули перетворення координат мають вигляд:

$$x_1=x-1,\quad y_1=y-1,\quad z_1=z-1.$$

Тоді рівняння поверхні запишеться так:

$$\frac{x_1^2}{9}+\frac{y_1^2}{4}+\frac{z_1^2}{1}=1.$$

Це рівняння визначає еліпсоїд; його центр знаходиться в новому початку координат, а півосі відповідно дорівнюють 3, 2 та 1. ◄

Приклад 7. Звести до канонічного вигляду рівняння

$$x^2-y^2-4x+8y-2z=0.$$

► Згрупуємо члени, які містять x та y:

$$(x^2-4x)-(y^2-8y)=2z.$$

Доповнимо до повних квадратів вирази у дужках:

$$(x^2-4x+4)-(y^2-8y+16)=2z+4-16$$

або

$$(x-2)^2-(y-4)^2=2(z-6).$$

Виконаємо паралельний перенос осей координат, прийнявши за новий початок точку $O_1(2,\,4,\,6)$. Тоді

$$x_1=x-2,\quad y_1=y-4,\quad z_1=z-6.$$

В результаті отримуємо рівняння

$$x_1^2-y_1^2=2z_1,$$

яке визначає гіперболічний параболоїд. ◄

Приклад 8. Яка поверхня визначається рівнянням

$$4x^2-y^2+4z^2-8x+4y+8z+4=0\ ?$$

► Виконавши відповідні перетворення, отримуємо

$$4(x^2-2x)-(y^2-4y)+4(z^2+2z)=-4;$$

$$4(x^2-2x+1)-(y^2-4y+4)+4(z^2+2z+1)=-4+4-4+4;$$

$$4(x-1)^2-(y-2)^2+4(z+1)^2=0.$$

Виконаємо паралельний перенос осей координат, прийнявши за новий початок точку $O_1(1, 2, -1)$. Формули перетворення координат:

$$x_1 = x - 1, \quad y_1 = y - 2, \quad z_1 = z + 1 .$$

Тоді задане рівняння матиме вигляд:

$$4x_1^2 - y_1^2 + 4z_1^2 = 0$$

або

$$\frac{x_1^2}{1} - \frac{y_1^2}{4} + \frac{z_1^2}{1} = 0 .$$

Це рівняння конічної поверхні. ◄

Приклад 9. Яку поверхню визначає рівняння $x^2 = yz$?

► Виконаємо поворот координатних осей навколо осі Ox на кут $\alpha = 45^0$ (від осі Oy до осі Oz проти годинникової стрілки). Формули перетворення координат (див. гл. 4, §1, приклад 7):

$$x = x_1, \quad y = y_1 \cos\alpha - z_1 \sin\alpha, \quad z = y_1 \sin\alpha + z_1 \cos\alpha .$$

Оскільки

$$\sin\alpha = \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

то

$$x = x_1, \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(y_1 - z_1), \quad z = \frac{\sqrt{2}}{2}(y_1 + z_1) .$$

Підставивши ці вирази у рівняння поверхні, отримуємо

$$x_1^2 = \frac{y_1^2}{2} - \frac{z_1^2}{2}$$

або

$$\frac{x_1^2}{1} - \frac{y_1^2}{2} + \frac{z_1^2}{2} = 0$$

(конус з вершиною у початку координат, віссю якого являється вісь ординат). ◄

IV. Задачі для практичних занять

2.32. Побудувати еліпс $9x^2 + 25y^2 = 225$. Знайти:

а) півосі; б) координати фокусів; в) ексцентриситет; г) рівняння директрис.

2.33. Написати канонічне рівняння еліпса, якщо:

а) $a = 3,\ b = 2$; б) $a = 5, c = 4$; в) $c = 3, \varepsilon = 3/5$; г) $b = 5, \varepsilon = 12/13$; д) $c = 2$ і відстань між директрисами дорівнює 5; е) $\varepsilon = 1/2$ і відстань між директрисами дорівнює 32.

2.34. Написати рівняння еліпса з півосями a та b і центром у точці $C(x_0, y_0)$, якщо відомо, що його головні осі паралельні координатним осям.

2.35. Встановити, що кожне з наступних рівнянь визначає еліпс, знайти його центр C, півосі, ексцентриситет та рівняння директрис:

а) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$;

б) $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$;

в) $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$.

2.36. Побудувати гіперболу $16x^2 - 9y^2 = 144$. Знайти:

а) півосі; б) координати фокусів; в) ексцентриситет; г) рівняння асимптот; д) рівняння директрис.

2.37. Побудувати гіперболу $16x^2 - 9y^2 = -144$ (спряжену до гіперболи задачі 2.36). Яка канонічна система координат для цієї гіперболи? Знайти: а) півосі; б) координати фокусів; в) ексцентриситет; г) рівняння асимптот; д) рівняння директрис.

2.38. Написати канонічне рівняння гіперболи, якщо:

а) $a = 2, b = 3$; б) $b = 4, c = 5$; в) $c = 3, \varepsilon = 3/2$; г) $a = 8, \varepsilon = 5/4$; д) $c = 10$ і рівняння асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$; е) $\varepsilon = 3/2$ і відстань між директрисами дорівнює $8/3$.

2.39. Написати рівняння гіперболи з півосями a та b і центром у точці $C(x_0, y_0)$, якщо відомо, що її дійсна та уявна осі паралельні осям Ox і Oy відповідно.

2.40. Встановити, що кожне з наступних рівнянь визначає гіперболу, знайти її центр C, півосі, ексцентриситет, рівняння асимптот та директрис:

а) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$;

б) $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$;

в) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$.

2.41. Побудувати наступні параболи та знайти їх параметри:

а) $y^2 = 6x$; б) $x^2 = 5y$;

в) $y^2 = -4x$; г) $x^2 = -y$.

2.42. Написати рівняння параболи з вершиною у початку координат, якщо відомо, що:

а) парабола розташована у лівій півплощині симетрично відносно осі Ox і $p = 1/2$;

б) парабола розташована симетрично відносно осі Oy та проходить через точку $M(4,-8)$;

в) фокус параболи знаходиться в точці $F(0,-3)$.

2.43. Написати рівняння параболи, якщо відомо, що вершина її знаходиться в точці $A(x_0, y_0)$, параметр дорівнює p, вісь паралельна осі Ox і парабола розташована: а) у правій півплощині відносно прямої $x = x_0$; б) у лівій півплощині відносно прямої $x = x_0$.

2.44. Встановити, що кожне з наступних рівнянь визначає параболу, знайти координати її вершини A та величину параметра p:

а) $y^2 = 4x - 8$; б) $x^2 = 2 - y$;

в) $y = 4x^2 - 8x + 7$; г) $y = -\frac{1}{6}x^2 + 2x - 7$;

д) $x = -\frac{1}{4}y^2 + y$; е) $x = 2y^2 - 12y + 14$.

У задачах 2.45 – 2.56 необхідно встановити тип заданих поверхонь та побудувати їх.

2.45. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{25} = 1$. **2.46.** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{36} = 1$.

2.47. $x^2 + y^2 - z^2 = -1$. **2.48.** $x^2 - y^2 = z^2$.

2.49. $x^2 + y^2 = 2az,\ a \neq 0$. **2.50.** $x^2 - y^2 = 2az,\ a \neq 0$.

2.51. $2z = x^2 + \frac{y^2}{2}$. **2.52.** $x^2 = 2az,\ a \neq 0$.

2.53. $z = 2 + x^2 + y^2$. **2.54.** $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 6z$.

2.55. $x^2 + y^2 - z^2 = 4$. **2.56.** $x^2 - y^2 + z^2 + 4 = 0$.

У задачах 2.57 – 2.61 необхідно побудувати задані циліндричні поверхні.

2.57. $y^2 + z^2 = 4$. **2.58.** $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

2.59. $x^2 + y^2 = ax$. **2.60.** $x^2 = 6z$.

2.61. $z = 4 - x^2$.

У задачах 2.62 – 2.68 з'ясувати, які поверхні визначаються такими рівняннями:

2.62. $x^2 + z^2 - 4x - 4z + 4 = 0$.

2.63. $x^2 + y^2 - z^2 - 2y + 2z = 0$.

2.64. $x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4y + 4z + 4 = 0$.

2.65. $4x^2 + y^2 - z^2 - 24x - 4y + 2z + 35 = 0$.

2.66. $x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 2y + 2z + 2 = 0$.

2.67. $x^2 + y^2 - 6x + 6y - 4z + 18 = 0$.

2.68. $9x^2 - z^2 - 18x - 18y - 6z = 0$.

ГЛАВА 3. ВИЗНАЧНИКИ ТА МАТРИЦІ. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

§1. Визначники

I. Короткі теоретичні відомості

Основні означення. Квадратна таблиця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

де a_{ij}, $i, j = 1, 2$ – задані числа, називається *матрицею другого порядку*.

Визначником другого порядку, що відповідає матриці A, називається число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Квадратна таблиця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

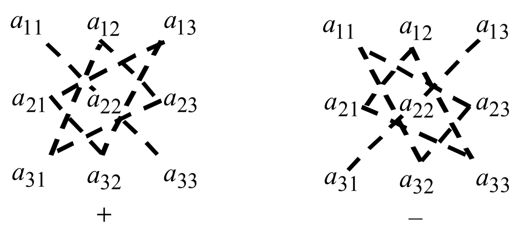
де a_{ij}, $i, j = \overline{1,3}$ – задані числа, називається *матрицею третього порядку*.

Визначником третього порядку, що відповідає матриці A, називається число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Існує правило, що полегшує складання виразу, який стоїть у правій частині. Це правило називається *правилом трикутників*. Згідно з цим правилом доданки складаються за такою схемою:



У цій схемі плюс означає, що добутки вказаних елементів беруться зі знаком “ + ”, а мінус означає, що відповідні добутки беруться зі знаком “ – “.

Квадратна таблиця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

де a_{ij}, $i, j = \overline{1,n}$ – задані числа, називається *матрицею n-го порядку*.

Визначником n-го порядку, що відповідає матриці A, називається число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} (-1)^{k(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n},$$

де сума розповсюджується на всі можливі перестановки $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ чисел $1, 2, \dots, n$; $k(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ – число інверсій у перестановці; $a_{i\alpha_i}$, $i = \overline{1,n}$ – елементи визначника.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} $(i, j = \overline{1,n})$ визначника n-го порядку називають визначник $(n-1)$-го порядку, який утворюється з даного визначника в результаті викреслення рядка і стовпця, на перетині яких стоїть елемент a_{ij}.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника n-го порядку називається його мінор M_{ij}, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Виберемо довільно s рядків та s стовпців визначника n-го порядку з номерами $i_1 < i_2 < \dots < i_s$; $j_1 < j_2 < \dots < j_s$ $(s < n)$.

Мінором порядку s визначника n-го порядку називається визначник s-го порядку M, що лежить на перетині вибраних s рядків та s стовпців.

Додатковим мінором до мінора M називається визначник $(n-s)$-го порядку, що отримується з визначника n-го порядку в результаті викреслення вибраних s рядків та s стовпців.

Алгебраїчним доповненням мінора називається його додатковий мінор, взятий зі знаком $(-1)^{i_1 + i_2 + \dots + i_s + j_1 + j_2 + \dots + j_s}$.

Властивості визначників

1^0. Величина визначника не зміниться, якщо його рядки зробити стовпцями з тими ж номерами.

Ця операція називається *транспонуванням.*

2^0. Якщо у визначнику поміняти місцями два рядки (стовпці), то знак визначника зміниться на протилежний.

3^0. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) визначника дорівнюють нулю, то визначник дорівнює нулю.

4^0. Загальний множник елементів деякого рядка (стовпця) визначника може бути винесеним за знак визначника.

5^0. Якщо елементи двох рядків (стовпців) визначника однакові, то визначник дорівнює нулю.

Наслідок. Якщо у визначнику елементи двох рядків (стопців) пропорційні, то визначник дорівнює нулю.

6^0. Величина визначника не зміниться, якщо до елементів одного рядка (або стовпця) додати елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне й теж число (теорема про лінійну комбінацію елементів рядків (стовпців)).

7^0. Визначник дорівнює сумі добутків елементів деякого рядка (стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення (теорема розкладання).

8^0. Сума добутків елементів довільного рядка (стовпця) визначника на алгебраїчні доповнення елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю (теорема анулювання).

9^0. Визначник, у якого елементи деякого рядка (стовпця) є сумою двох доданків, дорівнює сумі двох визначників, у першого з яких у зазначеному рядку (стовпці) стоять перші доданки, а у другого – другі доданки; всі інші рядки (стовпці) у обох визначників однакові.

Теорема Лапласа. Визначник n-го порядку дорівнює сумі добутків всіх можливих мінорів s-го порядку $(s < n)$, що розташовані у довільно вибраних s рядках (стовпцях) на алгебраїчні доповнення цих мінорів.

Основні методи обчислення визначників

Метод пониження порядку оснований на застосуванні теореми розкладання визначника за елементами деякого рядка (стовпця), згідно з якою:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}, \quad i = \overline{1,n} \quad \text{або} \quad \det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}, \quad j = \overline{1,n}.$$

При цьому корисно, використовуючи основні властивості визначників, обернути в нуль всі, крім одного, елементи деякого рядка (стовпця) визначника, а потім застосувати теорему розкладання. Іноді зручно застосовувати теорему Лапласа – розкладання визначника за елементами декількох рядків (стовпців). При цьому добиваються того, щоб у вказаних рядках були мінори, складені з нулів.

Метод зведення до трикутного вигляду полягає у такому перетворенні визначника, коли всі елементи, що лежать по один бік однієї з його діагоналей, рівні нулю.

Метод рекурентних співвідношень полягає у тому, щоб даний визначник виразити через визначники того ж вигляду, але більш низького порядку. Одержана рівність називається рекурентним співвідношенням. Отримується це рекурентне співвідношення перетворенням визначника та розкладанням його за елементами рядка (стовпця).

II. Контрольні питання та завдання

1. Що називається визначником другого порядку; третього порядку?

2. Дайте означення визначника n-го порядку.

3. Що називається мінором елемента a_{ij} визначника n-го порядку?

4. Що називається алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} визначника n-го порядку?

5. Наведіть основні властивості визначників.

6. Запишіть формулу розкладання визначника за елементами i-го рядка; j-го стовпця.

7. Як читається теорема анулювання для визначників третього порядку; n-го порядку?

8. Що називається мінором порядку s визначника n-го порядку?

9. Що називається додатковим мінором до мінора порядку s визначника n-го порядку?

10. Що називається алгебраїчним доповненням мінора визначника n-го порядку?

11. Сформулюйте теорему Лапласа розкладання визначника за елементами декількох рядків (стовпців).

12. У чому полягає метод зведення до трикутного вигляду для обчислення визначників?

13. У чому полягає метод рекурентних співвідношень для обчислення визначників?

III. Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Обчислити визначники:

$$1)\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}, \qquad 2)\ \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

► 1. Оскільки визначник другого порядку дорівнює добутку елементів головної діагоналі мінус добуток елементів побічної діагоналі, то

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 4 - 3(-1) = 11 .$$

2. Використовуючи правило трикутників, отримуємо

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 4\cdot 1 + (-2)\cdot 2(-1) + 3\cdot 0\cdot 1 - 1\cdot 4(-1) - 3(-2)1 - 2\cdot 0\cdot 2 =$$

$$= 8+4+4+6 = 22 .\ ◄$$

Приклад 2. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

розкладанням за елементами: 1) першого рядка; 2) третього рядка.

► 1. Застосовуючи теорему розкладання визначника до першого рядка, отримаємо

$$\Delta = (-2)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + 3(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = -10-5 = -15 .$$

2. Застосовуючи теорему розкладання визначника до третього рядка, отримаємо

$$\Delta = 0+0+5(-1)^6\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5(-3) = -15 .\ ◄$$

Приклад 3. Обчислити визначник третього порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix},$$

використовуючи теорему про лінійну комбінацію елементів рядків (стовпців) та теорему розкладання.

► Зробимо всі елементи першого стовпця рівними нулю, крім одного елемента. З цією метою до елементів першого рядка додамо відповідні елементи другого рядка, помножені на 5, а до елементів третього рядка – відповідні елементи другого рядка, помножені на 7:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 13 & 22 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 17 & 34 \end{vmatrix}.$$

Розклавши визначник за елементами першого стовпця, отримуємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 13 & 22 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 17 & 34 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 17 & 34 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 13 & 22 \\ 17 & 34 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 13 & 22 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 17\begin{vmatrix} 13 & 22 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 17(26-22) = 68 .\ ◄$$

Приклад 4. Обчислити визначник четвертого порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 1 & 10 \end{vmatrix}.$$

► Використаємо метод пониження порядку, оснований на застосуванні теореми розкладання визначника за елементами деякого рядка (стовпця). При цьому заздалегідь, використовуючи теорему про лінійну комбінацію елементів рядків (стовпців) визначника, обертаємо в нуль усі, окрім одного, елементи його деякого рядка (стовпця).

Виконаємо, наприклад, наступні перетворення.

Другий рядок помножимо послідовно на (-1), (-2), 3 і додамо до першого, третього, четвертого рядків відповідно.

Отриманий визначник розкладемо за елементами другому стовпця:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 1 & 6 \\ 4 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Далі знов обертаємо в нуль усі елементи першого стовпця, окрім елемента в лівому верхньому куті, і після цього обчислюємо визначник другого порядку, або використовуємо для обчислення отриманого визначника третього порядку правило трикутників:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 9 \\ 0 & -7 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 9 \\ -7 & 0 \end{vmatrix} = 63.$$

Обчислення за правилом трикутників має такий вигляд:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 3 + 48 - 4 - 6 + 24 = 63. \blacktriangleleft$$

Приклад 5. Обчислити визначник, застосувавши теорему Лапласа:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 25 & 17 & 0 & 1 & 0 \\ 17 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

► Виділимо у визначнику два рядки та застосуємо теорему Лапласа

про розкладання визначника за елементами декількох рядків (стовпців).

Враховуючи, що всі мінори, що розташовані у перших двох рядках, дорівнюють нулю, крім одного, що розташований у лівому верхньому куті, отримаємо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} (-1)^{1+2+1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (14 - 12)1 = 2. \blacktriangleleft$$

Приклад 6. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

зведенням його до трикутного вигляду.

► Перший рядок визначника множимо на (-1) та додаємо послідовно до всіх інших рядків. Отримаємо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1(-2)(-2)(-2) = -8. \blacktriangleleft$$

Приклад 7. Обчислити визначник Вандермонда D_n, використовуючи метод рекурентних співвідношень

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

► Покажемо, що для будь-яких n $(n \geq 2)$ визначник Вандермонда дорівнює добутку всіх можливих різниць $a_i - a_j$, $1 \leq j < i \leq n$. Доведення проведемо за індукцією, використовуючи метод рекурентних співвідношень.

Дійсно, при $n = 2$ маємо

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1 .$$

Нехай наше твердження доведено для визначників Вандермонда порядку $(n-1)$, тобто

$$D_{n-1} = \prod_{1 \leq j < i \leq n-1} (a_i - a_j) .$$

Перетворимо визначник D_n наступним чином: з останнього n-го рядка віднімемо $(n-1)$-й, помножений на a_1, і, взагалі, послідовно віднімемо із k-го рядка $(k-1)$-й, помножений на a_1. Отримаємо

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & \dots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix} .$$

Розкладемо останній визначник за елементами першого стовпця та винесемо з усіх стовпців загальні множники. Визначник матиме вигляд

$$D_n = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\dots(a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & a_4^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\dots(a_n - a_1) D_{n-1} .$$

Отримали рекурентне співвідношення. Використовуючи припущення індукції, остаточно виводимо:

$$D_n = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\dots(a_n - a_1) \prod_{2 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j) = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j) . \blacktriangleleft$$

IV. Задачі для практичних занять

У задачах 3.1–3.4 обчислити визначники другого порядку.

3.1. $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$. **3.2.** $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$.

3.3. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$. **3.4.** $\begin{vmatrix} 2\sin\varphi\cos\varphi & 2\sin^2\varphi - 1 \\ 2\cos^2\varphi - 1 & 2\sin\varphi\cos\varphi \end{vmatrix}$.

У задачах 3.5 – 3.6 розв’язати рівняння.

3.5. $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0$. **3.6.** $\begin{vmatrix} \cos 8x & -\sin 5x \\ \sin 8x & \cos 5x \end{vmatrix} = 0$.

У задачах 3.7–3.11 обчислити визначники третього порядку.

3.7. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$. **3.8.** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. **3.9.** $\begin{vmatrix} 9 & 10 & 11 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

3.10. $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. **3.11.** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix}$.

У задачах 3.12 – 3.13 розв’язати рівняння:

3.12. $\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$.

3.13. $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+3 & x+4 & x+5 \\ x+6 & x+7 & x+8 \end{vmatrix} = 0$.

У задачах 3.14 –3.15 розв'язати нерівності.

3.14. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 0.$ **3.15.** $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0.$

У задачах 3.16 – 3.19 довести тотожності, використовуючи властивості визначників третього порядку.

3.16. $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$

3.17. $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$

3.18. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x+b_1y+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x+b_2y+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x+b_3y+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$

3.19. $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$

У задачах 3.20 – 3.22 обчислити визначники, використовуючи властивості визначників третього порядку:

3.20. $\begin{vmatrix} x+y & z & 1 \\ y+z & x & 1 \\ z+x & y & 1 \end{vmatrix}.$ **3.21.** $\begin{vmatrix} (a+1)^2 & a^2+1 & a \\ (b+1)^2 & b^2+1 & b \\ (c+1)^2 & c^2+1 & c \end{vmatrix}.$

3.22. $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & 1 & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & 1 & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & 1 & \cos^2\gamma \end{vmatrix}.$

3.23. Перевірити, що визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

ділиться на $x-y$, $y-z$ та $z-x$.

3.24. Перевірити, що визначник

$$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$$

ділиться на $x+y$ та на x^2-xy+y^2.

3.25. Побудувати графік функції

$$y = \frac{1}{b-a}\begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \end{vmatrix} \quad (a \ne b).$$

У задачах 3.26 – 3.28 обчислити визначники четвертого порядку:

3.26. а) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$

3.27. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}.$ **3.28.** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}.$

У задачах 3.29 – 3.34 обчислити визначники, використовуючи теорему Лапласа.

3.29. $\begin{vmatrix} 0 & -a & -b & -d \\ a & 0 & -c & -e \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & 0 & 0 \end{vmatrix}$. **3.30.** $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

3.31. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$. **3.32.** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

3.33. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$. **3.34.** $\begin{vmatrix} x & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & x & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x-1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & x & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix}$.

У задачах 3.35 – 3.36 обчислити визначники зведенням до трикутного вигляду.

3.35. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ -1 & 0 & 3 & ... & n \\ -1 & -2 & 0 & ... & n \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ -1 & -2 & -3 & ... & 0 \end{vmatrix}$. **3.36.** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & ... & 2 \\ 2 & 3 & 2 & ... & 2 \\ 2 & 2 & 3 & ... & 2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 2 & 2 & 2 & ... & 3 \end{vmatrix}$.

3.37. Обчислити визначник, елементи якого задані умовами $a_{ij} = \min(i, j)$.

3.38. Обчислити визначник, елементи якого задані умовами $a_{ij} = \max(i, j)$.

У задачах 3.39 –3.40 обчислити визначники n-го порядку методом рекурентних співвідношень.

3.39. $\begin{vmatrix} \alpha & \alpha\beta & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$.

3.40. $\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & ... & 0 & 0 \\ 2 & \alpha+\beta & \alpha\beta & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$.

§2. Матриці

І. Короткі теоретичні відомості

Означення. Дії над матрицями. *Матрицею* розміру $m\times n$ називається таблиця чисел a_{ij}, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, вигляду

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Коротко: $A_{m\times n}$, $(a_{ij})_{m,n}$ або (a_{ij}).

Якщо $m=n$, матриця називається *квадратною* порядку n.

Якщо всі елементи матриці дорівнюють нулю, матриця називається *нульовою*. Позначення: O.

Квадратна матриця D називається *діагональною*, якщо всі її елементи, що не лежать на головній діагоналі, дорівнюють нулю, тобто

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}).$$

Якщо діагональна матриця така, що всі $a_{ii} = 1$, $i = \overline{1, n}$, то матриця називається *одиничною*. Позначення: E. Таким чином,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Матриця називається *дійсною*, якщо всі її елементи дійсні числа. У протилежному випадку, коли серед елементів є комплексні числа, матриця називається *комплексною* (поняття комплексних чисел та дій над ними наведено у §4 цієї глави).

Сумою $A+B$ матриць $A = (a_{ij})_{m,n}$ і $B = (b_{ij})_{m,n}$ називається матриця $C = (c_{ij})_{m,n}$, така, що $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Добутком αA матриці $A = (a_{ij})_{m,n}$ на число α називається матриця $C = (c_{ij})_{m,n}$, така, що $c_{ij} = \alpha a_{ij}$.

Добутком AB матриці $A = (a_{ij})_{m,n}$ на $B = (b_{ij})_{n,l}$ називається матриця $C = (c_{ij})_{m,l}$, де $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,l}$, тобто елемент c_{ij} дорівнює сумі добутків відповідних елементів i –го рядка матриці A і j –го стовпця матриці B.

Мають місце такі властивості операцій над матрицями:

1^0. $A + B = B + A$; 2^0. $A + (B + C) = (A + B) + C$;

3^0. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$; 4^0. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;

5^0. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$; 6^0. $A(BC) = (AB)C$;

7^0. $A(B + C) = AB + AC$.

Тут A, B, C – матриці, α, β – числа.

Матриці A та B називаються *переставними*, якщо $AB = BA$.

Степенем k матриці A називається матриця

$$C = A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k\ \text{раз}},$$

де k – ціле додатне число ; $A^0 = E$.

Многочленом від матриці A називається вираз, що має вигляд

$$P(A) = \alpha_0 A^k + \alpha_1 A^{k-1} + \alpha_2 A^{k-2} + \ldots + \alpha_{k-1} A + \alpha_k E,$$

де k – ціле додатне число, $A^0 = E$.

Матриця, що отримана з даної матриці A заміною її рядків стовпцями, називається *транспонованою* до даної.

Позначення: A^{T} або A'.

Мають місце властивості:

1^0. $(A^T)^T = A$; 2^0. $(A + B)^T = A^T + B^T$; 3^0. $(AB)^T = B^T A^T$.

Приєднаною до квадратної матриці A називається матриця

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} матриці A.

Квадратна матриця A називається *невиродженою*, якщо $\det A \neq 0$.

Оберненою до квадратної матриці A називається матриця A^{-1} така, що $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Теорема. Для того щоб квадратна матриця A мала обернену, необ-хідно та достатньо, щоб матриця A була невиродженою.

Метод приєднаної матриці для обернення матриць. Згідно з цим методом обернена матриця знаходиться за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{A} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T =$$

$$= \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Обернені матриці мають такі властивості:

$1^0.\ (A^{-1})^{-1} = A;$ $\quad 2^0.\ (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T;$ $\quad 3^0.\ (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$

Ранг матриці та його знаходження. *Рангом* матриці називається найвищий з порядків її мінорів, відмінних від нуля. Позначення $\mathrm{Rg}\,A$.

Відмінний від нуля мінор матриці A, порядок якого $r = \mathrm{Rg}\,A$, називається *базисним мінором*.

Теорема про базисний мінор. Базисні рядки матриці A лінійно незалежні. Будь-який рядок матриці A може бути представлений у вигляді лінійної комбінації базисних рядків.

З теореми випливає, що максимальна кількість лінійно незалежних рядків матриці дорівнює її рангу. Система рядків матриці, яка містить у собі базисний мінор, утворює базис у системі рядків цієї матриці. Аналогічні твердження мають місце для стовпців.

Елементарні перетворення матриць:

1) перестановка рядків (стовпців);

2) множення рядка (стовпця) на число, відмінне від нуля;

3) додавання до елементів рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на деяке число.

Теорема. Елементарні перетворення не змінюють рангу матриці.

Основними методами обчислення рангу являються метод обвідних мінорів та метод елементарних перетворень.

Метод обвідних мінорів обчислення рангу. Нехай в матриці знайдено мінор k-го порядку M, відмінний від нуля. Розглянемо тільки ті мінори $(k+1)$-го порядку, які містять у собі (обводять) мінор M. Якщо усі вони дорівнюють нулю, то ранг матриці дорівнює k. В протилежному випадку серед обвідних мінорів знайдеться ненульовий мінор $(k+1)$-го порядку, і вся процедура повторюється.

Метод елементарних перетворень для знаходження рангу. Метод базується на теоремі про незмінність рангу при елементарних перетвореннях. З допомогою елементарних перетворень дану матрицю A перетворюють у матрицю B, ранг якої легко знаходиться. Тоді, $\mathrm{Rg}\,A = \mathrm{Rg}\,B$.

Матриці A та B, для яких $\mathrm{Rg}\,A = \mathrm{Rg}\,B$ називають *еквівалентними:* $A \sim B$.

Метод елементарних перетворень для обернення матриць. Для заданої матриці A n-го порядку будується прямокутна матриця $\Gamma_A = (A \mid E)$ роз-міром $n \times 2n$, приписуванням до A праворуч одиничної матриці. Далі, використовуючи елементарні перетворення над рядками, матриця Γ_A зводиться до вигляду $(E \mid B)$, що завжди можливо, якщо A невироджена. Тоді $B = A^{-1}$.

Зауважимо, що метод елементарних перетворень для обернення матриць має також назву *метод Жордана – Гаусса* або *метод повного виключення*. В методі повного виключення процес отримання оберненої матриці формалізовано і весь процес представляється у вигляді деякої системи правил. Алгоритм методу і приклад розглянуто у §3 цієї глави.

Комплексні матриці. Деякі типи матриць. Нехай $C = (c_{kj})_{m,n}$ – комплексна матриця. Тоді $c_{kj} = a_{kj} + ib_{kj}$ $\forall k, j$. Тобто $C = A + iB$, де A та B – дійсні матриці: $A = (a_{kj})_{m,n}$, $B = (b_{kj})_{m,n}$; A – дійсна, B – уявна частина матриці C.

Матриця $\overline{C} = A - iB$ називається *комплексно-спряженою* до матриці C.

Матриця $\overline{C}^T = C^*$ називається *спряженою* до матриці C.

У таблиці 3.1 наведено важливі типи квадратних матриць як для випадку, коли матриця A – дійсна, так і для випадку, коли матриця A – комплексна. Ці типи матриць будуть використані в подальшому у гл. 5.

Таблиця 3.1

Номер типу	Матриця A – *дійсна*	Номер типу	Матриця A – *комплексна*
1.	Симетрична матриця: $A = A^T$ $\quad (a_{ij} = a_{ji}\ \forall i, j)$	1.	Ермітова матриця $A = A^*$ $\quad (a_{ij} = \overline{a}_{ji}\ \forall i, j)$
2.	Кососиметрична матриця: $A = -A^T$ $\quad (a_{ij} = -a_{ji}\ \forall i, j)$	2.	Косоермітова матриця $A = -A^*$ $\quad (a_{ij} = -\overline{a}_{ji}\ \forall i, j)$
3.	Ортогональна матриця: $A\,A^T = A^T A = E$ $\quad (A^T = A^{-1})$	3.	Унітарна матриця $A A^* = A^* A = E$ $\quad (A^* = A^{-1})$

Зауважимо, що у кососиметричної матриці на головній діагоналі стоять нулі; у ермітової матриці на головній діагоналі стоять дійсні числа; у косоермітової матриці на головній діагоналі стоять чисто уявні числа.

II. Контрольні питання та завдання

1. Що називається матрицею розміру $m \times n$?

2. Яка матриця називається квадратною; нульовою; діагональною; одиничною?

3. Що називається сумою двох матриць; різницею?

4. Що називається добутком числа α на матрицю A?

5. Що називається добутком матриці A на матрицю B?

6. Які матриці називаються узгодженими для множення?

7. Чи можлива рівність $AB = 0$, коли A та B ненульові?

8. Що називається цілим додатним степенем матриці A?

9. Що називається многочленом від матриці A?

10. Яка матриця називається транспонованою до даної матриці A?

11. Наведіть властивості операції транспонування.

12. Дайте означення мінора порядку s матриці $A_{m\times n}$.

13. Дайте означення додаткового мінора до мінора матриці A; алгебраїчного доповнення мінора матриці A.

14. Дайте означення оберненої матриці до даної матриці A.

15. Сформулюйте необхідну та достатню умову існування оберненої матриці.

16. Доведіть, що для невиродженої матриці існує єдина обернена.

17. Наведіть формулу, за якою знаходиться обернена матриця.

18. Сформулюйте властивості обернених матриць.

19. Що називається рангом матриці?

20. Доведіть, що $\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} A^{\mathrm{T}}$.

21. Які перетворення матриць називаються елементарними?

22. У чому полягає метод елементарних перетворень знаходження рангу матриці?

23. Що називається базисним мінором матриці?

24. Які рядки та стовпці матриці називаються базисними?

25. Сформулюйте теорему про базисний мінор.

26. Чому дорівнює максимальне число лінійно незалежних рядків (стовпців) матриці?

III. Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Задані матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Чи можна додати матрицю A до матриці B? Матрицю A до матриці C? Знайти $A + C$; $2A - 3C + D$.

► Матрицю A не можна додати до матриці B, бо матриця A має розміри 3×2, матриця B – розміри 2×3, а додавати можна матриці однакових розмірів. Матриці A і C мають однакові розміри, отже, їх можна додавати.

Враховуючи, що при додаванні матриць додаються відповідні елементи, маємо

$$A + C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 8 & 7 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Оскільки множення матриці на число є операція, яка полягає в тому, що кожний елемент матриці помножується на це число, то

$$2A = 2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & -2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad -3C = (-3)\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -15 & -24 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$2A - 3C + D = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & -2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -15 & -24 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -2 \\ -10 & -24 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}. ◄$$

Приклад 2. Задані матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 5 & 7 & 9 & -1 \\ 3 & 4 & 5 & 15 \end{pmatrix}.$$

Чи існує добуток: AB; BA?

► Оскільки матриця A має розміри 2×3, а матриця B – розміри 3×4, то число стовпців матриці A дорівнює числу рядків матриці B, отже, AB існує. Число стовпців матриці B не дорівнює числу рядків матриці A, отже, BA не існує. ◄

Приклад 3. Задані матриці

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-2\\3&9&-5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1&2&4\\5&6&7\\0&3&-1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}.$$

Знайти AC; AB.

► Використовуючи означення добутку матриць, знаходимо

$$AC=\begin{pmatrix}1&0&-2\\3&9&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+0\cdot2+(-2)\cdot3\\3\cdot1+9\cdot2+(-5)\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\6\end{pmatrix};$$

$$AB=\begin{pmatrix}1&0&-2\\3&9&-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&2&4\\5&6&7\\0&3&-1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot(-1)+0\cdot5+(-2)\cdot0&1\cdot2+0\cdot6+(-2)\cdot3&1\cdot4+0\cdot7+(-2)\cdot(-1)\\3\cdot(-1)+9\cdot5+(-5)\cdot0&3\cdot2+9\cdot6+(-5)\cdot3&3\cdot4+9\cdot7+(-5)\cdot(-1)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1&-4&6\\42&45&80\end{pmatrix}.$$ ◄

Приклад 4. Знайти значення многочлена $f(x)$ при $x=A$, де A – задана матриця:

$$f(x)=2x^2+3x-5,\quad A=\begin{pmatrix}1&-2&-3\\4&0&-1\\3&2&0\end{pmatrix}.$$

► $f(A)=2A^2+3A-5E$, де E – одинична матриця третього порядку:

$$f(A)=2\begin{pmatrix}1&-2&-3\\4&0&-1\\3&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&-3\\4&0&-1\\3&2&0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1&-2&-3\\4&0&-1\\3&2&0\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=2\begin{pmatrix}-16&-8&-1\\1&-10&-12\\11&-6&-11\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&-6&-9\\12&0&-3\\9&6&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-5&0&0\\0&-5&0\\0&0&-5\end{pmatrix}=$$

$$=2\begin{pmatrix}-16&-8&-1\\1&-10&-12\\11&-6&-11\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&-6&-9\\12&-5&-3\\9&6&-5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-32&-16&-2\\2&-20&-24\\22&-12&-22\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&-6&-9\\12&-5&-3\\9&6&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-34&-22&-11\\14&-25&-27\\31&-6&-27\end{pmatrix}.$$ ◄

Приклад 5. Показати, що матриця $A=\begin{pmatrix}2&-1\\3&1\end{pmatrix}$ є коренем многочлена $f(x)=x^2-3x+5$.

► Підставимо в даний многочлен замість x матрицю A, тоді отримаємо

$$f(A)=A^2-3A+5E=\begin{pmatrix}2&-1\\3&1\end{pmatrix}^2-3\begin{pmatrix}2&-1\\3&1\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&-3\\9&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6&3\\-9&-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

Отже, матриця A є коренем даного многочлена. ◄

Приклад 6. З'ясувати, чи існує матриця, обернена матриці A.

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\1&1&-2\\1&1&4\end{pmatrix},$$

і якщо існує, знайти її. Виконати перевірку: $AA^{-1}=E$.

► Оскільки $\det A = 12 \neq 0$, то існує обернена матриця A^{-1}, що може бути знайдена за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij}.

Оскільки

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

то

$$A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ -6 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо правильність матриці A^{-1}:

$$AA^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ -6 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \blacktriangleleft$$

Приклад 7. Методом елементарних перетворень знайти обернену матрицю A^{-1} до матриці A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

► Утворимо матрицю Γ_A:

$$\Gamma_A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Позначивши через $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ рядки матриці Γ_A, виконаємо над ними такі перетворення:

$$\gamma_1' = \frac{1}{3}\gamma_1, \quad \gamma_1'' = \gamma_1' - \frac{2}{7}\gamma_2', \quad \gamma_1''' = \gamma_1'' - \frac{1}{24}\gamma_3'';$$

$$\gamma_2' = \gamma_2 - \frac{4}{3}\gamma_1, \quad \gamma_2'' = \frac{3}{7}\gamma_2', \quad \gamma_2''' = \gamma_2'' - \frac{1}{12}\gamma_3'';$$

$$\gamma_3' = \gamma_3 - \frac{2}{3}\gamma_1, \quad \gamma_3'' = \gamma_3' + \frac{1}{7}\gamma_2', \quad \gamma_3''' = \frac{7}{24}\gamma_3''.$$

Тоді послідовно отримуємо:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 7/3 & 2/3 & -4/3 & 1 & 0 \\ 0 & -1/3 & 10/3 & -2/3 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/7 & 5/7 & -2/7 & 0 \\ 0 & 1 & 2/7 & -4/7 & 3/7 & 0 \\ 0 & 0 & 24/7 & -6/7 & 1/7 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/4 & -7/24 & -1/24 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 5/12 & -1/12 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1/24 & 7/24 \end{array}\right).$$

Отже,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/4 & -7/24 & -1/24 \\ -1/2 & 5/12 & -1/12 \\ -1/4 & 1/24 & 7/24 \end{pmatrix} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 18 & -7 & -1 \\ -12 & 10 & -2 \\ -6 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Перевірка показує, що $AA^{-1} = E$, тобто матриця A^{-1} знайдена вірно. ◄

Приклад 8. Використовуючи означення рангу матриці, знайти ранг матриці A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

► Серед мінорів першого порядку є відмінний від нуля, бо матриця A ненульова. Серед мінорів другого порядку є також відмінні від нуля, наприклад $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$. Всі мінори третього порядку дорівнюють нулю (перевірте). Отже, $\operatorname{Rg} A = 2$. ◄

Приклад 9. Використовуючи метод обвідних мінорів, знайти ранг матриці A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

► Фіксуємо мінор 2-го порядку, що відмінний від нуля:

$$M_2 = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Мінор 3-го порядку

$$M_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix},$$

що обводить мінор M_2, також відрізняється від нуля. Однак обидва мінори 4-го порядку, які обводять мінор M_3, дорівнюють нулю:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Тому ранг A дорівнює 3, а базисним мінором є, наприклад, мінор M_3. ◄

Приклад 10. Використовуючи метод елементарних перетворень, знайти ранг матриці A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 7 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 1 & 10 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$► A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 7 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 1 & 10 & 6 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{S_2+(-5)\cdot S_1 \\ S_3+(-4)\cdot S_1 \\ S_4+(-10)\cdot S_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & -3 & -13 & -19 \\ 0 & 5 & -7 & -11 & -15 \\ 0 & 11 & -10 & -24 & -34 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow[\substack{S_4+(-1)\cdot S_2+(-1)\cdot S_3 \\ S_2+(-1)\cdot S_3}]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 5 & -7 & -11 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[S_3+(-5)\cdot S_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -27 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отримали трапецієвидну матрицю, ранг якої дорівнює 3. Звідси $\operatorname{Rg} A = 3$. ◄

Приклад 11. З'ясувати, чи є система векторів $\vec{a}_1 = (2,-3,1)$, $\vec{a}_2 = (3,-1,5)$, $\vec{a}_3 = (1,-5,-3)$ лінійно залежною або лінійно незалежною. Знайти її ранг та будь-який базис.

► Запишемо матрицю A, стовпцями якої являються $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$:

$$A = (\vec{a}_1^{\mathrm{T}}, \vec{a}_2^{\mathrm{T}}, \vec{a}_3^{\mathrm{T}}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & -5 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ранг матриці A, як видно, дорівнює 2. Отже, вихідна система векторів лінійно залежна, і її ранг також дорівнює 2 (за теоремою про базисний мінор). Мінор другого порядку

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 7$$

відмінний від нуля, і тому може бути прийнятий за базисний. Звідси випливає, що арифметичні вектори $\vec{a}_1$ та $\vec{a}_2$ утворюють базис вихідної системи. ◄

IV. Задачі для практичних занять

3.41. Обчислити лінійну комбінацію матриць A та B:

$$3A + 2B, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

У задачах 3.42 – 3.50 обчислити:

3.42. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. **3.43.** $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$.

3.44. $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

3.45. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$.

3.46. а) $(4 \quad 0 \quad -2 \quad 3 \quad 1)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}(4 \quad 0 \quad -2 \quad 3 \quad 1)$.

3.47. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3.48. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3$. **3.49.** $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n, \quad a \in \mathbf{R}$.

3.50. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n, \quad \lambda \in \mathbf{R}$.

У задачах 3.51 – 3.52 знайти значення многочлена $f(A)$ від матриці A:

3.51. $f(x) = 3x^2 - 4, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

3.52. $f(x) = x^2 - 3x + 1, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

У задачах 3.53 – 3.54 обчислити $AB - BA$:

3.53. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

3.54. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

У задачах 3.55 – 3.56 знайти всі матриці, переставні з даною, тобто ті, для яких виконується умова: $AB = BA$.

3.55. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. **3.56.** $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

3.57. Знайти всі матриці другого порядку, квадрати яких дорівнюють нульовій матриці $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3.58. Знайти всі матриці другого порядку, квадрати яких дорівнюють одиничній матриці $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

У задачах 3.59 – 3.63 методом приєднаної матриці знайти обернені для вказаних матриць:

3.59. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$. **3.60.** $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

3.61. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. **3.62.** $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.

3.63. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

У задачах 3.64 – 3.67 методом елементарних перетворень знайти обернені для вказаних матриць:

3.64. $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. **3.65.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

3.66. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. **3.67.** $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

У задачах 3.68 – 3.72 розв'язати матричні рівняння:

3.68. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$. **3.69.** $X \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$.

3.70. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$.

3.71. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

3.72. $X \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$.

У задачах 3.73 – 3.74 обчислити значення функції $g(x)$ при $x = A$:

3.73. $g(x) = x^2 - 3x + 2x^{-1} - x^{-2}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3.74. $g(x) = x - 8x^{-1} + 16x^{-2}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

У задачах 3.75 – 3.82 обчислити ранг матриці:

3.75. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

3.76. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$. **3.77.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$.

3.78. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & -4 \\ 4 & -7 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **3.79.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 6 \\ 7 & 1 & -3 & 10 \\ 17 & 1 & -7 & 22 \\ 3 & 4 & -2 & 10 \end{pmatrix}$.

3.80. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 10 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ 16 & 4 & 52 & 9 \\ 8 & -1 & 6 & -7 \end{pmatrix}$. **3.81.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3.82. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

У задачах 3.83 – 3.84 з'ясувати, чи являються наступні системи векторів лінійно залежними або лінійно незалежними:

3.83. $\vec{x}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\vec{x}_2 = (1, -1, -1, 1)$, $\vec{x}_3 = (1, -1, 1, -1)$, $\vec{x}_4 = (1, 1, -1, -1)$.

3.84. $\vec{x}_1 = (4, -5, 2, 6)$, $\vec{x}_2 = (2, -2, 1, 3)$, $\vec{x}_3 = (6, -3, 3, 9)$, $\vec{x}_4 = (4, -1, 5, 6)$.

3.85. Знайти ранг системи векторів: $\vec{a}_1 = (1, -1, 0, 0)$, $\vec{a}_2 = (0, 1, -1, 0)$, $\vec{a}_3 = (1, 0, -1, 1)$, $\vec{a}_4 = (0, 0, 0, 1)$, $\vec{a}_5 = (3, -5, 2, -3)$.

У задачах 3.86 – 3.87 знайти ранг та який-небудь базис заданої системи векторів:

3.86. $\vec{a}_1 = (5, 2, -3, 1)$, $\vec{a}_2 = (4, 1, -2, 3)$, $\vec{a}_3 = (1, 1, -1, -2)$, $\vec{a}_4 = (3, 4, -1, 2)$.

3.87. $\vec{a}_1 = (2, -1, 3, 5)$, $\vec{a}_2 = (4, -3, 1, 3)$, $\vec{a}_3 = (3, -2, 3, 4)$, $\vec{a}_4 = (4, -1, 15, 17)$, $\vec{a}_5 = (7, -6, -7, 0)$.

У задачах 3.88 –3.108 виконати вказані доведення.

3.88. Довести, що матриці A і B квадратні та одного порядку, якщо їх добутки AB і BA визначені, причому $AB = BA$.

3.89. Слідом квадратної мартиці називається сума елементів, розташованих на головній діагоналі (слід – trace (англ.)). Довести, що слід AB дорівнює сліду BA: $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$; A та B квадратні матриці одного порядку.

3.90. Довести, що рівність $AB - BA = E$ не виконується ні для яких матриць A та B.

3.91. Показати, що якщо C – невироджена матриця n-го порядку, то для будь-якої матриці A n-го порядку маємо:

$$\operatorname{tr}(C^{-1}AC) = \operatorname{tr} A.$$

3.92. Довести, що якщо A та B – квадратні матриці одного порядку такі, що $AB \neq BA$, то

а) $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$,

б) $(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$.

3.93. Довести, що будь-яку квадратну матрицю A можна представити єдиним чином у вигляді $A = B + C$, де B – симетрична, а C – кососиметрична матриці.

3.94. Довести, що множення матриці A зліва на діагональну матрицю $B = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ зводиться до множення рядків A відповідно на $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$; множення A на B справа викликає аналогічну зміну стовпців.

3.95. Нехай A та B невироджені матриці одного й того ж порядку. Показати, що чотири рівності рівносильні між собою:

$$AB = BA, \ AB^{-1} = B^{-1}A, \ A^{-1}B = BA^{-1}, \ A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

3.96. Довести, що якщо A та B – симетричні квадратні матриці одного порядку, то матриця $C = ABAB...ABA$ є симетричною.

3.97. Довести, що для будь-якої матриці B матриця $A = BB^T$ є симетричною.

3.98. Нехай $A^* = \overline{A}^T$, тобто A^* – спряжена матриця.

Довести, що:

а) $(A+B)^* = A^* + B^*$;

б) $(AB)^* = B^* A^*$;

в) $(cA)^* = \bar{c} A^*$;

г) $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$,

де c – число, A та B – матриці, над якими може бути виконана відповідна операція.

3.99. Матриця A називається ермітовою, якщо $A^* = A$. Довести, що для будь-якої матриці B, з комплексними або дійсними елементами, матриця $A = BB^*$ є ермітовою.

3.100. Показати, що добуток двох симетричних матриць тоді і тільки тоді буде матрицею симетричною, коли дані матриці переставні.

3.101. Показати, що добуток двох кососиметричних матриць тоді і тільки тоді буде матрицею симетричною, коли дані матриці переставні.

3.102. Довести, що добуток двох кососиметричних матриць A та B тоді і тільки тоді буде кососиметричною матрицею, коли $AB = -BA$.

3.103. Довести, що визначник ортогональної матриці A $\det A = \pm 1$.

3.104. Довести, що визначник унітарної матриці U задовольняє умову: $|\det U| = 1$.

3.105. За яких умов діагональна матриця є ортогональною?

3.106. За яких умов діагональна матриця є унітарною?

3.107. Довести, що

а) добуток двох ортогональних матриць є ортогональною матрицею;

б) матриця, обернена до ортогональної матриці, ортогональна.

3.108. Довести, що

а) добуток двох унітарних матриць є унітарною матрицею;

б) матриця, обернена до унітарної матриці, унітарна.

§3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

I. Короткі теоретичні відомості

Основні означення. Умова сумісності. Система лінійних алгебраїчних рівнянь має вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1\ ; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2\ ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m\ , \end{cases}$$

або в матричній формі:

$$AX = B\ ,$$

де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}; \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Розширена матриця системи має вигляд

$$\overline{A} = (A\,|\,B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Розв'язком системи називається матриця-стовпець X, яка обертає матричне рівняння $AX = B$ у тотожність.

Система називається *сумісною*, якщо має, хоча б один розв'язок, у протилежному випадку, вона називається *несумісною*.

Дві системи називаються *еквівалентними*, якщо множини їх розв'язків співпадають.

Теорема Кронекера – Капеллі. Для того, щоб система $AX = B$ була сумісною, необхідно та достатньо, щоб

$$\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} \overline{A}\ ,$$

де $\overline{A} = (A\,|\,B)$ – розширена матриця системи.

Нехай $\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} \overline{A} = r$, тобто система сумісна. Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що базисний мінор розташовується у перших r $(1 \le r \le \min(m,n))$ рядках і стовпцях матриці A. Відкинувши останні $m-r$ рівнянь системи, запишемо скорочену систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r + a_{1\,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1\ ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r + a_{r\,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}x_n = b_r\ , \end{cases}$$

яка еквівалентна вихідній. Назвемо невідомі $x_1, \ldots, x_r$ *базисними*, а $x_{r+1}, \ldots, x_n$ *вільними* та перенесемо доданки, що містять вільні невідомі, у праву частину кожного з рівнянь. Отримаємо систему відносно базисних невідомих:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1\,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n\ ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r\,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n\ , \end{cases}$$

яка для кожного набору значень вільних невідомих $x_{r+1} = c_1, \ldots, x_n = c_{n-r}$ має єдиний розв'язок $x_1(c_1, \ldots, c_{n-r}), \ldots, x_r(c_1, \ldots, c_{n-r})$, що знаходиться описаними нижче методами. Відповідний розв'язок скороченої, а отже і вихідної системи має вигляд:

$$X(c_1, \dots, c_{n-r}) = \begin{pmatrix} x_1(c_1, \dots, c_{n-r}) \\ \vdots \\ x_r(c_1, \dots, c_{n-r}) \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{pmatrix}, \qquad (3.1)$$

де $c_1, c_2, \dots, c_{n-r} \in \mathbf{R}$.

Отримана формула, що виражає довільний розв'язок системи у вигляді вектор-функції від $n-r$ вільних невідомих, називається *загальним розв'язком* системи.

З теореми випливає: якщо $\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} \overline{A} = n$, n – число невідомих, то система має єдиний розв'язок; якщо $\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} \overline{A} = r < n$, то система має безліч розв'язків; якщо $\operatorname{Rg} A \neq \operatorname{Rg} \overline{A}$, то система несумісна.

Однорідні системи рівнянь. Система рівнянь називається *однорідною*, якщо $B = 0$, тобто система має вигляд $AX = 0$.

Однорідна система завжди сумісна, тобто має розв'язок $X = 0$.

Однорідна система має нетривіальні розв'язки, якщо $\operatorname{Rg} A = r < n$, де n – число невідомих (для квадратної однорідної системи ця умова означає, що $\det A = 0$). У цьому випадку система має безліч розв'язків, які записуються у вигляді загального розв'язку вигляду (3.1).

Теорема. Для заданої однорідної системи рівнянь $AX = 0$, для якої $RgA = r < n$, де n – число невідомих, існує $n-r$ лінійно незалежних розв'язків $E_1, E_2, \dots, E_{n-r}$ і будь-який розв'язок системи представляється у вигляді лінійної комбінації цих $n-r$ розв'язків.

Максимальне число лінійно незалежних розв'язків однорідної системи $AX = 0$ називається *фундаментальною системою розв'язків* цієї системи рівнянь.

$E_1, E_2, \dots, E_{n-r}$ – фундаментальна система розв'язків однорідної системи рівнянь (Ф.С.Р.). Вона містить $(n-r)$ розв'язків і одержується з загального розв'язку (3.3), якщо вільним змінним надавати, наприклад, послідовно значення: $1, 0, 0, \dots, 0$; $0, 1, 0, \dots, 0$; ...; $0, 0, 0, \dots, 1$. Отримана таким чином фундаментальна система називається *нормованою*.

Зауважимо, що розв'язання однорідних систем здійснюється тими ж методами, що й неоднорідних.

Структура загальних розв'язків однорідної та неоднорідної системи рівнянь.

Теорема 1. Загальний розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь $AX = 0$, де $\operatorname{Rg} A = r < n$, n – число невідомих, представляється у вигляді:

$$X = \sum_{i=1}^{n-r} c_i E_i ,$$

де c_i – довільні сталі, E_i, $i = \overline{1, n-r}$ – фундаментальна система розв'язків.

Теорема 2. Загальний розв'язок неоднорідної системи лінійних рівнянь $AX = B$ представляється у вигляді:

$$Y = Y_0 + X ,$$

де Y_0 – деякий частинний розв'язок неоднорідної системи, X – загальний розв'язок відповідної однорідної системи.

Методи розв'язування систем рівнянь. Розглядаємо систему рівнянь $AX = B$.

Матричний метод: $X = A^{-1}B$.

Реалізація методу полягає в знаходженні оберненої матриці і множенні її на стовпець вільних членів. Використовується для невироджених ($\det A \neq 0$) квадратних систем.

Формули Крамера: $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, $i = \overline{1, n}$, де $\Delta = \det A \neq 0$ - визначник системи; Δ_i одержується з Δ шляхом заміни i-го стовпця стовпцем вільних членів. Також використовується для невироджених квадратних систем.

Метод Гаусса грунтується на наступній теоремі: елементарним перетворенням рядків розширеної матриці системи відповідає перетворення цієї системи в еквівалентну.

За допомогою елементарних перетворень рядків розширеної матриці, а також переміни місцями стовпців, що відповідає перепозначенню змінних, матриця $\overline{A}$ зводиться до східчастої (або трапецієвидної) форми. Цій матриці ставиться у відповідність система, еквівалентна вихідній. Це прямий хід методу Гаусса. Розв'язання отриманої системи здійснюється знизу уверх (зворотний хід методу Гаусса).

Більш детально цей процес виглядає так: матриця $\overline{A}$ в результаті *елементарних перетворень* приймає такий вигляд:

$$\overline{A} \sim \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1r} & a'_{1r+1} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2r} & a'_{2r+1} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a'_{rr} & a'_{rr+1} & \dots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b'_{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b'_m \end{pmatrix}.$$

Тоді маємо такі можливості:

1. Хоча б одне з чисел $b'_{r+1}, b'_{r+2}, ..., b'_m$ відмінне від нуля, тоді $\mathrm{Rg}\, A \neq \mathrm{Rg}\, \overline{A}$ і система несумісна.

2. Числа $b'_{r+1} = b'_{r+2} = ... = b'_m = 0$, тоді

а) $\mathrm{Rg}\, A = \mathrm{Rg}\, \overline{A} = r = n$, система сумісна, має єдиний розв'язок;

б) $\mathrm{Rg}\, A = \mathrm{Rg}\, \overline{A} = r < n$, система сумісна, має безліч розв'язків.

У випадку сумісності системи, ставимо останній матриці у відповідність систему рівнянь вигляду

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + ... + a'_{1r}x_r + a'_{1r+1}x_{r+1} + ... + a'_{1n}x_n = b'_1 ; \\ \qquad a'_{22}x_2 + ... + a'_{2r}x_r + a'_{2r+1}x_{r+1} + ... + a'_{2n}x_n = b'_2 ; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad a'_{rr}x_r + a'_{rr+1}x_{r+1} + ... + a'_{rn}x_n = b'_r . \end{cases}$$

Цю систему переписуємо, залишаючи базисні змінні зліва, вільні – справа.

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + ... + a'_{1r}x_r = b'_1 - a'_{1r+1}x_{r+1} - ... - a'_{1n}x_n ; \\ \qquad a'_{22}x_2 + ... + a'_{2r}x_r = b'_2 - a'_{2r+1}x_{r+1} - ... - a'_{2n}x_n ; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad a'_{rr}x_r = b'_r - a'_{rr+1}x_{r+1} - ... - a'_{rn}x_n . \end{cases}$$

Саме цю систему розв'язуємо, починаючи знизу уверх.

В результаті отримуємо або єдиний розв'язок, або безліч розв'язків, які записуються у вигляді загального розв'язку (3.1).

Метод Гаусса представляє собою метод послідовного виключення змінних. *Обчислювальна процедура гауссових виключень* може бути формалізована за допомогою простих правил.

Назвемо змінну, що виключалася, *розв'язувальною*, коефіцієнт при ній – розв'язувальним елементом, рядок і стовпець матриці, в яких розміщений розв'язувальний елемент – розв'язувальними.

Перерахування елементів розширеної матриці при виконанні елементарних перетворень виконується за такими правилами:

1) елементи розв'язувального рядка і всіх вищерозташованих рядків залишаються незмінними;

2) елементи розв'язувального стовпця, що розташовані нижче розв'язувального елемента, обертаються в нулі;

3) усі інші елементи матриці обчислюються за *правилом прямокутника:* перетворюваний елемент дорівнює різниці добутків елементів головної і побічної діагоналей (рис. 3.1).

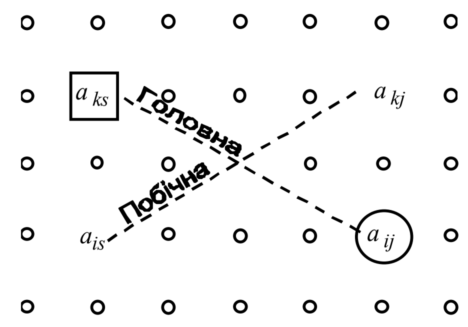


Рис. 3.1

Тут a_{ks} – розв'язувальний елемент, a_{ij} – перетворюваний елемент. Позначимо a'_{ij} – елемент, що отриманий обчисленням за правилом прямокутника. Тоді

$$a'_{ij} = a_{ks}\, a_{ij} - a_{kj}\, a_{is} . \qquad (3.2)$$

Модифікацією методу Гаусса є метод повного виключення або метод Жордана – Гаусса.

Метод повного виключення (метод Жордана - Гаусса) полягає в тому, що в результаті перетворень розширеної матриці в ній виділяється діагональна підматриця і тоді розв'язок вихідної системи виписується просто.

Метод повного виключення працює за такими правилами:

1) призначається розв'язувальний елемент a_{ks}; ним буде коефіцієнт при невідомій, що виключається;

2) елементи розв'язувального рядка залишаються незмінними;

3) усі елементи розв'язувального стовпця (окрім розв'язувального елемента) замінюються нулями і залишаються такими до кінця перетворень;

4) усі інші елементи матриці перераховуються за правилом прямокутника (3.2).

Метод повного виключення може бути використаний для обернення матриць (відомий також під назвою *метод елементарних перетворень*). Для даної матриці A n-го порядку будується прямокутна матриця $\left(A \mid E\right)$ розміру $n \times 2n$, до якої застосовуються перетворення за алгоритмом повного виключення, в результаті чого матриця зводиться до вигляду $\left(E \mid B\right)$, де $B = A^{-1}$. Це завжди можливо, якщо матриця A невироджена.

II. Контрольні питання та завдання

1. Яка система рівнянь називається лінійною?
2. Що називається основною матрицею системи та розширеною матрицею?

3. Сформулюйте теорему Кронекера-Капеллі – критерій сумісності системи.

4. В якому випадку система лінійних рівнянь має єдиний розв'язок; безліч розв'язків; не має розв'язків?

5. Які невідомі сумісної системи лінійних рівнянь називаються базисними, які – вільними?

6. Скільки базисних невідомих має система; скільки вільних невідомих має система?

7. Яка система лінійних рівнянь називається однорідною?

8. Сформулюйте критерій нетривіальної розв'язності однорідної системи лінійних рівнянь.

9. Що називається фундаментальною системою розв'язків лінійної системи однорідних рівнянь?

10. Запишіть структуру загального розв'язку однорідної системи лінійних рівнянь; неоднорідної.

11. Викладіть матричний метод розв'язання невироджених систем лінійних рівнянь.

12. Викладіть правило Крамера розв'язання невироджених систем лінійних рівнянь.

13. Викладіть метод Гаусса розв'язання систем лінійних рівнянь.

14. Викладіть метод Жордана – Гаусса (метод повного виключення) розв'язання систем лінійних рівнянь.

III. Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Записати в матричному вигляді систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3 = 1\,; \\ x_1+x_3-x_4=2\,; \\ 2x_1+2x_2+3x_3-x_4=5\,. \end{cases}$$

► Для даної системи

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Отже, в матричному вигляді система запишеться так:

$$A\,X=B$$

або

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}. \blacktriangleleft$$

Приклад 2. Розв'язати задану систему трьома методами: 1) матричним методом; 2) за формулами Крамера; 3) методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=-3\,; \\ 2x_1-x_2+2x_3=11\,; \\ -x_1+3x_2+x_3=0\,. \end{cases}$$

► 1. Розв'язання системи матричним методом

Запишемо систему рівнянь у вигляді матричного рівняння $A\,X=B$, де

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} -3 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Із матричного рівняння $A\,X=B \Rightarrow \; X=A^{-1}B$.

Розв'язок матричним методом можливий, якщо $\det A=\Delta\neq 0$, тобто якщо матриця A невироджена:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 11 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix} 11 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}=-(44-10)=-34\neq 0\,,$$

тобто існує єдина обернена матриця, отже, і єдиний розв'язок системи.

Знайдемо обернену матрицю A^{-1}:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\tilde{A}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

де $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}\,, \qquad 1\le i,\; j\le 3\,.$

Знайдемо алгебраїчні доповнення

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-1&2\\3&1\end{vmatrix}=-7,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}2&2\\-1&1\end{vmatrix}=-4,\quad A_{13}=\begin{vmatrix}2&-1\\-1&3\end{vmatrix}=5;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}2&-1\\3&1\end{vmatrix}=-5,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}3&-1\\-1&1\end{vmatrix}=2,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}3&2\\-1&3\end{vmatrix}=-11;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}2&-1\\-1&2\end{vmatrix}=3,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}3&-1\\2&2\end{vmatrix}=-8,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}3&2\\2&-1\end{vmatrix}=-7;$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{34}\begin{pmatrix}-7&-5&3\\-4&2&-8\\5&-11&-7\end{pmatrix}.$$

Перевіримо правильність знаходження оберненої матриці шляхом перевірки виконання рівності $A\,A^{-1}=E$:

$$A\,A^{-1}=\begin{pmatrix}3&2&-1\\2&-1&2\\-1&3&1\end{pmatrix}\left(-\frac{1}{34}\right)\begin{pmatrix}-7&-5&3\\-4&2&-8\\5&-11&-7\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{34}\begin{pmatrix}-34&0&0\\0&-34&0\\0&0&-34\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E.$$

Перевірка показує, що обернена матриця знайдена вірно.

$$X=A^{-1}B=-\frac{1}{34}\begin{pmatrix}-7&-5&3\\-4&2&-8\\5&-11&-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\11\\0\end{pmatrix}=-\frac{1}{34}\begin{pmatrix}21-55+0\\12+22+0\\-15-121+0\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{34}\begin{pmatrix}-34\\34\\-136\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}.$$

$x_1=1,\ x_2=-1,\ x_3=4.$

Перевірка. Підставимо отриманий розв'язок у систему:

$$\begin{cases}3\cdot1+2\cdot(-1)-4=-3\ ;\\2\cdot1-(-1)+2\cdot4=11\ ;\\-1+3\cdot(-1)+4\ =0\ .\end{cases}$$

Система розв'язана вірно.

2. Розв'язання системи за формулами Крамера

Формули Крамера мають вигляд:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta},$$

де Δ – визначник системи, $\Delta\neq0$; Δ_i, $i=\overline{1,3}$, одержується із визначника Δ системи шляхом заміни i–го стовпця стовпцем вільних членів.

Визначник системи Δ знайдено у попередньому пункті.

$$\det A=\Delta=\begin{vmatrix}3&2&-1\\2&-1&2\\-1&3&1\end{vmatrix}=-34\neq0$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}-3&2&-1\\11&-1&2\\0&3&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3&5&-1\\11&-7&2\\0&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3&5\\11&-7\end{vmatrix}=21-55=-34;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}3&-3&-1\\2&11&2\\-1&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&-3&2\\2&11&4\\-1&0&0\end{vmatrix}=(-1)\cdot\begin{vmatrix}-3&2\\11&4\end{vmatrix}=-(-12-22)=34;$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}3&2&-3\\2&-1&11\\-1&3&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&11&-3\\2&5&11\\-1&0&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}11&-3\\5&11\end{vmatrix}=-(121+15)=-136,$$

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-34}{-34}=1,\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{34}{-34}=-1,\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-136}{-34}=4.$$

3. Розв'язання системи методом Гаусса

Запишемо розширену матрицю системи і приведемо її до трикутного вигляду за допомогою елементарних перетворень матриці, які виконуються над рядками:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&-1&-3\\2&-1&2&11\\-1&3&1&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}-1&3&1&0\\2&-1&2&11\\3&2&-1&-3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}-1&3&1&0\\0&5&4&11\\0&11&2&-3\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}-1&3&1&0\\0&5&4&11\\0&1&-6&-25\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}-1&3&1&0\\0&1&-6&-25\\0&5&4&11\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}-1&3&1&0\\0&1&-6&-25\\0&0&34&136\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -25 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

$\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} \overline{A} = 3 = n$, де n – число невідомих.

Система сумісна, має єдиний розв'язок.

Ставимо у відповідність розширеній матриці систему, еквівалентну вихідній, розв'язання якої здійснюємо знизу уверх:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0; \\ x_2 - 6x_3 = -25; \\ x_3 = 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_2 + x_3 = -3 + 4 = 1; \\ x_2 = -25 + 6x_3 = -25 + 24 = -1; \\ x_3 = 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1; \\ x_2 = -1; \\ x_3 = 4. \end{cases}$$ ◄

Приклад 3. Дослідити сумісність системи, і у випадку сумісності знайти загальний розв'язок та один частинний розв'язок системи. Виконати перевірку правильності частинного розв'язку:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 7x_3 - 2x_4 = -1; \\ -x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 7x_4 = -5; \\ 2x_1 + x_2 - 10x_3 - x_4 = 0; \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 - 9x_4 = -7. \end{cases}$$

► Запишемо розширену матрицю системи і за допомогою елементарних перетворень, що виконуються над рядками матриці, зведемо її до східчастого вигляду:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -7 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -5 & -7 & -5 \\ 2 & 1 & -10 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & -9 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -7 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -12 & -9 & -6 \\ 0 & -1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -20 & -15 & -10 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -7 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -7 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отримали:

$\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} \overline{A} = r = 2 < 4 = n$, n – число змінних. Згідно з теоремою Кронекера – Капеллі система сумісна; система має безліч розв'язків, бо $r < n$. Розв'язання здійснюємо методом Гаусса. Базисні змінні – x_1, x_2; вільні змінні – x_3, x_4.

Ставимо у відповідність перетвореній розширеній матриці системи скорочену систему, яку розв'язуємо знизу уверх:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 7x_3 - 2x_4 = -1; \\ x_2 - 4x_3 - 3x_4 = -2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 7x_3 + 2x_4 - 1; \\ x_2 = 4x_3 + 3x_4 - 2, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 + 7x_3 + 2x_4 - 1 = -4x_3 - 3x_4 + 2 + 7x_3 + 2x_4 - 1; \\ x_2 = 4x_3 + 3x_4 - 2, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_3 - x_4 + 1; \\ x_2 = 4x_3 + 3x_4 - 2, \end{cases} \quad x_3, x_4 \in \mathbf{R}.$$

Запишемо загальний розв'язок у вигляді

$$X(x_3, x_4) = \begin{pmatrix} 3x_3 - x_4 + 1 \\ 4x_3 + 3x_4 - 2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

де $x_3, x_4 \in \mathbf{R}$, або у вигляді

$$X(c_1, c_2) = \begin{pmatrix} 3c_1 - c_2 + 1 \\ 4c_1 + 3c_2 - 2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

який отримується з попереднього, при $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$; $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$.

Нехай, наприклад, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. Отримаємо частинний розв'язок

$$X(0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

тобто $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$.

Перевірка. Підставимо отриманий частинний розв'язок у систему:

$$\begin{cases} 1 - 2 - 0 - 0 = -1; \\ -1 - 4 - 0 - 0 = -5; \\ 2 - 2 - 0 - 0 = 0; \\ -3 - 4 + 0 - 0 = -7. \end{cases}$$

Система розв'язана вірно. ◄

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок однорідної системи, використовуючи метод Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2+\ \ x_3=0\ ;\\ \ \ x_1+\ x_2+\ \ x_3=0\ ;\\ 3x_1-2x_2+2x_3=0\ .\end{cases}$$

► Випишемо матрицю системи і будемо виконувати елементарні перетворення рядків матриці

$$A=\begin{pmatrix}2&-3&1\\1&1&1\\3&-2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-3&1\\3&-2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-5&-1\\0&-5&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&5&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

$\mathrm{Rg}\,A=r=2<n=3$, n – число невідомих. Система має нетривіальні розв'язки. Базисний мінор $\begin{vmatrix}1&1\\0&5\end{vmatrix}$.

Ставимо у відповідність матриці спрощену систему:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0\ ;\\ \quad 5x_2+x_3=0\ ,\end{cases}$$

де x_1, x_2 – базисні змінні, x_3 – вільна змінна;

$$\begin{cases} x_1+x_2=-x_3\ ;\\ \quad 5x_2=-x_3\ ,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x_1=-x_3+\dfrac{x_3}{5}=-\dfrac{4}{5}x_3\ ;\\ x_2=-\dfrac{x_3}{5}\ .\end{cases}$$

Загальний розв'язок: $x_1=-\dfrac{4}{5}x_3,\ x_2=-\dfrac{x_3}{5},\ x_3\in\mathbf{R}.$

Якщо перепозначити вільну змінну $x_3=c$, отримаємо загальний розв'язок у вигляді

$$X=\begin{pmatrix}-4c/5\\-c/5\\c\end{pmatrix}\quad\forall c\in\mathbf{R}\ .$$

Підставивши отриманий розв'язок у систему, переконаємося у правильності отриманого розв'язку. ◄

Приклад 5. Дослідити, чи має нетривіальні розв'язки однорідна система рівнянь. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв'язок. Записати також фундаментальну систему розв'язків.

$$\begin{cases} x_1+2x_2+\ \ 4x_3-\ \ 3x_4=0\ ;\\ 3x_1+5x_2+\ \ 6x_3-\ \ 4x_4=0\ ;\\ 4x_1+5x_2-\ \ 2x_3+\ \ 3x_4=0\ ;\\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0\ .\end{cases}$$

► $$A=\begin{pmatrix}1&2&4&-3\\3&5&6&-4\\4&5&-2&3\\3&8&24&-19\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&4&-3\\0&-1&-6&5\\0&-3&-18&15\\0&2&12&-10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&4&-3\\0&-1&-6&5\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

$\mathrm{Rg}\,A=r=2<n=4$,система має нетривіальні розв'язки.

Базисний мінор $\begin{vmatrix}1&2\\0&-1\end{vmatrix}$. Базисні змінні – x_1, x_2; вільні змінні – x_3, x_4.

Скорочена система має вигляд:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0\\ \quad -x_2-6x_3+5x_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x_1+2x_2=-4x_3+3x_4\\ x_2=-6x_3+5x_4\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x_1=-4x_3+3x_4-2(-6x_3+5x_4)=-4x_3+3x_4+12x_3-10x_4=8x_3-7x_4\\ x_2=-6x_3+5x_4\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x_1=8x_3-7x_4\\ x_2=-6x_3+5x_4.\end{cases}$$

Загальний розв'язок: $x_1=8x_3-7x_4$, $x_2=-6x_3+5x_4$, x_3, $x_4\in\mathbf{R}$.

Перепозначимо змінні $x_3=c_1,\quad x_4=c_2$.

Загальний розв'язок запишемо у вигляді:

$$X(c_1,\,c_2)=\begin{pmatrix}8c_1-7c_2\\-6c_1+5c_2\\c_1\\c_2\end{pmatrix},\quad\forall c_1,c_2\in\mathbf{R}\ .$$

Поклавши $c_1 = 1,\quad c_2 = 0$ та $c_1 = 0,\quad c_2 = 1$, з загального розв'язку одержуємо фундаментальну систему розв'язків:

$$E_1 = X(1,\,0) = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad E_2 = X(0,\,1) = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, фундаментальна система розв'язків:

$$\{(8,-6,1,0),(-7,5,0,1)\}.\ ◄$$

Приклад 6. Дослідити систему на сумісність та знайти її загальний розв'язок методом Жордана-Гаусса (повного виключення).

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1; \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

► Скористаємося алгоритмом методу повного виключення:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{-4} & -8 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & -13 & 5 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -4 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 12 & -10 & 2 \\ 0 & 0 & 12 & -10 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{6} & -5 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 12 & 0 & 14 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 1 \end{array}\right).$$

$\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} \overline{A} = 3 < 4 = n$, система сумісна, має безліч розв'язків.

Поставимо у відповідність матриці $\overline{A}$ спрощену систему рівнянь. Вважатимемо, x_1, x_2, x_3 – базисні змінні, x_4 – вільна змінна.

$$\begin{cases} 6x_1 - 5x_4 = 1; \\ 12x_2 + 14x_4 = 2; \\ 6x_3 - 5x_4 = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x_1 = 1 + 5x_4; \\ 6x_2 = 1 - 7x_4; \\ 6x_3 = 1 + 5x_4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1+5x_4}{6}; \\ x_2 = \dfrac{1-7x_4}{6}; \\ x_3 = \dfrac{1+5x_4}{6}. \end{cases}$$

Загальний розв'язок системи представиться так:

$$X(x_4) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} + \frac{5}{6}x_4 \\ \frac{1}{6} - \frac{7}{6}x_4 \\ \frac{1}{6} + \frac{5}{6}x_4 \\ x_4 \end{pmatrix},\quad x_4 \in \mathbf{R}.$$

Поклавши, наприклад, $x_4 = 0$, отримаємо частинний розв'язок

$$X(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Безпосередньою підстановкою в систему частинного розв'язку, впевнюємося у його правильності. ◄

Приклад 7. Використовуючи метод повного виключення, знайти матрицю, обернену матриці A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$► \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{2} & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 6 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -4 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -14 & 4 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-16} & -2 & -4 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -32 & 0 & 0 & -92 & 40 & 28 \\ 0 & -16 & 0 & 28 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & -16 & -2 & -4 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 92/32 & -40/32 & -28/32 \\ 0 & 1 & 0 & -28/16 & 8/16 & 12/16 \\ 0 & 0 & 1 & 2/16 & 4/16 & -2/16 \end{array}\right).$$

Праворуч від вертикальної риски отримали обернену матрицю.

Отже,

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 23/8 & -10/8 & -7/8 \\ -14/8 & 4/8 & 6/8 \\ 1/8 & 2/8 & -1/8 \end{pmatrix}=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -23 & 10 & 7 \\ 14 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Можна перевірити, що $A\,A^{-1}=A^{-1}A=E$. ◄

IV. Задачі для практичних занять

У задачах 3.109 – 3.116 розв’язати системи за правилом Крамера:

3.109. $\begin{cases} 3x-5y=13; \\ 2x+7y=81. \end{cases}$ **3.110.** $\begin{cases} 3x-4y=-6; \\ 3x+4y=18. \end{cases}$

3.111. $\begin{cases} 2ax-3by=0; \\ 3ax-6by=ab. \end{cases}$ **3.112.** $\begin{cases} 7x+2y+3z=15; \\ 5x-3y+2z=15; \\ 10x-11y+5z=36. \end{cases}$

3.113. $\begin{cases} 2x+y=5; \\ x+3z=16; \\ 5y-z=10. \end{cases}$ **3.114.** $\begin{cases} x+y-2z=6; \\ 2x+3y-7z=16; \\ 5x+2y+z=16. \end{cases}$

3.115. $\begin{cases} 4x_1+4x_2+5x_3+5x_4=0; \\ 2x_1+3x_3-x_4=10; \\ x_1+x_2-5x_3=-10; \\ 3x_2+2x_3=1. \end{cases}$

3.116. $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+2x_4=4; \\ 3x_1+3x_2+3x_3+2x_4=6; \\ 3x_1-x_2-x_3-2x_4=6; \\ 3x_1-x_2+3x_3-x_4=6. \end{cases}$

У задачах 3.117 – 3.122 розв’язати системи матричним методом:

3.117. $\begin{cases} 5x_1+8x_2+x_3=2; \\ 3x_1-2x_2+6x_3=-7; \\ 2x_1+x_2-x_3=-5. \end{cases}$

3.118. $\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=-7; \\ x_1+4x_2+2x_3=-1; \\ x_1-4x_2=-5. \end{cases}$

3.119. $\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3+x_4=4; \\ 4x_1+3x_2-x_3+2x_4=6; \\ 8x_1+5x_2-3x_3+4x_4=12; \\ 3x_1+3x_2-2x_3+2x_4=6. \end{cases}$

3.120. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+11x_3+5x_4=2; \\ x_1+x_2+5x_3+2x_4=1; \\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4=-3; \\ x_1+x_2+3x_3+4x_4=-3. \end{cases}$

У задачах 3.121 – 3.128 дослідити сумісність та знайти загальний розв’язок наступних систем. Використати метод Гаусса.

3.121. $\begin{cases} 2x-y+z=-2; \\ x+2y+3z=-1; \\ x-3y-2z=3. \end{cases}$ **3.122.** $\begin{cases} x+2y-4z=1; \\ 2x+y-5z=-1; \\ x-y-z=-2. \end{cases}$

3.123. $\begin{cases} 3x_1-2x_2-5x_3+x_4=3; \\ 2x_1-3x_2+x_3+5x_4=-3; \\ x_1+2x_2-4x_4=-3; \\ x_1-x_2-4x_3+9x_4=22. \end{cases}$

3.124. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6\,; \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 2\,; \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 6\,; \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -7\,. \end{cases}$

3.125. $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6\,; \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4\,; \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2\,. \end{cases}$

3.126. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2\,; \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5\,; \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3\,. \end{cases}$

3.127. $\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4\,; \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5\,; \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8\,. \end{cases}$

3.128. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1\,; \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2\,; \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1\,; \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2\,. \end{cases}$

3.129. Підібрати параметр λ, такий, щоб система

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 5\,; \\ x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 1\,; \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

мала єдиний розв'язок.

3.130. За якого значення параметра λ, система

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = \lambda\,; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2\,; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

має єдиний розв'язок?

3.131. За якого значення параметра λ система

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + \lambda x_3 = 1\,; \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 3\,; \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}$$

несумісна?

У задачах 3.132 – 3.133 дослідити сумісність системи та знайти її загальний розв'язок у залежності від значення параметра λ.

3.132. $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3\,; \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1\,; \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9\,; \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = \lambda\,. \end{cases}$

3.133. $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1\,; \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1\,; \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1\,; \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1\,. \end{cases}$

У задачах 3.134 – 3.139 знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок таких систем:

3.134. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\,; \\ 2x_1 + 9x_2 - 3x_3 = 0\,. \end{cases}$ **3.135.** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0\,; \\ -2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0\,. \end{cases}$

3.136. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\,; \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0\,; \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0\,. \end{cases}$ **3.137.** $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0\,; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0\,; \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0\,. \end{cases}$

3.138. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0\,; \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0\,; \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0\,; \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_5 = 0\,. \end{cases}$

3.139. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0\,; \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0\,; \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0\,. \end{cases}$

У задачах 3.140 – 3.141 визначити значення параметра a, при якому система має нетривіальні розв'язки, та знайти ці розв'язки.

3.140. $\begin{cases} a^2 x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0\,; \\ a\,x_1 - x_2 + x_3 = 0\,; \\ 8\,x_1 + x_2 + 4x_3 = 0\,. \end{cases}$ **3.141.** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0\,; \\ 4x_1 - x_2 + 7x_3 = 0\,; \\ x_1 + ax_2 + 2x_3 = 0\,. \end{cases}$

У задачах 3.142 – 3.145 знайти загальний розв'язок неоднорідних систем, використовуючи фундаментальну систему розв'язків відповідних однорідних систем.

3.142. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1\,; \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0\,; \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2\,; \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3\,. \end{cases}$

3.143. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1; \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1; \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -1. \end{cases}$

3.144. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 = 1\,; \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 + x_6 = 1\,. \end{cases}$

3.145. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0\,; \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 5x_5 = 2\,; \\ 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = -1\,. \end{cases}$

У задачах 3.146 – 3.150 методом Жордана – Гаусса (повного виключення) дослідити сумісність та знайти загальний розв'язок таких систем:

3.146. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0\,; \\ 7x_1 + 14x_2 + 20x_3 + 27x_4 = 0\,; \\ 5x_1 + 10x_2 + 16x_3 + 19x_4 = -2\,; \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 13x_4 = 5\,. \end{cases}$

3.147. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1\,; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4\,; \\ x_2 + x_3 + x_4 = -3\,; \\ x_3 + x_4 + x_5 = 2\,; \\ x_4 + x_5 = -1. \end{cases}$

3.148. $\begin{cases} 105x_1 - 175x_2 - 315x_3 + 245x_4 = 84\,; \\ 90x_1 - 150x_2 - 270x_3 + 210x_4 = 72\,; \\ 75x_1 - 125x_2 - 225x_3 + 175x_4 = 59\,. \end{cases}$

3.149. $\begin{cases} 8x_1 + 12x_2 = 20\,; \\ 14x_1 + 21x_2 = 35\,; \\ 9x_3 + 11x_4 = 0\,; \\ 16x_3 + 20x_4 = 0\,; \\ 10x_5 + 12x_6 = 22\,; \\ 15x_5 + 18x_6 = 33\,. \end{cases}$

3.150. $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 8\,; \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -3\,; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1\,; \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 = 1\,; \\ -x_2 + x_3 + 2x_4 = 3\,. \end{cases}$

§4. Комплексні числа

І. Короткі теоретичні відомості

Основні поняття. *Комплексним числом* називається вираз вигляду

$$z = x + i\,y\,, \tag{3.3}$$

де x та y – дійсні числа, а символ i – уявна одиниця, яка визначається умовою $i^2 = -1$.

При цьому число x називається *дійсною частиною* комплексного числа z і позначається $x = \operatorname{Re} z$, а число y називається *уявною частиною* z і позначається $y = \operatorname{Im} z$ (від французьких слів: reel – дійсний, imaginaire – уявний).

Множина комплексних чисел позначається буквою $\mathbf{C}$.

Вираз, що стоїть справа у формулі (3.3), називається *алгебраїчною формою* запису комплексного числа.

Два комплексні числа $z = x + iy$ та $\bar{z} = x - iy$, які відрізняються лише знаком уявної частини, називаються *спряженими*.

Два комплексні числа $z_1 = x_1 + iy_1$ та $z_2 = x_2 + iy_2$ *рівні* $(z_1 = z_2)$, тоді і тільки тоді, коли $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Комплексне число $z = x + iy = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = 0$, $y = 0$.

Геометрично кожне комплексне число $z = x + iy$ зображується точкою $M(x, y)$ на координатній площині xOy або вектором $\overrightarrow{OM}$ (рис.3.2). Площина xOy умовно називається *комплексною площиною* змінної z, вісь Ox – *дійсною віссю*, вісь Oy – *уявною віссю*.

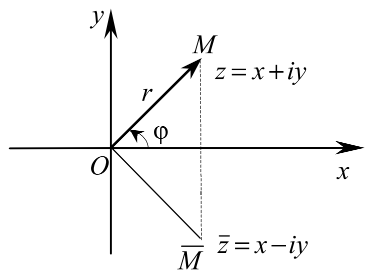


Рис.3.2

Комплексне число $z = x + iy$ при $y = 0$ збігається з дійсним числом $z = x$. Тому дійсні числа є окремим випадком комплексних, вони зображуються точками осі Ox.

Комплексні числа $z = x + iy$, в яких $x = 0$, тобто $z = iy$ називаються *суто уявними*; такі числа зображуються точками осі Oy.

Полярні координати r та φ точки M (рис.3.2) на комплексній площині називаються *модулем* і *аргументом* комплексного числа z і позначаються:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \operatorname{Arg} z.$$

Модуль комплексного числа визначається однозначно, а аргумент визначається з точністю до доданка $2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Те із значень полярного кута φ, що задовольняє нерівності $-\pi < \varphi \le \pi$ (іноді покладають $0 \le \varphi < 2\pi$), називають *головним значенням* аргументу z і позначають $\arg z$.

У подальшому позначення φ збережемо тільки для головного значення аргументу z, тобто покладемо $\varphi = \arg z$, в силу чого для решти значень аргументу z, отримуємо рівність

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi = \varphi + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}, \tag{3.4}$$

де

$$-\pi < \arg z \le \pi.$$

Оскільки $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ (рис.3.2), то з формули (3.3) маємо

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{3.5}$$

Вираз, який стоїть справа у формулі (3.5), називається *тригонометричною формою* комплексного числа $z = x + iy$.

З формул $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ випливає, що головне значення аргументу z задовольняє співвідношення

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}, \qquad \sin\varphi = \frac{y}{r}. \tag{3.6}$$

З формул (3.6) випливає, що аргумент φ може визначатись із співвідношення

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}, \tag{3.7}$$

з урахуванням того, в якій чверті знаходиться точка $M(x, y)$.

З останнього випливає, що головне значення аргументу обчислюється за формулою:

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & x > 0, \quad (M(x,y) \in \text{I, IV чверті}) \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & x < 0,\ y \ge 0, \quad (M(x,y) \in \text{II чверті}) \\ -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & x < 0,\ y < 0, \quad (M(x,y) \in \text{III чверті}) \\ \dfrac{\pi}{2}, & x = 0,\ y > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x = 0,\ y < 0. \end{cases} \tag{3.8}$$

Використовуючи формулу Ейлера

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi \tag{3.9}$$

та формулу (3.5), що дає тригонометричну форму комплексного числа, отримаємо

$$z=re^{i\varphi}. \tag{3.10}$$

Вираз, що стоїть справа у формулі (3.10), називається *показниковою формою* комплексного числа $z=x+iy$.

Дії над комплексними числами

Дії над комплексними числами, заданими *в алгебраїчній формі* виконуються таким чином:

1. $z_1+z_2=(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$.

2. $z_1-z_2=(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)$.

3. $z_1\cdot z_2=(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$.

4. $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\dfrac{z_1\cdot\bar z_2}{z_2\cdot\bar z_2}=\dfrac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}=$

$=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2},\ \ z_2\neq 0$.

5. $z^n=\underbrace{z\cdot z\ldots\cdot z}_{n\text{ раз}},\ \ n\in\mathbf{N}$.

Результатом цих дій є, взагалі кажучи, комплексні числа. Вказані операції над комплексними числами мають всі властивості відповідних операцій над дійсними числами, тобто додавання та множення комутативні, асоціативні, пов'язані відношенням дистрибутивності і для них існують обернені операції віднімання та ділення (крім ділення на нуль).

На рис.3.3 наведено геометричну ілюстрацію операцій додавання та віднімання комплексних чисел: сума і різниця комплексних чисел z_1 та z_2 зображається відповідно векторами, рівними напрямленим діагоналям паралелограма, побудованого на векторах z_1 та z_2.

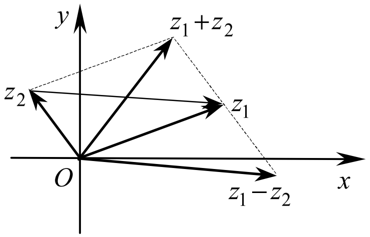


Рис.3.3

Зауважимо, що піднесення числа z до степеня n, $n\in\mathbf{N}$, виконується за формулою бінома Ньютона

$$z^n=(x+iy)^n=x^n+C_n^1x^{n-1}iy+C_n^2x^{n-2}(iy)^2+\ldots+C_n^kx^{n-k}(iy)^k+\ldots+(iy)^n$$

з урахуванням того, що в отриманому виразі слід замінити степені i їх значеннями:

$$i^2=-1,\quad i^3=-i,\quad i^4=1,\quad i^5=i,\ \ldots$$

і, в загальному випадку,

$$i^{4k}=1,\quad i^{4k+1}=i,\quad i^{4k+2}=-1,\quad i^{4k+3}=-i.$$

Дії над комплексними числами, заданими *в тригонометричній формі* виконуються за такими правилами:

1. $z_1\cdot z_2=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$.

2. $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)],\ \ z_2\neq 0$.

3. $z^n=(r(\cos\varphi+i\sin\varphi))^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$.

Ця формула називається *формулою Муавра*.

4. $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}\right),\quad k=\overline{0,n-1}$,

тобто корінь n-го степеня з комплексного числа z має n різних значень.

Тут $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$, $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$, $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$.

Дії над комплексними числами, заданими *в показниковій формі* виконуються так:

1. $z_1\cdot z_2=r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$.

2. $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)},\quad z_2\neq 0$.

3. $z^n=r^ne^{in\varphi}$.

Ця формула є *формулою Муавра* для випадку задання комплексного числа в показниковій формі.

4. $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\,e^{\frac{i(\varphi+2k\pi)}{n}},\quad k=\overline{0,n-1}$.

Тут $z_1=r_1e^{i\varphi_1}$, $z_2=r_2e^{i\varphi_2}$, $z=re^{i\varphi}$.

II. Контрольні питання та завдання

1. Дайте означення комплексного числа; що таке дійсна та уявна частина комплексного числа?

2. Як визначається уявна одиниця?
3. Які комплексні числа називаються рівними; спряженими?
4. Як зображується комплексне число на площині?
5. Яка форма запису комплексного числа називається алгебраїчною; тригонометричною?
6. Дайте означення модуля та аргументу комплексного числа.
7. Що називають головним значенням аргументу?
8. За якою формулою визначається модуль комплексного числа, аргумент комплексного числа?
9. Як виконуються дії над комплексними числами, заданими в алгебраїчній формі?
10. Як виконуються дії над комплексними числами, заданими в тригонометричній формі?
11. Наведіть показникову форму комплексного числа.
12. Як виконуються дії над комплексними числами, заданими в показниковій формі?
13. Який геометричний зміст суми та різниці комплексних чисел?
14. Який геометричний зміст операції множення двох комплексних чисел?
15. Який геометричний зміст операції ділення двох комплексних чисел?

III. Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Задано комплексні числа

$$z_1 = -3+2i, \quad z_2 = 2-3i.$$

Виконати вказані дії над ними.

а) z_1+z_2; б) z_1-z_2;

в) $z_1\cdot z_2$; г) $\dfrac{z_1}{z_2}$; д) z_1^3.

► а) $z_1+z_2=(-3+2i)+(2-3i)=(-3+2)+(2-3)i=-1-i$;

б) $z_1-z_2=(-3+2i)-(2-3i)=(-3-2)+(2+3)i=-5+5i$;

в) $z_1\cdot z_2=(-3+2i)\cdot(2-3i)=-3\cdot 2-2(-3)+((-3)(-3)+2\cdot 2)i=13i$;

г) для знаходження частки чисельник та знаменник домножимо на вираз, спряжений знаменнику

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{-3+2i}{2-3i}=\frac{(-3+2i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}=\frac{(-3\cdot 2-2\cdot 3)+(-3\cdot 3+2\cdot 2)i}{4+9}=-\frac{12}{13}-\frac{5}{13}i;$$

д) $z_1^3=(-3+2i)^3=(-3)^3+3\cdot(-3)^2\cdot 2i+3\cdot(-3)\cdot(2i)^2+(2i)^3=$

$=-27+54i+36-8i=9+46i$. ◄

Приклад 2. Задано комплексні числа $z_1=1-2i$, $z_2=2+i$, $z_3=5i$. Знайти $z=z_1\cdot z_2^2+z_3$.

► Знаходимо

$z_2^2=(2+i)^2=4+4i+i^2=4+4i-1=3+4i$,

$z_1\cdot z_2^2=(1-2i)(3+4i)=(3+8)+(4-6)i=11-2i$.

Тоді

$z=z_1\cdot z_2^2+z_3=(11-2i)+5i=11+3i$. ◄

Приклад 3. Знайти дійсні розв'язки рівняння

$$(4+2i)x+(5-3i)y=13+i.$$

► Перетворимо рівняння, виділивши в його лівій частині дійсну та уявну частини:

$$(4x+5y)+i(2x-3y)=13+i.$$

Звідси згідно з означенням рівності двох комплексних чисел, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 4x+5y=13, \\ 2x-3y=1. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, отримаємо $x=2, \quad y=1$.

Отже, дійсний розв'язок заданого рівняння $x=2, \quad y=1$. ◄

Приклад 4. Для заданого комплексного числа z знайти $\operatorname{Re}z$, $\operatorname{Im}z$ – дійсну та уявну частини, $|z|$, $\arg z$ – модуль та головне значення аргументу; записати ці числа в тригонометричній та показниковій формі; зобразити ці числа на комплексній площині.

а) $z=1+i$; б) $z=-2+2\sqrt{3}i$;

в) $z=-1-i\sqrt{3}$; г) $z=2\sqrt{3}-2i$.

► а) $z = 1 + i$.
Маємо: $\mathrm{Re}\, z = x = 1$, $\mathrm{Im}\, z = y = 1$.

На комплексній площині цьому числу відповідає точка $M(1,\,1)$ (рис.3.4а).

$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

$\mathrm{tg}\ \varphi = \dfrac{y}{x} = 1$, точка $M(1,\,1) \in$ I чверті, тоді згідно з формулою (3.8) маємо: $\varphi = \arg z = \mathrm{arctg}\ 1 = \dfrac{\pi}{4}$.

Тригонометрична форма: $z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\,\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Показникова форма: $z = \sqrt{2}\ e^{\frac{\pi}{4}i}$.

б) $z = -2 + 2\sqrt{3}\,i$.

Маємо: $\mathrm{Re}\, z = x = -2$, $\mathrm{Im}\, z = y = 2\sqrt{3}$.

На комплексній площині цьому числу відповідає точка $M(-2,\,2\sqrt{3})$ (рис.3.4б).

$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = 4$.

$\mathrm{tg}\ \varphi = \dfrac{y}{x} = \dfrac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3}$, точка $M(-2,\,2\sqrt{3}) \in$ II чверті, тоді згідно з формулою (3.8) маємо: $\varphi = \arg z = \pi + \mathrm{arctg}\,(-\sqrt{3}) = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$.

Тригонометрична форма: $z = 4\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\,\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Показникова форма: $z = 4e^{\frac{2\pi}{3}i}$.

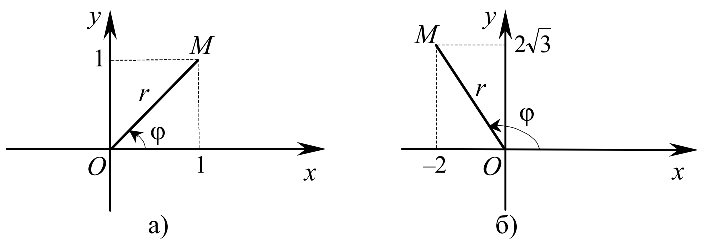


Рис.3.4

в) $z = -1 - i\sqrt{3}$.

Маємо: $\mathrm{Re}\, z = x = -1$, $\mathrm{Im}\, z = y = -\sqrt{3}$.

На комплексній площині цьому числу відповідає точка $M(-1,-\sqrt{3})$ (рис.3.5а).

$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$.

$\mathrm{tg}\ \varphi = \dfrac{y}{x} = \dfrac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$, точка $M(-1,-\sqrt{3}) \in$ III чверті, тоді згідно з формулою (3.8) маємо: $\varphi = \arg z = -\pi + \mathrm{arctg}\sqrt{3} = -\pi + \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{2\pi}{3}$.

Тригонометрична форма: $z = 2\left(\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\,\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$.

Показникова форма: $z = 2\ e^{-\frac{2\pi}{3}i}$.

г) $z = 2\sqrt{3} - 2i$.

Маємо: $\mathrm{Re}\, z = x = 2\sqrt{3}$, $\mathrm{Im}\, z = y = -2$.

На комплексній площині цьому числу відповідає точка $M(2\sqrt{3},\,-2)$ (рис.3.5б).

$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = \sqrt{16} = 4$.

$\mathrm{tg}\ \varphi = \dfrac{y}{x} = \dfrac{-2}{2\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, точка $M(2\sqrt{3},\,-2) \in$ IV чверті, тоді згідно з формулою (3.8) маємо: $\varphi = \arg z = \mathrm{arctg}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$.

Тригонометрична форма: $z = 4\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\,\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$.

Показникова форма: $z = 4\ e^{-\frac{\pi}{6}i}$.

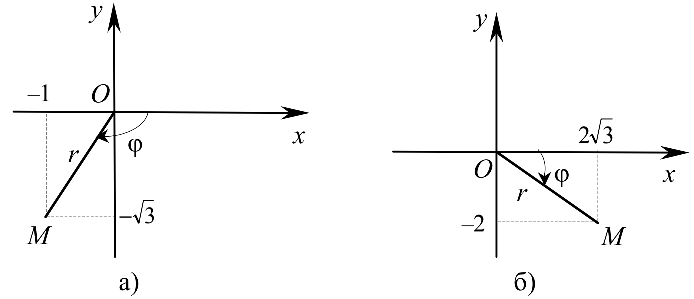


Рис.3.5

Зауважимо, що перехід до тригонометричної форми можна проводити, виконавши деякі перетворення заданого числа $z = x + i\,y$, звівши його до такого вигляду, щоб можна було формально замінити x та y на $\cos\varphi$ та $\sin\varphi$ відповідно. Для цього знаходимо $|z|$, домножуємо та ділимо на нього задане число.

Виконаємо такі перетворення над заданими числами.

а) $z = 1 + i$.

$|z| = \sqrt{2}$,

$$z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

б) $z = -2 + 2\sqrt{3}\,i$.

$|z| = 4$,

$$z = -2 + 2\sqrt{3}i = 4\left(-\frac{2}{4} + i\,\frac{2\sqrt{3}}{4}\right) = 4\left(-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

в) $z = -1 - \sqrt{3}\,i$.

$|z| = 2$,

$$z = -1 - \sqrt{3}\,i = 2\left(-\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right).$$

г) $z = 2\sqrt{3} - 2i$.

$|z| = 4$,

$$z = 2\sqrt{3} - 2i = 4\left(\frac{2\sqrt{3}}{4} - i\,\frac{2}{4}\right) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{1}{2}\right) = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

Геометричну ілюстрацію цих результатів наведено на рис.3.4, рис.3.5. ◄

Приклад 5. Знайти дійсну та уявну частини комплексних чисел.

а) $z = \dfrac{1}{1-i}$; б) $z = \left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3$;

в) $z = \left(\dfrac{1}{2} - i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$; г) $z = \left(\dfrac{2+i^5}{1+i^{19}}\right)^2$.

► Для знаходження дійсної та уявної частини комплексного числа z представимо його в алгебраїчній формі: $z = x + i\,y$. Тоді дійсна частина $\operatorname{Re} z = x$, а уявна частина $\operatorname{Im} z = y$.

а) $z = \dfrac{1}{1-i}$.

Для запису даного числа в алгебраїчній формі домножимо чисельник та знаменник на вираз, спряжений знаменнику:

$$z = \frac{1}{1-i} = \frac{1\cdot(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i}{1+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,i.$$

Отже, $\operatorname{Re} z = \dfrac{1}{2}$, $\operatorname{Im} z = \dfrac{1}{2}$.

б) $z = \left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3$.

Для запису даного числа в алгебраїчній формі домножимо чисельник та знаменник на вираз, спряжений знаменнику, та піднесемо до третього степеня:

$$z = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 = \left(\frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}\right)^3 = \left(\frac{1-2i-1}{2}\right)^3 = (-i)^3 = -i^3 = -i\cdot i^2 = i.$$

Отже, $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z = 1$.

в) $z = \left(\dfrac{1}{2} - i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$.

Запишемо число $z_1 = \dfrac{1}{2} - i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ в тригонометричній формі, а потім піднесемо його до третього степеня, використовуючи формулу Муавра. Враховуючи, що $|z_1| = r = 1$, $\arg z_1 = -\dfrac{\pi}{3}$, маємо

$$z = \left(\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)^3 = \cos(-\pi) + i\sin(-\pi) =$$

$$= \cos\pi - i\sin\pi = -1 + 0 = -1.$$

Отже, $\operatorname{Re} z = -1$, $\operatorname{Im} z = 0$.

г) $z = \left(\dfrac{2+i^5}{1+i^{19}}\right)^2$.

Враховуючи, що $i^2 = -1$, $i^4 = 1$, маємо $i^5 = i$, $i^{19} = -i$. Тоді

$$z=\left(\frac{2+i^5}{1+i^{19}}\right)^2=\left(\frac{2+i}{1-i}\right)^2=\left(\frac{(2+i)(1+i)}{1+1}\right)^2=\left(\frac{(2-1)+3i}{2}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{1+3i}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(1+6i-9)=-2+\frac{3}{2}i.$$

Отже, $\operatorname{Re} z=-2$, $\operatorname{Im} z=\dfrac{3}{2}$. ◄

Приклад 6. Знайти модулі, головні значення аргументів та аргументи заданих комплексних чисел.

а) $z=1+i^{123}$; б) $z=-\cos\dfrac{\pi}{7}+i\sin\dfrac{\pi}{7}$.

► Запишемо задані числа у тригонометричній формі, звідки знайдемо модулі та аргументи цих комплексних чисел.

а) $z=1+i^{123}$.

$$z=1+i^{123}=1+i^3=1-i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Отже, $|z|=\sqrt{2}$, $\arg z=-\dfrac{\pi}{4}$, $\operatorname{Arg} z=-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

б) $z=-\cos\dfrac{\pi}{7}+i\sin\dfrac{\pi}{7}$.

$$z=-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{7}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{7}\right)=\cos\frac{6\pi}{7}+i\sin\frac{6\pi}{7}.$$

Отже, $|z|=1$, $\arg z=\dfrac{6\pi}{7}$, $\operatorname{Arg} z=\dfrac{6\pi}{7}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$. ◄

Приклад 7. Обчислити задані вирази, використовуючи формулу Муавра.

а) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40}$; б) $(2-2i)^7$; в) $(\sqrt{3}-3i)^6$;

г) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^8$; д) $z=(1+i)^8\left(1-i\sqrt{3}\right)^{-6}$.

► Представимо комплексні числа в тригонометричній формі та застосуємо формулу Муавра для піднесення до відповідних степенів.

а) $$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40}=\frac{2^{40}\left(\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{40}}{(\sqrt{2})^{40}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{40}}=\frac{2^{20}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{40}}{\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{40}}=$$

$$=\frac{2^{20}\left(\cos\frac{40\pi}{3}+i\sin\frac{40\pi}{3}\right)}{\left(\cos\left(-\frac{40\pi}{4}\right)-i\sin\left(-\frac{40\pi}{4}\right)\right)}=\frac{2^{20}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)}{(\cos(-10\pi)-i\sin(-10\pi))}=$$

$$=\frac{2^{20}\left(-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)}{1}=-2^{19}(1+i\sqrt{3});$$

б) $$(2-2i)^7=2^7(1-i)^7=2^7(\sqrt{2})^7\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^7=$$

$$=2^{10}\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^7=2^{10}\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right)\right)=$$

$$=2^{10}\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-2\pi\right)\right)=2^{10}\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=2^{10}\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2^{10}\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)=2^{10}(1+i);$$

в) $$(\sqrt{3}-3i)^6=(\sqrt{3})^6\cdot 2^6\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6=$$

$$=3^3\,2^6\left(\cos 6\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=3^3\,2^6(\cos(-2\pi)+i\sin(-2\pi))=3^3\,2^6=1728;$$

г) $$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^8=\frac{\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^8}{\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^8}=$$

$$=\frac{\cos(-2\pi)+i\sin(-2\pi)}{\cos 2\pi+i\sin 2\pi}=1;$$

д) $z=(1+i)^8\left(1-i\sqrt{3}\right)^{-6}=\dfrac{(1+i)^8}{(1-i\sqrt{3})^6}=\dfrac{\left[\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]^8}{\left[2\left(\frac{1}{2}-i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]^6}=$

$$=\frac{2^4}{2^6}\,\frac{\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^8}{\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)^6}=\frac{1}{4}\,\frac{\cos2\pi+i\sin2\pi}{\cos(-2\pi)+i\sin(-2\pi)}=\frac{1}{4}.$$ ◄

Приклад 8. Знайти всі значення кореня заданого степеня з комплексного числа z:

а) $\sqrt[4]{-1}$; б) $\sqrt{-1+i}$; в) $\sqrt[5]{\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)}$.

► Зводимо комплексне число z до тригонометричної форми

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

і застосовуємо формулу для визначення значень кореня:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\,\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),\quad k=\overline{0,\,n-1}.$$

а) $\sqrt[4]{-1}$.

Тут $z=-1$. Тригонометрична форма: $z=-1=\cos\pi+i\sin\pi$, бо $|z|=|-1|=1$, $\arg z=\arg(-1)=\pi$.

Отже, маємо: $\sqrt[4]{-1}=\sqrt[4]{\cos\pi+i\sin\pi}$.

Значення z_k заданого кореня отримуємо так:

$$z_k=\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\,\sin\frac{\pi+2k\pi}{4},\text{ де } k=0,1,\,2,3.$$

$k=0:\quad z_0=\cos\dfrac{\pi}{4}+i\,\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$,

$k=1:\quad z_1=\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\,\sin\dfrac{3\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$,

$k=2:\quad z_2=\cos\dfrac{5\pi}{4}+i\,\sin\dfrac{5\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)$,

$k=3:\quad z_3=\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\,\sin\dfrac{7\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$.

Всі корені знаходяться на колі з центром у точці $z=0$ і радіус якого дорівнює одиниці, і на однаковій відстані один від одного (рис.3.6а).

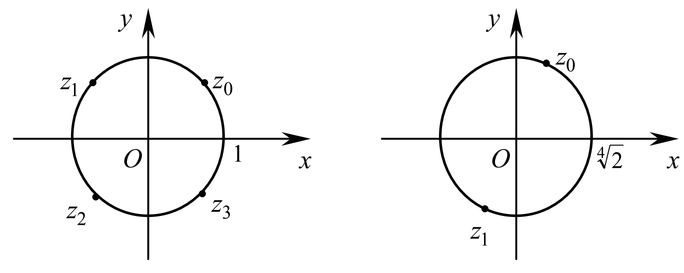


Рис.3.6

б) $\sqrt{-1+i}$.

Тут $z=-1+i$.

Тригонометрична форма числа: $z=-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$, бо

$|z|=|-1+i|=\sqrt{2}$, $\arg z=\arg(-1+i)=\dfrac{3\pi}{4}$.

Отже, маємо: $\sqrt{-1+i}=\sqrt[4]{2}\sqrt{\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\,\sin\dfrac{3\pi}{4}}$.

Значення z_k заданого кореня отримуємо так:

$$z_k=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{2}+i\,\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{2}\right),\text{ де } k=0,1.$$

$k=0:\quad z_0=\sqrt[4]{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{8}+i\,\sin\dfrac{3\pi}{8}\right)$,

$k=1:\quad z_1=\sqrt[4]{2}\left(\cos\dfrac{11\pi}{8}+i\,\sin\dfrac{11\pi}{8}\right)$.

Корені розташовуються на колі з центром в точці $z=0$ і радіус якого $\sqrt[4]{2}$ (рис.3.6б).

в) $\sqrt[5]{\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\,\sin\dfrac{\pi}{6}\right)}$.

Число $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ задане в тригонометричній формі, тому за формулою для обчислення коренів маємо:

$$z_k=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{5}+i\sin\frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{5}\right),\text{ де } k=0,1,2,3,4.$$

$$k=0:\quad z_0=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{\pi}{30}+i\sin\frac{\pi}{30}\right),$$

$$k=1:\quad z_1=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{30}+i\sin\frac{13\pi}{30}\right),$$

$$k=2:\quad z_2=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{30}+i\sin\frac{25\pi}{30}\right),$$

$$k=3:\quad z_3=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{37\pi}{30}+i\sin\frac{37\pi}{30}\right),$$

$$k=4:\quad z_4=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{49\pi}{30}+i\sin\frac{49\pi}{30}\right).\ ◄$$

Приклад 9. Знайти корені заданих рівнянь і зобразити їх на комплексній площині.

а) $z^4+1=0$; б) $z^2+1-i=0$.

► а) $z^4+1=0$.

Запишемо задане рівняння у вигляді

$$z^4=-1.$$

Тоді $z=\sqrt[4]{-1}$, тобто розв'язання задачі зводиться до знаходження всіх значень кореня четвертого степеня з комплексного числа, що дорівнює -1.

Знаходження всіх значень вказаного кореня, а також їх зображення на комплексній площині наведено в прикладі 8 п.а).

б) $z^2+1-i=0$.

Запишемо задане рівняння у вигляді

$$z^2=-1+i.$$

Тоді $z=\sqrt{-1+i}$, тобто розв'язання задачі зводиться до знаходження всіх значень кореня другого степеня з комплексного числа, що дорівнює $-1+i$.

Знаходження всіх значень вказаного кореня, а також їх зображення на комплексній площині наведено в прикладі 8 п.б). ◄

Приклад 10. Довести рівності.

а) $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$; б) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$, $|z_2|\neq 0$;

в) $\arg(z_1\cdot z_2)=\arg z_1+\arg z_2$; г) $\overline{(z_1\cdot z_2)}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$.

► Представимо комплексні числа z_1 та z_2 в показниковій формі:

$$z_1=r_1e^{i\varphi_1},\quad z_2=r_2e^{i\varphi_2},$$

де $|z_1|=r_1$, $|z_2|=r_2$, $\arg z_1=\varphi_1$, $\arg z_2=\varphi_2$.

Тоді

$$z_1\cdot z_2=r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},\quad \frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Отже,

$$|z_1\cdot z_2|=r_1r_2,\quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{r_1}{r_2}.$$

Доведемо задані рівності.

а) $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$.

$$|z_1\cdot z_2|=r_1\cdot r_2=|z_1|\cdot|z_2|.$$

б) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$, $|z_2|\neq 0$.

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{r_1}{r_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

в) $\arg(z_1\cdot z_2)=\arg z_1+\arg z_2$.

$$\arg(z_1\cdot z_2)=\varphi_1+\varphi_2=\arg z_1+\arg z_2.$$

г) $\overline{(z_1\cdot z_2)}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$.

$$\overline{z_1\cdot z_2}=r_1r_2e^{-i(\varphi_1+\varphi_2)}=r_1e^{-i\varphi_1}\cdot r_2e^{-i\varphi_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2.\ ◄$$

Приклад 11. Навести геометричний опис множини всіх точок комплексної площини, що задовольняють нерівності.

а) $\operatorname{Re}z>0$; б) $|\operatorname{Re}z|\le 1$; в) $\begin{cases}|\operatorname{Im}z|<1,\\ 0<\operatorname{Re}z<1;\end{cases}$

г) $|z-i|>1$; д) $1\le|z-1|\le 3$; е) $|\pi-\arg z|<\frac{\pi}{4}$.

► а) $\operatorname{Re}z>0$.

$\operatorname{Re}z=\operatorname{Re}(x+iy)=x,\quad x>0$.

Задана множина є півплощиною, що розташована праворуч уявної осі, причому точки осі не належать їй (рис.3.7а).

б) $|\operatorname{Re} z| \le 1$.

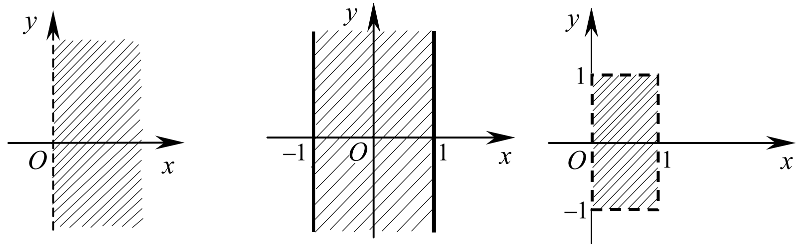
$|\operatorname{Re} z| = |\operatorname{Re}(x+iy)| \le 1 \Rightarrow |x| \le 1$, тобто $-1 \le x \le 1$.

Задана множина є смугою, що розташована між прямими $x=-1$, $x=1$, включаючи ці прямі (рис.3.7б).

в) $\begin{cases} |\operatorname{Im} z| < 1, \\ 0 < \operatorname{Re} z < 1. \end{cases}$

З умови випливає, що $\begin{cases} |y| < 1, \\ 0 < x < 1, \end{cases}$ тобто $\begin{cases} -1 < y < 1, \\ 0 < x < 1. \end{cases}$

Задана множина є прямокутником, що є перетином смуг, розташованих між прямими $y=-1$, $y=1$ та $x=0$, $x=1$, не включаючи самі ці прямі. Отже, маємо прямокутник з вершинами $-i$, $1-i$, $1+i$, i (не включаючи сторін) (рис.3.7в).



а) б) в)

Рис.3.7

г) $|z-i| > 1$.

З умови випливає, що

$|z-i| = |x+iy-i| > 1$, або $|z-i| = |x+i(y-1)| > 1$.

Тоді

$\sqrt{x^2+(y-1)^2} > 1$ або $x^2+(y-1)^2 > 1$.

Отже, задана множина є зовнішністю круга одиничного радіуса з центром у точці $z=i$, не включаючи кола (рис.3.8а).

д) $1 \le |z-1| \le 3$.

Оскільки $|z-1| = |x+iy-1| = |(x-1)+iy| = \sqrt{(x-1)^2+y^2}$, то з умови випливає, що $1 \le (x-1)^2+y^2 \le 9$.

Задана множина є кільцем, що міститься між колами із загальним центром у точці $z=1$ і радіусами 1 і 3, включаючи обидва кола (рис.3.8б).

е) $|\pi - \arg z| < \dfrac{\pi}{4}$.

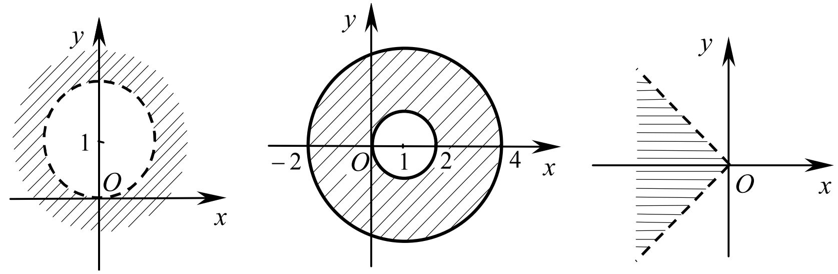
З умови випливає, що

$$-\frac{\pi}{4} < \pi - \arg z < \frac{\pi}{4},$$

$$-\frac{5\pi}{4} < -\arg z < -\frac{3\pi}{4},$$

$$\frac{3\pi}{4} < \arg z < \frac{5\pi}{4}.$$

Отже, задана множина є кутом розхилу $\dfrac{\pi}{2}$ з вершиною в точці $z=0$ і сторонами $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$ і $\varphi = \dfrac{5\pi}{4}$, не включаючи сторін (рис.3.8в), тобто бісектрисою вказаного кута є від'ємна частина дійсної осі Ox.



а) б) в)

Рис.3.8 ◄

Приклад 12. З'ясувати, які множини точок z комплексної площини відповідають нерівностям.

а) $|z-i|+|z+i| \le 4$; б) $|z-2|-|z+2| < 2$.

► а) $|z-i|+|z+i| \le 4$.

Виконаємо перетворення:

$|z-i| = |x+iy-i| = |x+i(y-1)| = \sqrt{x^2+(y-1)^2}$,

$|z+i| = |x+iy+i| = |x+i(y+1)| = \sqrt{x^2+(y+1)^2}$.

Тоді задана нерівність буде такою:

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2} + \sqrt{x^2+(y+1)^2} \le 4,$$

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2} \le 4 - \sqrt{x^2+(y+1)^2},$$

$$x^2+(y-1)^2 \le 16-8\sqrt{x^2+(y+1)^2}+x^2+(y+1)^2,$$

$$-2y \le 16-8\sqrt{x^2+(y+1)^2}+2y,$$

$$2\sqrt{x^2+(y+1)^2} \le y+4,$$

$$4x^2+4y^2+8y+4 \le y^2+8y+16,$$

$$4x^2+3y^2 \le 12,$$

$$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4} \le 1.$$

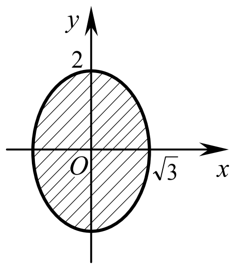
Врахуємо, що рівняння $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$ є рівнянням еліпса з півосями $a=\sqrt{3}$, $b=2$. Тоді отримана нерівність

$$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4} \le 1,$$

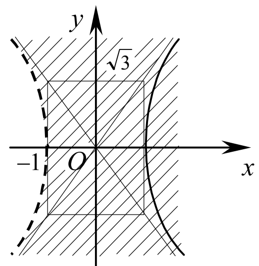
а отже, і задана нерівність

$$|z-i|+|z+i| \le 4,$$

визначає область, обмежену вказаним еліпсом (внутрішню його частину), включаючи його межу (рис.3.9а).



а)



б)

Рис.3.9

б) $|z-2|-|z+2|<2$.

Виконаємо перетворення:

$$|x+iy-2|-|x+iy+2|<2,$$

$$|(x-2)+iy|-|(x+2)+iy|<2,$$

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2}-\sqrt{(x+2)^2+y^2}<2,$$

$$(x-2)^2+y^2<4+4\sqrt{(x+2)^2+y^2}+(x+2)^2+y^2,$$

$$4\sqrt{(x+2)^2+y^2}>-8x-4,$$

$$\sqrt{(x+2)^2+y^2}>-2x-1,$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-2x-1\ge 0,\\ (x+2)^2+y^2>4x^2+4x+1,\end{cases}\\ \begin{cases}-2x-1<0,\\ (x+2)^2+y^2\ge 0,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le -\frac{1}{2},\\ 3x^2-y^2<3,\end{cases}\\ \begin{cases}x>-\frac{1}{2},\\ (x+2)^2+y^2\ge 0,\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le -\frac{1}{2},\\ x^2-\frac{y^2}{3}<1,\end{cases}\\ \begin{cases}x>-\frac{1}{2},\\ (x+2)^2+y^2\ge 0,\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le -\frac{1}{2},\\ x^2-\frac{y^2}{3}<1,\end{cases}\\ \begin{cases}x>-\frac{1}{2},\\ x,y\in \mathbf{R}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Отже, задана нерівність визначає частину площини, що розташована праворуч лівої вітки гіперболи $x^2-\frac{y^2}{3}=1$, не включаючи цю вітку (рис.3.9б). ◄

Приклад 13. Знайти множини точок на площині комплексної змінної z, які задовольняють задані умови.

а) $0<\arg\frac{i-z}{i+z}<\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{\pi}{4}<\arg(z+i)<\frac{\pi}{2}$;

в) $\operatorname{Re} z^4>\operatorname{Im} z^4$.

► а) $0<\arg\frac{i-z}{i+z}<\frac{\pi}{2}$.

Виконаємо перетворення, поклавши $Z=\frac{i-z}{i+z}$, де $z=x+iy$.

$$Z=\frac{i-z}{i+z}=\frac{i-(x+iy)}{i+(x+iy)}=\frac{-x+i(1-y)}{x+i(1+y)}=\frac{(-x+i(1-y))(x-i(1+y))}{x^2+(1+y)^2}=$$

$$= \frac{-x^2+1-y^2+i(x+xy+x-xy)}{x^2+(1+y)^2} = \frac{-x^2-y^2+1+2xi}{x^2+(1+y)^2}.$$

Отже,

$$Z = \frac{-x^2-y^2+1+2xi}{x^2+(1+y)^2} = \frac{-x^2-y^2+1}{x^2+(1+y)^2} + i\frac{2x}{x^2+(1+y)^2}.$$

Вважаючи, що $Z = X + iY$, маємо

$$X = \frac{-x^2-y^2+1}{x^2+(1+y)^2},\ Y = \frac{2x}{x^2+(1+y)^2}.$$

Оскільки за умовою $0 < \arg Z < \frac{\pi}{2}$, отримуємо

$$\arg Z = \arg\frac{i-z}{i+z} = \operatorname{arctg}\frac{Y}{X} = \operatorname{arctg}\frac{2x}{-x^2-y^2+1}.$$

В силу тієї ж умови $0 < \arg Z < \frac{\pi}{2}$ маємо, що $X = \frac{-x^2-y^2+1}{x^2+(1+y)^2} > 0$.

Звідки $-x^2-y^2+1>0$, тобто $x^2+y^2<1$.

Далі з нерівності

$$0 < \operatorname{arctg}\frac{2x}{-x^2-y^2+1} < \frac{\pi}{2}$$

маємо

$$0 < \frac{2x}{-x^2-y^2+1} < +\infty.$$

Враховуючи, що $x^2+y^2<1$, з останньої нерівності отримуємо, що $x>0$, тобто задана множина визначається системою нерівностей

$$\begin{cases} x>0, \\ x^2+y^2<1. \end{cases}$$

Отже, задана нерівність визначає множину точок, що є правою половиною круга радіуса 1 з центром у точці $z=0$, не включаючи межу (рис.3.10а).

б) $\frac{\pi}{4} < \arg(z+i) < \frac{\pi}{2}$.

Виконаємо перетворення, поклавши $Z = z+i$, де $z = x+iy$:

$$Z = z+i = x+iy+i = x+i(y+1).$$

Тоді

$$\arg(z+i) = \arg Z = \arg(X+iY) = \operatorname{arctg}\frac{Y}{X},\ \text{де}\ X=x,\ Y=y+1.$$

Оскільки за умовою $\frac{\pi}{4} < \arg Z < \frac{\pi}{2}$, маємо, що $X = x > 0$.

Далі з нерівності

$$\frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg}\frac{y+1}{x} < \frac{\pi}{2}$$

маємо

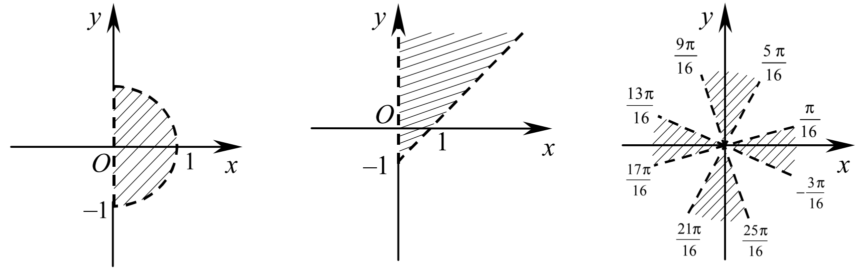
$$1 < \frac{y+1}{x} < +\infty,$$

$$\frac{y+1}{x} > 1,\quad \frac{y+1}{x} - 1 > 0,\quad \frac{y-x+1}{x} > 0.$$

Враховуючи, що $x>0$, отримуємо

$$\begin{cases} y-x+1>0, \\ x>0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y>x-1, \\ x>0. \end{cases}$$

Отже, задана нерівність визначає множину, що є кутом розхилу $\frac{\pi}{4}$ з вершиною в точці $z=-i$, сторони якого проходять через точки $z=1$ і $z=0$, не включаючи сторін (рис.3.10б).



а) б) в)

Рис.3.10

в) $\operatorname{Re} z^4 > \operatorname{Im} z^4$.

Покладемо $z = re^{i\varphi}$ і скористаємось формулою Муавра. Тоді

$$\operatorname{Re} z^4 = \operatorname{Re} r^4(\cos 4\varphi + i\sin 4\varphi) = r^4\cos 4\varphi,$$

$$\operatorname{Im} z^4 = \operatorname{Im} r^4(\cos 4\varphi + i\sin 4\varphi) = r^4\sin 4\varphi.$$

Отже, маємо

$$\operatorname{Re} r^4(\cos 4\varphi + i\sin 4\varphi) > \operatorname{Im} r^4(\cos 4\varphi + i\sin 4\varphi),$$

$$r^4\cos 4\varphi > r^4\sin 4\varphi,\quad r \neq 0,$$

$$\cos 4\varphi > \sin 4\varphi.$$

Звідси

$$\cos 4\varphi - \sin 4\varphi > 0,$$

$$\cos 4\varphi - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 4\varphi\right) > 0, \ -2\sin\frac{\pi}{4}\sin\left(4\varphi - \frac{\pi}{4}\right) > 0,$$

$$\sqrt{2}\sin\left(4\varphi - \frac{\pi}{4}\right) < 0, \quad \sin\left(4\varphi - \frac{\pi}{4}\right) < 0,$$

$$2\pi k - \pi < 4\varphi - \frac{\pi}{4} < 2\pi k,$$

$$2\pi k - \frac{3\pi}{4} < 4\varphi < \frac{\pi}{4} + 2\pi k,$$

$$\frac{\pi k}{2} - \frac{3\pi}{16} < \varphi < \frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{2}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

$k = 0: \ -\frac{3\pi}{16} < \varphi < \frac{\pi}{16}$, $\qquad k = 1: \ \frac{5\pi}{16} < \varphi < \frac{9\pi}{16}$,

$k = 2: \ \frac{13\pi}{16} < \varphi < \frac{17\pi}{16}$, $\qquad k = 3: \ \frac{21\pi}{16} < \varphi < \frac{25\pi}{16}$.

Отже, задана нерівність визначає чотири кути розхилу $\frac{\pi}{4}$ з вершиною в точці $z = 0$, бісектрисами яких є промені $\varphi = -\frac{\pi}{16} + \pi k$, $k = 0,1,2,3$, не включаючи сторін кутів (рис.3.10в). ◄

Приклад 14. З'ясувати, які лінії комплексної площини задані вказаними умовами.

а) $\mathrm{Re}\frac{1}{z} = \frac{1}{a}$, $a > 0$; $\qquad$ б) $\mathrm{Im}\frac{z-1}{z+1} = 0$.

► а) $\mathrm{Re}\frac{1}{z} = \frac{1}{a}$, $a > 0$.

Перетворимо ліву частину рівності:

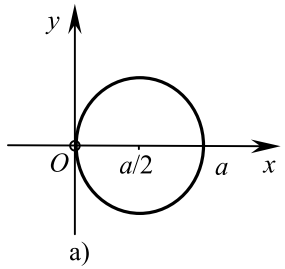
$$\mathrm{Re}\frac{1}{z} = \mathrm{Re}\frac{1}{x+iy} = \mathrm{Re}\frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \mathrm{Re}\frac{x-iy}{x^2+y^2} =$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Отже, маємо $\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{a}$, де $x^2 + y^2 \neq 0$, тобто рівність має місце в усій комплексній площині, крім точки $z = 0$. Далі, продовжуючи перетворення, отримаємо $ax = x^2 + y^2$, або $x^2 - ax + y^2 = 0$, або

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Отже, одержали коло з центром у точці $C\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ радіуса $\frac{a}{2}$ з виколотою точкою $z = 0$ (рис.3.11а).



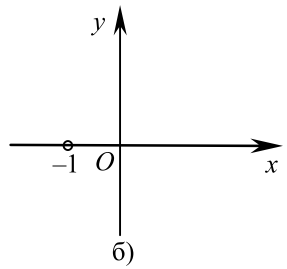


Рис.3.11

б) $\mathrm{Im}\frac{z-1}{z+1} = 0$.

Виконаємо перетворення лівої частини рівності:

$$\mathrm{Im}\frac{z-1}{z+1} = \mathrm{Im}\frac{x+iy-1}{x+iy+1} = \mathrm{Im}\frac{(x-1)+iy}{(x+1)+iy} = \mathrm{Im}\frac{((x-1)+iy)((x+1)-iy)}{(x+1)^2+y^2} =$$

$$= \mathrm{Im}\frac{x^2-1+y^2+i(xy+y-xy+y)}{(x+1)^2+y^2} = \mathrm{Im}\left(\frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2} + i\frac{2y}{(x+1)^2+y^2}\right).$$

Отже, $\mathrm{Im}\frac{z-1}{z+1} = \frac{2y}{(x+1)^2+y^2}$.

Враховуючи умову, маємо

$$\frac{2y}{(x+1)^2+y^2} = 0,$$

тобто

$$\begin{cases} y = 0, \\ (x+1)^2 + y^2 \neq 0. \end{cases}$$

Маємо всю дійсну вісь, крім точки $x = -1$ на ній (рис.3.11б). ◄

IV. Задачі для практичних занять

3.151. Знайти суму і добуток заданих комплексних чисел.

а) $z_1 = 4+5i$, $z_2 = 3-2i$;

б) $z_1 = \sqrt{2}-\sqrt{3}\,i$, $z_2 = \sqrt{2}+\sqrt{3}\,i$.

3.152. Знайти різницю та частку заданих комплексних чисел.

а) $z_1 = 1-2i$, $z_2 = 0{,}6$;

б) $z_1 = \sqrt{5}-i$, $z_2 = \sqrt{5}-2i$.

3.153. Знайти уявну частину заданого комплексного числа.

а) $z = (2-i)^3(2+11i)$; б) $z = \dfrac{2-3i}{1+4i}+i^6$;

в) $z = \dfrac{5+2i}{2-5i}-\dfrac{3-4i}{4+3i}-\dfrac{1}{i}$.

3.154. Виконати вказані дії.

а) $i^{17}+i^{18}+i^{19}+i^{20}$; б) $2i\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$;

в) $\dfrac{1+i}{1-i}+\dfrac{1-i}{1+i}$; г) $\dfrac{13+12i}{-8+6i}+\dfrac{(1+2i)^3}{2+i}$.

У задачах 3.155 – 3.157 виконати вказані операції, представивши результат в алгебраїчній формі.

3.155. а) $(2+3i)(3-i)+(1+2i)^2$;

б) $(1-i)^3-(1+i)^3$; в) $(2i-i^2)^2+(1-3i)^3$.

3.156. а) $\dfrac{1}{1+4i}+\dfrac{1}{4-i}$; б) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3$;

в) $\dfrac{(1+i)(3+i)}{3-i}-\dfrac{(1-i)(3-i)}{3+i}$; г) $\left(\dfrac{i^5+2}{i^{10}+1}\right)^2$.

3.157. а) $\dfrac{(-3+2i)^2}{(1-i)^3}+2i-5$; б) $\dfrac{(-1+i)^3-(2+i)^3}{(1-2i)^2}$.

3.158. Знайти дійсні розв'язки заданих рівнянь.

а) $(3-i)x+(1+3i)y = 1-7i$;

б) $(3x-i)(2+i)+(x-iy)(1+2i) = 5+6i$;

в) $12\left((2x+1)(1+i)+(x+y)(3-2i)\right) = 17+6i$;

г) $(x-iy)(a-ib) = i^5$, $a,b\in \mathbf{R}$, $|a|\neq|b|$.

3.159. Визначити, за яких дійсних значень x та y комплексні числа z_1 та z_2 рівні.

$z_1 = y^2-7y+9xi$, $z_2 = -12+20i+x^2i$.

3.160. Визначити, за яких дійсних значень x та y комплексні числа z_1 та z_2 спряжені.

а) $z_1 = 8x^2-20i^9$, $z_2 = 9x^2-4+10yi^3$;

б) $z_1 = -3+ix^2y$, $z_2 = x^2+y+4i$.

3.161. Обчислити задані вирази.

а) $z_1\cdot\bar{z}_2$ та $\left(\dfrac{\bar{z}_1}{z_2}\right)^2$, якщо $z_1 = 1-i\sqrt{3}$, $z_2 = \sqrt{3}+i$;

б) $z_1\cdot\bar{z}_2$ та $\dfrac{\bar{z}_1^2}{z_2}$, якщо $z_1 = 3+2i$, $z_2 = 2+2i$.

У задачах 3.162, 3.163 довести вказані рівності.

3.162. а) $\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1+\bar{z}_2$;

б) $\overline{z_1-z_2} = \bar{z}_1-\bar{z}_2$;

в) $\overline{z_1\cdot z_2} = \bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$;

г) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, $z_2\neq 0$.

3.163. а) $z+\bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z$;

б) $z-\bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}\,z$;

в) $|\bar{z}| = |z|$;

г) $z\cdot\bar{z} = |z|^2$.

3.164. Розв'язати рівняння.

а) $(1+2i)(z-i)+(4i-3)(1-iz)+1+7i = 0$;

б) $z^2+\bar{z} = 0$.

3.165. Розв'язати систему $\begin{cases} z_1+2z_2 = 1+i, \\ 3z_1+i\,z_2 = 2-3i. \end{cases}$

3.166. Знайти модулі та головні значення аргументів заданих комплексних чисел.

а) $z=i$; б) $z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$; в) $z=-5$;

г) $z=1-i$; д) $z=\dfrac{7}{2}-\dfrac{7\sqrt{3}}{2}i$; е) $z=-1-i\sqrt{3}$;

є) $z=\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}$; ж) $z=5-7i$; з) $z=2-i\sqrt{3}$;

і) $z=3i-1$; к) $z=-\cos\dfrac{\pi}{7}-i\sin\dfrac{\pi}{7}$.

3.167. Знайти модулі та аргументи заданих комплексних чисел.

а) $z=-3$; б) $z=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; в) $z=\dfrac{1-i}{1+i}$.

3.168. Представити задані комплексні числа в тригонометричній формі та зобразити їх на комплексній площині.

а) $-i$; б) -2; в) $1-i\sqrt{3}$;

г) $-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$; д) $-\cos\dfrac{\pi}{7}+i\sin\dfrac{\pi}{7}$; е) $\sin\dfrac{\pi}{3}+i\cos\dfrac{\pi}{3}$.

3.169. Обчислити вирази, використовуючи формулу Муавра.

а) $(3-i\sqrt{3})^6$; б) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$;

в) $\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{40}$; г) $\dfrac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{18}}+\dfrac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{18}}$.

3.170. Знайти та зобразити на комплексній площині всі значення коренів.

а) $\sqrt{1}$; б) $\sqrt[3]{1}$ в) $\sqrt[4]{1}$.

3.171. Знайти всі значення коренів.

а) $\sqrt{i}$; б) $\sqrt[3]{i}$; в) $\sqrt[4]{-i}$; г) $\sqrt[9]{-9}$;

д) $\sqrt{-1+i\sqrt{3}}$; е) $\sqrt[3]{-2+2i\sqrt{3}}$; є) $\sqrt[5]{-1-i}$.

3.172. Знайти корені заданих рівнянь і зобразити їх на комплексній площині.

а) $z^2+i=0$; б) $z^4-16=0$; в) $z^8-1=0$.

3.173. Представити задані комплексні числа в показниковій формі.

а) -2; б) i; в) $-i$;

г) $-1-i\sqrt{3}$; д) $5+3i$; е) $5-12i$;

є) $-3-4i$; ж) $-2+i$; з) $\sin\alpha-i\cos\alpha$.

3.174. Представити задані комплексні числа в показниковій формі та виконати дії над ними.

а) $z_1\cdot z_2$ та $\dfrac{z_1^2}{z_2}$, якщо $z_1=2\sqrt{3}-2i$, $z_2=3-3\sqrt{3}\,i$;

б) $z_1^2\cdot\bar{z}_2$ та $\dfrac{\bar{z}_2}{z_1}$, якщо $z_1=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$, $z_2=\sqrt{8}-i\sqrt{8}$.

3.175. З'ясувати геометричний зміст вказаних співвідношень.

а) $|z-z_0|=R$; $|z-z_0|>R$; $|z-z_0|<R$ $(R>0)$;

б) $|z-z_1|+|z-z_2|=2a$ $(a>0)$;

в) $|z-z_1|-|z-z_2|=2a$ $(a>0)$.

У задачах 3.176 – 3.178 знайти множини точок на комплексній площині, які задовольняють задані умови.

3.176. а) $|z|\ge 2$; б) $\dfrac{1}{|z|}\ge 1$, $z\ne 0$.

3.177. а) $|z-5i|=8$; б) $|z-1-i|\le 4$.

3.178. а) $0<\arg z\le\dfrac{\pi}{4}$; б) $1<|z+i|<2$, $\dfrac{\pi}{4}<\arg z<\dfrac{\pi}{2}$.

3.179. Навести геометричний опис множини всіх точок комплексної площини, що задовольняють нерівностям.

а) $\operatorname{Im} z\le 1$; б) $|z|\le 1$; в) $0<|z+i|<2$.

3.180. З'ясувати, які множини точок комплексної площини відповідають заданим нерівностям.

а) $\operatorname{Re}\frac{1}{z} < \frac{1}{2}$; б) $|1+z| < |1-z|$; в) $|z| > 1 - \operatorname{Re} z$.

У задачах 3.181 – 3.184 з'ясувати, які лінії на комплексній площині задані вказаними рівняннями.

3.181. а) $\operatorname{Re}\frac{z-1}{z+1} = 0$; б) $\operatorname{Re}\frac{z-a}{z+a} = 0$, $a > 0$;

в) $\operatorname{Re}(1+z) = |z|$.

3.182. а) $\operatorname{Im} z^2 = 2$; б) $\operatorname{Re}\bar{z}^2 = 1$; в) $\operatorname{Im}\frac{1}{z} = \frac{1}{2}$.

3.183. $z^2 + \bar{z}^2 = 1$.

3.184. $2z\bar{z} + (2+i)z + (2-i)\bar{z} = 2$.

3.185. а) $|z-2| = |1-2\bar{z}|$; б) $|z-z_1| = |z-z_2|$;

в) $\operatorname{Re}(z^2 - \bar{z}) = 0$.

У задачах 3.186, 3.187 записати у комплексній формі рівняння вказаних ліній.

3.186. а) координатних осей Ox та Oy;

б) прямої $y = x$;

в) прямої $y = kx + b$, $k, b \in \mathbf{R}$.

3.187. а) рівнобічної гіперболи $x^2 - y^2 = a^2$;

б) кола $x^2 + y^2 + 2x = 0$.

ГЛАВА 4. **ЛІНІЙНІ ПРОСТОРИ. ЕВКЛІДІВ ПРОСТІР**

§1. Лінійні простори. Підпростори

I. Короткі теоретичні відомості

Лінійні простори. Множина $\mathbf{L}$ називається *лінійним дійсним простором*, якщо виконані такі умови:

1) існує правило, за яким будь-яким елементам $x,\ y\in \mathbf{L}$ ставиться у відповідність елемент $z=x+y\in \mathbf{L}$, який називається сумою елементів;

2) існує правило, за яким будь-якому елементу $x\in \mathbf{L}$ та числу $\alpha\in \mathbf{R}$, ставиться у відповідність елемент $z=\alpha x\in \mathbf{L}$, який називається добутком елемента x на число α;

3) введені операції задовольняють наступним восьми аксіомам:

1. $x+y=y+x$.

2. $(x+y)+z=x+(y+z)$.

3. Існує елемент $0\in \mathbf{L}$, такий, що $\forall x\in \mathbf{L}\quad x+0=x$ (елемент 0 називається *нульовим*).

4. $\forall x\in \mathbf{L}\ \ \exists$ елемент $(-x)\in \mathbf{L}$, такий, що $x+(-x)=0$ (елемент $-x$ називається *протилежним*).

5. $\forall x\in \mathbf{L}\quad 1\cdot x=x$.

6. $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$, $\alpha,\beta\in \mathbf{R}$.

7. $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$, $\alpha\in \mathbf{R}$.

8. $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$, $\alpha,\beta\in \mathbf{R}$.

Елементи лінійного простору називають також *векторами* та позначають $\vec{x},\vec{y},\vec{z},\dots$. Лінійний простір називається *комплексним*, якщо операція множення вектора на число визначена для комплексних чисел $(\alpha\in \mathbf{C})$.

Система векторів $\vec{x}_1,\ \vec{x}_2,\ \dots,\ \vec{x}_s\in \mathbf{L}$ називається *лінійно залежною*, якщо знайдуться такі числа $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_s$, не всі рівні нулю, що виконується рівність

$$\sum_{i=1}^{s}\lambda_i\,\vec{x}_i=0\,.$$

У противному разі, коли вказана рівність має місце, якщо всі $\lambda_i=0$, $i=\overline{1,s}$, система векторів називається *лінійно незалежною*.

Упорядкована система векторів $\beta=(\vec e_1,\vec e_2,\dots,\vec e_n)$ називається *базисом* у лінійному просторі $\mathbf{L}$, якщо

а) $\vec e_k\in\mathbf{L}$, $k=\overline{1,n}$;

б) система векторів $(\vec e_1,\vec e_2,\dots,\vec e_n)$ лінійно незалежна;

в) $\forall\vec x\in\mathbf{L}$ знайдуться такі числа $x_1, x_2,\dots,x_n$, що $\vec x=\sum_{k=1}^{n}x_k\vec e_k$.

Ця формула називається *розкладом* вектора $\vec x$ за базисом β, а коефіцієнти $x_1, x_2,\dots,x_n$ – координатами цього вектора у базисі β.

Якщо $\beta=(\vec e_1,\vec e_2,\dots,\vec e_n)$ – базис лінійного простору $\mathbf{L}$, то цей простір називається n*-вимірним* та позначається $\mathbf{L}_n$, а число n його *вимірністю* і позначається $n=\dim\mathbf{L}$.

Нехай $\mathbf{L}_n$ – довільний n-вимірний простір, $\beta=(\vec e_1,\vec e_2,\dots,\vec e_n)$ – фіксований базис у ньому. Тоді вектору $\vec x$ ставиться у відповідність стовпець його координат у цьому базисі, тобто

$$\vec x=\sum_{i=1}^{n}x_i\vec e_i \quad\Leftrightarrow\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}.$$

Лінійні операції над векторами у координатній формі виглядають таким чином:

$$\vec z=\vec x+\vec y \quad\Leftrightarrow\quad Z=X+Y,$$

$$\vec y=\lambda\vec x \;\Leftrightarrow\; Y=\lambda X.$$

Нехай $\beta=(\vec e_1,\vec e_2,\dots,\vec e_n)$ та $\beta'=(\vec e_1',\vec e_2',\dots,\vec e_n')$, два різні базиси у $\mathbf{L}_n$. Кожний з векторів базису β' розкладемо за базисом β:

$$\vec e_k'=t_{1k}\vec e_1+\dots+t_{nk}\vec e_n \Leftrightarrow E_k'=\begin{pmatrix}t_{1k}\\\vdots\\t_{nk}\end{pmatrix}.$$

Матрицею переходу від базису β до базису β' називається матриця

$$T=\begin{pmatrix}t_{11}\dots t_{1n}\\\dots\dots\dots\\t_{n1}\dots t_{nn}\end{pmatrix},$$

де k-й стовпець є стовпець E_k' координат вектора $\vec e_k'$ у базисі β.

Якщо $\vec x$ – довільний вектор з $\mathbf{L}_n$, X та X' – стовпці його координат у базисах β та β' відповідно, то має місце рівність:

$$X=T\,X',$$

звідки

$$X'=T^{-1}X.$$

Це формули *перетворення координат* при зміні базису.

Підпростори. *Підпростором* лінійного простору $\mathbf{L}$ називається підмножина $\mathbf{L}'\subset\mathbf{L}$, яка має властивості:

1°. $\vec x,\vec y\in\mathbf{L}' \;\Rightarrow\; \vec x+\vec y\in\mathbf{L}'$;

2°. $\vec x\in\mathbf{L}' \;\Rightarrow\; \lambda\vec x\in\mathbf{L}'\ \forall\lambda$.

Нехай Q – довільна система векторів $\vec x_1,\vec x_2,\dots,\vec x_s$ з лінійного простору $\mathbf{L}$.

Лінійною оболонкою системи Q називається множина векторів

$$L(Q)=\left\{\vec x \;\middle|\; \vec x=\sum_{i=1}^{s}\lambda_i\vec x_i,\quad \vec x_i\in Q,\ \lambda_i\in\mathbf{R},\ i=\overline{1,s}\right\}.$$

II. Контрольні питання та завдання

1. Що називається дійсним лінійним простором?

2. Який лінійний простір називається комплексним?

3. Яка система векторів називається лінійно залежною; лінійно незалежною?

4. Що називається вимірністю лінійного простору; базисом?

5. Вказати вимірність та базис лінійного простору $\mathbf{L}$, якщо відомо, що у цьому просторі існує n лінійно незалежних векторів $\vec e_1,\vec e_2,\dots,\vec e_n$ і будь-який вектор $\vec x\in\mathbf{L}$ лінійно виражається через них.

6. Що називається розкладом вектора $\vec x$ лінійного простору $\mathbf{L}$ за базисом $\vec e_1,\vec e_2,\dots,\vec e_n$? Що називається координатами вектора $\vec x$ у базисі $\{\vec e_i\}$?

7. Дайте означення матриці системи векторів $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m$ у даному базисі.

8. Як визначити, чи є система m векторів n-вимірного лінійного простору лінійно незалежною, якщо відомі координати векторів у деякому базисі?

9. Дайте означення матриці переходу від одного базису до другого.

10. Чи може будь-яка матриця T порядку n бути матрицею переходу від одного базису до другого у n-вимірному просторі?

11. Запишіть формули перетворення координат вектора $\vec{x}$, якщо відома матриця переходу від базису $\{\vec{e}_i\}$ до базису $\{\vec{e}_i'\}$.

12. Дайте означення підпростору лінійного простору $\mathbf{L}$.

13. Дайте означення лінійної оболонки системи векторів.

III. Приклади розв'язання задач

Приклад 1. З'ясувати, чи є дійсним лінійним простором множина усіх дійсних матриць другого порядку.

► Оскільки при додаванні дійсних матриць другого порядку, а також при множенні матриці на дійсне число одержуємо дійсні матриці другого порядку, введені операції є операціями на даній множині. Аксіоми 1 – 8 лінійного простору виконуються. Дійсно, вказані у цих аксіомах операції над матрицями другого порядку зводяться до відповідних операцій над дійсними числами, для яких аксіоми 1 – 8, як відомо, мають місце. Отже, множина усіх дійсних матриць другого порядку є дійсним лінійним простором. ◄

Приклад 2. З'ясувати, чи є лінійно незалежною система векторів

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

лінійного дійсного простору квадратних матриць другого порядку.

► Наведена система векторів є лінійно незалежною, оскільки рівність

$$\alpha_1\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

або

$$\begin{pmatrix} 2\alpha_1 + \alpha_2 & 2\alpha_2 - \alpha_3 \\ \alpha_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

справедлива тільки тоді, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Дійсно, наведена рівність матриць має місце тільки тоді, коли

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0; \\ 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0; \\ \alpha_3 = 0, \end{cases}$$

а ця система має єдиний розв'язок – нульовий. ◄

Приклад 3. Довести, що у лінійному дійсному просторі дійсних квадратних матриць другого порядку вектори

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

утворюють базис, і знайти в цьому базисі координати вектора

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

► Вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ лінійно незалежні, тому що рівність

$$\alpha_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

або

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 2\alpha_2 \\ 3\alpha_3 & -\alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

виконується тільки при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$.

Легко переконатися у тому, що будь-який вектор простору, який розглядається, лінійно виражається через вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$. Отже, вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ утворюють базис.

Позначимо координати вектора $\vec{x}$ у даному базисі через β_1, β_2, β_3, β_4. Тоді

$$\vec{x} = \beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \beta_3 \vec{e}_3 + \beta_4 \vec{e}_4,$$

або

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \beta_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

або

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 2\beta_2 \\ 3\beta_3 & -\beta_4 \end{pmatrix},$$

звідки $\beta_1 = 2$, $2\beta_2 = 6$, $3\beta_3 = -3$, $-\beta_4 = 5$. Отже, $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 3$, $\beta_3 = -1$, $\beta_4 = -5$ – шукані координати. ◄

Приклад 4. У лінійному дійсному просторі дійсних квадратних матриць другого порядку знайти матрицю переходу від базису

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

до базису

$$\vec{e}\,'_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \vec{e}\,'_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \vec{e}\,'_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \vec{e}\,'_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

► З умови випливає, що $\vec{e}\,'_1 = 2\vec{e}_1$, $\vec{e}\,'_2 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$, $\vec{e}\,'_3 = 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$, $\vec{e}\,'_4 = -\vec{e}_4$. Матриця

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

в j-му $(j = \overline{1,4})$ стовпці якої стоять координати вектора $\vec{e}\,'_j$ у базисі $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, $\vec{e}_4$, є матрицею переходу від базису $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, $\vec{e}_4$ до базису $\vec{e}\,'_1$, $\vec{e}\,'_2$, $\vec{e}\,'_3$, $\vec{e}\,'_4$. ◄

Приклад 5. Задана матриця $T = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ переходу від базису $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ до базису $\vec{e}\,'_1$, $\vec{e}\,'_2$. Знайти координати вектора $\vec{a} = 4\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ у базисі $\vec{e}\,'_1$, $\vec{e}\,'_2$.

► Відомо, що $X' = T^{-1}X$, де X та X' – матриці-стовпці з координат вектора $\vec{a}$ відповідно в базисах $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ та $\vec{e}\,'_1$, $\vec{e}\,'_2$. З того, що

$$T^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

маємо

$$X' = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 10 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, координатами вектора $\vec{a}$ в базисі $\vec{e}\,'_1$, $\vec{e}\,'_2$ будуть $\frac{5}{4}, -\frac{1}{8}$, тобто $\vec{a} = \left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{8}\right)$. ◄

Приклад 6. Знайти координати геометричного вектора $\vec{x} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ в базисі β', який складається з векторів $\vec{e}\,'_1 = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{e}\,'_2 = \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{e}\,'_3 = \vec{i} + \vec{k}$.

► Випишемо координати векторів $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3$ у вихідному базисі $\beta = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$E'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Звідси матриця переходу $T_{\beta\to\beta'}$ має вигляд

$$T_{\beta\to\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обертаючи матрицю $T_{\beta\to\beta'}$ та використовуючи вираз $X' = (T_{\beta\to\beta'})^{-1} X$, знаходимо

$$X' = (T_{\beta\to\beta'})^{-1} X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

тобто $\vec{x} = 2\vec{e}_2' - \vec{e}_3'$. ◄

Приклад 7. Система координат xOy повернута навколо початку координат на кут α (рис. 4.1). Виразити координати вектора $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ у новій системі координат через його координати у старій системі.

► Розкладемо вектори $\vec{i}'$ та $\vec{j}'$ за ортами $\vec{i}$ та $\vec{j}$:

$$\vec{i}' = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\sin\alpha,$$

$$\vec{j}' = \vec{i}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) + \vec{j}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\vec{i}\sin\alpha + \vec{j}\cos\alpha.$$

Запишемо матрицю переходу від старого базису $\vec{i}, \vec{j}$ до нового $\vec{i}', \vec{j}'$:

$$\mathrm{T} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Враховуючи, що $X = \mathrm{T}X'$, маємо

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,$$

$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.$$

Звідси отримуємо, що

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha,$$

$$y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

– це координати вектора $\vec{a}$ у новій системі координат.

Отримали формули перетворення координат при повороті системи координат при переході від нової системи координат до старої, і навпаки. ◄

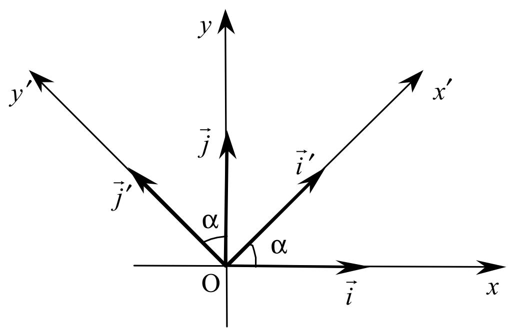


Рис. 4.1

Приклад 8. Знайти який-небудь базис та визначити вимірність лінійного простору розв'язків системи:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

► Базисом лінійного простору U розв'язків однорідної системи рівнянь є фундаментальна система розв'язків, а вимірність цього простору $\dim \mathrm{U} = n - r$, де n – число невідомих, $r = \mathrm{Rg}\,A$, A – матриця системи. Тому задача зводиться до знаходження рангу матриці A та фундаментальної системи розв'язків.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{Rg}\,A = 2; \quad \dim \mathrm{U} = 4 - 2 = 2.$$

Ставимо у відповідність перетвореній матриці A скорочену систему рівнянь, приймаючи, що x_1, x_2 – базисні змінні, x_3, x_4 – вільні змінні.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0; \\ \quad - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 - x_4; \\ \quad x_2 = x_3 - x_4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 - x_4 - x_2; \\ x_2 = x_3 - x_4, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 - x_4 - x_3 + x_4 = 0\,; \\ x_2 = x_3 - x_4\,, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0\,; \\ x_2 = x_3 - x_4\,. \end{cases}$$

Позначивши $x_3 = c_1,\ x_4 = c_2$, отримуємо загальний розв'язок системи:

$$X(c_1, c_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ c_1 - c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R}\,.$$

Звідси отримуємо фундаментальну систему розв'язків:

$$E_1 = X(1,\ 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = X(0, 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином: $\dim \mathrm{U} = 2$.

Базис U: E_1, E_2. ◄

IV. Задачі для практичних занять

У задачах $4.1 - 4.5$ перевірити, що дані множини є лінійними просторами.

4.1. Множина $\mathbf{V_3}$ усіх геометричних векторів (операції над геометричними векторами визначені в §1, гл.1).

4.2. Множина $\mathbf{R}^n$ усіх арифметичних n-компонентних векторів $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ (операції над арифметичними векторами визначені в §1, гл.1).

4.3. Множина $\mathbf{P}_n$ усіх многочленів

$$p(t) = a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$$

степеня $\le n-1$, з природним чином введеними операціями додавання многочленів та множення їх на числа.

4.4. Множина усіх геометричних векторів, що виходять з початку координат, кінці яких лежать на фіксованій прямій.

4.5. Множина усіх геометричних векторів, для яких виконується умова $|\vec{x}| > a$, де $a > 0$ – фіксоване число.

4.6. У просторі $\mathbf{V_3}$ задані вектори

$$\vec{e}_1' = \vec{i} + \vec{j}\,, \ \vec{e}_2' = \vec{i} - \vec{j}\,, \ \vec{e}_3' = -\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}\,.$$

Довести, що система $\beta' = (\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3')$ – базис у $\mathbf{V_3}$, та записати матрицю переходу $T_{\beta\to\beta'}$, де $\beta = (\vec{e}_1 = \vec{i}, \vec{e}_2 = \vec{j}, \vec{e}_3 = \vec{k})$. Знайти координати вектора $\vec{x} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ в базисі β'.

У задачах $4.7 - 4.8$ знайти матрицю переходу $T_{\beta\to\beta'}$, де $\beta = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ і $\beta' = (\vec{i}\,', \vec{j}\,', \vec{k}\,')$ – ортонормовані базиси в $\mathbf{V_3}$, та записати стовпець координат вектора $\vec{x} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ в базисі β'.

4.7. Базис β' отримано заміною на протилежний напрямок усіх трьох базисних ортів β.

4.8. Базис β' отримано перестановкою $\vec{i}\,' = \vec{j}, \vec{j}\,' = \vec{k}, \vec{k}\,' = \vec{i}$.

4.9. З'ясувати, чи є лінійно незалежною система векторів у просторі $\mathbf{V_2}$.

а) $\vec{x}_1 = 3\vec{i} + \vec{j}, \quad \vec{x}_2 = \vec{i} - \vec{j}$;

б) $\vec{x}_1 = 2\vec{i}, \quad \vec{x}_2 = 3\vec{j}$;

в) $\vec{x}_1 = \vec{i} - 2\vec{j}, \quad \vec{x}_2 = 2\vec{j} - \vec{i}$;

г) $\vec{x}_1 = \vec{i} + \vec{j}, \quad \vec{x}_2 = 2\vec{j}, \quad \vec{x}_3 = 4\vec{i} - \vec{j}$.

4.10. З'ясувати, чи є лінійно незалежною система векторів у просторі $\mathbf{V_3}$.

а) $\vec{x}_1 = 2\vec{i} + \vec{j}\,, \ \vec{x}_2 = \vec{j} + 3\vec{k}$;

б) $\vec{x}_1 = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}\,, \ \vec{x}_2 = 4\vec{i} + \vec{j}\,, \ \vec{x}_3 = 5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$;

в) $\vec{x}_1 = \vec{j} - 3\vec{k}\,, \ \vec{x}_2 = 2\vec{i} + 4\vec{j}\,, \ \vec{x}_3 = 5\vec{k}$.

4.11. З'ясувати, чи є лінійно незалежною система векторів у лінійному просторі квадратних матриць заданого порядку:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4.12. Знайти ранг та який-небудь базис системи геометричних векторів $\vec{x}_1 = -\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{x}_2 = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{x}_3 = -4\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{x}_4 = 3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$.

4.13. У просторі $\mathbf{R}^4$ задані вектори $\vec{e}_1' = (1, 2, -1, -2)$, $\vec{e}_2' = (2, 3, 0, -1)$, $\vec{e}_3' = (1, 2, 1, 4)$, $\vec{e}_4' = (1, 3, -1, 0)$. Довести, що система $\beta' = (\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3', \vec{e}_4')$ – базис у $\mathbf{R}^4$, знайти матрицю переходу $T_{\beta\to\beta'}$, де β – канонічний базис у $\mathbf{R}^4$. Знайти координати вектора $\vec{x} = (7, 14, -1, 2)$ у базисі β'.

4.14. Довести, що система многочленів $1, t, t^2, \dots, t^{n-1}$ утворює базис у просторі $\mathbf{P}_n$ усіх многочленів степеня $\le n-1$ і, отже, $\dim \mathbf{P}_n = n$ (цей базис називається *канонічним*). Знайти координати:

а) многочлена $p(t) = -3t^2 + 1$ у канонічному базисі простору $\mathbf{P}_3$;

б) многочлена $q(t) = t^2 - 2t$ у канонічному базисі простору $\mathbf{P}_4$.

4.15. Довести, що система многочленів $t^3 + t^2 + t + 1$, $t^2 + t + 1$, $t + 1$, 1 лінійно незалежна.

4.16. Довести, що система многочленів $t^2 + 1$, $-t^2 + 2t$, $t^2 - t$ утворює базис у просторі $\mathbf{P}_3$. Виписати у цьому базисі стовпець координат многочлена $p(t) = -2t^2 + t - 1$.

4.17. Знайти координати многочлена $p(t) = t^2 - t + 2$ у базисі 1, $t - 1$, $(t-1)^2$.

4.18. З'ясувати, чи утворює базис в арифметичному просторі $\mathbf{R}^3 = \{\vec{x} = (a_1, a_2, a_3) \mid a_i \in \mathbf{R}\}$ задана система векторів:

а) $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$;

б) $(1, 2, -7)$, $(0, 3, 1)$, $(0, 0, 1)$;

в) $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 0)$;

г) $(3, 0, 5)$, $(1, 2, -1)$;

д) $(1, 2, -1)$, $(2, 3, 4)$, $(3, 4, 6)$, $(-1, 7, 2)$.

4.19. З'ясувати, чи утворює базис у лінійному просторі квадратних матриць $A = (a_{ij})$, $a_{ij} \in \mathbf{R}$, другого порядку дана система векторів:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

4.20. Знайти вимірність та один із базисів лінійного простору розв'язків системи:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0\,; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0\,, \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0; \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0; \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

4.21. Знайти координати кожного з вказаних векторів простору $\mathbf{P_3}(x)$ у базисі $x^2, x, 1$:

а) $3x^2 - 2x + 5$; б) $4x - 1$; в) $(2x+3)^2$.

4.22. Знайти координати кожного з вказаних векторів простору дійсних квадратних матриць другого порядку у базисі $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

а) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 7 & 12 \end{pmatrix}$.

У задачах 4.23 – 4.25 у довільному просторі $\mathbf{L}_n$ вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ і $\vec{x}$ задані своїми координатами в деякому базисі β. Довести, що система $\beta' = (\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \dots, \vec{e}_n{}')$ – базис у $\mathbf{L}_n$ та знайти стовпець X' координат вектора $\vec{x}$ у цьому базисі.

4.23. $E_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $E_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix}$.

4.24. $E_1' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $E_2' = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$, $E_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$.

4.25. $E_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $E_2' = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $E_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $E_4' = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$X = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

У задачах 4.26 – 4.29 визначити, чи є задані множини підпросторами у відповідних просторах. У разі позитивної відповіді знайти їх вимірність та базис.

4.26. Множина усіх геометричних векторів з $\mathbf{V_3}$:

а) компланарних фіксованій площині;

б) таких, що задовольняють умові $(\vec{x}, \vec{a}) = 0$, де $\vec{a}$ – фіксований вектор;

в) таких, що задовольняють умові $|\vec{x}| = 1$.

4.27. Множина усіх векторів із $\mathbf{R}^n$ вигляду:

а) $\vec{x} = (0, x_2, 0, x_4, x_5, \dots, x_n)$;

б) $\vec{x} = (1, x_2, 1, x_4, x_5, \dots, x_n)$.

4.28. Множина усіх векторів довільного простору $\mathbf{L}_n$, координати яких у фіксованому базисі відповідають умовам:

а) $x_1 = x_n$; б) $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$;

в) $x_1 - x_2 = 1$; г) $\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0\,; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$

або, в матричній формі, $AX = 0$, де A – задана матриця розміру $m \times n$.

4.29. Множина усіх матриць A порядку n, що відповідають умовам:

а) $A^T = A$ (симетричні матриці);

б) $\det A = 0$.

4.30. Знайти вимірність лінійної оболонки $L(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$, арифметичних векторів $\vec{x}_1 = (1, 0, 2, -1)$, $\vec{x}_2 = (0, -1, 2, 0)$. Показати, що вектор $\vec{x} = (1, -1, 4, -1)$ належить до $L(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$.

У задачах 4.31 – 4.32 знайти вимірність та будь-який базис лінійної оболонки заданої системи арифметичних векторів:

4.31. $\vec{x}_1 = (1, 0, 0, -1)$, $\vec{x}_2 = (2, 1, 1, 0)$, $\vec{x}_3 = (1, 1, 1, 1)$, $\vec{x}_4 = (1, 2, 3, 4)$, $\vec{x}_5 = (0, 1, 2, 3)$.

4.32. $\vec{x}_1 = (1, 1, 1, 1, 0)$, $\vec{x}_2 = (1, 1, -1, -1, -1)$, $\vec{x}_3 = (2, 2, 0, 0, -1)$, $\vec{x}_4 = (1, 1, 5, 5, 2)$, $\vec{x}_5 = (1, -1, -1, 0, 0)$.

§2. Евклідів простір

I. Короткі теоретичні відомості

Дійсний евклідів простір. Дійсний лінійний простір $\mathbf{L}$ називається *дійсним евклідовим простором або евклідовим простором*, якщо будь-яким векторам $\vec{x}$, $\vec{y}$, що належать $\mathbf{L}$, ставиться у відповідність дійсне число $(\vec{x}, \vec{y})$ – скалярний добуток векторів, причому виконуються такі аксіоми:

1. $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$;
2. $(\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{z}) + (\vec{y}, \vec{z})$;
3. $(\lambda\vec{x}, \vec{y}) = \lambda(\vec{x}, \vec{y})$, $\lambda \in \mathbf{R}$;
4. $(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$, причому $(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \iff \vec{x} = 0$.

Позначення: $\mathbf{E}$ – дійсний евклідів простір, $\mathbf{E}_n$ – n-вимірний дійсний евклідів простір.

Довжиною (*нормою*) вектора $\vec{x}$ називається число

$$|\vec{x}| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}.$$

Якщо $|\vec{x}| = 1$, то вектор $\vec{x}$ називається *нормованим*.

Кут між ненульовими векторами $\vec{x}$ та $\vec{y}$ визначається за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{|\vec{x}||\vec{y}|}.$$

Ненульові вектори $\vec{x}$, $\vec{y} \in \mathbf{E}$ називаються *ортогональними*, якщо $(\vec{x}, \vec{y}) = 0$.

Базис $\boldsymbol{\beta} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ називається *ортонормованим*, якщо

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}.$$

Символ δ_{ij} називається *символом Кронекера*.

Теорема. У всякому евклідовому n-вимірному просторі $\mathbf{E}_n$ існує ортонормований базис.

Побудова ортонормованого базису. Якщо в $\mathbf{E}_n$ задано довільний базис $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n$, то перехід до ортогонального базису $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n$ виконується за формулами:

$$\vec{f}_1 = \vec{g}_1; \quad \vec{f}_k = \vec{g}_k + \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i^{(k)} \vec{f}_i, \quad k = \overline{2, n},$$

де

$$\alpha_i^{(k)} = -\frac{(\vec{f}_i, \vec{g}_k)}{(\vec{f}_i, \vec{f}_i)}, \quad i = \overline{1, k-1}.$$

Перехід від ортогонального базису $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n$ до ортонормованого базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ проводиться за формулами:

$$\vec{e}_i = \frac{\vec{f}_i}{|\vec{f}_i|}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Процес побудови за заданим базисом ортогонального називається *процесом ортогоналізації*.

Скалярний добуток векторів виражається через координати векторів в ортонормованому базисі таким чином:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = X^T Y = Y^T X,$$

де

$$\vec{x} = (x_1, ..., x_n) \quad \Leftrightarrow \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = (y_1, ..., y_n) \quad \Leftrightarrow \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Довжина вектора визначається так:

$$|\vec{x}| = \sqrt{(\vec{x},\ \vec{x})} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\ .$$

Комплексний евклідів простір. Комплексний лінійний простір **L** називається *унітарним* або *комплексним евклідовим простором*, якщо $\forall\, \vec{x},\ \vec{y} \in \mathbf{L}$ ставиться у відповідність комплексне число $(\vec{x}, \vec{y})$ – ермітів добуток векторів, або скалярний добуток векторів у комплексному просторі, причому виконуються такі аксіоми:

1. $(\vec{x},\ \vec{y}) = \overline{(\vec{y},\ \vec{x})}$;
2. $(\vec{x} + \vec{y},\ \vec{z}) = (\vec{x},\ \vec{z}) + (\vec{y},\ \vec{z})$;
3. $(\lambda\vec{x},\ \vec{y}) = \lambda(\vec{x},\ \vec{y}),\ \lambda \in \mathbf{C}$;
4. $(\vec{x},\ \vec{x}) \geq 0$, причому $(\vec{x},\ \vec{x}) = 0 \ \Leftrightarrow\ \vec{x} = 0$.

Позначення: **U** – унітарний простір, $\mathbf{U}_n$ – n -вимірний унітарний простір.

Зауважимо, що з аксіом 1 та 3 випливає, що $(\vec{x},\ \lambda\vec{y}) = \overline{\lambda}(\vec{x},\ \vec{y})$.

В унітарному просторі не вводиться кут між векторами. Однак решта означень та результатів, сформульованих для дійсного евклідова простору, справедливі і для унітарного простору.

Ермітів добуток векторів виражається через координати векторів в ортонормованому базисі за формулою:

$$(\vec{x},\ \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, \overline{y}_i = X^T\overline{Y} = \overline{Y}^T X\ ,$$

де

$$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \quad \Leftrightarrow \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = (y_1, \ldots, y_n) \quad \Leftrightarrow \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Довжина вектора визначається так:

$$|\vec{x}| = \sqrt{(\vec{x},\ \vec{x})} = \sqrt{x_1\,\overline{x}_1 + x_2\,\overline{x}_2 + \ldots + x_n\,\overline{x}_n} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\ x_i\ |^2}\ .$$

II. Контрольні питання та завдання

1. Що називається дійсним евклідовим простором?

2. Що називається довжиною (нормою) вектора $\vec{x}$ дійсного евклідова простору **E** ?

3. Яка система векторів називається ортогональною?

4. Яка система векторів називається ортонормованою?

5. Що називається ортогоналізацією базису?

6. Записати формулу, за якою обчислюється скалярний добуток векторів через їх координати в ортонормованому базисі.

7. Записати формулу, за якою обчислюється довжина (норма) вектора через його координати в ортонормованому базисі.

8. Дати означення комплексного евклідова простору (унітарного простору).

9. Записати формулу, за якою обчислюється скалярний (ермітів) добуток векторів через їх координати у ортонормованому базисі унітарного простору.

10. Записати формулу, за якою обчислюється довжина (норма) вектора через його координати в ортонормованому базисі унітарного простору.

III. Приклади розв'язання задач

Приклад 1. В евклідовім просторі $\mathbf{E_2}$ в ортонормованому базисі задано вектори $\vec{x} = (1, -3)$, $\vec{y} = (2, 3)$. Знайти $(\vec{x}, \vec{y})$, $\cos(\vec{x}, \vec{y})$.

► Оскільки в просторі $\mathbf{E_2}$ скалярний добуток векторів $\vec{x} = (x_1, x_2)$ та $\vec{y} = (y_1, y_2)$ визначається рівністю $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1\,y_1 + x_2\,y_2$, маємо

$$(\vec{x}, \vec{y}) = 1 \cdot 2 + (-3)\,3 = -7\,.$$

За означенням

$$\cos(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{|\vec{x}||\vec{y}|},$$

а $|\vec{x}| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, отже

$$\cos(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{-7}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{-7}{\sqrt{130}} \approx -0{,}61. ◄$$

Приклад 2. В евклідовім просторі $\mathbf{E_3}$ за даним базисом $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$ побудувати ортонормований базис.

$$\vec{g}_1 = (1, -1, 1), \quad \vec{g}_2 = (2, -3, 4), \quad \vec{g}_3 = (2, 2, 6).$$

► Покладемо

$$\vec{f}_1 = \vec{g}_1 = (1, -1, 1),$$

$$\vec{f}_2 = \vec{g}_2 + \alpha_1^{(2)} \vec{f}_1,$$

де

$$\alpha_1^{(2)} = -\frac{(\vec{f}_1, \vec{g}_2)}{(\vec{f}_1, \vec{f}_1)} = -\frac{(1, -1, 1)(2, -3, 4)}{3} = -\frac{2+3+4}{3} = -3.$$

Таким чином, $\vec{f}_2 = (2, -3, 4) - 3(1, -1, 1) = (-1, 0, 1)$.

Далі знаходимо

$$\vec{f}_3 = \vec{g}_3 + \alpha_1^{(3)} \vec{f}_1 + \alpha_2^{(3)} \vec{f}_2,$$

де

$$\alpha_1^{(3)} = -\frac{(\vec{f}_1, \vec{g}_3)}{(\vec{f}_1, \vec{f}_1)} = -\frac{(1, -1, 1)(2, 2, 6)}{3} = -\frac{2-2+6}{3} = -2,$$

$$\alpha_2^{(3)} = -\frac{(\vec{f}_2, \vec{g}_3)}{(\vec{f}_2, \vec{f}_2)} = -\frac{(-1, 0, 1)(2, 2, 6)}{2} = -\frac{-2+6}{2} = -2.$$

Таким чином, $\vec{f}_3 = (2, 2, 6) - 2(1, -1, 1) - 2(-1, 0, 1) = (2, 4, 2)$.

Отримано $\vec{f}_1 = (1, -1, 1)$, $\vec{f}_2 = (-1, 0, 1)$, $\vec{f}_3 = (2, 4, 2)$.

Перевірка показує, що ці вектори ортогональні $(\vec{f}_i, \vec{f}_j) = 0$, $i, j = \overline{1, 3}$, $i \neq j$.

Таким чином, вектори $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ утворюють ортогональний базис.

Довжини цих векторів: $|\vec{f}_1| = \sqrt{3}$, $|\vec{f}_2| = \sqrt{2}$, $|\vec{f}_3| = 2\sqrt{6}$.

Пронормувавши вектори $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$, отримаємо ортонормований базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Враховуючи, що $\vec{e}_i = \dfrac{\vec{f}_i}{|\vec{f}_i|}$, $i = \overline{1, 3}$, маємо:

$$\vec{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \ \vec{e}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \ \vec{e}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

Перевірка показує, що ці вектори ортогональні та нормовані, бо $(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = 0$, $i \neq j$, $|\vec{e}_i| = 1$, $i, j = \overline{1, 3}$. ◄

Приклад 3. В евклідовім просторі $\mathbf{E_3}$ задано базис $\vec{e}_1 = (1, -1, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 0, 2)$, $\vec{e}_3 = (-1, -1, 0)$. Перевірити, що цей базис ортогональний та побудувати за цим базисом ортонормований базис.

► Безпосередньо впевнюємося, що $(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = 0$, $i, j = \overline{1, 3}$, $i \neq j$, тобто заданий базис ортогональний. Щоб побудувати за даним ортогональним базисом ортонормований базис, треба кожний базисний вектор пронормувати, тобто знайти вектори

$$\vec{e}_1' = \frac{\vec{e}_1}{|\vec{e}_1|}, \quad \vec{e}_2' = \frac{\vec{e}_2}{|\vec{e}_2|}, \quad \vec{e}_3' = \frac{\vec{e}_3}{|\vec{e}_3|}.$$

Враховуючи, що $|\vec{e}_1| = \sqrt{2}$, $|\vec{e}_2| = 2$, $|\vec{e}_3| = \sqrt{2}$, отримаємо $\vec{e}_1' = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $\vec{e}_2' = (0, 0, 1)$, $\vec{e}_3' = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ – шуканий базис. ◄

Приклад 4. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ задані в унітарному просторі $\mathbf{U_2}$ в ортонормованому базисі:

$$\vec{a} = (2,\ 2-i),\quad \vec{b} = (3+i,\ 2).$$

Знайти довжину $|\vec{a}|$ вектора $\vec{a}$ та ермітів добуток $(\vec{a},\ \vec{b})$.

► $|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}$,

$(\vec{a}, \vec{a}) = a_1\overline{a}_1 + a_2\overline{a}_2 = 2\cdot 2 + (2-i)(2+i) = 4+4+1 = 9$; $|\vec{a}| = 3$.

$(\vec{a}, \vec{b}) = a_1\overline{b}_1 + a_2\overline{b}_2 = 2(3-i) + (2-i)\cdot 2 = 6-2i+4-2i = 10-4i$. ◄

IV. Задачі для практичних занять

4.33. Задані вектори в евклідовім просторі $\mathbf{E}_n$ в ортонормованому базисі. Знайти довжини векторів $\vec{x}$, $\vec{y}$, скалярний добуток векторів, косинус кута φ між векторами, якщо:

а) $\vec{x} = (2, -1)$, $\vec{y} = (0, -3)$;

б) $\vec{x} = (0, 3, 1)$, $\vec{y} = (-1, 0, 2)$;

в) $\vec{x} = (5, 0, -12, 0)$, $\vec{y} = (-3, 1, 0, 2)$.

4.34. В евклідовім просторі $\mathbf{E_3}$ за даним базисом побудувати ортонормований:

а) $\vec{g}_1 = (1, 2, 3)$, $\vec{g}_2 = (0, 3, -2)$, $\vec{g}_3 = (0, 1, -1)$;

б) $\vec{g}_1 = (1, 2, 3)$, $\vec{g}_2 = (0, 2, 0)$, $\vec{g}_3 = (0, 0, 3)$;

в) $\vec{g}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{g}_2 = (0, 1, -1)$, $\vec{g}_3 = (1, 1, 1)$.

4.35. В евклідовім просторі $\mathbf{E_4}$ за даним базисом побудувати ортонормований:

а) $\vec{g}_1 = (1, 1, 0, 0)$, $\vec{g}_2 = (0, 0, 1, 1)$,
$\vec{g}_3 = (1, 0, 1, 1)$, $\vec{g}_4 = (0, 1, 0, -1)$;

б) $\vec{g}_1 = (1, 0, 1, 2)$, $\vec{g}_2 = (-1, 0, -1, 0)$,
$\vec{g}_3 = (0, 0, 2, 1)$, $\vec{g}_4 = (0, 1, 1, 1)$.

У задачах 4.36 – 4.38 застосувати процес ортогоналізації до вказаних систем векторів у евклідовім просторі $\mathbf{E}_n$:

4.36. $\vec{g}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\vec{g}_2 = (3, 3, -1, -1)$, $\vec{g}_3 = (-2, 0, 6, 8)$.

4.37. $\vec{g}_1 = (1, 2, 1, 3)$, $\vec{g}_2 = (4, 1, 1, 1)$, $\vec{g}_3 = (3, 1, 1, 0)$.

4.38. $\vec{g}_1 = (1, 2, 2, -1)$, $\vec{g}_2 = (1, 1, -5, 3)$, $\vec{g}_3 = (3, 2, 8, -7)$.

У задачах 4.39 – 4.40 застосувати процес ортогоналізації для побудови ортогонального базису підпростору, натягнутого на задану систему векторів у евклідовім просторі $\mathbf{E}_n$:

4.39. $\vec{g}_1 = (1, 2, 2, -1)$, $\vec{g}_2 = (1, 1, -5, 3)$, $\vec{g}_3 = (3, 2, 8, -7)$.

4.40. $\vec{g}_1 = (2, 1, 3, -1)$, $\vec{g}_2 = (7, 4, 3, -3)$, $\vec{g}_3 = (1, 1, -6, 0)$,
$\vec{g}_4 = (5, 7, 7, 8)$.

У задачах 4.41 – 4.44 перевірити ортогональність вказаних систем векторів у евклідовім просторі $\mathbf{E}_n$ та доповнити їх до ортогональних базисів:

4.41. $\vec{e}_1 = (1, -2, 1, 3)$, $\vec{e}_2 = (2, 1, -3, 1)$.

4.42. $\vec{e}_1 = (1, 1, 1, 1, 1)$, $\vec{e}_2 = (1, 0, 0, 1, -2)$,
$\vec{e}_3 = (2, 1, -1, 0, 2)$.

4.43. $\vec{e}_1 = \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$, $\vec{e}_2 = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3}\right)$.

4.44. $\vec{e}_1 = (1, 1, 1, 2)$, $\vec{e}_2 = (1, 1, 3, -3)$.

4.45. Задано вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, які утворюють ортонормований базис унітарного простору. Знайти $(\vec{a}, \vec{b})$, якщо:

а) $\vec{a} = i\vec{e}_1 + (i-1)\vec{e}_2$, $\vec{b} = (2+i)\vec{e}_1 + (3+i)\vec{e}_2$;

б) $\vec{a} = 5\vec{e}_1 - (3+4i)\vec{e}_2$, $\vec{b} = 3i\vec{e}_1 + (i-2)\vec{e}_2$.

4.46. Задано вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, які утворюють ортогональний базис унітарного простору. Знайти $(\vec{a}, \vec{b})$, $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ якщо:

а) $\vec{a} = \vec{e}_1 + (4+i)\vec{e}_2$, $\vec{b} = -2\vec{e}_1 + (3-i)\vec{e}_2$, $|\vec{e}_1| = 2$, $|\vec{e}_2| = 3$;

б) $\vec{a} = (1+i)\vec{e}_1 + (2-i)\vec{e}_2$, $\vec{b} = (1+i)\vec{e}_1 + (2+i)\vec{e}_2$, $|\vec{e}_1| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $|\vec{e}_2| = 1$.

ГЛАВА 5. ***ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ***

§1. Алгебра лінійних операторів

І. Короткі теоретичні відомості

Основні означення. Нехай $\mathbf{L}$ лінійний простір. Якщо кожному вектору $\vec{x} \in \mathbf{L}$ поставлено у відповідність єдиний вектор $\vec{y} \in \mathbf{L}$, то будемо казати, що задано *відображення* $\mathcal{A}$ простору $\mathbf{L}$ в себе, або *оператор*, *перетворення*, що діє в просторі $\mathbf{L}$.

Коротко це записується так: $\mathcal{A} : \mathbf{L} \to \mathbf{L}$, або $\vec{y} = \mathcal{A}(\vec{x})$, або $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}$. Вектор $\vec{y}$ називається *образом вектора* $\vec{x}$, а $\vec{x}$ – *прообразом вектора* $\vec{y}$.

Оператор не обов'язково переводить елементи простору $\mathbf{L}$ в себе, він може діяти, переводячи елементи одного простору в елементи іншого простору. Будемо розглядати тільки оператори, що переводять елементи простору $\mathbf{L}$ в себе.

Лінійним оператором у лінійному просторі $\mathbf{L}$ називається будь-яке відображення $\mathcal{A} : \mathbf{L} \to \mathbf{L}$ простору $\mathbf{L}$ в себе, що задовольняє таким умовам:

1) $\mathcal{A}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \mathcal{A}\vec{x}_1 + \mathcal{A}\vec{x}_2$,

2) $\mathcal{A}(\lambda\vec{x}) = \lambda\mathcal{A}\vec{x}$,

де $\vec{x}, \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbf{L}$, λ – число.

Оператор $\mathcal{O}$ називається *нульовим*, якщо

$$\mathcal{O}\vec{x} = 0 \quad \forall\, \vec{x} \in \mathbf{L}.$$

Оператор $\mathcal{E}$ називається *тотожним (одиничним)*, якщо

$$\mathcal{E}\vec{x} = \vec{x} \quad \forall\, \vec{x} \in \mathbf{L}.$$

Введені оператори є лінійними.

У п. III цього параграфа наведено приклади лінійних операторів таких, як, оператор подібності, оператор дзеркального відображення, оператор проектування, оператор повороту, оператор диференціювання та ін.

Матриця лінійного оператора. Нехай $\mathcal{A}$ – лінійний оператор у n-вимірному просторі $\mathbf{L}_n$ і $\beta = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ – деякий фіксований базис. Розкладемо вектори $\mathcal{A}\vec{e}_k$ за базисом β:

$$\mathcal{A}\vec{e}_k = a_{1k}\vec{e}_1 + a_{2k}\vec{e}_2 + \dots + a_{nk}\vec{e}_n, \quad k = \overline{1, n}.$$

Тоді матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

називається *матрицею лінійного оператора* $\mathcal{A}$ у базисі β. Стовпці цієї матриці складені з коефіцієнтів розкладу векторів $\mathcal{A}\vec{e}_k$ за базисом β.

Лінійний оператор $\mathcal{A}$ у n-вимірному просторі $\mathbf{L}_n$ однозначно визначається заданою матрицею, тобто:

$$\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x} \;\Leftrightarrow\; Y = AX,$$

де X, Y – стовпці координат векторів $\vec{x}, \vec{y}$, A – матриця оператора $\mathcal{A}$ у базисі β. Отже координати вектора $\vec{y}$ виражаються через координати вектора $\vec{x}$ за формулами:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n\,; \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n\,; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n\,. \end{cases}$$

Нехай A і A' – матриці оператора $\mathcal{A}$ у базисах β і β', а T – матриця переходу від базису β до базису β'. Тоді формула перетворення матриці оператора при зміні базису має вигляд:

$$A' = T^{-1}A\,T.$$

Матриці A та A' називаються *подібними.*

Дії над лінійними операторами. Введемо наступні операції над лінійними операторами, що діють у фіксованому просторі $\mathbf{L}$:

а) *сумою операторів* $\mathcal{A}$ *та* $\mathcal{B}$ називається оператор $C = \mathcal{A} + \mathcal{B}$, такий, що $C\vec{x} = (\mathcal{A} + \mathcal{B})\vec{x} = \mathcal{A}\vec{x} + \mathcal{B}\vec{x}$,

б) *добутком оператора* $\mathcal{A}$ *на число* α називається оператор $C = \alpha\mathcal{A}$, такий, що $C\vec{x} = (\alpha\mathcal{A})\vec{x} = \alpha\mathcal{A}\vec{x}$,

в) *добутком оператора* $\mathcal{A}$ *на оператор* $\mathcal{B}$ називається оператор $C = \mathcal{A}\mathcal{B}$, такий, що $C\vec{x} = (\mathcal{A}\mathcal{B})\vec{x} = \mathcal{A}(\mathcal{B}\vec{x})$,

г) *оберненим до оператора* $\mathcal{A}$ називається оператор $\mathcal{A}^{-1}$, такий, що $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{E}$.

Оператор $\mathscr{A}$ має обернений тоді і тільки тоді, коли його матриця A невироджена. У цьому випадку оператор $\mathscr{A}$ називається *невиродженим*.

Ядро та образ лінійного оператора. Множина векторів $\vec{x} \in \mathbf{L}$, для яких $\mathscr{A}\vec{x} = 0$, називається *ядром* лінійного оператора $\mathscr{A}$. Множина векторів $\vec{y} = \mathscr{A}\vec{x}$, $\vec{x} \in \mathbf{L}$, називається *образом* лінійного оператора $\mathscr{A}$ або *областю значень* цього оператора.

Позначення: $\operatorname{Ker}\mathscr{A}$ – ядро лінійного оператора $\mathscr{A}$, $\operatorname{Im}\mathscr{A}$ – образ лінійного оператора $\mathscr{A}$.

Ядро і образ лінійного оператора утворюють підпростори у просторі $\mathbf{L}$. При цьому вимірність ядра $\dim \operatorname{Ker}\mathscr{A}$ називається *дефектом* оператора $\mathscr{A}$; вимірність образу $\dim \operatorname{Im}\mathscr{A}$ – *рангом* оператора $\mathscr{A}$. Тобто,

$$\operatorname{def}\mathscr{A} = \dim \operatorname{Ker}\mathscr{A},$$

$$\operatorname{Rg}\mathscr{A} = \dim \operatorname{Im}\mathscr{A}.$$

Для n-вимірного простору $\mathbf{L}_n$ справедлива рівність

$$\dim \operatorname{Ker}\mathscr{A} + \dim \operatorname{Im}\mathscr{A} = n.$$

II. Контрольні питання та завдання

1. Який оператор називається лінійним?

2. Які оператори називаються рівними?

3. Що називається матрицею лінійного оператора простору $\mathbf{L}$ у даному базисі?

4. Записати формулу для знаходження матриці A' лінійного оператора у базисі $\{\vec{e}_i'\}$, якщо відомі матриця A лінійного оператора $\mathscr{A}$ у базисі $\{\vec{e}_i\}$ і матриця T переходу від базису $\{\vec{e}_i\}$ до базису $\{\vec{e}_i'\}$.

5. Що називається сумою двох лінійних операторів? Чи є ця сума лінійним оператором? Чому дорівнює матриця суми двох лінійних операторів?

6. Що називається добутком двох лінійних операторів? Чи є цей добуток лінійним оператором? Чому дорівнює матриця добутку двох лінійних операторів?

7. Який лінійний оператор є невиродженим?

8. Який лінійний оператор називається оберненим даному лінійному оператору?

9. Невироджений оператор $\mathscr{A}$ в деякому базисі заданий матрицею A. Чому дорівнює в цьому базисі матриця оператора, оберненого оператору $\mathscr{A}$?

10. Що називається ядром лінійного оператора? Як воно позначається?

11. Що називається образом або областю значень лінійного оператора? Як вона позначається?

12. Що називається рангом оператора $\mathscr{A}$; дефектом оператора $\mathscr{A}$?

13. Як знайти ранг та дефект оператора $\mathscr{A}$; ядро оператора $\mathscr{A}$; образ оператора $\mathscr{A}$?

III. Приклади розв'язання задач

У цьому пункті наведено 22 приклади розв'язання задач, які за своєю тематикою розподілились таким чином:

1. Доведення лінійності оператора: *приклади 1 – 5*.

2. Знаходження матриці лінійного оператора з наведенням, за можливістю, геометричної інтерпретації: *приклади 6 – 12*.

3. Знаходження матриці лінійного оператора та його образу, а також матриця лінійного оператора у різних базисах: *приклади 13 – 16*.

4. Дії над лінійними операторами: *приклади 17 – 20*.

5. Знаходження ядра та образу лінійного оператора: *приклади 21, 22*.

Приклад 1. Довести, що наведені нижче оператори лінійні.

а) *тотожний (одиничний)* оператор $\mathscr{E}$ такий, що

$$\mathscr{E}\vec{x} = \vec{x} \quad \forall \vec{x} \in \mathbf{L};$$

б) *оператор подібності* $\mathscr{A}$ такий, що

$$\mathscr{A}\vec{x} = \alpha\vec{x}, \ \alpha \in \mathbf{R}, \ \forall \vec{x} \in \mathbf{L}.$$

► Згідно з означенням лінійного оператора перевіримо виконання умов:
1) $\mathscr{A}(\vec{x}_1+\vec{x}_2)=\mathscr{A}x_1+\mathscr{A}x_2$; 2) $\mathscr{A}(\lambda\vec{x})=\lambda\mathscr{A}\vec{x} \quad \forall\ \vec{x},\ \vec{x}_1,\ \vec{x}_2\in \mathbf{L}$.

а) $\mathscr{E}(\vec{x}_1+\vec{x}_2)=\vec{x}_1+\vec{x}_2=\mathscr{E}\vec{x}_1+\mathscr{E}\vec{x}_2$,

$\mathscr{E}(\lambda\vec{x})=\lambda\vec{x}=\lambda\mathscr{E}\vec{x}$.

Умови 1), 2) виконуються, отже одиничний оператор лінійний.

б) $\mathscr{A}(\vec{x}_1+\vec{x}_2)=\alpha(\vec{x}_1+\vec{x}_2)=\alpha\vec{x}_1+\alpha\vec{x}_2=\mathscr{A}\vec{x}_1+\mathscr{A}\vec{x}_2$,

$\mathscr{A}(\lambda\vec{x})=\alpha\lambda\vec{x}=\lambda\alpha\vec{x}=\lambda\mathscr{A}\vec{x}$.

Умови 1), 2) виконуються, отже оператор подібності лінійний. ◄

Приклад 2. Оператор $\mathscr{A}$ у лінійному просторі $\mathbf{L}$ визначено рівністю

$$\mathscr{A}\vec{x}=\vec{x}+\vec{a},$$

де $\vec{a}\in\mathbf{L}$ – фіксований вектор, $\vec{a}\neq 0$. Чи є оператор $\mathscr{A}$ лінійним?

► Враховуючи, що

$$\mathscr{A}\vec{x}=\vec{x}+\vec{a},\quad \mathscr{A}\vec{y}=\vec{y}+\vec{a},\quad \mathscr{A}(\vec{x}+\vec{y})=\vec{x}+\vec{y}+\vec{a},$$

маємо

$$\mathscr{A}(\vec{x}+\vec{y})\neq\mathscr{A}\vec{x}+\mathscr{A}\vec{y},\quad \text{бо}\quad \vec{x}+\vec{y}+\vec{a}\neq\vec{x}+\vec{a}+\vec{y}+\vec{a}=\vec{x}+\vec{y}+2\vec{a}.$$

Отже, умова 1) лінійності оператора не виконується і оператор $\mathscr{A}$ не є лінійним. ◄

Приклад 3. Чи є лінійним оператор $\mathscr{A}$, якщо $\forall\vec{x}\in\mathbf{L}_2$ $\mathscr{A}\vec{x}=\vec{i}-3\vec{j}$?

► Враховуємо, що

$$\mathscr{A}\vec{x}_1=\vec{i}-3\vec{j},\quad \mathscr{A}\vec{x}_2=\vec{i}-3\vec{j},\quad \mathscr{A}(\vec{x}_1+\vec{x}_2)=\vec{i}-3\vec{j}.$$

Отже, $\mathscr{A}\vec{x}_1+\mathscr{A}\vec{x}_2=2\vec{i}-6\vec{j}\neq\mathscr{A}(\vec{x}_1+\vec{x}_2)$. Умова 1) не виконується. Таким чином, даний оператор не є лінійним. ◄

Приклад 4. Чи є лінійним оператор $\mathscr{A}$, якщо відомо, що $\forall\vec{x}\in\mathbf{L}_2$ $\mathscr{A}\vec{x}=(\text{пр}_{Oy}\vec{x})\vec{j}$.

► Оператор буде лінійним у тому випадку, якщо виконуються умови 1) та 2) лінійності оператора. У нашому випадку

$$\mathscr{A}(\vec{x}_1+\vec{x}_2)=(np_{Oy}(\vec{x}_1+\vec{x}_2))\vec{j}=(np_{Oy}\vec{x}_1+np_{Oy}\vec{x}_2)\vec{j}=$$

$$=(np_{Oy}\vec{x}_1)\vec{j}+(np_{Oy}\vec{x}_2)\vec{j}=\mathscr{A}\vec{x}_1+\mathscr{A}\vec{x}_2,$$

$$\mathscr{A}(\lambda\vec{x})=(np_{Oy}\lambda\vec{x})\vec{j}=\lambda(np_{Oy}\vec{x})\vec{j}=\lambda\mathscr{A}\vec{x}.$$

Таким чином, даний оператор є лінійним. ◄

Приклад 5. Встановити, чи є лінійними наступні перетворення $\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{C}$, якщо $\vec{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3)$,

$$\mathscr{A}\vec{x}=(x_1,\ x_1-x_2+x_3,\ 4x_1-x_2),$$

$$\mathscr{B}\vec{x}=(1,\ x_1-x_2+x_3,\ 4x_1-x_2),$$

$$\mathscr{C}\vec{x}=(x_1,\ x_1-x_2+x_3,\ 4x_1-x_2^2).$$

► Врахуємо, що $\vec{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3)$, $\vec{y}=(y_1,\ y_2,\ y_3)$,

$$\vec{x}+\vec{y}=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ x_3+y_3),\quad \lambda\vec{x}=(\lambda x_1,\ \lambda x_2,\ \lambda x_3).$$

Далі, для оператора $\mathscr{A}$: $\mathscr{A}\vec{x}=(x_1,\ x_1-x_2+x_3,\ 4x_1-x_2)$,

$$\mathscr{A}\vec{y}=(y_1,\ y_1-y_2+y_3,\ 4y_1-y_2).$$

$$\mathscr{A}(\vec{x}+\vec{y})=(x_1+y_1,\ x_1+y_1-(x_2+y_2)+x_3+y_3,\ 4(x_1+y_1)-(x_2+y_2)),$$

$$\mathscr{A}\vec{x}+\mathscr{A}\vec{y}=(x_1+y_1,\ x_1+y_1-(x_2+y_2)+x_3+y_3,\ 4(x_1+y_1)-(x_2+y_2)).$$

Отже, $\mathscr{A}(\vec{x}+\vec{y})=\mathscr{A}\vec{x}+\mathscr{A}\vec{y}$.

$$\mathscr{A}(\lambda\vec{x})=(\lambda x_1,\ \lambda x_1-\lambda x_2+\lambda x_3,\ 4\lambda x_1-\lambda x_2),$$

$$\lambda\mathscr{A}\vec{x}=\lambda(x_1,x_1-x_2+x_3,4x_1-x_2)=(\lambda x_1,\lambda(x_1-x_2+x_3),\lambda(4x_1-x_2)),$$

Отже, $\mathscr{A}(\lambda\vec{x})=\lambda\mathscr{A}\vec{x}$.

Звідси випливає, що умови лінійності оператора $\mathscr{A}$ виконані, оператор $\mathscr{A}$ – лінійний.

Для оператора $\mathscr{B}$: $\mathscr{B}\vec{x}=(1,\ x_1-x_2+x_3,\ 4x_1-x_2)$,

$$\mathscr{B}\vec{y}=(1,\ y_1-y_2+y_3,\ 4y_1-y_2).$$

$$\mathscr{B}(\vec{x}+\vec{y})=(1,\ x_1+y_1-(x_2+y_2)+x_3+y_3,\ 4(x_1+y_1)-(x_2+y_2)),$$

$$\mathscr{B}\vec{x}+\mathscr{B}\vec{y}=(2,\ x_1+y_1-(x_2+y_2)+x_3+y_3,\ 4(x_1+y_1)-(x_2+y_2)).$$

Порівняння показує, що $\mathcal{B}(\vec{x}+\vec{y}) \neq \mathcal{B}\vec{x}+\mathcal{B}\vec{y}$. Отже, оператор $\mathcal{B}$ не є лінійним.

Для оператора $\mathcal{C}$: $\mathcal{C}\vec{x} = (x_1, x_1 - x_2 + x_3, 4x_1 - x_2^2)$,

$$\mathcal{C}\vec{y} = (y_1, y_1 - y_2 + y_3, 4y_1 - y_2^2).$$

$$\mathcal{C}(\vec{x}+\vec{y}) = (x_1 + y_1, x_1 + y_1 - (x_2 + y_2) + x_3 + y_3, 4(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2)^2),$$

$$\mathcal{C}\vec{x}+\mathcal{C}\vec{y} = (x_1 + y_1, x_1 + y_1 - (x_2 + y_2) + x_3 + y_3, 4(x_1 + y_1) - (x_2^2 + y_2^2)).$$

Порівняння показує, що $\mathcal{C}(\vec{x}+\vec{y}) \neq \mathcal{C}\vec{x}+\mathcal{C}\vec{y}$. Отже, оператор $\mathcal{C}$ не є лінійним. ◄

Приклад 6. Знайти матрицю тотожного оператора $\mathcal{E}$ у лінійному просторі $\mathbf{L}_n$.

► Тотожне перетворення не змінює базисних векторів: $\mathcal{E}\vec{e}_1 = \vec{e}_1$, $\mathcal{E}\vec{e}_2 = \vec{e}_2$, …, $\mathcal{E}\vec{e}_n = \vec{e}_n$, тобто

$$\mathcal{E}\vec{e}_1 = 1\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + \ldots + 0\vec{e}_n;$$
$$\mathcal{E}\vec{e}_2 = 0\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 + \ldots + 0\vec{e}_n;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathcal{E}\vec{e}_n = 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + \ldots + 1\vec{e}_n.$$

Отже, матрицею тотожного оператора є одинична матриця E.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}. ◄$$

Приклад 7. Знайти матрицю P оператора проектування $\mathcal{P}$ на площину xOy (рис. 5.1).

► Застосуємо оператор $\mathcal{P}$ до базисних векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

$$\mathcal{P}\vec{i} = \vec{i} = (1, 0, 0);$$
$$\mathcal{P}\vec{j} = \vec{j} = (0, 1, 0);$$
$$\mathcal{P}\vec{k} = 0 = (0, 0, 0).$$

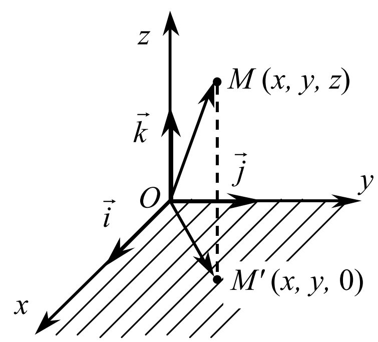


Рис. 5.1

Звідси матриця P оператора проектування на площину xOy така:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. ◄$$

Приклад 8. У базисі $\beta = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ написати матрицю P_α оператора проектування $\mathcal{P}_\alpha$ на площину $\alpha: x + y + z = 0$.

► Спосіб 1. Для відшукання матриці P_α оператора проектування $\mathcal{P}_\alpha$ з'ясуємо, як діє цей оператор на довільний вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Для цього знайдемо проекцію точки $M(x_1, x_2, x_3)$ на площину α.

Рівняння прямої L, що проходить через точку $M(x_1, x_2, x_3)$, перпендикулярно до площини α: $x + y + z = 0$, є

$$L: \quad \frac{x - x_1}{1} = \frac{y - x_2}{1} = \frac{z - x_3}{1}.$$

Знайдемо точку $K(x, y, z)$ перетину прямої L та площини α, розв'язавши систему:

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_1}{1} = \dfrac{y - x_2}{1} = \dfrac{z - x_3}{1} = t; \\ x + y + z = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_1 + t; \\ y = x_2 + t; \\ z = x_3 + t; \\ x + y + z = 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + 3t = 0;$$
$$t = -\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}.$$

Таким чином, $x = \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3$;

$$y = -\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 \ ;$$

$$z = -\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 \ .$$

Отже,

$$\mathscr{P}_\alpha \vec{x} = \left(\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 ,\ -\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 ,\ -\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 \right).$$

Знайдемо, як діє оператор $\mathscr{P}_\alpha$ на базисні вектори.

$$\mathscr{P}_\alpha \vec{i} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right);$$

$$\mathscr{P}_\alpha \vec{j} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right);$$

$$\mathscr{P}_\alpha \vec{k} = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right).$$

Звідси матриця P_α оператора проектування $\mathscr{P}_\alpha$ така:

$$P_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Спосіб 2. Оператор проектування на площину α визначається рівніс-тю $\mathscr{P}_\alpha \vec{x} = \vec{x}_\alpha$, де $\vec{x}_\alpha$ – ортогональна проекція вектора $\vec{x}$ на площину α .

Ортогональною проекцією вектора $\vec{x}$ на площину α називається вектор $\vec{x}_\alpha$, компланарний площині α, причому різниця $\vec{x} - \vec{x}_\alpha$ перпендикулярна цій площині, тобто $(\vec{x} - \vec{x}_\alpha) \perp \alpha$ (рис. 5.2). Отже, $\vec{x} - \vec{x}_\alpha = \vec{x}_n$, де $\vec{x}_n = \text{пр}_{\vec{n}}\, \vec{x} \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$. Тут враховано, що $\vec{x}_n$ повинно бути напрямлено у бік вектора $\vec{x}$. Тоді $\vec{x}_\alpha = \vec{x} - \vec{x}_n$.

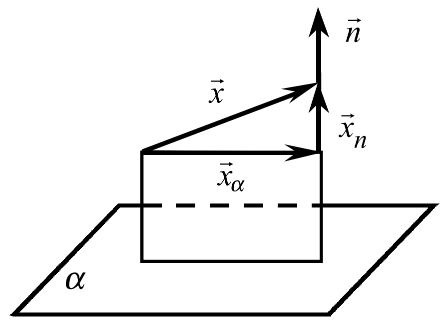


Рис. 5.2

Отже, маємо

$$\mathscr{P}_\alpha \vec{x} = \vec{x}_\alpha = \vec{x} - \vec{x}_n = \vec{x} - \text{пр}_{\vec{n}}\, \vec{x} \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \vec{x} - \frac{(\vec{n}, \vec{x})}{|\vec{n}|^2}\vec{n} ,$$

де $\vec{n}$ – нормальний вектор площини α. У розглядуваному випадку $\vec{n} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $|\vec{n}| = \sqrt{3}$, $|\vec{n}|^2 = 3$, $(\vec{n}, \vec{i}) = (\vec{n}, \vec{j}) = (\vec{n}, \vec{k}) = 1$, а відтак

$$\mathscr{P}_\alpha \vec{i} = \vec{i} - \frac{1}{3}\vec{n} = \frac{2}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j} - \frac{1}{3}\vec{k} ,$$

$$\mathscr{P}_\alpha \vec{j} = \vec{j} - \frac{1}{3}\vec{n} = -\frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{1}{3}\vec{k} ,$$

$$\mathscr{P}_\alpha \vec{k} = \vec{k} - \frac{1}{3}\vec{n} = -\frac{1}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k} ,$$

Звідси матриця P_α оператора проектування $\mathscr{P}_\alpha$ така:

$$P_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}. \blacktriangleleft$$

Приклад 9. Знайти матрицю A оператора $\mathscr{A}$ дзеркального відображення відносно площини xOy (рис. 5.3).

► Застосуємо оператор $\mathscr{A}$ до базисних векторів $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

$$\mathscr{A}\vec{i} = \vec{i} = (\ 1, 0, 0) ;$$

$$\mathcal{A}\,\vec{j} = \vec{j} = (0,\ 1,\ 0)\,;$$
$$\mathcal{A}\,\vec{k} = -\vec{k} = (0, 0, -1)\,.$$

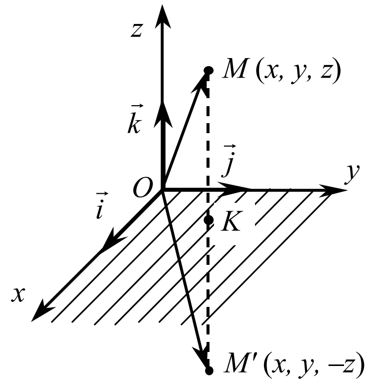


Рис. 5.3

Отже, матриця оператора $\mathcal{A}$ дзеркального відображення відносно площини xOy така:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. ◄$$

Приклад 10. Лінійне перетворення сукупності усіх векторів на площині xOy полягає в повороті кожного вектора проти годинникової стрілки на кут α (рис. 5.4). Знайти матрицю цього перетворення та записати його в координатній формі.

► Оскільки, $\mathcal{A}\,\vec{i} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\sin\alpha$, $\mathcal{A}\,\vec{j} = -\vec{i}\sin\alpha + \vec{j}\cos\alpha$, то

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Це матриця оператора повороту на кут α.

Отже, з того, що $Y = AX$, маємо

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha\,;$$
$$y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha\,.$$

Це формули перетворення координат при повороті системи координат.

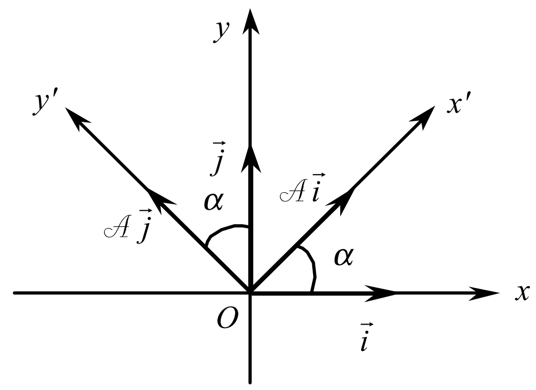


Рис. 5.4 ◄

Приклад 11. Знайти матрицю оператора повороту навколо осі Oz на кут α в додатному напрямку (рис. 5.5).

► Застосуємо оператор повороту $\mathcal{A}$ до базисних векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

$$\mathcal{A}\,\vec{i} = \vec{i}\,' = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\sin\alpha + \vec{k}\cdot 0\,;$$
$$\mathcal{A}\,\vec{j} = \vec{j}\,' = -\vec{i}\sin\alpha + \vec{j}\cos\alpha + \vec{k}\cdot 0\,;$$
$$\mathcal{A}\,\vec{k} = \vec{k}\,' = \vec{i}\cdot 0 + \vec{j}\cdot 0 + \vec{k}\cdot 1\,.$$

Тоді матриця оператора повороту буде така:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

З того, що $\vec{y} = \mathcal{A}\,\vec{x} \iff Y = AX$, та позначивши

$$Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

маємо

$$Y = AX = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha \\ z \end{pmatrix}.$$

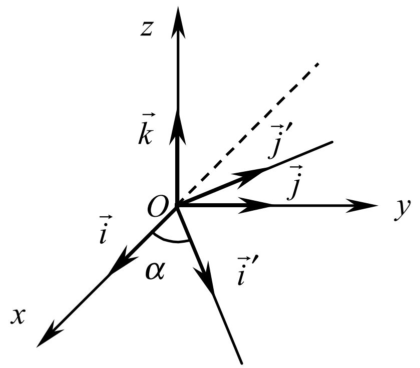


Рис. 5.5

Отже, $x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha$; $y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha$; $z' = z$.

Це формули перетворення координат при повороті навколо осі Oz на кут α. ◄

Приклад 12. Знайти матрицю D оператора диференціювання $\mathcal{D}$ у просторі многочленів $\mathcal{P}_n$ степеня $\le (n-1)$ у базисі $1, t, t^2, \dots, t^{n-1}$.

► Позначимо базисні вектори простору $\mathcal{P}_n$

$$\vec{e}_1 = 1,\ \vec{e}_2 = t,\ \vec{e}_3 = t^2,\ \dots,\ \vec{e}_n = t^{n-1}.$$

Застосуємо оператор диференціювання до цих векторів.

$\mathcal{D}\vec{e}_1 = (1)' = 0 = (0, 0, 0, \dots, 0, 0)$;

$\mathcal{D}\vec{e}_2 = (t)' = 1 = 1\vec{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0, 0)$;

$\mathcal{D}\vec{e}_3 = (t^2)' = 2t = 2\vec{e}_2 = (0, 2, 0, \dots, 0, 0)$;

....

$\mathcal{D}\vec{e}_n = (t^{n-1})' = (n-1)t^{n-2} = (n-1)\vec{e}_{n-1} = (0, 0, 0, \dots, n-1, 0)$.

Отже, матриця оператора диференціювання

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. ◄$$

Приклад 13. Знайти матрицю лінійного оператора $\mathcal{A}$ у базисі $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ якщо відомо, що цей оператор переводить будь-який вектор $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ у вектор $\vec{y} = (3\alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3, -\alpha_3)$.

► Знайдемо образи $\mathcal{A}\vec{e}_1$, $\mathcal{A}\vec{e}_2$, $\mathcal{A}\vec{e}_3$ базисних векторів. Згідно з умовою $\vec{x} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3$, тоді $\mathcal{A}\vec{x} = 3\alpha_1\vec{e}_1 + (\alpha_2 + \alpha_3)\vec{e}_2 - \alpha_3\vec{e}_3$. Отже, $\mathcal{A}\vec{e}_1 = 3\vec{e}_1$, $\mathcal{A}\vec{e}_2 = \vec{e}_2$, $\mathcal{A}\vec{e}_3 = \vec{e}_2 - \vec{e}_3$. Запишемо координати образу кожного вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ відповідно у стовпці матриці A. Тоді отримаємо

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Це матриця оператора $\mathcal{A}$ у даному базисі. ◄

Приклад 14. Дана матриця

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

лінійного оператора $\mathcal{A}$ у базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Знайти $\mathcal{A}\vec{x}$, якщо $\vec{x} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$.

► Спосіб 1. Відомо, що координати образу $\mathcal{A}\vec{x}$ та прообразу $\vec{x}$ зв'язані співвідношенням $Y = AX$, де Y – стовпець з координат образу, X – стовпець з координат прообразу. У нашому прикладі

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, $\mathcal{A}\vec{x} = 9\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 15\vec{e}_3$.

Спосіб 2. Використовуючи означення матриці оператора $\mathcal{A}$ у базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, маємо: $\mathcal{A}\vec{e}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$, $\mathcal{A}\vec{e}_2 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\mathcal{A}\vec{e}_3 = 2\vec{e}_1 + 5\vec{e}_3$. Оскільки оператор $\mathcal{A}$ лінійний, то

$$\mathcal{A}\vec{x} = \mathcal{A}(2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3) = 2\mathcal{A}\vec{e}_1 - \mathcal{A}\vec{e}_2 + 3\mathcal{A}\vec{e}_3.$$

Підставляємо $\mathcal{A}\vec{e}_1$, $\mathcal{A}\vec{e}_2$, $\mathcal{A}\vec{e}_3$ в останнє рівняння. Тоді знаходимо

$$\mathcal{A}\vec{x} = 2(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2) - (-\vec{e}_1 + \vec{e}_2) + 3(2\vec{e}_1 + 5\vec{e}_3)$$

або $\mathcal{A}\vec{x} = 9\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 15\vec{e}_3$. ◄

Приклад 15. У просторі $\mathbf{L}_4$ розглядається лінійне перетворення $\mathcal{A}$. Записати це перетворення в координатній формі, якщо

$$\mathcal{A}\vec{e}_1 = \vec{e}_3 + \vec{e}_4,\quad \mathcal{A}\vec{e}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_4,\quad \mathcal{A}\vec{e}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2,\quad \mathcal{A}\vec{e}_4 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

► Матриця перетворення $\mathcal{A}$ має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, з $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x} \;\Rightarrow\; Y = AX \;\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Звідки $y_1 = x_2 + x_3$, $y_2 = x_3 + x_4$, $y_3 = x_1 + x_4$, $y_4 = x_1 + x_2$. ◄

Приклад 16. Дано два базиси $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ та $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$ лінійного простору та матриця $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ оператора $\mathcal{A}$ у базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Знайти матрицю цього оператора у базисі $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$, якщо $\vec{e}_1' = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{e}_2' = 3\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2$.

► Відомо, що якщо A – матриця оператора $\mathcal{A}$ у базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, а T – матриця переходу від базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ до базису $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$, то матриця A' оператора $\mathcal{A}$ у базисі $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$ знаходиться за формулою $A' = T^{-1}AT$. У нашому випадку

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix},\quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$A' = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 17 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}. ◄$$

Приклад 17. Перетворення $\mathcal{A}$ полягає в повороті кожного вектора площини xOy на кут $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$. Знайти в координатній формі перетворення $\mathcal{A} + \mathcal{E}$.

► Маємо

$$\mathcal{A}\vec{i} = \vec{i}\cos\frac{\pi}{4} + \vec{j}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j},$$

$$\mathcal{A}\vec{j} = -\vec{i}\sin\frac{\pi}{4} + \vec{j}\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}.$$

Отже,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то

$$A + E = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, лінійне перетворення $\mathcal{A} + \mathcal{E}$ в координатній формі записується так:

$$x' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)x - \frac{\sqrt{2}}{2}y,\qquad y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)y. ◄$$

Приклад 18. Нехай $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathcal{A}\vec{x} = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + x_3)$, $\mathcal{B}\vec{x} = (x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_1 + x_2)$. Знайти $\mathcal{A}\mathcal{B}\vec{x}$.

► Випишемо матриці A та B операторів $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}$ відповідно.

$$\mathcal{A}\vec{e}_1=(1,0,1),\quad \mathcal{A}\vec{e}_2=(1,1,0),\quad \mathcal{A}\vec{e}_3=(0,1,1);$$

$$\mathcal{B}\vec{e}_1=(0,1,1),\quad \mathcal{B}\vec{e}_2=(1,0,1),\quad \mathcal{B}\vec{e}_3=(1,1,0).$$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}.$$

Знайдемо добуток матриць A та B.

$$AB=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&1\\1&2&1\end{pmatrix}.$$

Отже, оператор $\mathcal{A}\mathcal{B}$ має матрицю AB.

$$\vec{y}=\mathcal{A}\mathcal{B}\vec{x}\quad\Leftrightarrow\quad Y=ABX.$$

$$y_1=x_1+x_2+2x_3,\quad y_2=2x_1+x_2+x_3,\quad y_3=x_1+2x_2+x_3,$$

$$\mathcal{A}\mathcal{B}\vec{x}=(x_1+x_2+2x_3,\ 2x_1+x_2+x_3,\ x_1+2x_2+x_3).\ ◄$$

Приклад 19. У просторі $\mathbf{R}^3$ задано два лінійних оператори $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$. Знайти матрицю C лінійного оператора $C=\mathcal{A}\mathcal{B}-\mathcal{B}\mathcal{A}$ та його явний вигляд у канонічному базисі $\mathbf{R}^3$, якщо

$$\mathcal{A}\vec{x}=\left(2x_2,\ -2x_1+3x_2+2x_3,\ 4x_1-x_2+5x_3\right),$$

$$\mathcal{B}\vec{x}=\left(-3x_1+x_3,\ 2x_2+x_3,\ -x_2+3x_3\right).$$

► Оскільки

$$\mathcal{A}\vec{e}_1=(0,-2,4),\quad \mathcal{A}\vec{e}_2=(2,3,-1),\quad \mathcal{A}\vec{e}_3=(0,2,5)$$

та

$$\mathcal{B}\vec{e}_1=(-3,0,0),\quad \mathcal{B}\vec{e}_2=(0,2,-1),\quad \mathcal{B}\vec{e}_3=(1,1,3),$$

то

$$A=\begin{pmatrix}0&2&0\\-2&3&2\\4&-1&5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-3&0&1\\0&2&1\\0&-1&3\end{pmatrix}.$$

Далі,

$$AB=\begin{pmatrix}0&4&2\\6&4&7\\-12&-7&18\end{pmatrix},\qquad BA=\begin{pmatrix}4&-7&5\\0&5&9\\14&-6&13\end{pmatrix}.$$

Тому

$$C=AB-BA=\begin{pmatrix}-4&11&-3\\6&-1&-2\\-26&-1&5\end{pmatrix}.$$

За означенням матриці лінійного оператора у канонічному базисі $\mathbf{R}^n$ її стовпці є наборами компонент образів базисних векторів, отже

$$C\vec{e}_1=(-4,6,-26),\quad C\vec{e}_2=(11,-1,-1),\quad C\vec{e}_3=(-3,-2,5).$$

Звідки знаходимо:

$$C\vec{x}=C\left(x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3\right)=x_1C\vec{e}_1+x_2C\vec{e}_2+x_3C\vec{e}_3=$$

$$=\left(-4x_1+11x_2-3x_3,\ 6x_1-x_2-2x_3,\ -26x_1-x_2+5x_3\right).\ ◄$$

Приклад 20. Оператор $\mathcal{A}$ у базисі $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ має матрицю $A=\begin{pmatrix}3&1\\5&2\end{pmatrix}$, а оператор $\mathcal{B}$ у базисі $\vec{e}_1{}'=\vec{e}_1-\vec{e}_2$, $\vec{e}_2{}'=\vec{e}_1+\vec{e}_2$ – матрицю $B=\begin{pmatrix}1&2\\-2&3\end{pmatrix}$. Знайти матрицю оператора:

1) $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ у базисі $\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}'$; 2) $\mathcal{A}\mathcal{B}$ у базисі $\vec{e}_1,\vec{e}_2$.

► 1. Матриця D оператора $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ у базисі $\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}'$ дорівнює сумі матриць операторів $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}$ у цьому базисі. Оскільки оператор $\mathcal{A}$ задано матрицею A у базисі $\vec{e}_1,\vec{e}_2$, спочатку знайдемо матрицю C цього оператора у базисі $\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}'$. Формула, що виражає залежність між матрицями A та C оператора $\mathcal{A}$ відповідно у базисах $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ та $\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}'$, має вигляд $C=T^{-1}AT$, де T – матриця переходу від базису $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ до базису $\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}'$. Оскільки $\vec{e}_1{}'=\vec{e}_1-\vec{e}_2$, $\vec{e}_2{}'=\vec{e}_1+\vec{e}_2$, то $T=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$. Тоді

$$T^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix},$$

$$C=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0{,}5 & -1{,}5\\ 2{,}5 & 5{,}5\end{pmatrix}.$$

Таким чином,

$$D=C+B=\begin{pmatrix}-0{,}5 & -1{,}5\\ 2{,}5 & 5{,}5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}5\\ 0{,}5 & 8{,}5\end{pmatrix}.$$

2. Матриця H оператора $\mathscr{A}\mathscr{B}$ у базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ дорівнює AS, де S – матриця оператора $\mathscr{B}$ у базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Матрицю S знаходимо за формулою $S=T_1^{-1}B\,T_1$, де T_1 – матриця переходу від базису $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$ до базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Оскільки $T_1=T^{-1}$, а $T_1^{-1}=T$, то

$$S=T^{-1}B\,T=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}.$$

Отже

$$H=AS=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 11\\ 8 & 19\end{pmatrix}. ◄$$

Приклад 21. Знайти ядро та образ лінійного оператора $\mathscr{A}$, який задано у деякому базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ матрицею

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 3\end{pmatrix}.$$

► Ядро оператора – множина векторів простору, яка переводиться оператором у нульовий вектор. Тому для знаходження ядра треба розв'язати систему рівнянь $AX=0$, тобто

$$\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

де x_1, x_2, x_3 – координати вектора $\vec{x}$ у базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Ранг матриці A отриманої однорідної системи дорівнює двом. Розв'язавши цю систему, отримаємо $x_1=c$, $x_2=-c$, $x_3=c$ $\forall c\in\mathbf{R}$. Таким чином, ядром оператора $\mathscr{A}$ є:

$$\operatorname{Ker}\mathscr{A}=\{(c,-c,c)\mid \forall c\in\mathbf{R}\}.$$

$$\dim\operatorname{Ker}\mathscr{A}=n-\operatorname{Rg}A=3-2=1.$$

$$\text{Базис } \operatorname{Ker}\mathscr{A}:\ E=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Образ оператора – множина образів усіх векторів даного простору $\vec{y}=\mathscr{A}\vec{x}$. Отже, якщо x_1, x_2, x_3 – координати у базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ довільного вектора $\vec{x}\in\mathbf{L}$, y_1, y_2, y_3 – координати його образу у тому самому базисі, то

$$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

або

$$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}x_2+\begin{pmatrix}3\\ 0\\ 3\end{pmatrix}x_3.$$

Ця рівність означає, що образ $\operatorname{Im}\mathscr{A}$ збігається з лінійною оболонкою системи стовпців матриці A, тобто за базис $\operatorname{Im}\mathscr{A}$ може бути вибраний будь-який із базисів системи стовпців матриці A.

Оскільки

$$\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\ 0\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$$

та стовпці

$$\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}3\\ 0\\ 3\end{pmatrix}$$

лінійно незалежні, то вони утворюють базис $\operatorname{Im}\mathscr{A}$.

Таким чином, образом оператора $\mathscr{A}$ є:

$$\operatorname{Im}\mathscr{A}=\{c_1(-1,1,0)+c_2(3,0,3)\mid \forall c_1, c_2\in\mathbf{R}\},$$

$$\dim\operatorname{Im}\mathscr{A}=2.$$

$$\text{Базис } \operatorname{Im}\mathscr{A}:\ E_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\ E_2=\begin{pmatrix}3\\ 0\\ 3\end{pmatrix}. ◄$$

Приклад 22. Для лінійного оператора

$$\mathcal{A}\,\vec{x} = \left(x_1 + 2x_2 + x_3\,,\ x_1 - x_3\,,\ x_1 + x_2\right),$$

що діє у просторі $\mathbf{R}^3$, визначити ранг та дефект, а також знайти базиси образу та ядра.

► Для того, щоб представити арифметичні вектори та заданий лінійний оператор, скористаємося канонічним базисом у $\mathbf{R}^3$. У цьому базисі матриця оператора має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

За означенням $\vec{x} \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$ тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{A}\,\vec{x} = 0$, або у координатному записі,

$$A\,X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси ядро $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ співпадає з підпростором розв'язків наведеної однорідної системи, тобто дефект оператора $\mathcal{A}$ дорівнює $\dim\operatorname{Ker}\mathcal{A} = n - Rg\,A = 3 - 2 = 1$, а за базис у $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ може бути вибрана фундаментальна система розв'язків системи, наприклад, $E = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

За означенням $\vec{y} \in \operatorname{Im}\mathcal{A}$ тоді і тільки тоді, коли знайдеться вектор $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$ такий, що $\vec{y} = \mathcal{A}\,\vec{x}$, або, у координатному записі,

$$Y = A\,X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Остання рівність означає, що образ $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ збігається з лінійною оболонкою системи стовпців матриці A. Отже, ранг оператора $\mathcal{A}$ збігається з рангом його матриці, тобто дорівнює двом $\dim\operatorname{Im}\mathcal{A} = 2$, а за базис $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ може бути вибраний будь-який із базисів системи стовпців матриці A, наприклад

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad E_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, ядром оператора $\mathcal{A}$ є:

$$\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \left\{\left(c\,,\ -c\,,\ c\right) \mid \forall c \in \mathbf{R}\right\},$$

$$\operatorname{def}\mathcal{A} == \dim\operatorname{Ker}\mathcal{A} = 1\,.$$

$$\text{Базис}\ \operatorname{Ker}\mathcal{A}:\ E = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Образом оператора $\mathcal{A}$ є:

$$\operatorname{Im}\mathcal{A} = \left\{c_1\left(1, 1, 1\right) + c_2\left(2, 0, 1\right) \mid \forall c_1\,,\ c_2 \in \mathbf{R}\right\},$$

$$\operatorname{Rg}\mathcal{A} = \dim\operatorname{Im}\mathcal{A} = 2\,.$$

$$\text{Базис}\ \operatorname{Im}\mathcal{A}:\ E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad E_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \blacktriangleleft$$

IV. Задачі для практичних занять

У задачах 5.1 – 5.5 з'ясувати, які з даних відображень простору $\mathbf{V}_3$ у себе є лінійними операторами; виписати їх матриці в ортонормованому базисі $\left(\vec{i}\,,\ \vec{j}\,,\ \vec{k}\right) = \beta$.

5.1. $\mathcal{A}\,\vec{x} = \lambda\,\vec{x}$, λ – фіксоване число.

5.2. $\mathcal{A}\,\vec{x} = \lambda\,\vec{x} + \vec{a}$, λ та $\vec{a}$ – фіксовані.

5.3. $\mathcal{A}\,\vec{x} = \left[\vec{a}\,,\ \vec{x}\right]$, де $\vec{a}$ – фіксований вектор.

5.4. $\mathcal{A}\,\vec{x} = \left(\vec{a}\,,\ \vec{x}\right)\vec{x}$, де $\vec{a}$ – фіксований вектор.

5.5. $\mathcal{A}\,\vec{x} = \left(y + z\right)\vec{i} + \left(2x + z\right)\vec{j} + \left(3x - y + z\right)\vec{k}$,

де $\vec{x} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$.

У задачах 5.6 – 5.11 з'ясувати, які з даних відображень простору арифметичних векторів $\mathbf{R}^3$ у себе є лінійними операторами; виписати їх матриці у канонічному базисі.

5.6. $\mathcal{A}\,\vec{x} = \left(x_2 + x_3\,,\ 2x_1 + x_3\,,\ 3x_1 - x_2 + x_3\right)$.

5.7. $\mathcal{A}\,\vec{x} = \left(x_1\,,\ x_2 + 1,\ x_3 + 2\right)$.

5.8. $\mathcal{A}\vec{x} = (0,\, x_2 - x_3,\, 0)$.

5.9. $\mathcal{A}\vec{x} = (x_1 + 2x_2 + 2x_3,\, -3x_2 + x_3,\, 2x_1 + 3x_3)$.

5.10. $\mathcal{A}\vec{x} = (3x_1 + x_2,\, x_1 - 2x_2 - x_3,\, 3x_2 + 2x_3)$.

5.11. $\mathcal{A}\vec{x} = (3x_1 + 5x_3,\, x_1 + x_3 + 1,\, 3x_2 - 6x_3)$.

У задачах 5.12 – 5.15 знайти матрицю C лінійного оператора $C = \mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A}$ та його явний вигляд у канонічному базисі простору $\mathbf{R}^3$, якщо у цьому просторі задані лінійні оператори $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$.

5.12. $\mathcal{A}\vec{x} = (7x_1 + 4x_3,\, 4x_2 - 9x_3,\, 3x_1 + x_2)$,

$\mathcal{B}\vec{x} = (x_2 - 6x_3,\, 3x_1 + 7x_3,\, x_1 + x_2 - x_3)$.

5.13. $\mathcal{A}\vec{x} = (2x_1 - x_2 + 5x_3,\, x_1 + 4x_2 - x_3,\, 3x_1 - 5x_2 + 2x_3)$,

$\mathcal{B}\vec{x} = (x_1 + 4x_2 + 3x_3,\, 2x_1 + x_3,\, 3x_2 - x_3)$.

5.14. $\mathcal{A}\vec{x} = (3x_1 + x_2 - 2x_3,\, 3x_1 - 2x_2 + 4x_3,\, -3x_1 + 5x_2 - x_3)$,

$\mathcal{B}\vec{x} = (2x_1 + x_2,\, x_1 + x_2 + 2x_3,\, -x_1 + 2x_2 + x_3)$.

5.15. $\mathcal{A}\vec{x} = (3x_1 + x_2 + x_3,\, 2x_1 + x_2 + 2x_3,\, x_1 + 2x_2 + 3x_3)$,

$\mathcal{B}\vec{x} = (x_1 + x_2 - x_3,\, 2x_1 - x_2 + x_3,\, x_1 + x_2)$.

5.16. Задано лінійні оператори $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}$ відповідно матрицями

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

у деякому базисі. Знайти в цьому базисі матрицю оператора:

а) $\mathcal{A} + \mathcal{B}$; б) $\mathcal{A}\mathcal{B}$; в) $\mathcal{B}\mathcal{A}$.

5.17. Оператор $\mathcal{A}$ у базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ має матрицю $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, а оператор $\mathcal{B}$ у базисі $\vec{e}_1{}' = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{e}_2{}' = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$ – матрицю $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю оператора:

а) $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ у базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$; б) $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ у базисі $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'$;

в) $\mathcal{A}\mathcal{B}$ у базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$; г) $\mathcal{A}\mathcal{B}$ у базисі $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'$.

5.18. У просторі $\mathbf{L}_4$ задано лінійний оператор $\mathcal{A}$, матриця A якого у деякому базисі $\beta = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ така:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю цього оператора у базисах:

а) $\beta' = (\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_2, \vec{e}_4)$;

б) $\beta' = (\vec{e}_1,\, \vec{e}_1 + \vec{e}_2,\, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3,\, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4)$.

5.19. У просторі $\mathbf{L}_3$ задано два базиси:

β': $\vec{e}_1{}' = 8\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2 + 7\vec{e}_3$, $\vec{e}_2{}' = -16\vec{e}_1 + 7\vec{e}_2 - 13\vec{e}_3$, $\vec{e}_3{}' = 9\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 7\vec{e}_3$,

β'': $\vec{e}_1{}'' = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{e}_2{}'' = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$, $\vec{e}_3{}'' = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$.

Знайти матрицю оператора $\mathcal{A}$ у базисі β'', якщо його матриця у базисі β' має вигляд

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}.$$

5.20. У просторі $\mathbf{L}_2$ оператор $\mathcal{A}$ у базисі $\boldsymbol{\beta}'$: $\vec{e}_1' = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$, $\vec{e}_2' = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$, має матрицю $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Оператор $\mathcal{B}$ у базисі $\boldsymbol{\beta}''$: $\vec{e}_1'' = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{e}_2'' = 4\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ має матрицю $B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю оператора $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ у базисі $\boldsymbol{\beta}''$.

5.21. Нехай $p(t) = a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$ деякий многочлен та $\mathcal{A}$ лінійний оператор. Розглянемо оператор $p(\mathcal{A})$, що визначається рівністю

$$p(\mathcal{A}) = a_{n-1}\mathcal{A}^{n-1} + \ldots + a_1\mathcal{A} + a_0\mathcal{E}.$$

Знайти матрицю оператора $p(\mathcal{A})$, якщо $p(t) = 3t^2 - 2t + 5$, а оператор $\mathcal{A}$ задано матрицею $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

5.22. У просторі $\mathbf{P}_n$ задано лінійний оператор диференціювання $\mathcal{D} = \dfrac{d}{dt}$. Знайти матрицю цього оператора у базисі:

а) $1, t, t^2, \ldots, t^{n-1}$;

б) $1, (t - t_0), \dfrac{(t-t_0)^2}{2!}, \ldots, \dfrac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!}$, $t_0 \in \mathbf{R}$.

Довести операторну рівність $\mathcal{D}^n = \mathcal{O}$ ($\mathcal{O}$ – нульовий оператор $\mathcal{O}\vec{x} = 0$).

У задачах 5.23 – 5.25 встановити, які з операторів, що задані в $\mathbf{V}_3$, є невироджені, та знайти для них явний вигляд обернених операторів ($\vec{x} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$).

5.23. $\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$, λ – фіксоване число.

5.24. $\mathcal{A}\vec{x} = (y+z)\vec{i} + (2x+z)\vec{j} + (3x-y+z)\vec{k}$.

5.25. $\mathcal{A}\vec{x} = 2z\vec{i} + (x-z)\vec{j} + (2x+3z)\vec{k}$.

У задачах 5.26 – 5.28 встановити, які з даних лінійних операторів у $\mathbf{R}^3$ є невиродженими, та знайти явний вигляд обернених операторів.

5.26. $\mathcal{A}\vec{x} = (x_1 - x_2 + x_3, x_3, x_2)$.

5.27. $\mathcal{A}\vec{x} = (x_2 + 2x_3, -x_2, 2x_2 - x_3)$.

5.28. $\mathcal{A}\vec{x} = (x_1 + 2x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2 - 2x_3, 2x_1 - 2x_2 + x_3)$.

5.29. У деякому базисі простору $\mathbf{L}$ задано матрицю A лінійного оператора $\mathcal{A}$. З'ясувати, чи існує оператор, обернений до даного, та коли існує, знайти його матрицю у тому ж базисі, якщо:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

У задачах 5.30 – 5.31 для вказаних лінійних операторів, що діють у просторі $\mathbf{R}^3$, визначити ранг та дефект, а також знайти базиси образу та ядра.

5.30. $\mathcal{A}\vec{x} = (2x_1 - x_2 - x_3, x_1 - 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 - 2x_3)$.

5.31. $\mathcal{A}\vec{x} = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)$.

5.32. Знайти ядро, образ, ранг та дефект лінійного оператора $\mathcal{A}$, що діє у просторі $\mathbf{R}^3$, матрицею якого є матриця A, якщо:

а) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 8 & 2 & 4 \\ 12 & 3 & 6 \end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5.33. Знайти ядро та образ оператора диференціювання у просторі многочленів $\mathbf{P}_n$, степені яких $\le (n-1)$.

§2. Власні вектори та власні значення

I. Короткі теоретичні відомості

Власні вектори та власні значення лінійного оператора. Ненульовий вектор $\vec{x}$ називається *власним вектором* лінійного оператора $\mathcal{A}$, якщо існує таке число λ, що має місце співвідношення:

$$\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}\,. \tag{5.1}$$

Число λ називається *власним значенням* лінійного оператора $\mathcal{A}$, що відповідає власному вектору $\vec{x}$.

Нехай лінійному оператору $\mathcal{A}$ у деякому базисі відповідає матриця A, а вектору $\vec{x}$ – матриця-стовпець X з координат цього вектора. Тоді рівнянню (5.1) буде відповідати система рівнянь вигляду

$$(A-\lambda E)X = 0 \tag{5.2}$$

або у розгорнутому вигляді

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0\,; \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0\,; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0\,. \end{cases} \tag{5.3}$$

Для існування нетривіальних розв'язків цієї системи необхідно і достатньо, щоб її визначник дорівнював нулю, тобто

$$\det(A-\lambda E) = 0 \tag{5.4}$$

або у розгорнутому вигляді

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0\,. \tag{5.5}$$

Рівняння (5.4) або (5.5) називається *характеристичним рівнянням*. Ліва частина (5.5) представляє собою многочлен $P_n(\lambda)$ n-го степеня відносно λ. Многочлен $P_n(\lambda)$ називається *характеристичним многочленом.*

Корені характеристичного рівняння є власними значеннями лінійного оператора. Сукупність всіх власних значень лінійного оператора називається його *спектром*, причому кожне власне значення входить у спектр стільки разів, яка його кратність. Спектр називається *простим*, якщо характеристичне рівняння має тільки прості корені.

Таким чином, для того щоб знайти власні значення та власні вектори лінійного оператора $\mathcal{A}$, що має матрицю A у деякому базисі, виконуємо такі дії:

1. Знаходимо власні значення λ_i оператора $\mathcal{A}$, розв'язуючи характеристичне рівняння (5.5).

2. Для кожного власного значення λ_i розв'язуємо систему рівнянь (5.3). Будь-який ненульовий розв'язок цієї системи $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ визначає власний вектор $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ з власним значенням λ_i.

Зауважимо, що власні значення та власні вектори лінійного оператора $\mathcal{A}$ називають також власними значеннями та власними векторами матриці A цього оператора у деякому базисі.

Якщо λ – власне значення лінійного оператора $\mathcal{A}$, що діє у $\mathbf{L}_n$, і $\mathrm{Rg}(A-\lambda E) = r$, то існує $(n-r)$ лінійно незалежних власних векторів оператора $\mathcal{A}$ з власним значенням λ, бо вимірність простору U розв'язків відповідної однорідної системи $\dim \mathrm{U} = n-r$.

Теорема. У всякому комплексному лінійному просторі $\mathbf{L}_n$ існує хоча б один власний вектор лінійного оператора $\mathcal{A}$.

Нехай оператор $\mathcal{A}$, що діє у комплексному лінійному просторі $\mathbf{L}_n$, заданий у деякому базисі матрицею з дійсними елементами. Тоді,

а) якщо λ – власне значення, тоді $\overline{\lambda}$ – також власне значення;

б) якщо $X^{(\lambda)}$ – стовпець координат власного вектора, що відповідає власному значенню λ, то $\overline{X^{(\lambda)}}$ – стовпець координат власного вектора, що відповідає власному значенню $\overline{\lambda}$.

Зведення матриці лінійного оператора до діагонального вигляду. Якщо оператор $\mathcal{A}$, що діє у просторі L_n, має n лінійно незалежних власних векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$, що відповідають власним значенням $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, то у базисі з цих векторів матриця оператора $\mathcal{A}$ має діагональний вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що лінійний оператор називається оператором *простої структури*, якщо існує базис, складений з власних векторів цього оператора.

Можна довести, що власні вектори, що відповідають різним власним значенням, лінійно незалежні і отже можуть бути вибрані за базис простору. Крім того, має місце теорема.

Теорема. Для того, щоб існував базис з власних векторів оператора $\mathcal{A}$, необхідно та достатньо, щоб кожному власному значенню відповідало стільки лінійно незалежних власних векторів, яка його кратність.

Квадратна матриця A називається діагоналізовною, якщо існує така невироджена матриця T, що матриця $T^{-1}A\,T = A'$ діагональна.

Нехай задано два базиси $\{\vec{e}_i\}$ та $\{\vec{e}_i^{\,\prime}\}$, причому $\{\vec{e}_i^{\,\prime}\}$ складено з власних векторів лінійного оператора $\mathcal{A}$; матриці A та A' – матриці лінійного оператора $\mathcal{A}$ у цих базисах відповідно, причому згідно з теорією $A' = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Тоді склавши матрицю переходу T (її стовпцями є вектори $\vec{e}_i^{\,\prime}$), знайдемо $T^{-1}A\,T = A' = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Якщо матриця T – ортогональна, тобто $T^{-1} = T^T$, то маємо спрощену формулу $T^T A\,T = A' = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

II. Контрольні питання та завдання

1. Що називається власним вектором та власним значенням лінійного оператора?

2. Що називається спектром лінійного оператора? Який спектр називається простим?

3. Як знайти власні значення лінійного оператора, якщо відома матриця A цього оператора у деякому базисі?

4. Як знайти власні вектори лінійного оператора, що має в деякому базисі матрицю A?

5. Нехай k – кратність власного значення λ лінійного оператора, m – максимальне число лінійно незалежних власних векторів з власним значенням λ. Яке співвідношення між m та k?

6. Які необхідні і достатні умови того, щоб у просторі L_n існував базис, складений з власних векторів лінійного оператора $\mathcal{A}$?

7. В якому випадку лінійний оператор називається оператором простої структури?

8. Яка матриця називається діагоналізовною?

9. Які необхідні та достатні умови діагоналізовності оператора (матриці)?

10. Як знайти матрицю T, що діагоналізує матрицю оператора $\mathcal{A}$?

III. Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора $\mathcal{A}$, що заданий матрицею A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

► Складаємо характеристичне рівняння $\det(A - \lambda E) = 0$, тобто

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Розкривши визначник, отримаємо рівняння $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$.

Знаходимо власні значення $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$.

Власні вектори $\vec{x}^{(\lambda_1)}$, $\vec{x}^{(\lambda_2)}$ знаходимо з системи рівнянь $(A - \lambda E)X = 0$, тобто

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 + \quad 2x_2 = 0; \\ \quad 2x_1 + (1-\lambda)x_2 = 0. \end{cases}$$

Підставимо послідовно λ_1 та λ_2 в записану систему.

1. Вважаємо $\lambda_1 = 3$. Отримуємо однорідну систему, у якій два рівняння еквівалентні, і тому розв'язання її виконується так:

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0\,; \\ 2x_1 - 2x_2 = 0\,, \end{cases} \Rightarrow \left\{ -x_1 + x_2 = 0\,, \right. \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2\,; \\ x_2 = c\,, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = c\,; \\ x_2 = c\,. \end{cases}$$

Прийняли, що x_1 – базисна змінна, x_2 – вільна змінна, та перепозначили вільну змінну $x_2 = c$.

Загальний розв'язок однорідної системи

$$X(c) = \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbf{R}\,.$$

Сукупність власних векторів, що відповідає власному значенню λ_1
$\vec{x}^{(\lambda_1)} = (c,\, c) = c(1,\,1)$, $c \in \mathbf{R}$, $c \neq 0$.

2. Вважаємо $\lambda_2 = -1$. Однорідна система рівнянь для визначення власного вектора $\vec{x}^{(\lambda_2)}$ розв'язується аналогічно попередньому.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0\,; \\ 2x_1 + 2x_2 = 0\,, \end{cases} \Rightarrow \left\{ x_1 + x_2 = 0\,, \right. \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2\,; \\ x_2 = \;\; c\,, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -c\,; \\ x_2 = \;\; c\,. \end{cases}$$

Загальний розв'язок однорідної системи

$$X(c) = \begin{pmatrix} -c \\ c \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbf{R}\,.$$

Сукупність власних векторів, що відповідає власному значенню λ_2
$\vec{x}^{(\lambda_2)} = (-c,\, c) = c(-1,\,1)$, $c \in \mathbf{R}$, $c \neq 0$.

Отже, маємо: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$; $\vec{x}^{(\lambda_1)} = c(1,\,1)$, $\vec{x}^{(\lambda_2)} = c(-1,\,1)$, $c \in \mathbf{R}$, $c \neq 0$. ◄

Приклад 2. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора $\mathscr{A}$, що заданий матрицею A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

► Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0\,.$$

Розкривши визначник, отримаємо

$$(1-\lambda)((2-\lambda)^2 - 1) = 0\;;$$
$$(1-\lambda)\,(1-\lambda)\,(3-\lambda) = 0\;;$$
$$(1-\lambda)^2\,(3-\lambda) = 0\,;$$
$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1\,, \quad \lambda_3 = 3\,.$$

Маємо: корінь $\lambda_1 = 1$ – кратний, показник кратності $k = 2$, корінь $\lambda_3 = 3$ – простий, $k = 1$.

Система рівнянь для визначення власних векторів має вигляд

$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1 & & -x_3 = 0\,; \\ x_1 + (1-\lambda)x_2 & & -x_3 = 0\,; \\ -x_1 & & +(2-\lambda)x_3 = 0\,. \end{cases}$$

Підставимо послідовно λ_1 і λ_3 в записану систему.

1. $\lambda_1 = 1$, $k = 2$. Система приймає вигляд:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0\,; \\ x_1 - x_3 = 0\,; \\ -x_1 + x_3 = 0\,. \end{cases}$$

Розв'язуємо систему методом Гаусса.

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$r = \mathrm{Rg}(A - \lambda_1 E) = 1 \;\Rightarrow\; \dim \mathrm{U} = n - r = 3 - 1 = 2 \;\Rightarrow\; \exists$ два лінійно незалежних власних вектора, що відповідають власному значенню λ_1. Скорочена система рівнянь приймає вигляд

$$\left\{ x_1 - x_3 = 0\,, \right. \Rightarrow \left\{ x_1 = x_3\,. \right.$$

x_1 – базисна змінна, x_2, x_3 – вільні змінні. Якщо вільним змінним x_2, x_3 послідовно надати значення $x_2 = 1$, $x_3 = 0$; $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, отримаємо:

$$\begin{cases} x_1 = 0\,; \\ x_2 = 1\,; \\ x_3 = 0\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 1\,; \\ x_2 = 0\,; \\ x_3 = 1\,, \end{cases}$$

Отже, фундаментальна система розв'язків однорідної системи така:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідні лінійно незалежні власні вектори

$$\vec{x}^{(1)} = (0,\,1,\,0),\quad \vec{x}^{(2)} = (1,\,0,\,1).$$

Уся сукупність власних векторів, що відповідають власному значенню λ_1, має вигляд

$$\vec{x}^{(\lambda_1)} = c_1(0,\,1,\,0) + c_2(1,\,0,\,1),\quad c_1,\, c_2 \in \mathbf{R},\quad |c_1| + |c_2| \neq 0\,.$$

2. $\lambda_3 = 3$, $k = 1$. Система приймає вигляд:

$$\begin{cases} -x_1 \qquad\quad - x_3 = 0\,; \\ \;\; x_1 - 2x_2 - x_3 = 0\,; \\ -x_1 \qquad\quad - x_3 = 0\,. \end{cases}$$

Розв'язуємо систему методом Гаусса.

$$A - \lambda_3 E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$r = \mathrm{Rg}(A - \lambda_3 E) = 2 \;\Rightarrow\; \dim \mathrm{U} = n - r = 3 - 2 = 1 \;\Rightarrow\; \exists$ один лінійно незалежний власний вектор, що відповідає власному значенню λ_3. Скорочена система рівнянь приймає вигляд

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad + x_3 = 0\,; \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0\,, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \qquad\; = -x_3\,; \\ x_1 - 2x_2 = \;\; x_3\,. \end{cases}$$

Фундаментальна система розв'язків одержується, якщо покласти $x_3 = 1$:

$$\begin{cases} x_1 \qquad\;\; = -1\,; \\ x_1 - 2x_2 \;\; = \;\; 1\,; \\ \qquad\; x_3 = \;\; 1\,, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1\,; \\ x_2 = -1\,; \\ x_3 = \;\; 1\,. \end{cases}$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідно власний вектор $\vec{x}^{(3)} = (-1,\,-1,\,1)$. Уся сукупність власних векторів, що відповідають власному значенню λ_3, має вигляд

$$\vec{x}^{(\lambda_3)} = c(-1,\,-1,\,1),\quad c \in \mathbf{R},\quad c \neq 0\,. \blacktriangleleft$$

Приклад 3. У комплексному просторі $\mathbf{L}_3$ знайти власні вектори та власні значення лінійного оператора, що заданий дійсною матрицею:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

► Знаходимо власні значення, розв'язуючи характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 & 7 \\ 1 & -4-\lambda & 9 \\ -4 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0\,.$$

Після перетворень характеристичне рівняння приймає вигляд:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 & -29+9\lambda \\ 1 & -4-\lambda & 0 \\ -4 & 0 & 41-\lambda \end{vmatrix} = 0\,.$$

Розкривши визначник, отримаємо:

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 17\lambda - 13 = 0\,.$$

або

$$(\lambda-1)\left(\lambda^2-4\lambda+13\right)=0\,;$$

$$\lambda_1=1\,;\ \ \lambda_{2,3}=2\pm 3i\,.$$

Запишемо систему рівнянь, з якої визначаються власні вектори.

$$\begin{cases}(4-\lambda)x_1-5x_2+7x_3=0\,;\\ x_1-(4+\lambda)x_2+9x_3=0\,;\\ -4x_1+(5-\lambda)x_3=0\,.\end{cases}$$

Покладемо $\lambda=\lambda_1=1$. Система прийме вигляд:

$$\begin{cases}3x_1-5x_2+7x_3=0\,;\\ x_1-5x_2+9x_3=0\,;\\ -4x_1+4x_3=0\,.\end{cases}$$

Розв'язуємо систему методом Гаусса.

$$A-\lambda_1E=\begin{pmatrix}3&-5&7\\1&-5&9\\-1&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&-5&9\\3&-5&7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-5&10\\0&-5&10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&2\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

$\mathrm{Rg}(A-\lambda_1E)=2$; $\dim\mathrm{U}=3-2=1 \ \Rightarrow\ \exists$ один лінійно незалежний вектор, що відповідає λ_1.

Запишемо скорочену систему:

$$\begin{cases}-x_1+x_3=0\,;\\ -x_2+2x_3=0\,,\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}x_1=x_3\,;\\ x_2=2x_3\,,\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}x_1=1\,;\\ x_2=2\,;\\ x_3=1\,.\end{cases}$$

Фундаментальна система розв'язків: $E_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$; $\vec{x}=(1,\,2,1)$ – власний вектор. $\vec{x}^{(\lambda_1)}=c(1,\,2,\,1)$, $c\in\mathbf{R}$, $c\neq 0$ – сукупність власних векторів, що відповідають власному значенню $\lambda_1=1$.

Покладемо $\lambda=\lambda_2=2+3i$.

Система рівнянь для визначення відповідного власного вектора приймає вигляд:

$$\begin{cases}(2-3i)x_1-5x_2+7x_3=0\,;\\ x_1+(-6-3i)x_2+9x_3=0\,;\\ -4x_1+(3-3i)x_3=0\,.\end{cases}$$

$$A-\lambda_2E=\begin{pmatrix}2-3i&-5&7\\1&-6-3i&9\\-4&0&3-3i\end{pmatrix}.$$

$$\det(A-\lambda_2E)=0\,;\ \ \Delta_2=\begin{vmatrix}1&-6-3i\\-4&0\end{vmatrix}=4(-6-3i)=-12(2+i)\neq 0\,.$$

$\mathrm{Rg}(A-\lambda_2E)=2\Rightarrow\dim\mathrm{U}=3-2=1\Rightarrow\exists$ один лінійно незалежний власний вектор; Δ_2 – базисний мінор.

Скорочена система рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases}x_1+(-6-3i)x_2+9x_3=0\,;\\ -4x_1+(3-3i)x_3=0\,,\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}x_1+(-6-3i)x_2=-9x_3\,;\\ 4x_1=(3-3i)x_3\,,\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{3-3i}{4}x_3\,;\\ x_2=\dfrac{1}{-6-3i}(-9x_3-x_1)\,;\\ x_3=4\,,\end{cases}\ \begin{cases}x_1=3-3i\,;\\ x_2=\dfrac{1}{-6-3i}(-36-3+3i)\,;\\ x_3=4\,,\end{cases}\ \begin{cases}x_1=3-3i\,;\\ x_2=5-3i\,;\\ x_3=4\,.\end{cases}$$

Зауважимо, що

$$x_2=\frac{1}{-6-3i}\cdot(-39+3i)=\frac{(-13+i)(2-i)}{-(2+i)(2-i)}=\frac{15i-25}{-(4+1)}=\frac{-5+3i}{-1}=5-3i\,.$$

Фундаментальна система розв'язків:

$$E_1=\begin{pmatrix}3-3i\\5-3i\\4\end{pmatrix};\ \vec{x}=(3-3i,5-3i,4);\ \vec{x}^{(\lambda_2)}=c(3-3i,5-3i,4),\ c\in\mathbf{C},\ c\neq 0\,.$$

Для $\lambda_3=2-3i$, маємо згідно з теорією: $\vec{x}^{(\lambda_3)}=c(3+3i;\,5+3i;\,4)$, $c\in\mathbf{C}$, $c\neq 0$. ◀

Приклад 4. Звести матрицю $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ лінійного оператора $\mathscr{A}$ до діагонального вигляду.

► Визначаємо власні вектори та власні значення матриці A. Для цього складаємо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 2 & 4-\lambda\end{vmatrix}=0,$$

$$(1-\lambda)(4-\lambda)-4=0,$$

$$\lambda^2-5\lambda=0,$$

$$\lambda(\lambda-5)=0,$$

$$\lambda_1=0,\ \ \lambda_2=5.$$

Оскільки власні значення різні, то існує базис у $\mathbf{R}^2$ з власних векторів, а матриця оператора в цьому базисі (новому) має діагональний вигляд. У даному випадку

$$A'=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}.$$

Далі впевнимося в цьому, переходячи до нового базису з власних векторів за допомогою матриці переходу T.

Власні вектори знаходимо з системи рівнянь $(A-\lambda E)X=0$, тобто

$$\begin{cases}(1-\lambda)x_1+2x_2=0;\\ 2x_1+(4-\lambda)x_2=0.\end{cases}$$

Покладемо $\lambda=\lambda_1=0$.

$$\begin{cases}x_1+2x_2=0;\\ 2x_1+4x_2=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-2x_2;\\ x_2=1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-2;\\ x_2=1.\end{cases}$$

$\vec{x}^{(1)}=(-2,1)$ – власний вектор, що відповідає λ_1.

Покладемо $\lambda=\lambda_2=5$.

$$\begin{cases}-4x_1+2x_2=0;\\ 2x_1-x_2=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_2=2x_1;\\ x_1=1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=1;\\ x_2=2.\end{cases}$$

$\vec{x}^{(2)}=(1,2)$ – власний вектор, що відповідає λ_2.

Оскільки вектори $\vec{x}^{(1)}$, $\vec{x}^{(2)}$ лінійно незалежні, вони утворюють базис у $\mathbf{R}^2$.

Матриця переходу T від старого базису до нового (з власних векторів) така, що її стовпцями є власні вектори, тобто

$$T=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Тоді $A'=T^{-1}A\,T$.

$$T^{-1}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & -2\end{pmatrix},$$

$$A'=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}0 & 0\\ -5 & -10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}.$$

Таким чином, безпосередньо перевірили, що матриця лінійного оператора у базисі з власних векторів має зазначений діагональний вигляд. ◄

Приклад 5. Звести матрицю A лінійного оператора до діагонального вигляду та знайти відповідний базис, якщо

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ -2 & -2 & -1\end{pmatrix}.$$

► Характеристичне рівняння

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 0\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ -2 & -2 & -1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)(1-\lambda^2)=0$$

має корні $\lambda_1=2$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=-1$. Оскільки власні значення різні, то існує базис у $\mathbf{R}^3$ з власних векторів лінійного оператора. Отже, матриця може бути зведена до діагонального вигляду.

Знаходимо відповідні власні вектори з системи рівнянь $(A-\lambda E)X=0$. Якщо $\lambda=2$, система прийме вигляд

$$(A-2E)X=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -2 & -2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

або

$$\begin{cases}-x_1+2x_2=0\,;\\ -2x_1-2x_2-3x_3=0\,.\end{cases}$$

Фундаментальна система розв'язків складається з одного розв'язку $E_1=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$; власний вектор $\vec{x}^{(1)}=(2,1,-2)$.

Аналогічно, якщо $\lambda=1$ система прийме вигляд

$$(A-E)X=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & -2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

або

$$\begin{cases}x_2=0\,;\\ -2x_1-2x_2-2x_3=0\,,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_2=0\,;\\ x_1+x_2+x_3=0\,.\end{cases}$$

З цієї системи знаходимо другий власний вектор $\vec{x}^{(2)}=(1,0,-1)$.

Нарешті, якщо $\lambda=-1$, власний вектор $\vec{x}^{(3)}=(0,0,1)$.

Знайдені вектори $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$ лінійно незалежні, отже, утворюють базис, в якому матриця лінійного перетворення $\mathscr{A}$ має такий діагональний вигляд

$$A'=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Перевіримо це.

Сформуємо матрицю переходу T з власних векторів (розташовуємо їх стовпцями).

$$T=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ -2 & -1 & 1\end{pmatrix},\quad \det T=-1,$$

$$A'=T^{-1}A\,T\,,$$

$$T^{-1}=(-1)\begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}^T=(-1)\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$A'=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ -2 & -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ -2 & -1 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 1 & -2 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ -2 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}. \blacktriangleleft$$

Приклад 6. Знайти власні вектори та власні значення лінійного оператора $\mathscr{A}$, що заданий в деякому базисі матрицею A. Чи зводиться ця матриця до діагонального вигляду?

$$A=\begin{pmatrix}0 & -4 & 0\\ 1 & -4 & 0\\ 1 & -2 & -2\end{pmatrix}.$$

► Знаходимо власні значення з характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix}-\lambda & -4 & 0\\ 1 & -4-\lambda & 0\\ 1 & -2 & -2-\lambda\end{vmatrix}=0\,.$$

$$(-2-\lambda)(\lambda(4+\lambda)+4)=0,$$

$$(\lambda+2)(\lambda^2+4\lambda+4)=0,$$

$$(\lambda+2)^3=0.$$

$\lambda=-2$, показник кратності $k=3$.

Запишемо систему рівнянь для визначення власних векторів.

$$\begin{cases} -\lambda x_1- 4x_2 =0; \\ x_1+(-4-\lambda)x_2 =0; \\ x_1- 2x_2+(-2-\lambda)x_3=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda x_1+ 4x_2 =0; \\ x_1-(4+\lambda)x_2 =0; \\ x_1- 2x_2-(2+\lambda)x_3=0. \end{cases}$$

Покладемо $\lambda=-2$.

$$\begin{cases} -2x_1+4x_2=0; \\ x_1-2x_2=0; \\ x_1-2x_2=0. \end{cases}$$

$r=\mathrm{Rg}(A-\lambda E)=1$; $\dim \mathrm{U}=n-r=3-1=2 \Rightarrow \exists$ два лінійно незалежні власні вектори, що відповідають $\lambda=-2$.

Скорочена система:

$$\{x_1-2x_2=0, \ \{x_1=2x_2.$$

x_1 – базисна змінна, x_2, x_3 – вільні змінні; $x_2=c_1$, $x_3=c_2$.

Знаходимо фундаментальну систему розв'язків.

$$\begin{cases} x_1=2c_1; \\ x_2=c_1; \\ x_3=c_2, \end{cases} \begin{cases} x_1=2; \\ x_2=1; \\ x_3=0, \end{cases} \begin{cases} x_1=0; \\ x_2=0; \\ x_3=1. \end{cases}$$

$\vec{x}^{(1)}=(2,1,0)$, $\vec{x}^{(2)}=(0,0,1)$ – лінійно незалежні власні вектори.

Вся сукупність власних векторів:

$$\vec{x}^{(\lambda)}=c_1(2,1,0)+c_2(0,0,1), \quad c_1, c_2\in \mathbf{R}, \quad |c_1|+|c_2|\neq 0.$$

Матриця A не зводиться до діагонального вигляду, бо не існує повного набору власних векторів, тобто вектори $\vec{x}^{(1)}$, $\vec{x}^{(2)}$ – лінійно незалежні, але вони (їх два!) не утворюють базис тривимірного простору. ◀

Приклад 7. Знайти власні вектори та власні значення лінійного оператора $\mathscr{A}$, що заданий в деякому базисі матрицею A. Чи зводиться ця матриця до діагонального вигляду?

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

► Характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Знаходимо власні значення

$$(2-\lambda)(-\lambda(4-\lambda)+4)=0,$$

$$(2-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+4)=0,$$

$$(2-\lambda)^3=0.$$

$\lambda=2$, показник кратності $k=3$.

Запишемо систему рівнянь для визначення власних векторів.

$$\begin{cases} -\lambda x_1+ x_2 =0; \\ -4x_1+(4-\lambda)x_2 =0; \\ -2x_1+ x_2+(2-\lambda)x_3=0. \end{cases}$$

Підставляємо в систему $\lambda=2$.

$$\begin{cases} -2x_1+x_2=0; \\ -4x_1+2x_2=0; \\ -2x_1+x_2=0. \end{cases}$$

$\mathrm{Rg}(A-\lambda E)=1=r$; $\dim \mathrm{U}=n-r=3-1=2 \Rightarrow \exists$ два лінійно незалежні власні вектори.

Скорочена система має вигляд:

$$\{-2x_1+x_2=0.$$

x_1 – базисна змінна, x_2, x_3 – вільні змінні. Покладемо $x_2=0$, $x_3=1$; $x_2=1$, $x_3=0$.

$$\left\{ x_1 = \frac{x_2}{2}\right., \quad \begin{cases} x_1 = 0\,; \\ x_2 = 0\,; \\ x_3 = 1\,, \end{cases} \quad \vec{x}_1 = (0,\,0,\,1)\,; \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}\,; \\ x_2 = 1\,; \\ x_3 = 0\,, \end{cases} \quad \vec{x}_2 = (\frac{1}{2},\,1,\,0)\,.$$

$$\vec{x}^{(\lambda)} = c_1(0,\,0,\,1) + c_2(\frac{1}{2},\,1,\,0), \quad c_1,\,c_2 \in \mathbf{R},\ |c_1| + |c_2| \neq 0\,.$$

Матриця A не зводиться до діагонального вигляду, бо не існує базису, складеного з власних векторів (вимірність простору дорівнює трьом, а лінійно незалежних власних векторів два). ◄

IV. Задачі для практичних занять

5.34. У деякому базисі простору **L** задані вектори $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$ та матриця A оператора $\mathscr{A}$. Використовуючи означення, встановити, які з даних векторів є власними векторами оператора $\mathscr{A}$, та знайти їх власні значення, якщо:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_1 = (1,3)$, $\vec{x}_2 = (3,1)$, $\vec{x}_3 = (5,0)$;

б) $A = \begin{pmatrix} -3 & 11 & 7 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_1 = (3,0,0)$, $\vec{x}_2 = (0,-2,0)$, $\vec{x}_3 = (1,0,-1)$;

в) $A = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_1 = (-4,1,1)$, $\vec{x}_2 = (2,0,0)$, $\vec{x}_3 = (0,0,2)$.

5.35. Знайти характеристичне рівняння та спектр оператора $\mathscr{A}$, який задано матрицею A в деякому базисі, якщо:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 3 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

д) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; е) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 19 & 30 \\ 1 & 0 & -5 & -12 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$;

є) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 15 & -7 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; ж) $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 12 \\ 5 & 0 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

У задачах 5.36 – 5.45 знайти власні значення та власні вектори лінійних операторів, які задані своїми матрицями.

5.36. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. **5.37.** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5.38. $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$. **5.39.** $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.

5.40. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$. **5.41.** $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$.

5.42. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **5.43.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$.

5.44. $A=\begin{pmatrix}1&-3&1\\3&-3&-1\\3&-5&1\end{pmatrix}$.   **5.45.** $A=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&1&-2\\-1&-1&0\end{pmatrix}$.

У задачах 5.46 – 5.49 у комплексному просторі знайти власні вектори та власні значення лінійного оператора, що заданий дійсною матрицею.

5.46. $A=\begin{pmatrix}1&-3\\3&1\end{pmatrix}$.   **5.47.** $A=\begin{pmatrix}1&-5\\2&-1\end{pmatrix}$.

5.48. $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&3&-1\\-1&2&3\end{pmatrix}$.   **5.49.** $A=\begin{pmatrix}0&8&0\\0&0&-2\\2&8&-2\end{pmatrix}$.

У задачах 5.50 – 5.57 з'ясувати, які з заданих матриць лінійних операторів можна звести до діагонального вигляду переходом до нового базису. Знайти цей базис та відповідну діагональну форму D матриці.

5.50. $A=\begin{pmatrix}1&1&2&3\\0&2&2&4\\0&0&1&-2\\0&0&0&2\end{pmatrix}$.   **5.51.** $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\-6&1&7&-1\end{pmatrix}$.

5.52. $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.   **5.53.** $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}$.

5.54. $A=\begin{pmatrix}1/2&0&1/2\\0&1&0\\1/2&0&1/2\end{pmatrix}$.   **5.55.** $A=\begin{pmatrix}-1&3&-1\\-3&5&-1\\-3&3&1\end{pmatrix}$.

5.56. $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$.   **5.57.** $A=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$.

У задачах 5.58 – 5.61 знайти ортонормований базис з власних векторів та діагональну матрицю D в цьому базисі для лінійного оператора, який задано в деякому ортонормованому базисі матрицею A (шуканий базис визначається неоднозначно).

5.58. $A=\begin{pmatrix}11&2&-8\\2&2&10\\-8&10&5\end{pmatrix}$.   **5.59.** $A=\begin{pmatrix}17&-8&4\\-8&17&-4\\4&-4&11\end{pmatrix}$.

5.60. $A=\begin{pmatrix}3&-i&0\\i&3&0\\0&0&4\end{pmatrix}$.   **5.61.** $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&2\\2&2&4\end{pmatrix}$.

У задачах 5.62 – 5.67 виконати вказані доведення.

5.62. Довести, що для невиродженості оператора $\mathscr{A}$ необхідно та достатньо, щоб він не мав власного значення, що дорівнює нулю.

5.63. Довести, що якщо оператор $\mathscr{A}$ невироджений, то $\mathscr{A}$ та $\mathscr{A}^{-1}$ мають однакові власні вектори. Знайти зв'язок між власними значеннями цих операторів.

5.64. Довести, що оператор $\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{E}$ при будь-якому λ_0 має ті ж самі власні вектори, що й оператор $\mathscr{A}$. Знайти зв'язок між власними значеннями цих операторів.

5.65. Довести, що власні значення діагональної матриці співпадають з її діагональними елементами.

5.66. Довести, що характеристичний многочлен транспонованої матриці A^T співпадає з характеристичним многочленом матриці A.

5.67. Нехай $\vec{x}$ та $\vec{y}$ – власні вектори оператора $\mathcal{A}$, що відповідають власним значенням λ_1 та λ_2 $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$. Довести, що вектор $\vec{z} = \alpha\,\vec{x} + \beta\,\vec{y}$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ не є власним вектором оператора $\mathcal{A}$.

§3. Лінійні оператори в евклідовім просторі

I. Короткі теоретичні відомості

Нехай $\mathbf{U}_n$ – *комплексний* евклідів простір (унітарний).

Лінійний оператор $\mathcal{A}^*$ називається *спряженим* до даного лінійного оператора $\mathcal{A}$, якщо

$$(\mathcal{A}\,\vec{x},\,\vec{y}) = \left(\vec{x},\,\mathcal{A}^*\,\vec{y}\right) \quad \forall\,\vec{x},\,\vec{y} \in \mathbf{U}_n .$$

Лінійний оператор $\mathcal{A}$, що діє в $\mathbf{U}_n$, називається *самоспряженим*, якщо

$$(\mathcal{A}\,\vec{x},\,\vec{y}) = (\vec{x},\,\mathcal{A}\,\vec{y}) \quad \forall\,\vec{x},\,\vec{y} \in \mathbf{U}_n .$$

Лінійний оператор $\mathcal{U}$, що діє в $\mathbf{U}_n$, називається *унітарним*, якщо

$$(\mathcal{U}\,\vec{x},\,\mathcal{U}\,\vec{y}) = (\vec{x},\,\vec{y}) \quad \forall\,\vec{x},\,\vec{y} \in \mathbf{U}_n .$$

Нехай $\mathbf{E}_n$ – *дійсний* евклідів простір.

Лінійний оператор $\mathcal{A}$, що діє в $\mathbf{E}_n$, називається *самоспряженим*, якщо

$$(\mathcal{A}\,\vec{x},\,\vec{y}) = (\vec{x},\,\mathcal{A}\,\vec{y}) \quad \forall\,\vec{x},\,\vec{y} \in \mathbf{E}_n .$$

Лінійний оператор $\mathcal{A}$, що діє в $\mathbf{E}_n$, називається *ортогональним*, якщо

$$(\mathcal{A}\,\vec{x},\,\mathcal{A}\,\vec{y}) = (\vec{x},\,\vec{y}) \quad \forall\,\vec{x},\,\vec{y} \in \mathbf{E}_n .$$

Спряжений оператор має такі властивості:

1) $\left(\mathcal{A}^*\right)^* = \mathcal{A}$; 2) $(\mathcal{A}\,\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\,\mathcal{A}^*$; 3) $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*$;
4) $(\alpha\,\mathcal{A})^* = \overline{\alpha}\,\mathcal{A}^*$; 5) $\left(\mathcal{A}^*\right)^{-1} = \left(\mathcal{A}^{-1}\right)^*$, якщо оператор $\mathcal{A}$ невироджений.

Оператори $\mathcal{A}$ та $\mathcal{A}^*$ називаються *взаємоспряженими*.

Мають місце такі рівносильні твердження:

1. Матриця A – матриця оператора $\mathcal{A}$ в ортонормованому базисі $\Leftrightarrow$ матриця A^* – матриця оператора $\mathcal{A}^*$ у тому ж базисі.

2. Лінійний оператор $\mathcal{A}$, що діє в $\mathbf{U}_n$, – *самоспряжений* $\Leftrightarrow$ матриця A оператора $\mathcal{A}$ в ортонормованому базисі – ермітова, тобто $A = A^*$.

3. Лінійний оператор $\mathcal{U}$, що діє в $\mathbf{U}_n$ – *унітарний* $\Leftrightarrow$ матриця U оператора $\mathcal{U}$ в ортонормованому базисі – унітарна, тобто $U\,U^* = U^*\,U = E$.

4. Лінійний оператор $\mathcal{A}$, що діє в $\mathbf{E}_n$, – *самоспряжений* $\Leftrightarrow$ матриця A оператора $\mathcal{A}$ в ортонормованому базисі – симетрична, тобто $A = A^T$.

5. Лінійний оператор $\mathcal{A}$, що діє в $\mathbf{E}_n$ – *ортогональний* $\Leftrightarrow$ матриця A оператора $\mathcal{A}$ в ортонормованому базисі – ортогональна, тобто $A\,A^T = A^T A = E$.

Теорема (про повноту власних векторів самоспряженого оператора). Для всякого самоспряженого оператора існує ортогональний базис, складений з його власних векторів.

Таким чином, всякий самоспряжений оператор являється оператором простої структури і для всякого самоспряженого оператора існує ортонормований базис, складений з власних векторів цього оператора.

Самоспряжений оператор має дійсні власні значення.

Симетрична матриця – матриця самоспряженого оператора $\mathcal{A}$ в $\mathbf{E}_n$ – діагоналізовна. Щоб знайти ортогональну матрицю T, що діагоналізує симетричну матрицю A порядку n, треба знайти n ортогональних власних векторів матриці A; координати j-го $\left(j = \overline{1,\,n}\right)$ нормованого власного вектора матриці A утворюють j-й стовпець матриці T. Матриця переходу від одного ортонормованого базису до іншого ортономованого базису ортогональна $T^{-1} = T^T$. Отже,

$$A' = T^T A\,T = \mathrm{diag}\,(\lambda_1,\,\lambda_2,\,\ldots,\,\lambda_n),$$

де всі λ_i $(i = \overline{1,\,n})$ – дійсні числа.

II. Контрольні питання та завдання

1. Який оператор називається спряженим до оператора $\mathscr{A}$? Яке його позначення?

2. Наведіть основні властивості спряженого оператора.

3. Який оператор називається самоспряженим? Який вигляд має матриця самоспряженого оператора у ортонормованому базисі?

4. Якою умовою зв'язані власні вектори самоспряженого оператора евклідова простору, які відповідають різним власним значенням?

5. Чи може комплексне число бути власним значенням самоспряженого оператора дійсного евклідова простору?

6. Сформулюйте теорему про повноту власних векторів самоспряженого оператора евклідова простору.

7. Чи являється симетрична матриця діагоналізовною у дійсному просторі?

8. Яка матриця називається ортогональною?

9. Як знайти ортогональну матрицю T, що діагоналізує симетричну матрицю A?

10. Який лінійний оператор називається ортогональним?

11. Наведіть основні властивості ортогональних операторів.

12. Яка необхідна та достатня умова ортогональності оператора?

13. Який лінійний оператор називається унітарним?

14. Яка необхідна та достатня умова унітарності оператора?

III. Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Лінійний оператор $\mathscr{A}$, що діє у дійсному евклідовім просторі $\mathbf{E_3}$, у базисі $\beta' = \left(\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'\right)$ має матрицю $A_{\beta'}$.

$$A_{\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Відомо, що $\vec{e}_1' = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{e}_2' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$, $\vec{e}_3' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ і базис $\beta = \left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right)$ ортонормований. Знайти матрицю спряженого оператора $\mathscr{A}^*$ у базисі β'.

► Позначимо матрицю оператора $\mathscr{A}$ у базисі β через A_β, матрицю спряженого оператора $\mathscr{A}^*$ у базисах β та β' відповідно A_β^*, $A_{\beta'}^*$.

Зауважимо, що базис β' не є ортонормованим, бо $\left(\vec{e}_i', \vec{e}_j'\right) \neq \delta_{ij}$. Випишемо матриці переходу від базису до базису.

$$T_{\beta\to\beta'} = T_{\beta'\to\beta}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix};\ T_{\beta'\to\beta} = T_{\beta\to\beta'}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Процес розв'язання задачі такий:

1. Знайдемо матрицю A_β за формулою

$$A_\beta = T_{\beta'\to\beta}^{-1} A_{\beta'} T_{\beta'\to\beta},$$

$$A_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 6 & -4 & 6 \\ 6 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Знайдемо матрицю A_β^* за формулою

$$A_\beta^* = A_\beta^T,$$

$$A_\beta^* = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ -3 & -4 & -5 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. Знайдемо матрицю $A^*_{\beta'}$ за формулою

$$A^*_{\beta} = T^{-1}_{\beta\to\beta'} A^*_{\beta} T_{\beta\to\beta'},$$

$$A^*_{\beta'} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ -3 & -4 & -5 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -36 & -37 & -15 \\ 30 & 30 & 14 \\ 26 & 27 & 9 \end{pmatrix}. \blacktriangleleft$$

Приклад 2. Вияснити, чи є ортогональним оператор $\mathscr{A}$, що діє в $\mathbf{E_3}$, заданий в ортонормованому базисі матрицею A.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

► Оператор є ортогональним тоді і тільки тоді, коли в ортонормованому базисі його матриця ортогональна, тобто виконуються умови:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, a_{jk} = \begin{cases} 0, & i \ne j; \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Перевіримо виконання цих умов.

$$\sum_{k=1}^{3} a_{1k}\, a_{2k} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 0\cdot 0 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{3} a_{1k}\, a_{3k} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 0 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{3} a_{2k}\, a_{3k} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 0 + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{3} a_{1k}^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 0 = 1;$$

$$\sum_{k=1}^{3} a_{2k}^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 0 = 1;$$

$$\sum_{k=1}^{3} a_{1k}^2 = 0^2 + 0^2 + 1^2 = 1.$$

Отже, оператор A – ортогональний. ◄

Приклад 3. Вияснити, чи являється ортогональним оператор симетрії відносно площини Oyz у просторі вільних векторів $\mathbf{V_3}$.

► Ясно, що оператор симетрії зберігає довжину. Але будь-який оператор, що зберігає довжину є ортогональним. Отже, даний оператор є ортогональним. ◄

Приклад 4. Знайти ортогональну матрицю T, що діагоналізує симетричну матрицю A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

► Відомо, що ортогональна матриця T, що діагоналізує симетричну матрицю A третього порядку, має таку побудову: в стовпцях її розташовані координати трьох ортонормованих власних векторів матриці A.

Тому процес розв'язання задачі складається з таких етапів:

1. Розв'язуємо характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Отримаємо $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$. Це власні значення матриці A.

2. Система рівнянь для визначення власних векторів має вигляд

$$\begin{cases} (3-\lambda)x_1 - x_2 + x_3 = 0; \\ -x_1 + (5-\lambda)x_2 - x_3 = 0; \\ x_1 - x_2 + (3-\lambda)x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуємо цю систему послідовно, покладаючи $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$.

При $\lambda_1 = 2$ маємо систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0\,; \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 0\,; \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0\,. \end{cases}$$

З цієї системи отримуємо, що $\vec{x}_1 = (1,\,0,\,-1)$ – власний вектор; $\vec{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\,0,\,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ – нормований власний вектор.

При $\lambda_2 = 3$ маємо систему:

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 = 0\,; \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\,; \\ x_1 - x_2 = 0\,. \end{cases}$$

Звідки знаходимо $\vec{x}_2 = (1,\,1,\,1)$ – власний вектор; $\vec{e}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ – нормований власний вектор.

При $\lambda_3 = 6$ маємо систему:

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 + x_3 = 0\,; \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 0\,; \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 0\,. \end{cases}$$

Звідки знаходимо $\vec{x}_3 = (1,-2,1)$ – власний вектор; $\vec{e}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ – нормований власний вектор.

Отже, ортогональна матриця T має вигляд

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -2 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Виконуємо перевірку правильності знаходження ортогональної матриці T – матриці переходу від вихідного базису до базису, складеного з власних векторів

$$A' = T^T A\, T = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -2 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(\lambda_1,\,\lambda_2,\,\lambda_3)\,.$$ (Перевірте!) ◀

IV. Задачі для практичних занять

У задачах 5.68 – 5.69 лінійний оператор $\mathcal{A}$ у базисі $\beta' = (\vec{e}_1{}',\,\vec{e}_2{}',\,\ldots,\vec{e}_n{}')$ має матрицю A. Знайти матрицю спряженого оператора $\mathcal{A}^*$ у тому ж базисі β', якщо вектори $\vec{e}_1{}',\,\vec{e}_2{}',\,\ldots,\vec{e}_n{}'$ задані стовпцями своїх координат в деякому ортонормованому базисі $\beta = (\vec{e}_1,\,\vec{e}_2,\,\ldots,\vec{e}_n)$.

5.68. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $E_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5.69. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}$, $E_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $E_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5.70. Оператор $\mathcal{A}$ має в деякому ортонормованому базисі матрицю A. Знайти матрицю спряженого оператора в тому ж базисі.

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}0&-1&2\\3&4&-5\\1&0&-3\end{pmatrix}$.

5.71. Оператор $\mathscr{A}$ має в деякому ортонормованому базисі матрицю A. З'ясувати, чи є лінійний оператор $\mathscr{A}$ самоспряженим, якщо:

а) $A=\begin{pmatrix}2&-1\\1&3\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}2&3&1\\3&4&-1\\1&-1&5\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&2&2\\1&-2&3\end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix}0&2&-4\\2&-1&1\\-4&1&3\end{pmatrix}$.

5.72. За якого значення α оператор, заданий матрицею A в деякому ортонормованому базисі, є одночасно ортогональним та самоспряженим?

а) $A=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&\alpha\\1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}1/\sqrt{5}&2/\sqrt{5}\\\alpha&1/\sqrt{5}\end{pmatrix}$.

5.73. Лінійний оператор $\mathscr{A}$ в деякому ортонормованому базисі $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$ має матрицю A. Знайти матрицю спряженого оператора $\mathscr{A}^*$ в ортонормованому базисі $\vec{e}_1',\vec{e}_2',\ldots,\vec{e}_n'$, якщо:

а) $A=\begin{pmatrix}-3&1\\4&2\end{pmatrix}$, $\vec{e}_1'=\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_1-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_2$, $\vec{e}_2'=\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_1+\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_2$;

б) $A=\begin{pmatrix}1&-2\\3&4\end{pmatrix}$, $\vec{e}_1'=\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{e}_1+\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{e}_2$, $\vec{e}_2'=\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{e}_1-\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{e}_2$;

в) $A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&2&1\end{pmatrix}$, $\vec{e}_1'=\frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3)$,

$\vec{e}_2'=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{e}_1+\vec{e}_2)$, $\vec{e}_3'=\frac{1}{\sqrt{6}}(-\vec{e}_1-\vec{e}_2+2\vec{e}_3)$.

5.74. З'ясувати, чи є матриця A ортогональною, і якщо є, знайти обернену до неї:

а) $A=\begin{pmatrix}1&4\\-2&2\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}1/\sqrt{10}&-3/\sqrt{10}\\3/\sqrt{10}&1/\sqrt{10}\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}&2/\sqrt{6}&2/\sqrt{30}\\0&-1/\sqrt{6}&5/\sqrt{30}\\2/\sqrt{3}&-1/\sqrt{6}&-1/\sqrt{30}\end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$;

д) $A=\begin{pmatrix}2/\sqrt{13}&0&-3/\sqrt{13}\\0&1&0\\3/\sqrt{13}&0&2/\sqrt{13}\end{pmatrix}$; е) $A=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3}&-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3}&0&-2/\sqrt{6}\end{pmatrix}$.

5.75. Якій умові повинні задовольняти α та β $(\alpha,\beta\in\mathbf{R})$, щоб матриця $A=\begin{pmatrix}\alpha&-\beta\\\beta&\alpha\end{pmatrix}$ була ортогональною?

5.76. Нехай $\mathscr{A}$ та $\mathscr{B}$ – ортогональні оператори відповідно з матрицями A та B в деякому базисі. Чому дорівнює $\det AB$?

5.77. Оператор $\mathscr{A}$ в деякому базисі задано матрицею A. З'ясувати, чи є оператор $\mathscr{A}$ ортогональним, якщо:

а) $A=\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}1/\sqrt{5}&-6/\sqrt{70}&2/\sqrt{14}\\2/\sqrt{5}&3/\sqrt{70}&-1/\sqrt{14}\\0&5/\sqrt{70}&3/\sqrt{14}\end{pmatrix}$;

$$\text{в) } A=\begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

5.78. Знайти ортогональну матрицю, яка зводить симетричну матрицю A до діагонального вигляду, та записати діагональний вигляд цієї матриці, якщо:

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 4 \end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$;

г) $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$; д) $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; е) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;

є) $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

У задачах 5.79 – 5.89 виконати вказані доведення.

5.79. Довести такі властивості самоспряженого оператора:

а) власні значення дійсні;

б) власні вектори, що відповідають різним власним значенням, ортогональні.

5.80. Довести такі властивості унітарного оператора:

а) власні значення за модулем дорівнюють одиниці;

б) для того, щоб лінійний оператор був унітарним, необхідно і достатньо, щоб він переводив ортонормований базис у ортонормований базис;

в) унітарний оператор зберігає скалярний добуток векторів;

г) унітарний оператор зберігає довжини векторів.

5.81. Довести, що коли матриця A оператора $\mathcal{A}$ – симетрична в деякому ортонормованому базисі $\beta=(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$, то вона симетрична в будь-якому ортонормованому базисі $\beta'=(\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \dots, \vec{e}_n{}')$.

5.82. Довести, що добуток двох унітарних перетворень є унітарне перетворення.

5.83. Довести, що якщо $\mathcal{U}$ – унітарне перетворення, а $\mathcal{A}$ – самоспряжене, то $\mathcal{U}^{-1}\mathcal{A}\,\mathcal{U}$ – теж самоспряжене.

5.84. Довести, що якщо один і той же вектор $\vec{x}$ є власним вектором для лінійного перетворення $\mathcal{A}$ та спряженого перетворення $\mathcal{A}^*$ з власними значеннями λ_1 та λ_2 відповідно, то $\lambda_1=\overline{\lambda}_2$.

5.85. Довести, що добуток $\mathcal{A}\mathcal{B}$ двох самоспряжених перетворень $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}$ тоді і тільки тоді буде самоспряженим, коли матриці цих перетворень A та B переставні.

5.86. Довести, що якщо оператори $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}$ переставні, то переставні й спряжені оператори $\mathcal{A}^*$ та $\mathcal{B}^*$.

5.87. Нехай $\vec{x}$ – власний вектор оператора $\mathcal{A}$, з власним значенням λ, $\vec{y}$ – власний вектор оператора $\mathcal{A}^*$ з власним значенням μ, причому $\mu\neq\overline{\lambda}$. Довести, що вектори $\vec{x}$ та $\vec{y}$ ортогональні.

5.88. Нехай $\vec{x}=(x_1, x_2, x_3)$, $\mathcal{A}\vec{x}=(\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \alpha_3 x_3)$, де $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – деякі числа. Чи буде оператор $\mathcal{A}$ самоспряженим у дійсному евклідовім просторі; у комплексному евклідовім просторі?

5.89. Показати, що добуток унітарного оператора на число α тоді і тільки тоді є унітарним оператором, коли $|\alpha|=1$.

ГЛАВА 6. **КВАДРАТИЧНІ ФОРМИ**

§1. Теорія квадратичних форм

І. Короткі теоретичні відомості

Означення. Різні форми представлення. *Квадратичною формою* n змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$ називається однорідний многочлен другого степеня відносно цих змінних:

$$L\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j\ ,$$

де a_{ij} – задані числа, коефіцієнти квадратичної форми; $a_{ij}=a_{ji}\,, i, j=\overline{1,\, n}$.

Матриця A – матриця квадратичної форми.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad A=A^T.$$

Ранг матриці квадратичної форми називається її *рангом.* Якщо $\mathrm{Rg}\, A=n$, то квадратична форма *невироджена*, у противному випадку $\left(\mathrm{Rg}\, A<n\right)$ – *вироджена*.

Матрична форма запису квадратичної форми:

$$X^T A\ X\ ,$$

де $X^T=\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right)$; *операторна* форма запису квадратичної форми: $\left(\mathcal{A}\,\vec{x},\, \vec{x}\right)$ або $\left(\vec{x},\, \mathcal{A}\,\vec{x}\right)$, оператор $\mathcal{A}$ самоспряжений, $\vec{x}=\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right)$.

Таким чином: $L\left(\vec{x}\right)=X^T A\ X=\left(\mathcal{A}\,\vec{x},\, \vec{x}\right)=\left(\vec{x},\, \mathcal{A}\,\vec{x}\right)$.

Канонічний вигляд квадратичної форми:

$$L\left(\vec{x}\right)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\, x_i^2\ .$$

Матриця канонічної квадратичної форми *діагональна*.

Канонічна квадратична форма називається *нормальною*, якщо всі її коефіцієнти a_{ii}, які не дорівнюють нулю, такі, що $\left|a_{ii}\right|=1$.

Теорема. Будь-яка квадратична форма зводиться до канонічного вигляду.

Зведення до канонічного вигляду.

а) Метод ортогональних перетворень.

Задача зведення квадратичної форми до канонічного вигляду зводиться до зведення матриці A квадратичної форми до діагонального вигляду. Це можливо, враховуючи те, що матриця A – симетрична. Тому метод ортогональних перетворень полягає в наступному:

1. Знаходимо ортогональні власні вектори матриці A. Пронормовані власні вектори дають ортонормований базис, в якому матриця A має діагональний вигляд.

2. Будуємо матрицю переходу T з векторів ортонормованого базису (розташовуємо їх стовпцями). Матриця T – ортогональна, тобто $T^{-1}=T^T$.

3. Виконуємо перетворення $X=T\,X'$, яке зводить квадратичну форму до канонічного вигляду. Матриця D одержаної квадратичної форми діагональна, на головній діагоналі стоять власні числа, тобто $D=T^T A\ T=$ $=\mathrm{diag}\left(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\right)$.

б) Метод Лагранжа.

Метод Лагранжа зведення квадратичної форми до канонічного вигляду полягає у послідовному виділенні у квадратичній формі повних квадратів і введенні відповідних замін змінних. Цей процес виконується таким чином:

1. Нехай хоча б один з коефіцієнтів $a_{ii}\neq 0$. У заданій квадратичній формі виділимо члени, що містять x_1 і доповнимо отриманий вираз до повного квадрата

$$\sigma_1=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\ldots+2a_{1n}x_1x_n=$$

$$=a_{11}\left(x_1^2+2\frac{1}{a_{11}}x_1\left(a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ldots+a_{1n}x_n\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{a_{11}^2}\left(a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ldots+a_{1n}x_n\right)^2\right)-\gamma=$$

$$=a_{11}\left(x_1+\frac{1}{a_{11}}\left(a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ldots+a_{1n}x_n\right)\right)^2-\gamma=$$

$$=\frac{1}{a_{11}}\left(a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ldots+a_{1n}x_n\right)^2-\gamma,$$

де γ – алгебраїчна сума членів, що не залежать від x_1.

Таким чином, квадратична форма представиться у вигляді

$$L\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)=\frac{1}{a_{11}}\left(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\right)^2+L_1\left(x_2, x_3, \ldots, x_n\right).$$

Вводячи заміну $y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n$, та аналогічно розглянувши $L_1\left(x_2, x_3, \ldots, x_n\right)$, отримуємо канонічну квадратичну форму змінних $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

2. Якщо всі коефіцієнти $a_{ii}=0$, то цей випадок зводиться до попереднього таким чином.

Нехай $a_{ij}\neq 0 \quad (i\neq j)$. Тоді виконаємо, наприклад, перетворення

$$\begin{cases} x_1 = y_1 ; \\ x_2 = y_2 ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{i-1} = y_{i-1} ; \\ x_i = y_i + y_j ; \\ x_{i+1} = y_{i+1} ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = y_n . \end{cases}$$

Тоді доданок, що містить a_{ij}, перетвориться до вигляду

$$2a_{ij}x_ix_j=2a_{ij}\left(y_i+y_j\right)y_j=2a_{ij}y_iy_j+2a_{ij}y_j^2,$$

де коефіцієнт при y_j^2 не дорівнює нулю.

Тобто введене перетворення переводить квадратичну форму $L\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ у квадратичну форму змінних $y_1, y_2, \ldots, y_n$, у якій коефіцієнт при y_j^2 відмінний від нуля.

в) Метод Якобі.

Введемо поняття головних кутових мінорів матриці A. *Головними кутовими мінорами* квадратної матриці A називаються мінори, що стоять у верхньому лівому куті матриці A.

Метод Якобі зведення квадратичної форми до канонічного вигляду може бути застосовано у випадку, коли матриця квадратичної форми $A=\left(a_{ij}\right)_{n,n}$, $A=A^T$, така, що її головні кутові мінори відмінні віл нуля, тобто

$$\Delta_1=\left|a_{11}\right|\neq 0,\ \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\neq 0,\ \Delta_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\neq 0,\ \ldots,$$

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{vmatrix}\neq 0.$$

Нехай задана така квадратична форма $L\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$, для якої виконуються вказані умови. Тоді, згідно з методом Якобі, існує єдине невироджене перетворення вигляду

$$\begin{cases} x_1 = y_1+\alpha_{21}y_2+\alpha_{31}y_3+\ldots+\alpha_{n1}y_n ; \\ x_2 = \qquad y_2+\alpha_{32}y_3+\ldots+\alpha_{n2}y_n ; \\ x_3 = \qquad\qquad y_3+\ldots+\alpha_{n3}y_n ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \qquad\qquad\qquad y_n , \end{cases}$$

що зводить квадратичну форму $L\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)=X^TAX$ до канонічного вигляду

$$L\left(y_1, y_2, \ldots, y_n\right)=\sum_{j=1}^{n}\beta_jy_j^2,$$

де

$$\beta_1=\Delta_1;\ \beta_j=\frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}},\quad j=\overline{2, n}.$$

Коефіцієнти цього перетворення α_{ji} визначаються за формулами

$$\alpha_{ji}=(-1)^{j+i}\frac{\Delta_{j-1\,i}}{\Delta_{j-1}},$$

де $\Delta_{j-1\,i}$ – мінор матриці A, що розташований на перетині стовпців цієї матриці з номерами $1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, j$ і рядків з номерами $1, 2, \ldots, j-1$.

Зведення квадратичної форми до канонічного вигляду не є однозначним, бо його можна виконати різними способами, в яких перехід до канонічного вигляду пов'язаний з переходами до різних базисів (наприклад, у методі ортогональних перетворень базис ортонормований). Однак, отримані канонічні форми мають загальну властивість, яка відома як закон інерції квадратичних форм.

Закон інерції квадратичних форм полягає у наступному. Всі канонічні форми, до яких зводиться дана квадратична форма, мають: одне й те ж число нульових коефіцієнтів; одне й те ж число додатних коефіцієнтів; одне й те ж число від'ємних коефіцієнтів.

Знаковизначені квадратичні форми. Квадратична форма $(\mathscr{A}\vec{x}, \vec{x})$ називається *додатно визначеною*, якщо $(\mathscr{A}\vec{x}, \vec{x}) > 0 \quad \forall \vec{x} \neq 0$; квадратична форма $(\mathscr{A}\vec{x}, \vec{x})$ називається *від'ємно визначеною*, якщо $(\mathscr{A}\vec{x}, \vec{x}) < 0$ $\forall \vec{x} \neq 0$.

Додатно та від'ємно визначені квадратичні форми називаються *знаковизначеними.*

Теорема 1. Для того, щоб квадратична форма була додатно (від'ємно) визначена, необхідно та достатньо, щоб усі власні значення λ_i матриці цієї квадратичної форми були додатні (від'ємні).

Теорема 2. *(Критерій Сильвестра)*. Для того, щоб квадратична форма була додатно визначеною, необхідно та достатньо, щоб усі головні кутові мінори матриці цієї форми були додатними; для того, щоб квадратична форма була від'ємно визначеною, необхідно та достатньо, щоб усі головні кутові мінори парного порядку матриці цієї форми були додатними, а непарного – від'ємними.

II. Контрольні питання та завдання

1. Що називається квадратичною формою n змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$? Яка квадратична форма називається дійсною?

2. Що називається матрицею квадратичної форми; рангом квадратичної форми?

3. Як записати квадратичну форму в матричному вигляді; в операторному вигляді?

4. Яка квадратична форма називається канонічною, який вона має вигляд?

5. У чому полягає метод ортогональних перетворень зведення квадратичної форми до канонічного вигляду?

6. Чому дорівнюють коефіцієнти канонічної квадратичної форми, до якої зводиться задана квадратична форма методом ортогональних перетворень?

7. У чому суть методу Лагранжа зведення квадратичної форми до канонічного вигляду?

8. Які мінори називаються головними кутовими мінорами матриці?

9. В якому випадку може бути застосовано метод Якобі зведення квадратичної форми до канонічного вигляду?

10. Як визначаються коефіцієнти канонічної квадратичної форми, до якої зводиться задана квадратична форма методом Якобі?

11. Чи єдиним чином визначається канонічний вигляд для даної квадратичної форми?

12. У чому полягає закон інерції квадратичних форм?

13. Яка квадратична форма називається додатно визначеною; від'ємно визначеною; знаковизначеною?

14. Сформулюйте критерій Сильвестра додатно визначеної (від'ємно визначеної) квадратичної форми.

III. Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Записати у матричному вигляді квадратичну форму

$$L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 5x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3.$$

► Матриця заданої квадратичної форми

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$L(x_1, x_2, x_3) = X^T A X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \blacktriangleleft$$

Приклад 2. Задана матриця A квадратичної форми $L(x_1, x_2, x_3)$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Записати цю квадратичну форму у вигляді однорідного многочлена другого степеня, тобто у вигляді

$$L(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

► Оскільки $a_{11} = 2$, $a_{22} = 3$, $a_{33} = -2$, $a_{12} = a_{21} = -1$, $a_{13} = a_{31} = 0$, $a_{23} = a_{32} = 5$, то

$$L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 10x_2x_3.$$

Або, скориставшись матричною формою запису квадратичної форми, та перемноживши відповідні матриці, отримуємо

$$L(x_1, x_2, x_3) = X^T A X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 & -x_1 + 3x_2 + 5x_3 & 5x_2 - 2x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= (2x_1 - x_2)x_1 + (-x_1 + 3x_2 + 5x_3)x_2 + (5x_2 - 2x_3)x_3 =$$

$$= 2x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 10x_2x_3. \blacktriangleleft$$

Приклад 3. Звести квадратичну форму $L(x_1, x_2)$ до канонічного вигляду методом ортогональних перетворень. Виписати відповідну ортогональну матрицю, ортогональне перетворення та канонічний вигляд. Виконати перевірку правильності знаходження ортогональної матриці та ортогонального перетворення.

$$L(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2.$$

► 1. Матриця заданої квадратичної форми

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо власні значення λ_1, λ_2 матриці A, розв'язавши характеристичне рівняння.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$$\lambda_1 = 3, \ \lambda_2 = 1.$$

2. Знаходимо власні вектори $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ матриці A, розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1 + x_2 = 0; \\ x_1 + (2-\lambda)x_2 = 0, \end{cases}$$

при $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$.

$$\lambda_1 = 3, \ \begin{cases} -x_1 + x_2 = 0; \\ x_1 - x_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2; \\ x_2 = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1; \\ x_2 = 1. \end{cases}$$

$\vec{x}_1 = (1, 1)$. Нормований власний вектор: $\vec{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$.

$$\lambda_2 = 1, \ \begin{cases} x_1 + x_2 = 0; \\ x_1 + x_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2; \\ x_2 = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1; \\ x_2 = 1. \end{cases}$$

$\vec{x}_2 = (-1, 1)$. Нормований власний вектор: $\vec{e}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$.

3. Складаємо ортогональну матрицю, взявши $\vec{e}_1$ та $\vec{e}_2$ за стовпці цієї матриці.

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Це матриця переходу від вихідного базису до канонічного.

Ортогональним перетворенням, що зводить квадратичну форму до канонічного вигляду, являється

$$X = T\,Y\,,$$

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} y_1 - y_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

або

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(y_1 - y_2)\,; \\ x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(y_1 + y_2)\,. \end{cases} \tag{6.1}$$

4. Записуємо канонічний вигляд квадратичної форми.

$$L_1(y_1\,,\; y_2) = 3y_1^2 + y_2^2\,.$$

Перевіряємо правильність, знаходячи матрицю D канонічної форми за формулою:

$$D = T^T A\,T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отримали, що матриця D діагональна, на діагоналі стоять власні значення, тобто $D = \mathrm{diag}(3\,,\,1)$. Отже, канонічна форма, а також ортогональна матриця знайдені вірно.

Можна також безпосередньо впевнитись у правильності знаходження ортогонального перетворення (6.1), підставивши (6.1) у вихідний вигляд квадратичної форми $L(x_1\,,\,x_2)$. Виконавши всі перетворення, отримаємо канонічний вигляд.

$$L_1(x_1\,,\,x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 = \left| \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(y_1 - y_2) \\ x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(y_1 + y_2) \end{array} \right| =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}(y_1 - y_2)^2 + 2\cdot\frac{1}{2}(y_1 + y_2)^2 + 2\cdot\frac{1}{2}(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) =$$

$$= y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2 + y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2 + y_1^2 - y_2^2 =$$

$$= 3y_1^2 + y_2^2 = L_1(y_1\,,\; y_2)\,. ◄$$

Приклад 4. Звести квадратичну форму $L(x_1\,,\,x_2\,,\,x_3)$ до канонічного вигляду методом ортогональних перетворень. Виписати відповідну ортогональну матрицю, ортогональне перетворення та канонічний вигляд. Звести канонічну квадратичну форму до нормального вигляду.

$$L(x_1\,,\,x_2\,,\,x_3) = x_1^2 - 8x_1x_2 - 16x_1x_3 + 7x_2^2 - 8x_2x_3 + x_3^2\,.$$

► 1. Матриця даної квадратичної форми:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & -8 \\ -4 & 7-\lambda & -4 \\ -8 & -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0\,.$$

Корені характеристичного рівняння $\lambda_1 = -9$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 9$; це власні значення матриці A.

$\lambda_1 = -9$ – простий корінь, $\lambda_2 = 9$ – корінь кратності $k = 2$.

2. Система рівнянь для визначення власних векторів

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 - 4x_2 - 8x_3 = 0\,; \\ -4x_1 + (7-\lambda)x_2 - 4x_3 = 0\,; \\ -8x_1 - 4x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0\,. \end{cases}$$

При $\lambda_1 = -9$ система приймає вигляд:

$$\begin{cases} 10x_1 - 4x_2 - 8x_3 = 0\,; \\ -4x_1 + 16x_2 - 4x_3 = 0\,; \\ -8x_1 - 4x_2 + 10x_3 = 0\,, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0\,; \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = 0\,; \\ 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0\,. \end{cases}$$

$$A-\lambda_1 E=\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ 1 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 18 & -9 \\ 0 & 18 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$r=\mathrm{Rg}(A-\lambda_1 E)=2 \;\Rightarrow\; \exists \;\; n-r=3-2=1$ лінійно незалежний власний вектор.

Для його знаходження розв'язуємо скорочену систему

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 = 0\,; \\ \quad\;\; 2x_2 - x_3 = 0\,, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 4x_2 = -x_3\,; \\ \quad\;\; 2x_2 = x_3\,, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 4x_2 - x_3\,; \\ x_2 = \dfrac{x_3}{2}\,; \\ x_3 = 2\,, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2\,; \\ x_2 = 1\,; \\ x_3 = 2\,. \end{cases}$$

$\vec{x}_1=(2,1,2)$. Нормований власний вектор: $\vec{e}_1=\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$.

При $\lambda_2=9$ система приймає вигляд:

$$\begin{cases} -8x_1-4x_2-8x_3=0\,; \\ -4x_1-2x_2-4x_3=0\,; \\ -8x_1-4x_2-8x_3=0\,, \end{cases} \Rightarrow \{2x_1+x_2+2x_3=0\,; \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_2=-2x_1-2x_3\,; \\ x_1=1\,; \\ x_3=0\,. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=1\,; \\ x_2=-2\,; \\ x_3=0\,, \end{cases}$$

або
$$\begin{cases} x_2=-2x_1-2x_3\,; \\ x_1=0\,; \\ x_3=1\,, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=0\,; \\ x_2=-2\,; \\ x_3=1\,. \end{cases}$$

$r=\mathrm{Rg}(A-\lambda_2 E)=1 \;\Rightarrow\; \exists \;\; n-r=3-1=2$ лінійно незалежних власних векторів.

Знайшли Ф.С.Р. однорідної системи

$$E_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},\quad E_2=\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Шукані власні вектори відповідно

$$\vec{x}_2=(1,-2,0),\quad \vec{x}_2^{(1)}=(0,-2,1).$$

Ці вектори лінійно незалежні, але не ортогональні. Запишемо всю сукупність власних векторів, що відповідають власному значенню λ_2.

$$\vec{x}=c_1(1,-2,0)+c_2(0,-2,1)=(c_1,-2c_1-2c_2,c_2),$$

$$|c_1|+|c_2|\neq 0,\;\; c_1,c_2\in\mathbf{R}.$$

Будемо вимагати, щоб вектори $\vec{x}_2$ та $\vec{x}$ були ортогональні, тобто $(\vec{x}_2,\vec{x})=0$.

$$(\vec{x}_2,\vec{x})=(1,-2,0)\cdot(c_1,-2c_1-2c_2,c_2)=$$
$$=1\cdot c_1+(-2)\cdot(-2c_1-2c_2)+0\cdot c_2=$$
$$=c_1+4c_1+4c_2=0 \;\Rightarrow\; 5c_1=-4c_2.$$

$$c_1=-\frac{4}{5}c_2.$$

Покладемо, наприклад, $c_2=5$. Тоді $c_1=-4$ і власний вектор $\vec{x}=(-4,-2,5)$. Позначимо $\vec{x}_3=\vec{x}=(-4,-2,5)$. Отже, маємо пару ортогональних власних векторів

$$\vec{x}_2=(1,-2,0),\quad \vec{x}_3=(-4,-2,5).$$

Пронормуємо ці вектори.

$$\vec{e}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}},0\right),\quad \vec{e}_3=\left(-\frac{4}{3\sqrt{5}},-\frac{2}{3\sqrt{5}},\frac{5}{3\sqrt{5}}\right).$$

Отримані вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ ортогональні і нормовані. Безпосередньо впевнюємося, що $(\vec{e}_i,\vec{e}_j)=\delta_{ij}$.

3. Складаємо матрицю T, де вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ розташовуються стовпцями.

$$T=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt5} & -\frac{4}{3\sqrt5} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt5} & -\frac{2}{3\sqrt5} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt5} \end{pmatrix}.$$

Це матриця переходу від вихідного базису до канонічного. Вона ортогональна. Ортогональним перетворенням, що приводить квадратичну форму до канонічного вигляду, є:

$$X = T\,Y\,,$$

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt5} & -\frac{4}{3\sqrt5} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt5} & -\frac{2}{3\sqrt5} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2}{3}y_1+\frac{1}{\sqrt5}y_2-\frac{4}{3\sqrt5}y_3 \\ \frac{1}{3}y_1-\frac{2}{\sqrt5}y_2-\frac{2}{3\sqrt5}y_3 \\ \frac{2}{3}y_1 \qquad\qquad +\frac{5}{3\sqrt5}y_3 \end{pmatrix}$$

або

$$\begin{cases} x_1=\frac{2}{3}y_1+\frac{1}{\sqrt5}y_2-\frac{4}{3\sqrt5}y_3\,; \\ x_2=\frac{1}{3}y_1-\frac{2}{\sqrt5}y_2-\frac{2}{3\sqrt5}y_3\,; \\ x_3=\frac{2}{3}y_1 \qquad\qquad +\frac{5}{3\sqrt5}y_3\,. \end{cases} \tag{6.2}$$

4. Записуємо канонічний вигляд квадратичної форми.

$$L_1(y_1,\,y_2,\,y_3)=-9y_1^2+9y_2^2+9y_3^2.$$

Безпосередня перевірка показує, що

$$T^T A\,T = D = \mathrm{diag}(-9,\,9,\,9).$$

Крім того, підставивши у вихідну квадратичну форму формули ортогонального перетворення (6.2) і виконавши всі необхідні алгебраїчні перетворення, отримаємо канонічну форму $L_1(y_1,\,y_2,\,y_3)$.

5. Зведемо $L_1(y_1\,,\,y_2\,,\,y_3)$ до нормального вигляду, поклавши

$$\begin{cases} z_1=3y_1\,; \\ z_2=3y_2\,; \\ z_3=3y_3\,. \end{cases}$$

$$L_2(z_1,\,z_2,\,z_3)=-z_1^2+z_2^2+z_3^2\,.$$

Це нормальна форма квадратичної форми. ◄

Приклад 5. Звести методом Лагранжа до канонічного вигляду квадратичну форму $L(x_1,\,x_2,\,x_3)$. Записати відповідне перетворення, а також матрицю цього перетворення.

$$L(x_1,\,x_2,\,x_3)=x_1^2-3x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3+x_3^2\,.$$

► Оскільки серед коефіцієнтів $a_{ii}\,,\ i=\overline{1,3}$ є відмінні від нуля, зведення до канонічного вигляду можна виконати наступним чином. Представимо квадратичну форму у вигляді

$$L(x_1\,,\,x_2\,,\,x_3)=\left(x_1^2-3x_1x_2+4x_1x_3\right)+2x_2x_3+x_3^2=$$

$$=\left(x_1^2-2\cdot\frac{1}{2}x_1(3x_2-4x_3)+\frac{1}{4}(3x_2-4x_3)^2\right)-\frac{1}{4}(3x_2-4x_3)^2+$$

$$+2x_2x_3+x_3^2=\left(x_1-\frac{1}{2}(3x_2-4x_3)\right)^2-$$

$$-\frac{1}{4}\left(9x_2^2-24x_2x_3+16x_3^2\right)+2x_2x_3+x_3^2=$$

$$=\left(x_1-\frac{3}{2}x_2+2x_3\right)^2-\frac{9}{4}x_2^2+6x_2x_3-4x_3^2+2x_2x_3+x_3^2=$$

$$=\left(x_1-\frac{3}{2}x_2+2x_3\right)^2-\frac{9}{4}x_2^2+8x_2x_3-3x_3^2=$$

$$=\left(x_1-\frac{3}{2}x_2+2x_3\right)^2-\frac{9}{4}\left(x_2^2-\frac{32}{9}x_2x_3+\left(\frac{16}{9}\right)^2x_3^2\right)+$$

$$+\frac{9}{4}\cdot\frac{256}{81}x_3^2-3x_3^2=\left(x_1-\frac{3}{2}x_2+2x_3\right)^2-\frac{9}{4}\left(x_2-\frac{16}{9}x_3\right)^2+\frac{37}{9}x_3^2 .$$

Покладемо

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - 1{,}5x_2 + 2x_3 \ ; \\ y_2 = x_2 - \frac{16}{9}x_3 \ ; \\ y_3 = x_3 \ . \end{cases} \qquad (6.3)$$

Тоді $L\left(x_1, x_2, x_3\right)$ прийме вигляд $L_1\left(y_1, y_2, y_3\right)$.

$$L_1\left(y_1, y_2, y_3\right)=y_1^2-\frac{9}{4}y_2^2+\frac{37}{9}y_3^2 ,$$

що представляє канонічний вигляд вихідної квадратичної форми.

Розв’яжемо (6.3) відносно x_1, x_2, x_3.

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + \frac{3}{2}\left(y_2 + \frac{16}{9}y_3\right) - 2y_3 \ ; \\ x_2 = y_2 + \frac{16}{9}y_3 \ ; \\ x_3 = y_3 \ , \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + \frac{3}{2}y_2 + \frac{2}{3}y_3 \ ; \\ x_2 = y_2 + \frac{16}{9}y_3 \ ; \\ x_3 = y_3 \ . \end{cases} \qquad (6.4)$$

Можна перевірити, що підставивши (6.4) в задану квадратичну форму, отримаємо її канонічний вигляд $L_1\left(y_1, y_2, y_3\right)$. Таким чином, (6.4) є те перетворення, що зводить квадратичну форму до канонічного вигляду. Матриця цього перетворення

$$T=\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{16}{9} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перехід до діагональної матриці D канонічної квадратичної форми виконується так

$$T^{\mathrm{T}}AT = D = \mathrm{diag}\left(1, -\frac{9}{4}, \frac{37}{9}\right).$$

(Перевірте!) ◄

Приклад 6. Звести квадратичну форму $L\left(x_1, x_2, x_3\right)$ до канонічного вигляду методом Лагранжа. Виписати відповідне перетворення, а також його матрицю.

$$L\left(x_1, x_2, x_3\right)=2x_1x_2-6x_1x_3+2x_2x_3 .$$

► У квадратичній формі відсутній квадрат змінних, тобто всі $a_{ii}=0$. Тому виконуємо невироджене лінійне перетворення.

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \ ; \\ x_2 = y_1 + y_2 \ ; \\ x_3 = y_3 . \end{cases} \qquad (6.5)$$

В результаті отримаємо квадратичну форму, в якій коефіцієнт при y_1^2 не дорівнює нулю.

$$L_1\left(y_1, y_2, y_3\right)=2\left(y_1-y_2\right)\left(y_1+y_2\right)-6\left(y_1-y_2\right)y_3+2\left(y_1+y_2\right)y_3 =$$
$$=2y_1^2-2y_2^2-4y_1y_3+8y_2y_3 =$$
$$=2\left(y_1^2-2y_1y_3+y_3^2\right)-2y_3^2-2\left(y_2^2-4y_2y_3+4y_3^2\right)+8y_3^2 =$$
$$=2\left(y_1-y_3\right)^2-2\left(y_2-2y_3\right)^2+6y_3^2 .$$

Покладемо

$$\begin{cases} z_1 = y_1 - y_3 \ ; \\ z_2 = y_2 - 2y_3 \ ; \\ z_3 = y_3 \ . \end{cases} \qquad (6.6)$$

Тоді квадратична форма прийме вигляд:

$$L_2\left(z_1, z_2, z_3\right)=2z_1^2-2z_2^2+6z_3^2 ,$$

що представляє канонічний вигляд вихідної квадратичної форми.

Розв'яжемо (6.6) відносно y_1, y_2, y_3

$$\begin{cases} y_1 = z_1 + z_3 \ ; \\ y_2 = z_2 + 2z_3 \ ; \\ y_3 = z_3 \ . \end{cases} \qquad (6.7)$$

Підставимо (6.7) в (6.5). Отримаємо

$$\begin{cases} x_1 = z_1 - z_2 - z_3 \ ; \\ x_2 = z_1 + z_2 + 3z_3 \ ; \\ x_3 = z_3 \ . \end{cases} \qquad (6.8)$$

Формули (6.8) представляють собою перетворення, яке треба застосувати до квадратичної форми $L(x_1, x_2, x_3)$, щоб отримати канонічну форму $L_2(z_1, z_2, z_3)$.

Можна безпосередньо в цьому впевнитись, підставивши (6.8) в $L(x_1, x_2, x_3)$. (Перевірте!)

Матриця перетворення (6.8)

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перехід від матриці A квадратичної форми до матриці D канонічної квадратичної форми виконується так

$$T^{\mathrm{T}} A T = D = \mathrm{diag}(2, -2, 6).$$

(Перевірте!)

Зауважимо, що матриця T перетворення (6.8) може бути отримана з урахуванням матриць перетворень (6.5) та (6.7).

Дійсно, матриця перетворення (6.5)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матриця перетворення (6.7)

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді матриця перетворення (6.8) отримується так:

$$T = A_1 A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

що співпадає з отриманим раніше. ◄

Приклад 7. Звести до канонічного вигляду методом Якобі квадратичну форму

$$L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 .$$

► Матриця даної квадратичної форми має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Її головні кутові мінори $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 2$, $\Delta_3 = 1$ відмінні від нуля. Канонічний вигляд квадратичної форми

$$L_1(y_1, y_2, y_3) = \beta_1 y_1^2 + \beta_2 y_2^2 + \beta_3 y_3^2 ,$$

де $\beta_1 = \Delta_1$; $\beta_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta_1}$; $\beta_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta_2}$.

Тому $\beta_1 = 2$; $\beta_2 = \dfrac{2}{2} = 1$; $\beta_3 = \dfrac{1}{2}$.

Отже, канонічна квадратична форма має вигляд:

$$L_1(y_1, y_2, y_3) = 2y_1^2 + y_2^2 + \frac{1}{2} y_3^2 .$$

Перетворення, що зводить дану квадратичну форму до канонічного вигляду, має вигляд:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + \alpha_{21}y_2 + \alpha_{31}y_3 \ ; \\ x_2 = \qquad\quad y_2 + \alpha_{32}y_3 \ ; \\ x_3 = \qquad\qquad\qquad y_3 \ . \end{cases}$$

Врахуємо, що коефіцієнти α_{ji} цього перетворення визначаються за формулами

$$\alpha_{ji} = (-1)^{j+i}\frac{\Delta_{j-1i}}{\Delta_{j-1}},$$

де $\Delta_{j-1\,i}$ – мінор матриці A, що розташований на перетині стовпців цієї матриці з номерами $1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, j$ і рядків з номерами $1, 2, \ldots, j-1$.

Отримаємо

$$\alpha_{21} = (-1)^3\frac{\Delta_{11}}{\Delta_1} = -\frac{-2}{2} = 1;$$

$$\alpha_{31} = (-1)^4\frac{\Delta_{21}}{\Delta_2} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{2} = -\frac{1}{2};$$

$$\alpha_{32} = (-1)^5\frac{\Delta_{22}}{\Delta_2} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}}{2} = 0 .$$

Таким чином,

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 - \frac{1}{2}y_3 \ ; \\ x_2 = \qquad y_2 \qquad\ ; \\ x_3 = \qquad\qquad y_3 \ . \end{cases} \qquad (6.9)$$

Отримане перетворення зводить вихідну квадратичну форму до канонічного вигляду $L_1(y_1, y_2, y_3)$. Якщо підставити (6.9) у вираз для $L(x_1, x_2, x_3)$, отримаємо $L_1(y_1, y_2, y_3)$.

Матриця перетворення (6.9)

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Діагональна матриця D канонічної квадратичної форми отримується так:

$$T^{\mathrm{T}}AT = D = \mathrm{diag}\left(2, 1, \frac{1}{2}\right).$$

(Перевірте!) ◄

Приклад 8. Дослідити на знаковизначеність квадратичну форму

$$L(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 .$$

► Матриця квадратичної форми має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Її головні кутові мінори:

$$\Delta_1 = 5 > 0\ ,\ \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 11 > 0\ ,\ \ \Delta_3 = \det A = 18 > 0\ .$$

Отже, згідно з критерієм Сильвестра, квадратична форма додатно визначена.◄

IV. Задачі для практичних занять

6.1. Записати матриці кожної із заданих квадратичних форм.

а) $L(x_1, x_2) = 2x_1^2 - x_2^2 + 4x_1x_2$;

б) $L(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_2^2 - x_1x_2$;

в) $L(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_2^2$; г) $L(x_1, x_2) = 3x_1x_2$;

д) $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 - 6x_1x_3$;

е) $L(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + x_2^2 - 2x_2x_3$;

є) $L(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - x_2^2 + 5x_3^2$;

ж) $L(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 - 2x_1x_3$;

з) $L(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2^2 - 2x_3^2 + 3x_4^2 + 4x_1x_2 - 2x_3x_4$;

і) $L(x_1, x_2, x_3, x_4) = 3x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_4^2 - x_1x_4$.

6.2. Знайти ранг кожної із заданих квадратичних форм.

а) $L(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2$;

б) $L(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - 6x_1x_2$;

в) $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$;

г) $L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 8x_2x_3$;

д) $L(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 + x_4^2$.

6.3. Записати квадратичну форму $L(x_1, x_2, \dots, x_n)$ у матричному вигляді, якщо:

а) $L(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 6x_1x_2$;

б) $L(x_1, x_2) = x_2^2 + 3x_1x_2$; в) $L(x_1, x_2) = 2x_2^2 - x_1^2$;

г) $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 3x_2^2 + x_3^2 - 4x_2x_3$;

д) $L(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 2x_1x_3 - x_2x_3$;

е) $L(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + 3x_1x_3 - 2x_2x_3$.

6.4. Записати квадратичну форму $L(x_1, x_2, \dots, x_n)$ у вигляді $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ за заданою матрицею A:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

д) $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; е) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

6.5. Знайти ортогональне перетворення, яке зводить до канонічного вигляду квадратичну форму $L(x_1, x_2, \dots, x_n)$ та записати відповідний канонічний вигляд квадратичної форми, якщо:

а) $L(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2$;

б) $L(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2\sqrt{6}\, x_1x_2$;

в) $L(x_1, x_2) = 2x_1x_2$;

г) $L(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$;

д) $L(x_1, x_2, x_3) = 7x_1^2 + 7x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

е) $L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3$;

є) $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

6.6. Звести задану квадратичну форму до канонічного вигляду методом ортогональних перетворень. Виписати ортогональне перетворення та канонічний вигляд квадратичної форми. Записати нормальний вигляд квадратичної форми.

$$L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

6.7. Звести квадратичну форму $L(x_1, x_2, \dots, x_n)$ до канонічного вигляду методом Лагранжа та записати відповідне перетворення, якщо:

а) $L(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2$;

б) $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$;

в) $L(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 2x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 - 6x_2x_3$;

г) $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3$;

д) $L(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 + x_3^2 + x_1x_3 - 2x_2x_3$;

е) $L(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 - x_1x_3$.

6.8. Методом Лагранжа знайти нормальний вигляд та невироджене лінійне перетворення, що зводить до цього вигляду, для заданої квадратичної форми:

$$L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3.$$

6.9. Звести квадратичну форму $L(x_1, x_2, \dots, x_n)$ до канонічного вигляду методом Якобі та записати відповідне перетворення, якщо:

а) $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3$;

б) $L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1x_2$;

в) $L(x_1, x_2, x_3) = 2x_2^2 - x_1^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 - 2x_2x_3$.

6.10. Звести квадратичну форму $L(x_1, x_2, \dots, x_n)$ до канонічного вигляду: 1) за допомогою ортогонального перетворення; 2) методом Лагранжа; 3) методом Якобі (якщо цей метод можливо застосувати), та записати відповідне перетворення, якщо:

а) $L(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2$;

б) $L(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 4x_2^2 - 4\sqrt{2}\, x_1x_2$;

в) $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_2x_3$.

У задачах 6.11 – 6.16 дослідити на знаковизначеність кожну з даних квадратичних форм.

6.11. $L(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2$.

6.12. $L(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - 6x_1x_2$.

6.13. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 3x_2^2 + 3x_3^2 - x_1x_2 + 2x_2x_3$.

6.14. $L(x_1, x_2, x_3) = 6x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$.

6.15. $L(x_1, x_2, x_3) = -8x_1^2 - 5x_2^2 - 6x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

6.16. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_4^2 + x_1x_4 + 6x_2x_3$.

У задачах 6.17 – 6.20 дослідити, за яких значень λ кожна з даних квадратичних форм є знаковизначеною.

6.17. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + \lambda x_3^2$.

6.18. $L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 + \lambda x_1x_2 + x_2x_3$.

6.19. $L(x_1, x_2) = \lambda x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2$.

6.20. $L(x_1, x_2) = -3x_1^2 + \lambda x_2^2 - 4x_1x_2$.

§2. Використання теорії квадратичних форм

I. Короткі теоретичні відомості

Зведення загальних рівнянь кривих та поверхонь другого порядку до канонічного вигляду. *Загальне рівняння кривої другого порядку* має вигляд

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2ax + 2by + f = 0, \qquad (6.10)$$

де a_{ij}, $i, j = 1,2$, a, b, f – задані числа, при цьому хоча б один з коефіцієнтів $a_{ij} \neq 0$.

Це рівняння може визначати невироджені лінії другого порядку: еліпс, гіперболу, параболу або вироджені лінії другого порядку: пару прямих (може й співпавших), точку, пусту множину.

Загальне рівняння поверхні другого порядку має вигляд

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz +$$
$$+2ax + 2by + 2cz + f = 0, \qquad (6.11)$$

де a_{ij}, $i, j = \overline{1,3}$, a, b, c, f – задані числа, при цьому хоча б один з коефіцієнтів $a_{ij} \neq 0$.

Це рівняння може визначати невироджені поверхні другого порядку: циліндри, конуси, еліпсоїди, гіперболоїди, параболоїди або вироджені поверхні другого порядку: пару площин паралельних (може й співпавших), чи таких, що перетинаються, точку, пусту множину.

Зведення загальних рівнянь кривих та поверхонь другого порядку до канонічного вигляду виконується з використанням теорії квадратичних форм.

Дійсно, група старших членів рівнянь (6.10) та (6.11) представляє собою квадратичну форму змінних x, y та x, y, z з матрицями

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ та } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

відповідно.

Тому, перш за все, зводимо вказані квадратичні форми до канонічного вигляду, використовуючи метод ортогональних перетворень. З цією метою переходимо від ортонормованого базису $\vec{i}$, $\vec{j}$ або $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ до ортонормованого базису $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ або $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ відповідно, що складається з власних векторів відповідних матриць.

Підкреслимо, що новий базис обов'язково повинен бути ортонормованим, бо тільки у цьому випадку перехід від першого базису до другого має геометричний зміст повороту координатних осей.

Зауважимо також, що коефіцієнти при квадратах змінних у канонічному вигляді квадратичної форми, що одержані методом Лагранжа або Якобі, не співпадають з власними значеннями матриці цієї форми, а перетворення координат при цьому, хоча і є лінійним і невиродженим, не збігається з перетворенням координат при повороті осей.

Далі приводимо алгоритм зведення рівнянь кривих та поверхонь другого порядку до канонічного вигляду. Усі пункти будуть записані для поверхонь другого порядку, тобто для трьох змінних. Для кривих другого порядку, тобто для випадку двох змінних, всі формули відповідно спрощуються.

1. Складаємо характеристичне рівняння

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

та знаходимо його корені $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – власні значення матриці A.

2. Знаходимо власні вектори $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$, що відповідають цим власним значенням. Вони повинні бути ортогональними, що збігається з властивостями власних векторів самоспряженого оператора. Пронормувавши їх, отримаємо ортонормований базис.

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{x}_1}{|\vec{x}_1|}, \quad \vec{e}_2 = \frac{\vec{x}_2}{|\vec{x}_2|}, \quad \vec{e}_3 = \frac{\vec{x}_3}{|\vec{x}_3|}$$

де $(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij}$, δ_{ij} – символ Кронекера.

3. Виписуємо матрицю T переходу від базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ до базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Для цього записуємо вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ у стовпці матриці T, для якої $\det T = \pm 1$. Для збереження взаємної орієнтації нових координатних осей, на матрицю T накладають додаткову умову: $\det T = 1$. Якщо ця умова не виконується, то їй легко задовільнити відповідним вибором власних векторів.

4. Виконуємо лінійне невироджене перетворення

$$X = TX',$$

де $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$.

Тоді матриця A квадратичної форми зведеться до діагонального вигляду D.

$$A \to D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3).$$

Група старших членів перетвориться так:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz =$$

$$= \left| X = TX' \right| = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2 .$$

Група лінійних доданків представиться так:

$$2ax + 2by + 2cz = \left| X = TX' \right| = 2a'x_1 + 2b'y_1 + 2c'z_1 .$$

Вільний член f залишиться без змін.

Таким чином, рівняння (6.11) у координатах x_1, y_1, z_1 приймає вигляд:

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2 + 2a'x_1 + 2b'y_1 + 2c'z_1 + f = 0 . \qquad (6.12)$$

5. Виділяємо повні квадрати відносно змінних x_1, y_1, z_1, виконуємо паралельний перенос, переходячи до змінних x_2, y_2, z_2 і таким чином отримуємо канонічне рівняння.

Зауважимо, що рівняння (6.11) задане у системі координат $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; рівняння (6.12) у системі $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, що отримана з вихідної поворотом на деякий кут, канонічне рівняння записується у системі $(O_1; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, що отримується з попередньої паралельним переносом початку координат у точку O_1.

Зауважимо також, що канонічні рівняння кривих та поверхонь другого порядку представляються в одному з наступних виглядів.

Для кривої другого порядку (у змінних x, y):

1) $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c = 0$, $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$;

2) $\lambda_1 x^2 + by = 0$, $\lambda_1 \neq 0$;

3) $\lambda_1 x^2 + c = 0$, $\lambda_1 \neq 0$.

Для поверхні другого порядку (у змінних x, y, z):

1) $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + c = 0$, $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$;

2) $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + bz = 0$, $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$;

3) $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c = 0$, $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$;

4) $\lambda_1 x^2 + by = 0$, $\lambda_1 \neq 0$;

5) $\lambda_1 x^2 + c = 0$, $\lambda_1 \neq 0$.

II. Контрольні питання та завдання

1. Запишіть загальне рівняння кривої другого порядку на площині. Як знайти ортонормований базис, в якому квадратична форма, що відповідає цьому рівнянню, має канонічний вигляд?

2. Запишіть загальне рівняння поверхні другого порядку. Як знайти ортонормований базис, в якому квадратична форма, що відповідає цьому рівнянню, має канонічний вигляд?

III. Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Звести до канонічного вигляду задане рівняння кривої другого порядку та побудувати її.

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0 \qquad (6.13)$$

► Рівняння кривої (6.13) задане в системі координат $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Матриця квадратичної форми, що присутня в (6.13)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо $\Delta = 9 - 25 = -16 < 0$. Маємо криву гіперболічного типу.

Виконуємо зведення рівняння до канонічного вигляду таким чином:

1. Складаємо характеристичне рівняння $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 \\ 5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$ і знаходимо його корені $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = -2$. Це власні значення матриці A.

2. Знаходимо власні вектори.
Використовуємо систему:

$$\begin{cases}(3-\lambda)x_1 \quad + 5x_2 = 0; \\ 5x_1 + (3-\lambda)x_2 = 0.\end{cases}$$

У цій системі послідовно покладемо $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = -2$.

а) $\lambda_1 = 8$, $\begin{cases}-5x_1 + 5x_2 = 0; \\ 5x_1 - 5x_2 = 0,\end{cases} \Rightarrow \{-x_1 + x_2 = 0,$

$$\Rightarrow \begin{cases}x_1 = x_2; \\ x_2 = \ 1,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1 = 1; \\ x_2 = 1.\end{cases}$$

$\vec{x}_1 = (1,\, 1)$ – власний вектор; $\vec{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ – нормований власний вектор.

б) $\lambda_2 = -2$, $\begin{cases}5x_1 + 5x_2 = 0; \\ 5x_1 + 5x_2 = 0,\end{cases} \Rightarrow \{x_1 + x_2 = 0,$

$$\Rightarrow \begin{cases}x_1 = -x_2; \\ x_2 = \quad 1,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1 = -1; \\ x_2 = \ \ 1.\end{cases}$$

$\vec{x}_2 = (-1,\, 1)$ – власний вектор; $\vec{e}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ – нормований власний вектор.

Маємо нову систему координат $(O;\, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, яка отримується з попередньої поворотом на відповідний кут.

3. Записуємо матрицю переходу від базису $\vec{i}, \vec{j}$ до базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2$.

$$T = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Матриця T ортогональна.

Перевіряємо: $\det T = 1$, значить збережена взаємна орієнтація осей при повороті системи координат.

4. Виконуємо лінійне перетворення:

$$X = T\,X',$$

$$X = \begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 \\ y_1\end{pmatrix},$$

тобто

$$\begin{cases}x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - y_1); \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + y_1).\end{cases} \qquad (6.14)$$

Підставимо формули перетворення (6.14) в рівняння кривої (6.13). Тоді матриця A квадратичної форми прийме діагональний вигляд $A \to D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ і група старших членів представиться так:

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 = \left| X = TX' \right| = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 = 8x_1^2 - 2y_1^2.$$

Група лінійних членів:

$$-2x - 14y = \left| X = TX' \right| = -2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - y_1) - 14\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + y_1) =$$

$$= -2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - y_1 + 7x_1 + 7y_1) = -2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(8x_1 + 6y_1).$$

Вільний член не змінюється.

Таким чином, рівняння кривої у змінних x_1 та y_1 прийме вигляд:

$$8x_1^2 - 2y_1^2 - 2\cdot\frac{8}{\sqrt{2}}x_1 - 2\cdot\frac{6}{\sqrt{2}}y_1 - 13 = 0. \qquad (6.15)$$

5. Виділяємо повні квадрати відносно змінних x_1 та y_1 у (6.15).

$$8\left(x_1^2 - 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) - 2\left(y_1^2 + 2\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{9}{2} - \frac{9}{2}\right) - 13 = 0,$$

$$8\left(x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2\left(y_1 + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 = 13 + 4 - 9,$$

$$8\left(x_1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-2\left(y_1+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2=8,$$

$$\frac{\left(x_1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{1}-\frac{\left(y_1+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}{4}=1.$$

Покладемо

$$\begin{cases} x_2=x_1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \\ y_2=y_1+\dfrac{3}{\sqrt{2}}. \end{cases} \tag{6.16}$$

Це відповідає паралельному переносу початку координат у точку $O_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$. Отримаємо рівняння

$$\frac{x_2^2}{1}-\frac{y_2^2}{4}=1. \tag{6.17}$$

Це канонічне рівняння гіперболи. Воно записано в системі координат $(O_1; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

6. З формул паралельного переносу (6.16) знайдемо вираз x_1, y_1 через x_2, y_2 та підставимо у формули перетворення (6.14). Отримаємо результуюче перетворення координат (6.18).

$$\begin{cases} x_1=x_2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \\ y_1=y_2-\dfrac{3}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(x_2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}-y_2+\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right); \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(x_2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+y_2-\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x_2-y_2)+2; \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x_2+y_2)-1. \end{cases} \tag{6.18}$$

Очевидно, що якщо підставити формули перетворення (6.18) у вихідне задане рівняння кривої (6.13), то отримаємо канонічне рівняння (6.17). (Перевірте!)

Таким чином, (6.18) – результуюче перетворення координат, а канонічна система координат $(O_1; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, де

$$O_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{3}{\sqrt{2}}\right),\ \vec{e}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j};\ \vec{e}_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}.$$

7. Побудуємо гіперболу задану рівнянням (6.17) $\frac{x_2^2}{1}-\frac{y_2^2}{4}=1$. Послідовно нанесемо три системи координат $(O; \vec{i}, \vec{j})$, $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $(O_1; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ і в останній канонічній системі координат представимо гіперболу, задану цим рівнянням.

Враховуємо, що $\frac{x_2^2}{1}-\frac{y_2^2}{4}=1$ – гіпербола з дійсною віссю O_1x_2, $a=1$, $b=2$ – півосі гіперболи.

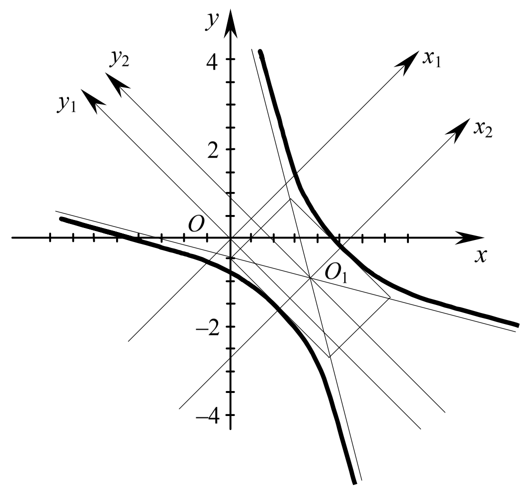


Рис. 6.1 ◄

Приклад 2. Звести до канонічного вигляду задане рівняння поверхні другого порядку та побудувати її.

$$3x^2+5y^2+3z^2-2xy+2xz-2yz-12x-10=0 \qquad (6.19)$$

► Рівняння (6.19) задане в системі координат $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.
Матриця квадратичної форми, що присутня в (6.19), має вигляд:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Виконуємо зведення рівняння до канонічного вигляду таким чином:
1. Складаємо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0 .$$

Звідки

$$(3-\lambda)\left(\lambda^2-8\lambda+12\right)=0 .$$

Отримуємо власні значення

$$\lambda_1=2,\ \lambda_2=3,\ \lambda_3=6 .$$

2. Знаходимо власні вектори, використовуючи систему

$$\begin{cases} (3-\lambda)x_1-x_2+x_3=0; \\ -x_1+(5-\lambda)x_2-x_3=0; \\ x_1-x_2+(3+\lambda)x_3=0. \end{cases}$$

У цій системі послідовно покладаємо $\lambda_1=2$, $\lambda_2=3$, $\lambda_3=6$.

а) $\lambda_1=2$;

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0; \\ -x_1+3x_2-x_3=0; \\ x_1-x_2+x_3=0. \end{cases}$$

$$A-2E=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$r=\mathrm{Rg}(A-2E)=2$; $n-r=1$ $\Rightarrow$ $\exists$ один лінійно незалежний власний вектор, що відповідає λ_1.

Скорочена система для визначення власного вектора:

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0; \\ 2x_2=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3=-x_1+x_2; \\ x_2=0; \\ x_1=1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=1; \\ x_2=0; \\ x_3=-1. \end{cases}$$

$\vec{x}_1=(1,0,-1)$ – власний вектор, $\vec{e}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ – нормований власний вектор.

б) $\lambda_2=3$;

$$\begin{cases} -x_2+x_3=0; \\ -x_1+2x_2-x_3=0; \\ x_1-x_2=0. \end{cases}$$

$$A-3E=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$r=\mathrm{Rg}(A-3E)=2$; $n-r=1$ $\Rightarrow$ $\exists$ один лінійно незалежний власний вектор, що відповідає λ_2.

Скорочена система для визначення власного вектора:

$$\begin{cases} -x_2+x_3=0; \\ -x_1+x_2=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2=x_3; \\ x_1=x_2; \\ x_3=1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=1; \\ x_2=1; \\ x_3=1. \end{cases}$$

$\vec{x}_2=(1,1,1)$ – власний вектор, $\vec{e}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ – нормований власний вектор.

в) $\lambda_3=6$;

$$\begin{cases} -3x_1-x_2+x_3=0; \\ -x_1-x_2-x_3=0; \\ x_1-x_2-3x_3=0. \end{cases}$$

$$A-6E=\begin{pmatrix}-3&-1&1\\-1&-1&-1\\1&-1&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&2&4\\-1&-1&-1\\0&-2&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&1&2\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

$r=\mathrm{Rg}\left(A-6E\right)=2$; $n-r=1 \Rightarrow \exists$ один лінійно незалежний власний вектор.

Скорочена система для визначення власного вектора:

$$\begin{cases}x_2+2x_3=0\,;\\x_1+x_2+x_3=0\,,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-x_2-x_3\,;\\x_2=-2x_3\,;\\x_3=1\,,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=1\,;\\x_2=-2\,;\\x_3=1\,.\end{cases}$$

$\vec{x}_3=(1,-2,1)$ – власний вектор, $\vec{e}_3=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ – нормований власний вектор.

Вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ – ортогональні та нормовані. $\left(\vec{e}_i,\vec{e}_j\right)=\delta_{ij}$.

Маємо нову систему координат $\left(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right)$, яка отримується з попередньої поворотом на відповідний кут.

3. Записуємо матрицю переходу від базису $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ до базису $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$.

$$T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{2}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}.$$

Матриця T – ортогональна.

$\det T=1$, тобто буде збережена взаємна орієнтація осей при повороті системи координат.

4. Використовуємо лінійне перетворення

$$X=TX'.$$

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{2}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix},$$

тобто

$$\begin{cases}x=\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{3}}y_1+\frac{1}{\sqrt{6}}z_1\,;\\y=\frac{1}{\sqrt{3}}y_1-\frac{2}{\sqrt{6}}z_1\,;\\z=-\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{3}}y_1+\frac{1}{\sqrt{6}}z_1\,.\end{cases}\qquad(6.20)$$

Підставивши формули перетворення (6.20) в задане рівняння поверхні (6.19), після перетворень отримаємо, що матриця A квадратичної форми прийме діагональний вигляд $A\to D=\mathrm{diag}\left(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\right)$ і група старших членів представиться так:

$$3x^2+5y^2+3z^2-2xy+2xz-2yz=\left|X=TX'\right|=2x_1^2+3y_1^2+6z_1^2.$$

(Перевірте безпосередньою підстановкою).

Група лінійних членів прийме вигляд:

$$-12x=\left|X=TX'\right|=-\frac{12}{\sqrt{2}}x_1-\frac{12}{\sqrt{3}}y_1-\frac{12}{\sqrt{6}}z_1.$$

Вільний член не змінюється.

Таким чином, рівняння поверхні у змінних x_1, y_1, z_1 приймає вигляд:

$$2x_1^2+3y_1^2+6z_1^2-\frac{12}{\sqrt{2}}x_1-\frac{12}{\sqrt{3}}y_1-\frac{12}{\sqrt{6}}z_1-10=0.\qquad(6.21)$$

5. Виділяємо повні квадрати відносно змінних x_1, y_1, z_1 в рівнянні (6.21).

$$2\left(x_1^2-\frac{6}{\sqrt{2}}x_1\right)+3\left(y_1^2-\frac{4}{\sqrt{3}}y_1\right)+6\left(z_1^2-\frac{2}{\sqrt{6}}z_1\right)-10=0,$$

$$2\left(x_1^2-2\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}x_1+\frac{9}{2}\right)+3\left(y_1^2-2\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}y_1+\frac{4}{3}\right)+6\left(z_1^2-2\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}z_1+\frac{1}{6}\right)=$$
$$=10+9+4+1,$$

$$2\left(x_1-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2+3\left(y_1-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+6\left(z_1-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2=24,$$

$$\frac{\left(x_1-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}{12}+\frac{\left(y_1-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}{8}+\frac{\left(z_1-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2}{4}=1.$$

Покладемо

$$\begin{cases} x_2=x_1-\dfrac{3}{\sqrt{2}}; \\ y_2=y_1-\dfrac{2}{\sqrt{3}}; \\ z_2=z_1-\dfrac{1}{\sqrt{6}}. \end{cases} \tag{6.22}$$

Це відповідає паралельному переносу початку координат у точку $O_1\left(\frac{3}{\sqrt{2}},\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

Отримаємо рівняння

$$\frac{x_2^2}{12}+\frac{y_2^2}{8}+\frac{z_2^2}{4}=1. \tag{6.23}$$

Це канонічне рівняння еліпсоїда.

Воно записане у системі координат $(O_1;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$.

6. З формул паралельного переносу (6.22) знайдемо вираз x_1, y_1, z_1 через x_2, y_2, z_2 та підставимо у формули перетворення (6.20). Отримаємо результуюче перетворення координат (6.24).

$$\begin{cases} x_1=x_2+\dfrac{3}{\sqrt{2}}; \\ y_1=y_2+\dfrac{2}{\sqrt{3}}; \\ z_1=z_2+\dfrac{1}{\sqrt{6}}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(x_2+\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(y_2+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)+\dfrac{1}{\sqrt{6}}\left(z_2+\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right); \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(y_2+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)-\dfrac{2}{\sqrt{6}}\left(z_2+\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right); \\ z=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(x_2+\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(y_2+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)+\dfrac{1}{\sqrt{6}}\left(z_2+\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right), \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x_2+\dfrac{1}{\sqrt{3}}y_2+\dfrac{1}{\sqrt{6}}z_2+\dfrac{7}{3}; \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}y_2-\dfrac{2}{\sqrt{6}}z_2+\dfrac{1}{3}; \\ z=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}x_2+\dfrac{1}{\sqrt{3}}y_2+\dfrac{1}{\sqrt{6}}z_2-\dfrac{2}{3}. \end{cases} \tag{6.24}$$

Якщо підставити формули перетворення (6.24) у вихідне задане рівняння поверхні (6.19), отримаємо канонічне рівняння еліпсоїда (6.23). (Перевірте!)

Таким чином, результуючим перетворенням є (6.24), канонічна система координат $(O_1;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$, де

$$O_1\left(\frac{3}{\sqrt{2}},\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right);\ \vec{e}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \vec{e}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$
$$\vec{e}_3=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

7. Побудуємо еліпсоїд, заданий рівнянням (6.23)

$$\frac{x_2^2}{12}+\frac{y_2^2}{8}+\frac{z_2^2}{4}=1.$$

Півосі еліпсоїда: $a=2\sqrt{3}$,
$b=2\sqrt{2}$,
$c=2$.

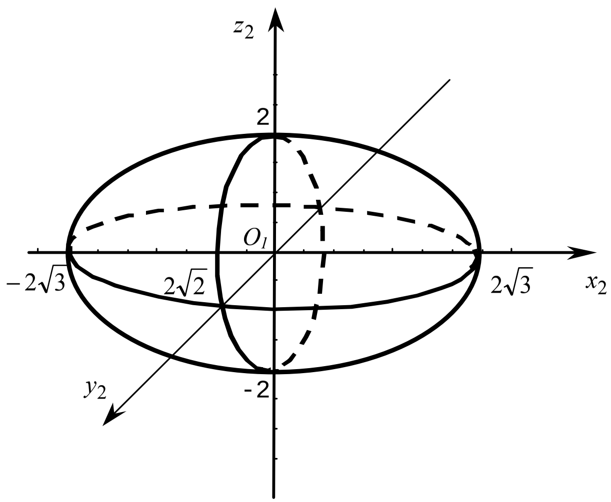


Рис. 6.2 ◄

IV. Задачі для практичних занять

У задачах 6.21 – 6.26 звести до канонічного вигляду задане рівняння кривої другого порядку та побудувати її. Виписати канонічну систему координат.

6.21. $9x^2-4xy+6y^2+16x-8y-2=0$.

6.22. $x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0$.

6.23. $5x^2+12xy-22x-12y-19=0$.

6.24. $4x^2-4xy+y^2-6x+3y-4=0$.

6.25. $2x^2+4xy+5y^2-6x-8y-1=0$.

6.26. $x^2-4xy+4y^2-4x-3y-7=0$.

У задачах 6.27 – 6.34 звести до канонічного вигляду задане рівняння поверхні другого порядку та побудувати її. Виписати канонічну систему координат.

6.27. $7x^2+6y^2+5z^2-4xy-4yz-6x-24y+18z+30=0$.

6.28. $2x^2-7y^2-4z^2+4xy+20yz-16zx+60x-12y+12z-90=0$.

6.29. $2x^2+2y^2-5z^2+2xy-2x-4y-4z+2=0$.

6.30. $2x^2+2y^2+3z^2+4xy+2yz+2zx-4x+6y-2z+3=0$.

6.31. $4x^2+y^2+4z^2-4xy+4yz-8zx-28x+2y+16z+45=0$.

6.32. $2x^2+5y^2+2z^2-2xy-4xz+2yz+2x-10y-2z-1=0$.

6.33. $x^2+5y^2+z^2+2xy+2yz+6zx-2x+6y+2z=0$.

6.34. $x^2-2y^2+z^2+4xy+4yz-10zx+2x+4y-10z-1=0$.

ГЛАВА 7. *ГРАНИЦІ ТА НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЙ*

§1. *Границі послідовностей та функцій*

I. Короткі теоретичні відомості

Послідовність. Границя послідовності

Основні поняття. Якщо кожному натуральному числу $n \in \mathbf{N}$ ставиться у відповідність число x_n, то множина чисел

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

називається *числовою послідовністю* або просто послідовністю.

Скорочено послідовність позначається символом $\{x_n\}$. Числа x_n, $n \in \mathbf{N}$, називаються *членами послідовності*, $x_n = f(n)$ – *загальний член послідовності*.

Число a називається *границею числової послідовності* $\{x_n\}$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N(\varepsilon)$, що для всіх $n > N(\varepsilon)$, виконується нерівність

$$|x_n - a| < \varepsilon .$$

Символічно це записується так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{або} \quad x_n \to a \text{ при } n \to \infty .$$

Послідовність $\{x_n\}$, яка має границю a, називається *збіжною*. Послідовність, яка не є збіжною, називається *розбіжною*.

Враховуючи, що нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$ рівносильна нерівності $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, яка означає, що x_n належить ε-околу точки a $O(a,\varepsilon)$, маємо *геометричний зміст границі* a послідовності $\{x_n\}$: для будь-якого $\varepsilon > 0$ всі $x_n \in O(a,\varepsilon)$, починаючи з деякого номера $n > N(\varepsilon)$.

Послідовність $\{x_n\}$ називається *обмеженою*, якщо $\exists M > 0$ таке, що $\forall n$ $|x_n| \le M$.

Послідовність $\{x_n\}$ називається *зростаючою (спадною)*, якщо $x_{n+1} > x_n$ $(x_{n+1} < x_n)$ для всіх n.

Послідовність $\{x_n\}$ називається *неспадною (незростаючою)*, якщо $x_{n+1} \ge x_n$ $(x_{n+1} \le x_n)$ для всіх n.

Зростаючі та спадні послідовності називаються *строго монотонними*. Неспадні та незростаючі послідовності називаються *монотонними*.

Будь-яка обмежена та монотонна послідовність збіжна.

Критерій Коші збіжності послідовності. Для того, щоб послідовність $\{x_n\}$ була збіжна, необхідно та достатньо, щоб для довільного $\varepsilon > 0$ існував такий номер $N(\varepsilon)$, що $|x_m - x_n| < \varepsilon$ для всіх $m, n > N(\varepsilon)$.

Число e. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

e – ірраціональне число, $2 < e < 3$, $e = 2{,}71828182\dots$

Якщо за основу логарифма взято число e, його називають *натуральним логарифмом* і позначають $\ln x$.

Послідовність $\{\alpha_n\}$ називається *нескінченно малою*, якщо

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 .$$

Нескінченно малі послідовності $\{\alpha_n\}$ та $\{\beta_n\}$ називаються *еквівалентними*, якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\beta_n} = 1$. Пишуть $\alpha_n \sim \beta_n$.

Мають місце такі *властивості нескінченно малих послідовностей*.

1^0. Алгебраїчна сума скінченного числа нескінченно малих послідовностей є нескінченно мала послідовність.

2^0. Добуток нескінченно малої послідовності на обмежену є нескінченно малою послідовністю.

Послідовність $\{x_n\}$ називається *нескінченно великою*, якщо для довільного числа $M > 0$ знайдеться такий номер $N(M)$, що для всіх $n > N(M)$ $|x_n| > M$.

Символічно це записується так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Серед нескінченно великих послідовностей виділяють такі:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty , \quad \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty .$$

Нескінченно великі послідовності $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ називаються *еквівалентними*, якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = 1$. Пишуть $x_n \sim y_n$.

Арифметичні властивості збіжних послідовностей

Якщо існують скінченні границі послідовностей $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b,$$

то

1) $\lim\limits_{n\to\infty} cx_n = c\lim\limits_{n\to\infty} x_n,\ c = \mathrm{const}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n},\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$.

Обчислення границь зводиться до застосування вказаних формул, за умови існування скінченних границь послідовностей $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$. Якщо ж ця умова не виконується, виникають так звані невизначеності, наприклад типів $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$, $\{\infty-\infty\}$, $\{1^\infty\}$. Для розкриття невизначеностей спочатку виконують перетворення, а після цього переходять до границі.

Функція

Основні поняття. Нехай задано дві непусті множини X та Y. Якщо кожному значенню змінної x, що належить деякій області її зміни X $(x\in X)$, ставиться у відповідність за деяким законом єдине значення $y\in Y$, то кажуть, що на множині X *задана функція* $y = f(x)$.

Множина X називається *областю визначення функції* і позначається $D(f)$. Множина Y всіх значень y, які $f(x)$ приймає при $x\in X$, називається *областю значень функції* і позначається $E(f)$. При цьому x називається *незалежною змінною* або *аргументом*, y – *функцією*.

Якщо кожному значенню $x\in X$ відповідає не одне, а декілька значень $y\in Y$, то функція називається *многозначною*, на відміну від *однозначної* функції, визначеної вище. В подальшому будемо розглядати тільки однозначні функції, якщо не застережене противне.

Графіком функції $y = f(x)$ називається множина точок площини xOy з координатами $(x, f(x))$, де $x\in D(f)$.

Обернені функції. Якщо рівняння $y = f(x)$ може бути однозначно розв'язано відносно змінної x, тобто існує функція $x = g(y)$ така, що $y = f[g(x)]$, то функція $x = g(y)$ або в стандартних позначеннях $y = g(x)$ називається *оберненою* по відношенню до $y = f(x)$. Очевидно, що $g[f(x)] \equiv x$, тобто функції $f(x)$ і $g(x)$ є взаємно оберненими.

Суперпозиція функцій. Нехай задані функції $y = f(u),\ u = \varphi(x)$. *Суперпозицією* цих функцій (або *складною* функцією) називається функція вигляду $y = f[\varphi(x)]$.

Деякі класи функцій

Обмежені функції. Функція $f(x)$, визначена на множині X, називається *обмеженою*, якщо існує таке число $M>0$, що для всіх $x\in X$ виконується нерівність $|f(x)|\le M$.

Монотонні функції. Функція $f(x)$ називається *зростаючою (спадною)*, якщо $f(x_1) > f(x_2)$ $(f(x_1) < f(x_2))$ при $x_1 > x_2$. Ці функції називають *строго монотонними*.

Функція $f(x)$ називається *неспадною (незростаючою)*, якщо $f(x_1)\ge f(x_2)$ $(f(x_1)\le f(x_2))$ при $x_1 > x_2$. Ці функції називають *монотонними*.

Парні та непарні функції. Функція $f(x)$ називається *парною (непарною)*, якщо її область визначення симетрична відносно точки $x=0$ і $f(-x) = f(x)$ $(f(-x) = -f(x))$.

Періодичні функції. Функція $f(x)$ називається *періодичною*, якщо існує таке число $T>0$, що $\forall x\in D(f)$ виконується умова $f(x+T) = f(x)$. Найменше число T, для якого виконується ця умова, називається *періодом* функції.

Основні елементарні функції. Основними елементарними функціями називаються такі функції.

1. Степенева функція: $y = x^\alpha,\ \alpha\in\mathbf{R}$.

2. Показникова функція: $y = a^x,\ a>0, a\neq 1$.

3. Логарифмічна функція: $y = \log_a x,\ a>0, a\neq 1$.

4. Тригонометричні функції: $y=\sin x,\ y=\cos x,\ y=\mathrm{tg}\,x,\ y=\mathrm{ctg}\,x$.

5. Обернені тригонометричні функції: $y=\arcsin x,\ \ y=\arccos x$, $y=\mathrm{arctg}\,x,\ y=\mathrm{arcctg}\,x$.

Елементарні функції. Елементарними функціями називаються функції, які отримуються з основних елементарних функцій за допомогою скінченного числа арифметичних операцій і суперпозицій (формування складних функцій).

Гіперболічні функції. До елементарних функцій відносяться гіперболічні функції, які визначаються так:

гіперболічний синус $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$;

гіперболічний косинус $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$;

гіперболічний тангенс $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$;

гіперболічний котангенс $\operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$, $x \neq 0$.

Раціональні функції. До елементарних функцій відносяться раціональні функції, які визначаються так:

$$y = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m},$$

де a_i, b_j – дійсні числа, $i = \overline{0, n}$, $j = \overline{0, m}$, $m, n \in \mathbf{N}$.

Якщо $m = 0$, $b_0 \neq 0$, то позначивши $c_i = \dfrac{a_i}{b_0}$, маємо функцію

$$y = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n,$$

яка називається *цілою раціональною функцією* або *многочленом*.

Якщо раціональна функція не є цілою, то її називають *дробово-раціональною функцією* або *раціональним дробом*.

Границя функції

Основні поняття. Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки $x = a$, за виключенням, можливо, самої точки $x = a$.

Означення 1 (*на мові послідовностей*). Число A називається *границею* функції $f(x)$ в точці $x = a$, якщо для довільної послідовності $\{x_n\}$, $x_n \neq a$, збіжної до a, відповідна послідовність $\{f(x_n)\}$ збігається до A.

Означення 2 (*на мові "* $\varepsilon - \delta$ *"*). Число A називається *границею* функції $f(x)$ в точці $x = a$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться число $\delta = \delta(\varepsilon)$ таке, що для всіх x, які задовольняють нерівності $0 < |x - a| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Символічно той факт, що число A є границею функції $f(x)$ в точці $x = a$, записується так:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Геометрично цей факт інтерпретується так: для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке δ, що для всіх $x \in O(a, \delta)$, $x \neq a$, відповідні значення $f(x) \in O(A, \varepsilon)$.

Поняття границі має місце і при $a = \infty$, і при $A = \infty$.

Запис $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ означає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $M(\varepsilon) > 0$, що для всіх x, які задовольняють умові $|x| > M(\varepsilon)$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Запис $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ означає, що $|f(x)| > M$ для всіх x, що задовольняють умові $0 < |x - a| < \delta(M)$, де M – довільне додатне число.

Якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, то функція $f(x)$ називається *нескінченно великою* при $x \to a$.

Якщо $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$, то функція $\alpha(x)$ називається *нескінченно малою* при $x \to a$.

Якщо $x < a$ і $x \to a$, то умовно пишуть $x \to a - 0$;

якщо $x > a$ і $x \to a$, то умовно пишуть $x \to a + 0$;

Числа

$$f(a-0) = \lim_{x \to a-0} f(x) \quad \text{та} \quad f(a+0) = \lim_{x \to a+0} f(x)$$

називаються відповідно *границею* функції $f(x)$ *зліва* в точці a і *границею* функції $f(x)$ *справа* в точці a.

Границю зліва в точці a та границю справа в точці a називають *односторонніми* границями.

Для існування границі функції при $x \to a$ необхідно та достатньо, щоб $f(a-0) = f(a+0)$.

Практичне обчислення границь основується на таких теоремах.

Якщо існують скінченні границі $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ та $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, то

$$\lim_{x\to a} c\,f(x) = c\lim_{x\to a} f(x),\ \ c = \text{const}\,;$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)\,;$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)\,; \tag{7.1}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)},\ \ \lim_{x\to a} g(x)\neq 0\,.$$

Це так звані *арифметичні властивості функцій*, що мають скінченні границі.

Використовуються також перша та друга важливі границі і наслідки з них.

Перша важлива границя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1\,. \tag{7.2}$$

Друга важлива границя:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e\,. \tag{7.3}$$

Наслідки з першої важливої границі:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1\,;\quad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1\,;\quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1\,. \tag{7.4}$$

Наслідки з другої важливої границі:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e\,;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}\,;\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1\,;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a\,;\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1\,; \tag{7.5}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu-1}{x} = \mu\,.$$

Порівняння нескінченно малих

Нехай $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ нескінченно малі при $x\to a$.

1. Якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A\neq 0$, то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називають нескінченно малими одного порядку та пишуть $\alpha(x) = O(\beta(x))$ при $x\to a$ (O – велике).

2. Якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називають еквівалентними нескінченно малими та пишуть $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to a$.

3. Якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ називають нескінченно малою вищого порядку, ніж $\beta(x)$ та пишуть $\alpha(x) = o(\beta(x))$ при $x\to a$ (o – мале).

4. Якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = A\neq 0$, то $\alpha(x)$ називають нескінченно малою k-го порядку відносно $\beta(x)$, тобто $\alpha(x) = O(\beta^k(x))$.

Відмітимо *властивості еквівалентних нескінченно малих*.

1^0. Якщо $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to a$, $\beta(x)\sim\gamma(x)$ при $x\to a$, то $\alpha(x)\sim\gamma(x)$ при $x\to a$.

2^0. Якщо $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$, $\beta(x)\sim\beta_1(x)$ при $x\to a$ і існує границя $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = m$, то існує і границя $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = m$.

3^0. Якщо $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to a$, то мають місце формули:

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot\alpha(x) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot\beta(x)\,,$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\beta(x)}\,,$$

за умови існування границь зліва (справа) у цих формулах.

4^0. Сума скінченного числа нескінченно малих функцій різних порядків еквівалентна доданку нижчого порядку.

Аналогічно порівнюються нескінченно великі функції.

Зокрема, якщо $f_1(x)$, $f_2(x)$ – *нескінченно великі* функції при $x\to a$ і $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1$, то їх називають *еквівалентними нескінченно великими* при $x\to a$ і пишуть $f_1(x)\sim f_2(x)$ при $x\to a$.

Корисно використовувати *ланцюжок еквівалентних нескінченно малих*, який отримується з введених раніше важливих границь, а також з наслідків з них.

$$x \sim \sin x \sim \mathrm{tg}\, x \sim \arcsin x \sim \mathrm{arctg}\, x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1, \quad x \to 0 \qquad (7.6)$$

або в більш загальному вигляді

$$u(x) \sim \sin u(x) \sim \mathrm{tg}\, u(x) \sim \arcsin u(x) \sim \mathrm{arctg}\, u(x) \sim$$

$$\sim \ln(1+u(x)) \sim e^{u(x)} - 1, \quad u(x) \to 0 \text{ при } x \to a. \qquad (7.7)$$

Вказаний ланцюжок еквівалентностей, зокрема, $u(x) \sim \ln(1+u(x))$, $u(x) \to 0,\ x \to a$, дозволяє застосовувати такий підхід до розкриття невизначеностей типу $\{1^\infty\}$:

$$\lim_{x\to a} (\varphi(x))^{\psi(x)} = \{1^\infty\} = e^{\lim\limits_{x\to a} \psi(x)\cdot \ln\varphi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} \psi(x)\cdot \ln(1+(\varphi(x)-1))} =$$

$$= \left| \begin{matrix} \ln(1+(\varphi(x)-1)) \sim \varphi(x)-1 \\ x \to a,\ \varphi(x) \to 1,\ \varphi(x)-1 \to 0 \end{matrix} \right| = e^{\lim\limits_{x\to a} \psi(x)\cdot(\varphi(x)-1)}$$

Зауважимо також, що мають місце такі еквівалентності:

$$a^x - 1 \sim x \ln a, \quad \log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}, \quad (1+x)^\mu - 1 \sim \mu x \quad \text{при } x \to 0.$$

Для *нескінченно великих* функцій корисно використовувати еквівалентність

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \sim a_0 x^n \quad \text{при } x \to \infty. \qquad (7.8)$$

Техніка обчислення границь

При обчисленні границь використовується:

– формули (7.1), пов'язані з арифметичними властивостями функцій, що мають скінченні границі;

– правило граничного переходу під знаком неперервної функції (див. § 2 цієї глави)

$$\lim_{x\to a} f(x) = f\left(\lim_{x\to a} x\right); \qquad (7.9)$$

– важливі границі (7.2), (7.3) та їх наслідки (7.4), (7.5);

– ланцюжок еквівалентних нескінченно малих (7.6), (7.7);

– еквівалентні нескінченно великі (7.8), тощо.

При обчисленні границь перш за все необхідно аргумент функції замінити його граничним значенням. При цьому можуть отриматись або визначені значення або невизначеності різних типів. Слід пам'ятати, що за умови $c = \mathrm{const}$, маємо такі співвідношення – визначеності:

1) $\dfrac{c}{0} = \infty,\ c \neq 0$; 2) $\dfrac{\infty}{0} = \infty$; 3) $\dfrac{c}{\infty} = 0$;

4) $\dfrac{0}{\infty} = 0$; 5) $c \cdot \infty = \infty,\ c \neq 0$; 6) $\infty \cdot \infty = \infty$; (7.10)

7) $\infty + \infty = \infty$; 8) $0^\infty = 0$; 9) $\infty^\infty = \infty$.

Підстановка граничного значення часто призводить до невизначеностей вигляду:

$$\left\{\frac{0}{0}\right\},\ \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\},\ \{0\cdot\infty\},\ \{\infty-\infty\},\ \{1^\infty\},\ \{\infty^0\},\ \{0^0\}. \qquad (7.11)$$

Для розкриття невизначеностей спочатку виконують перетворення, а потім переходять до границі.

Стандартні випадки розкриття невизначеностей усіх типів розглянуто в п. III цього параграфа.

II. Контрольні питання та завдання

1. Що називається числовою послідовністю?

2. Наведіть означення границі числової послідовності та тлумачення її геометричного змісту.

3. Перелічіть властивості збіжних числових послідовностей.

4. Дайте означення обмеженої числової послідовності.

5. Дайте означення зростаючої (спадної), неспадної (незростаючої) числової послідовності.

6. Яка послідовність є монотонною, строго монотонною?

7. Сформулюйте критерій Коші збіжності послідовності.

8. Що таке число e, який логарифм називають натуральним?

9. Наведіть арифметичні властивості збіжних послідовностей.

10. Визначте нескінченно малі послідовності, перелічіть їх властивості.

11. Визначте нескінченно великі послідовності.

12. Дайте означення еквівалентних нескінченно малих послідовностей та еквівалентних нескінченно великих послідовностей.

13. Дайте означення функції.

14. Що називається областю визначення та областю значень функції?

15. Дайте означення оберненої функції.

16. Що називається суперпозицією функцій?

17. Яка функція називається обмеженою?

18. Яка функція називається монотонною, строго монотонною?

19. Дайте означення парної (непарної) функції.

20. Що таке періодична функція, період?

21. Перелічіть основні елементарні функції.

22. Які функції називаються елементарними?

23. Дайте означення гіперболічних функцій.

24. Як визначаються раціональні функції? Що таке ціла раціональна функція?

25. Дайте означення границі функції на мові послідовностей.

26. Дайте означення границі функції на мові "$\varepsilon-\delta$".

27. Визначте поняття границі функції на нескінченності.

28. Дайте означення односторонніх границь.

29. Наведіть першу важливу границю, наслідки з неї.

30. Наведіть другу важливу границю, наслідки з неї.

31. Визначте нескінченно малі функції, їх властивості.

32. Як порівнюють нескінченно малі функції?

33. Які нескінченно малі функції називають еквівалентними?

34. Наведіть ланцюжок еквівалентних нескінченно малих.

III. Приклади розв'язання задач

Послідовність. Границя послідовності

Приклад 1. Користуючись означенням границі числової послідовності, довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n+1}{2n+3}=3$.

► Для заданої послідовності $x_n=\dfrac{6n+1}{2n+3}$, $a=3$.

Задамо довільне $\varepsilon>0$ і покажемо, що для нього можна знайти таке натуральне число $N=N(\varepsilon)$, що для всіх $n>N(\varepsilon)$ виконується нерівність

$$|x_n-3|<\varepsilon$$

або

$$\left|\frac{6n+1}{2n+3}-3\right|<\varepsilon.$$

Звідси $\left|\dfrac{8}{2n+3}\right|=\dfrac{8}{2n+3}<\varepsilon$, $2n+3>\dfrac{8}{\varepsilon}$.

Розв'язавши останню нерівність відносно n, матимемо

$$n>\frac{1}{2}\left(\frac{8}{\varepsilon}-3\right).$$

Отже, за $N(\varepsilon)$ можна прийняти найбільше ціле число, яке не перевищує $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{8}{\varepsilon}-3\right)$, тобто $N(\varepsilon)=\left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{8}{\varepsilon}-3\right)\right]$.

Отже, $|x_n-3|<\varepsilon$ для всіх $n>N(\varepsilon)$, а це означає, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6n+1}{2n+3}=3. \blacktriangleleft$$

Приклад 2. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+4n+1}{2n^2-5n+7}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+4n}}{\sqrt[3]{n^3-3n^2}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!-n!}{n^2(n!+(n-1)!)}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\ldots+n}{\sqrt{4n^4-n^2+1}}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5\cdot 3^n}{3^n-2}$.

► Зауважимо, що кожна з заданих границь є невизначеністю типу $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+4n+1}{2n^2-5n+7}$.

Для розкриття заданої невизначеності типу $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ виносимо в чисельнику та знаменнику вищий степінь n. Після скорочення та врахування того, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$, а також властивостей арифметичних дій над збіжними послідовностями, маємо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+4n+1}{2n^2-5n+7}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(3+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(2-\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}{2-\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2}}=\frac{3}{2}.$$

Розв'язання буде простішим, якщо врахувати, що

$$a_0n^k+a_1n^{k-1}+\ldots+a_n\sim a_0n^k \quad \text{при } n\to\infty,$$

бо $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+\ldots+a_n}{a_0n^k}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{a_1}{a_0n}+\ldots+\dfrac{a_n}{a_0n^k}\right)=1$.

Тоді

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+4n+1}{2n^2-5n+7}=\left|\begin{array}{c}3n^2+4n+1\sim 3n^2\\ 2n^2-5n+7\sim 2n^2\\ n\to\infty\end{array}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{2n^2}=\frac{3}{2}.$$

б) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+4n}}{\sqrt[3]{n^3-3n^2}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2\left(1+\frac{4}{n}\right)}}{\sqrt[3]{n^3\left(1-\frac{3}{n}\right)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{1+\frac{4}{n}}}{n\sqrt[3]{1-\frac{3}{n}}}=1.$$

Інакше

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+4n}}{\sqrt[3]{n^3-3n^2}}=\left|\begin{array}{c}n^2+4n\sim n^2\\ n^3-3n^2\sim n^3\\ n\to\infty\end{array}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt[3]{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}=1.$$

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!-n!}{n^2(n!+(n-1)!)}$.

Скористаємось тим, що

$n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$; $n!=(n-1)!n$; $(n+2)!=n!(n+1)(n+2)$.

Тоді маємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!-n!}{n^2(n!+(n-1)!)}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!(n+1)(n+2)-n!}{n^2((n-1)!n+(n-1)!)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n!((n+1)(n+2)-1)}{n^2(n-1)!(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n^2+3n+1)}{n^2(n+1)}=\left|\begin{array}{c}n^2+3n+1\sim n^2\\ n+1\sim n\\ n\to\infty\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^3}=1.$$

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\ldots+n}{\sqrt{4n^4-n^2+1}}$.

Маємо невизначеність типу $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$. У чисельнику маємо суму n членів арифметичної прогресії, сума S_n якої обчислюється за формулою $S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}n$. Крім того, в знаменнику скористаємось тим, що $4n^4-n^2+1\sim 4n^4$ при $n\to\infty$. Отже,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\ldots+n}{\sqrt{4n^4-n^2+1}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1+n}{2}\cdot n}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{4n^2}=$$

$$=\left|\begin{array}{c}n^2+n\sim n^2\\ n\to\infty\end{array}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{4n^2}=\frac{1}{4}.$$

д) $$\lim_{n\to\infty}\frac{5\cdot3^n}{3^n-2}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{1-\frac{2}{3^n}}=5.$$

Тут чисельник і знаменник поділено на 3^n. ◄

Приклад 3. Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$.

► Тут маємо невизначеність типу $\{\infty-\infty\}$. Для її розкриття множимо чисельник і знаменник на вираз, спряжений до чисельника, і користуємось формулою: $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=\{\infty-\infty\}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\left|\begin{array}{c}n^2+n\sim n^2\\ n\to\infty\end{array}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+n}=\frac{1}{2}. ◄$$

Приклад 4. Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^3+1}\sin^3 2^n$.

► Розглянемо дві послідовності: $\left\{\frac{n}{n^3+1}\right\}$ та $\{\sin^3 2^n\}$.

Перша послідовність нескінченно мала, бо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^3+1}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\left|\begin{array}{c}n^3+1\sim n^3\\ n\to\infty\end{array}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0.$$

Друга послідовність обмежена, бо $\left|\sin^3 2^n\right|\le 1$.

Отже, добуток цих послідовностей є нескінченно малою послідовністю як добуток нескінченно малої послідовності на обмежену.

Звідси $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^3+1}\sin^3 2^n=0$. ◄

Функція

Приклад 5. Знайти область визначення функції

$$f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x-1}.$$

► Функція $f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x-1}$ визначена, якщо $x-1\ne 0,\ 1+x>0$, тобто якщо $x\ne 1$ і $x>-1$.

Область визначення функції $f(x)$ є об'єднання двох інтервалів:

$$D(f)=(-1,1)\cup(1,+\infty). ◄$$

Приклад 6. Знайти множину значень функції $f(x)=2+3\sin x$.

► Врахуємо, що $|\sin x|\le 1$ або $-1\le\sin x\le 1$. Помножимо всі частини цієї нерівності на 3 та додамо до них число 2.

Маємо

$$-3\le 3\sin x\le 3,$$

$$2-3\le 2+3\sin x\le 2+3,$$

$$-1\le 2+3\sin x\le 5.$$

Отже, $E(f)=[-1,5]$. ◄

Приклад 7. Встановити парність або непарність функцій:

а) $f(x)=2^x+2^{-x}$; б) $f(x)=\lg\frac{x+3}{x-3}$; в) $f(x)=x^2+5x$.

► У розглядуваних прикладах область визначення кожної з функцій симетрична відносно точки $x=0$.

а) $f(x)=2^x+2^{-x}$.

Заміняємо x на $-x$. Отримаємо

$$f(-x)=2^{-x}+2^{-(-x)}=2^{-x}+2^x=f(x).$$

Отже, $f(-x)=f(x)$ і функція $f(x)=2^x+2^{-x}$ – парна.

б) $f(x)=\lg\frac{x+3}{x-3}$.

Знаходимо

$$f(-x)=\lg\frac{-x+3}{-x-3}=\lg\frac{x-3}{x+3}=\lg\left(\frac{x+3}{x-3}\right)^{-1}=-\lg\frac{x+3}{x-3}=-f(x).$$

Отже, $f(-x)=-f(x)$ і функція $f(x)=\lg\frac{x+3}{x-3}$ – непарна.

в) $f(x)=x^2+5x$.

Маємо

$$f(-x)=(-x)^2+5(-x)=x^2-5x.$$

Отримали, що $f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$, отже, функція $f(x) = x^2 + 5x$ не є ні парною, ні непарною. ◀

Приклад 8. Знайти періоди функцій:

а) $f(x) = \cos 8x$; б) $f(x) = \sin 6x + \operatorname{tg} 4x$.

▶ а) $f(x) = \cos 8x$.

Згідно з означенням періодичної функції

$$\cos 8(x+T) = \cos 8x,$$

$$8(x+T) = 8x + 2\pi,$$

$$8x + 8T = 8x + 2\pi,$$

$$8T = 2\pi,$$

$$T = \frac{\pi}{4}.$$

б) $f(x) = \sin 6x + \operatorname{tg} 4x$.

Розмірковуючи аналогічно п. а), маємо, що

для функції $f_1(x) = \sin 6x$ період $T_1 = \dfrac{2\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$,

для функції $f_2(x) = \operatorname{tg} 4x$ період $T_2 = \dfrac{\pi}{4}$.

Отже, за період T функції $f(x) = \sin 6x + \operatorname{tg} 4x$ приймається найменше загальне кратне цих чисел, тобто $T = \pi$. ◀

Границя функції

Приклад 9. Довести, використовуючи означення границі функції на мові "$\varepsilon - \delta$", що $\lim\limits_{x\to 1}(3x+2) = 5$.

▶ Позначимо $y = 3x + 2$.

Задамо довільне число $\varepsilon > 0$ і знайдемо таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх x, які задовольняють нерівності $0 < |x-1| < \delta$, виконується нерівність $|y-5| < \varepsilon$. Для виконання цієї нерівності необхідно, щоб

$$|3x+2-5| < \varepsilon \quad \text{або} \quad |x-1| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Звідси $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Якщо тепер для довільного $\varepsilon > 0$ і знайденого δ взяти значення x, що задовольняють нерівності $|x-1| < \delta$, то

$$|x-1| < \delta \Rightarrow |x-1| < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow |3x+2-5| < \varepsilon \Rightarrow |y-5| < \varepsilon. ◀$$

Приклад 10. Довести, що $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+5}{x} = 2$, використовуючи означення границі функції при $x \to \infty$.

▶ Позначимо $y = \dfrac{2x+5}{x}$.

Задамо довільне число $\varepsilon > 0$. Знайдемо число $M(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх x, які задовольняють нерівності $|x| > M$, виконується нерівність $|y-2| < \varepsilon$. Остання нерівність виконуватиметься, якщо

$$\left|\frac{2x+5}{x} - 2\right| < \varepsilon, \quad \text{або} \quad \left|2 + \frac{5}{x} - 2\right| < \varepsilon, \quad \text{або} \quad \left|\frac{5}{x}\right| < \varepsilon.$$

Звідси $|x| > \dfrac{5}{\varepsilon}$. Нехай $M = \dfrac{5}{\varepsilon}$,тоді

$$|x| > M \Rightarrow |x| > \frac{5}{\varepsilon} \Rightarrow \left|\frac{5}{x}\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{2x+5}{x} - 2\right| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to\infty} y = 2. ◀$$

Розкриття невизначеностей

Невизначеність типу $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$

1. Обчислення границь функцій, заданих відношенням двох многочленів, тобто границь дробово-раціональної функції $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, де $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлени степенів n і m , $n, m \in \mathbf{N}$, при $x \to a$:

$$\lim_{x\to a} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \left\{\frac{0}{0}\right\}.$$

Виконуємо тотожні перетворення з метою позбавитися від невизначеності, тобто виділяємо в чисельнику і знаменнику множник $(x-a)$, який прямує до нуля при $x \to a$. Цей множник $(x-a)$ називатимемо *критичним*. Далі треба скоротити на цей множник. Якщо при цьому розкладання на множники виявиться утрудненим, то треба розділити чисельник і знаменник на критичний множник "у стовпчик".

При цьому слід пам'ятати:

а) наслідок теореми Безу: якщо a – корінь многочлена $P_n(x)$, тобто $P_n(a)=0$, то $P_n(x)$ ділиться на двочлен $(x-a)$ без залишку:

$$P_n(x)=(x-a)P_{n-1}(x);$$

б) квадратний тричлен $P_2(x)=ax^2+bx+c$, у якого дискримінант $D=b^2-4ac\ge 0$, представляється у вигляді:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

де x_1, x_2 – корені квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$.

2. Обчислення границь функцій, що містять ірраціональні вирази:

а) при обчисленні границь функцій, що містять ірраціональні вирази, які обертаються в нуль при $x\to a$, в них треба виділити множник $(x-a)$. Це можна зробити, позбувшись від ірраціональності в чисельнику або знаменнику шляхом домноження дробу на відповідний спряжений множник. При цьому використовуються формули:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),$$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2);$$

б) крім того, у багатьох випадках, вирази, що містять ірраціональності, приводять до раціонального вигляду введенням нової змінної.

3. При обчисленні границь функцій, що містять тригонометричні вирази, виконують тотожні перетворення із застосуванням формул тригонометрії, використовують першу важливу границю і введений вище ланцюжок еквівалентних нескінченно малих.

Приклад 11. Знайти границі заданих функцій (невизначеність типу $\left\{\frac{0}{0}\right\}$):

а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^2+5x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-6x+4}{2x^2-x-6}$; в) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$; д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos3x-\cos x}{\sin x\cdot\operatorname{arctg}3x}$; е) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$.

► а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^2+5x-6}$.

Маємо під знаком границі відношення двох многочленів. Тут не можна застосувати теорему про границю частки, бо границя знаменника дорівнює нулю. Підстановка граничного значення $x=1$ призводить до невизначеності типу $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Розкладемо чисельник та знаменник на множники і скоротимо на $(x-1)$.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2+5x-6}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+6)}=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{x+6}=\frac{2}{7}.$$

б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-6x+4}{2x^2-x-6}$.

Маємо під знаком границі відношення двох многочленів. Тут не можна застосувати теорему про границю частки, бо границя знаменника дорівнює нулю. Підстановка граничного значення $x=2$ призводить до невизначеності типу $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Розкладемо многочлени в чисельнику і знаменнику за теоремою Безу.

Чисельник $x^3-6x+4=(x-2)(x^2+2x-2)$,

бо $x=2$ – корінь многочлена, який стоїть в чисельнику, що зумовлює наявність множника $(x-2)$. Далі ділимо x^3-6x+4 на $(x-2)$ "стовпчиком".

$$\begin{array}{r|l}
x^3-6x+4 & x-2 \\ \cline{2-2}
-\;x^3-2x^2 & x^2+2x-2 \\ \cline{1-1}
2x^2-6x & \\
-\;2x^2-4x & \\ \cline{1-1}
-2x+4 & \\
-\;-2x+4 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Отримали другий множник у розкладі.

Для розкладу знаменника на множники можна поступити аналогічно, або розв'яжемо рівняння

$$2x^2-x-6=0$$

$$D=b^2-4ac=1+48=49 \quad x_{1,2}=\frac{1\pm7}{4}; \quad x_1=2,\ x_2=-\frac{3}{2}.$$

Отже, $2x^2-x-6=2(x-2)\left(x+\dfrac{3}{2}\right)$.

Далі маємо такий розв'язок:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-6x+4}{2x^2-x-6}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x-2)}{2(x-2)\left(x+\dfrac{3}{2}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-2}{2x+3}=\frac{6}{7}.$$

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$.

Маємо ірраціональний вираз під знаком границі.

Позбудемось ірраціональності в чисельнику, помноживши чисельник і знаменник на $\sqrt{x^2+5}+3$. Далі в чисельнику скористаємось формулою $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, в знаменнику множник $\sqrt{x^2+5}+3$ замінимо його значенням при $x=2$. Отже, маємо

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5-9}{(x-2)(3+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x-2)\cdot 6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)\cdot 6}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{6}=\frac{2}{3}.$$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$.

Маємо ірраціональний вираз під знаком границі.

Спосіб 1. Домножимо чисельник і знаменник на вирази, спряжені до чисельника і знаменника. Скориставшись відповідними формулами $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$, маємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1)}{(\sqrt[3]{1+x}-1)(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1)(\sqrt{1+x}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x-1)\cdot 3}{(1+x-1)\cdot 2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot 3}{x\cdot 2}=\frac{3}{2}.$$

Спосіб 2. Введемо заміну $1+x=t^6$. Маємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left|\begin{array}{l}1+x=t^6\\ x\to 0,\ t\to 1\\ \sqrt{1+x}=t^3\\ \sqrt[3]{1+x}=t^2\end{array}\right|=\lim_{t\to 1}\frac{t^3-1}{t^2-1}=$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)(t^2+t+1)}{(t-1)(t+1)}=\lim_{t\to 1}\frac{t^2+t+1}{t+1}=\frac{3}{2}.$$

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{\sin x\cdot \operatorname{arctg} 3x}$.

Маємо тригонометричний вираз під знаком границі.

Скористаємось відомою формулою тригонометрії, згідно з якою $\cos 3x-\cos x=-2\sin 2x\sin x$. Далі використаємо ланцюжок еквівалентних нескінченно малих.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos x}{\sin x\cdot \operatorname{arctg} 3x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x\cdot\sin x}{\sin x\cdot \operatorname{arctg} 3x}=\left|\begin{array}{c}\sin 2x\sim 2x\\ \operatorname{arctg} 3x\sim 3x\\ x\to 0\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cdot 2x}{3x}=-\frac{4}{3}.$$

е) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)^2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left|\begin{array}{c}\dfrac{\pi}{2}-x=y\\ x=\dfrac{\pi}{2}-y\\ x\to\dfrac{\pi}{2},\ y\to 0\end{array}\right|=\lim_{y\to 0}\frac{1-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-y\right)}{y^2}=$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos y}{y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{2\sin^2\frac{y}{2}}{y^2}=\left|\begin{array}{c}\sin\dfrac{y}{2}\sim\dfrac{y}{2}\\ y\to 0\end{array}\right|=\lim_{y\to 0}\frac{2\cdot\frac{y^2}{4}}{y^2}=\frac{1}{2}.\ ◄$$

Невизначеність типу $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$

1. Обчислення границь функцій, заданих відношенням двох многочленів у випадку невизначеності типу $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$:

а) у чисельнику і знаменнику виноситься x у найвищому степені. Після відповідних скорочень, та враховуючи, що дроби типу $\frac{1}{x^n} \to 0$ при $x \to \infty$, отримуємо значення розглядуваної границі;

б) використовуються еквівалентні нескінченно великі, тобто

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \sim a_0 x^n,$$

$$Q_m(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m \sim b_0 x^m \quad \text{при } x \to \infty.$$

Тоді

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m} = \begin{cases} 0 & \text{при } n < m, \\ \dfrac{a_0}{b_0} & \text{при } n = m, \\ \infty & \text{при } n > m. \end{cases}$$

2. При обчисленні границь дробів, що містять ірраціональність, використовуються аналогічні прийоми.

Приклад 12. Знайти границі заданих функцій (невизначеність типу $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$):

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x+1}{5x^2-x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x-3}{2x^3+4x^3+3}$;

в) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^5+3x^3-4x}{3x^2-4x+2}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+1}+x)^2}{\sqrt[3]{x^6+1}}$;

д) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(3x^3+4x+5)}{\ln(2x^9+x^3+1)}$.

► а) Спосіб 1.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x+1}{5x^2-x-4} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(5-\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}\right)} = \frac{2+0+0}{5-0-0} = \frac{2}{5}.$$

Спосіб 2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x+1}{5x^2-x-4} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \left|\begin{array}{c} 2x^2+x+1 \sim 2x^2 \\ 5x^2-x-4 \sim 5x^2 \\ x\to\infty \end{array}\right| = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{5x^2} = \frac{2}{5}.$$

б) $$\lim_{x\to\infty}\frac{10x-3}{2x^3+4x+3} = \left|\begin{array}{c} 10x-3 \sim 10x \\ 2x^3+4x+3 \sim 2x^3 \\ x\to\infty \end{array}\right| = \lim_{x\to\infty}\frac{10x}{2x^3} = \lim_{x\to\infty}\frac{5}{x^2} = \frac{5}{\infty} = 0.$$

в) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^5+3x^3-4x}{3x^2-4x+2} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \left|\begin{array}{c} 2x^5+3x^3-4x \sim 2x^5 \\ 3x^2-4x+2 \sim 3x^2 \\ x\to-\infty \end{array}\right| = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^5}{3x^2} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^5}{3x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3}{3} = \frac{-\infty}{3} = -\infty.$$

г) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}+x)^2}{\sqrt[3]{x^6+1}} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \left|\begin{array}{c} \sqrt{x^2+1} \sim \sqrt{x^2} = x \\ \sqrt[3]{x^6+1} \sim \sqrt[3]{x^6} = x^2 \\ x\to+\infty \end{array}\right| = \lim_{x\to+\infty}\frac{(2x)^2}{x^2} = 4.$$

д) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(3x^3+4x+5)}{\ln(2x^9+x^3+1)} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \left|\begin{array}{c} 3x^3+4x+5 \sim 3x^3 \\ 2x^9+x^3+1 \sim 2x^9 \\ x\to+\infty \end{array}\right| =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln 3x^3}{\ln 2x^9} = \left|\begin{array}{c} \ln(ab) = \ln a + \ln b \\ \ln a^b = b\ln a \end{array}\right| = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln 3 + 3\ln x}{\ln 2 + 9\ln x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x\left(\frac{\ln 3}{\ln x}+3\right)}{\ln x\left(\frac{\ln 2}{\ln x}+9\right)} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}. ◄$$

Невизначеність типу $\{0\cdot\infty\}$

Невизначеність типу $\{0\cdot\infty\}$ шляхом тотожних перетворень зводять до невизначеностей типів $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ або $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$.

Приклад 13. Знайти границі заданих функцій (невизначеність типу $\{0\cdot\infty\}$):

а) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\sin\frac{1}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\operatorname{tg}x$.

► а) $$\lim_{x\to\infty} x\cdot\sin\frac{1}{x^2}=\{\infty\cdot 0\}=\left|\begin{array}{l}\frac{1}{x^2}\to 0\\ \sin\frac{1}{x^2}\sim\frac{1}{x^2}\\ x\to\infty\end{array}\right|=\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0;$$

б) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\operatorname{tg}x=\{0\cdot\infty\}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\sin x}{\cos x}=\left|\sin\frac{\pi}{2}=1\right|=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left|\begin{array}{l}\frac{\pi}{2}-x=y\\ x=\frac{\pi}{2}-y\\ x\to\frac{\pi}{2},\ y\to 0\end{array}\right|=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\sin y\sim y\\ y\to 0\end{array}\right|=\lim_{y\to 0}\frac{y}{y}=1.$$ ◄

Невизначеність типу $\{\infty-\infty\}$

Невизначеність типу $\{\infty-\infty\}$ шляхом тотожних перетворень зводять до невизначеностей типів $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ або $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$. При цьому у випадку наявності ірраціональності чисельник та знаменник домножують на відповідний спряжений множник.

Приклад 14. Знайти границю заданої функції (невизначеність типу $\{\infty-\infty\}$):

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x-5}\right).$$

► $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x-5}\right)=\{\infty-\infty\}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x-5}\right)\left(\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x-5}\right)}{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x-5}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+8x+3-x^2-4x+5}{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x-5}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x+8}{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x-5}}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}x^2+8x+3\sim x^2\\ x^2+4x-5\sim x^2\\ 4x+8\sim 4x\\ x\to\infty\end{array}\right|=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{x+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{2x}=\frac{4}{2}=2.$$ ◄

Обчислення границь вигляду $\lim\limits_{x\to a}[\varphi(x)]^{\psi(x)}$

Нехай $\lim\limits_{x\to a}[\varphi(x)]^{\psi(x)}=C$.

Слід мати на увазі, що

1) якщо існують скінченні границі
$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=A \quad\text{і}\quad \lim_{x\to a}\psi(x)=B,$$
то $C=A^B$;

2) якщо $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=A\neq 1$ і $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=\pm\infty$, то питання про знаходження границі розв'язується безпосередньо піднесенням A в степінь $+\infty$ або $-\infty$;

3) якщо $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=1$ і $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=\infty$, то маємо невизначеність типу $\{1^\infty\}$:

а) для розкриття невизначеності використовується друга важлива границя, яка має вигляд

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e.$$

Дійсно, поклавши $\varphi(x)=1+\alpha(x)$, маємо

$$C=\lim_{x\to a}[\varphi(x)]^{\psi(x)}=\lim_{x\to a}\left\{[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}}\right\}^{\alpha(x)\cdot\psi(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)\cdot\psi(x)}=$$

$$=\left|\alpha(x)=\varphi(x)-1\right|=e^{\lim\limits_{x\to a}[\varphi(x)-1]\psi(x)};$$

б) для розкриття невизначеності використовуємо таке представлення:

$$[\varphi(x)]^{\psi(x)}=e^{\psi(x)\ln\varphi(x)}$$

і використовуємо еквівалентність $\ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x),\ \alpha(x)\to 0$ при $x\to a$, яка є наслідком другої важливої границі.

Тоді

$$C=\lim_{x\to a}[\varphi(x)]^{\psi(x)}=\lim_{x\to a}e^{\psi(x)\ln\varphi(x)}=\left|\varphi(x)=1+\alpha(x)\right|=e^{\lim\limits_{x\to a}\psi(x)\ln(1+\alpha(x))}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to a}\psi(x)\cdot\alpha(x)}=\left|\alpha(x)=\varphi(x)-1\right|=e^{\lim\limits_{x\to a}[\varphi(x)-1]\cdot\psi(x)}.$$

Отримали той же результат, що в п. а).

4) якщо $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$ і $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=0$,

або

якщо $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$ і $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=0$,

то маємо невизначеності типів $\{\infty^0\}$ або $\{0^0\}$ відповідно.

Для розкриття цих невизначеностей використовують представлення $[\varphi(x)]^{\psi(x)}=e^{\psi(x)\ln\varphi(x)}$.

Приклад 15. Знайти границі заданих функцій:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^{2-5x}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}(2e^{x-1}-1)^{\frac{6}{x-1}}$.

► а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}=\left|\begin{array}{c}\sin 2x\sim 2x\\ x\to 0\end{array}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x}{x}\right)^{1+x}=2^1=2$.

б) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2}=\left|\begin{array}{c}x+1\sim x\\ 2x+1\sim 2x\\ x\to\infty\end{array}\right|=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2x}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty}=0.$$

в) Спосіб 1.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{2-5x}=\left\{1^\infty\right\}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x}{2x-3}-1\right)^{2-5x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x-3}\right)^{2-5x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{2x-3}\right)^{\frac{2x-3}{3}}\right)^{\frac{3}{2x-3}\cdot(2-5x)}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{3(2-5x)}{2x-3}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3(2-5x)}{2x-3}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-15x}{2x}}=e^{-\frac{15}{2}}.$$

Спосіб 2.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{2-5x}=\lim_{x\to\infty}e^{(2-5x)\ln\frac{2x}{2x-3}}=\lim_{x\to\infty}e^{(2-5x)\ln\left(1+\left(\frac{2x}{2x-3}-1\right)\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}e^{(2-5x)\ln\left(1+\frac{3}{2x-3}\right)}=\left|\begin{array}{c}\ln\left(1+\dfrac{3}{2x-3}\right)\sim\dfrac{3}{2x-3}\\ x\to\infty,\ \dfrac{3}{2x-3}\to 0\end{array}\right|=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2-5x)\cdot 3}{2x-3}}=e^{-\frac{15}{2}}.$$

г) $$\lim_{x\to 1}(2e^{x-1}-1)^{\frac{6}{x-1}}=\left\{1^\infty\right\}=\left|\begin{array}{c}x-1=z\\ x=z+1\\ x\to 1,\ z\to 0\\ 2e^{x-1}-1=2e^z-1\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{z\to 0}(2e^z-1)^{\frac{6}{z}}=\left\{1^\infty\right\}=\lim_{z\to 0}(1+2e^z-2)^{\frac{6}{z}}=\lim_{z\to 0}(1+2(e^z-1))^{\frac{6}{z}}=$$

$$=\left|\begin{array}{c}e^z-1\sim z\\ z\to 0\end{array}\right|=\lim_{z\to 0}(1+2z)^{\frac{6}{z}}=\lim_{z\to 0}(1+2z)^{\frac{1}{2z}\cdot 12}=e^{12}.$$ ◄

Порівняння нескінченно малих

Приклад 16. Порівняти нескінченно малі функції $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ при $x \to 0$:

а) $\alpha(x) = 5x^2 + 2x^5$, $\beta(x) = 3x^2 + 2x^3$;

б) $\alpha(x) = x\sin^2 x$, $\beta(x) = 2x\sin x$;

в) $\alpha(x) = x \cdot \ln(1+x)$, $\beta(x) = x\sin x$.

► а) $\alpha(x) = 5x^2 + 2x^5$, $\beta(x) = 3x^2 + 2x^3$, $x \to 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{5x^2+2x^5}{3x^2+2x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2(5+2x^3)}{x^2(3+2x)} = \lim_{x\to 0}\frac{5+2x^3}{3+2x} = \frac{5}{3} \neq 0.$$

Отже, $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ – нескінченно малі одного порядку при $x \to 0$, тобто $\alpha(x) = O(\beta(x))$, $x \to 0$.

б) $\alpha(x) = x\sin^2 x$, $\beta(x) = 2x\sin x$, $x \to 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x\sin^2 x}{2x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2} = 0.$$

Отже, $\alpha(x)$ – нескінченно мала вищого порядку, ніж $\beta(x)$ при $x \to 0$, тобто $\alpha(x) = o(\beta(x))$, $x \to 0$.

в) $\alpha(x) = x \cdot \ln(1+x)$, $\beta(x) = x\sin x$, $x \to 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\sin x} = \left|\begin{array}{c}\ln(1+x)\sim x\\ \sin x \sim x\\ x\to 0\end{array}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1.$$

Отже, $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ – еквівалентні нескінченно малі при $x \to 0$, тобто $\alpha(x) \sim \beta(x)$, $x \to 0$. ◄

Приклад 17. Визначити порядок малості k нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x) = x$ при $x \to 0$:

а) $\alpha(x) = 2x - 3x^3 + x^5$; б) $\alpha(x) = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$;

в) $\alpha(x) = \sqrt{1-4x} - \sqrt[3]{1-3x}$; г) $\alpha(x) = \mathrm{tg}\,x - \sin x$.

► а) $\alpha(x) = 2x - 3x^3 + x^5 = x(2 - 3x^2 + x^4)$, тому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x-3x^3+x^5}{x} = \lim_{x\to 0}(2-3x^2+x^4) = 2 \neq 0,$$

тобто $\alpha(x) = 2x - 3x^3 + x^5 = O(x)$, $x \to 0$, порядок малості $k = 1$.

б) $\alpha(x) = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} =$

$$= \frac{(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2})(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}} = \frac{2x^2}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2})} = 1 \neq 0,$$

тобто $\alpha(x) = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} = O(x^2)$, $x \to 0$, порядок малості $k = 2$.

Очевидно, що $\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} \sim x^2$, $x \to 0$, бо $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{x^2} = 1$.

в) $\alpha(x) = \sqrt{1-4x} - \sqrt[3]{1-3x} = (\sqrt{1-4x} - 1) + (1 - \sqrt[3]{1-3x}) =$

$$= \frac{-4x}{\sqrt{1-4x}+1} + \frac{3x}{1+\sqrt[3]{1-3x}+\sqrt[3]{(1-3x)^2}}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-4x}-\sqrt[3]{1-3x}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{-4}{\sqrt{1-4x}+1} + \frac{3}{1+\sqrt[3]{1-3x}+\sqrt[3]{(1-3x)^2}}\right) = -2+1 = -1.$$

Отже, ця функція першого порядку малості відносно x і еквівалентна $(-x)$: $\alpha(x) = \sqrt{1-4x} - \sqrt[3]{1-3x} = O(x)$, $x \to 0$, $k = 1$;

$$\alpha(x) = \sqrt{1-4x} - \sqrt[3]{1-3x} \sim -x, \ x \to 0.$$

г) $\alpha(x) = \mathrm{tg}\,x - \sin x = \mathrm{tg}\,x(1-\cos x) = \mathrm{tg}\,x \cdot 2\sin^2\frac{x}{2} \sim \frac{1}{2}x^3$, $x \to 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{x^3} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Отже, $\alpha(x) = \mathrm{tg}\,x - \sin x = O(x^3)$, $x \to 0$, $k = 3$ – порядок малості. ◄

IV. Задачі для практичних занять

Послідовність. Границя послідовності

7.1. Написати п'ять перших членів послідовності $\{x_n\}$.

а) $x_n = 1 + (-1)^n \dfrac{1}{n}$; б) $x_n = n(1-(-1)^n)$; в) $x_n = \dfrac{3n+5}{2n-3}$.

7.2. Записати формулу загального члена x_n послідовності.

а) $-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \ldots$ б) $0, 2, 0, 2, \ldots$

в) $2, \dfrac{4}{3}, \dfrac{6}{5}, \dfrac{8}{7}, \ldots$

7.3. Користуючись означенням границі послідовності, довести, що

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-2}{2n-1} = \dfrac{3}{2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2+1}{3n^2+1} = \dfrac{4}{3}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2-3n^2}{4+5n^2} = -\dfrac{3}{5}$.

У задачах 7.4 – 7.30 обчислити задані границі.

7.4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{3n}$. **7.5.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n+1}{7-9n}$.

7.6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2}{2n^3}$. **7.7.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2-7n+1}{2-5n-6n^2}$.

7.8. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3-100n^2+1}{100n^2+15n}$. **7.9.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1000n^3+3n^2}{0{,}001n^4-100n^3+1}$.

7.10. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$. **7.11.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^4+(n-1)^4}$.

7.12. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$. **7.13.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+1}$.

7.14. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\sqrt{n^2+1}+n)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$. **7.15.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$.

7.16. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$. **7.17.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$.

7.18. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$. **7.19.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}(1+2+3+\ldots+n)$.

7.20. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n+2} - \dfrac{n}{2} \right)$.

7.21. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n+3^n}{2^n-3^n}$.

7.22. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n-1}{2^n+1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{1/n}-1}{2^{1/n}+1}$.

7.23. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$.

7.24. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1})$.

7.25. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{(n+a)(n+b)}-n)$.

7.26. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

7.27. $\lim\limits_{n\to\infty} n^{3/2}(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-2})$. **7.28.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}\cdot\cos n}{n+1}$.

7.29. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\cdot\sin n!}{n^2+1}$. **7.30.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}\cdot\sin n^2}{n-1}$.

Функція

7.31. Знайти область визначення функцій:

а) $f(x)=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{x}$; б) $f(x)=\arccos\left(\dfrac{x}{2}-1\right)$;

в) $f(x)=\dfrac{x-2}{\cos 2x}$.

7.32. Знайти множину значень функцій:

а) $f(x)=|x|+1$; б) $f(x)=-x^2+8x-13$;

в) $f(x)=1-3\cos x$.

7.33. Знайти функцію, обернену даній:

а) $y=1-3x$; б) $y=x^2+1$; в) $y=\dfrac{1}{1-x}$;

г) $y=x^2-2x$; д) $y=10^{x+1}$; е) $y=1+\lg(x+2)$;

є) $y=\log_x 2$; ж) $y=2\sin 3x$.

7.34. Встановити парність або непарність функцій:

а) $f(x)=x^4\sin 7x$; б) $f(x)=x^4-3x^2+x$;

в) $f(x)=\lg\cos x$.

7.35. Довести, що $f(x)+f(-x)$ – парна функція, а $f(x)-f(-x)$ непарна функція.

7.36. Довести, що добуток двох парних функцій є парною функцією, добуток двох непарних функцій – парна функція, добуток парної і непарної функції – непарна функція.

7.37. Знайти періоди функцій:

а) $f(x)=\sin 5x$; б) $f(x)=\lg\cos 2x$;

в) $f(x)=\mathrm{tg}3x+\cos 4x$.

7.38. Побудувати графік такої періодичної функції з періодом $T=1$, яка на інтервалі $[0,1)$ задана формулою:

а) $y=x$; б) $y=x^2$.

7.39. Побудувати графіки функцій:

а) $y=\dfrac{1}{3}x^3$; б) $y=-\dfrac{1}{2}x^3$;

в) $y=x^3+3x^2$; г) $y=x^3-x+1$.

7.40. Побудувати графіки функцій:

а) $y=-2^x$; б) $y=2^{x+3}$; в) $y=\dfrac{1}{3}\cdot 3^x$; г) $y=2^{-x^2}$.

7.41. Побудувати графіки функцій:

а) $y=-\log_2 x$; б) $y=\lg\dfrac{10}{x}$;

в) $y=|\lg x|$; г) $y=\log_2|x|$.

7.42. Побудувати графіки функцій:

а) $y=-\sin x$; б) $y=1-\sin x$; в) $y=\sin 2x$;

г) $y=\sin\dfrac{x}{2}$; д) $y=-2\sin\dfrac{x}{3}$; е) $y=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

7.43. Побудувати графіки функцій:

а) $y=\mathrm{arctg}\, x$; б) $y=2\arcsin\dfrac{x}{2}$;

в) $y=1+\mathrm{arctg}\,2x$; г) $y=\dfrac{\pi}{2}-\arccos 2x$.

Границя функції

7.44. Довести, використовуючи означення границі на мові “$\varepsilon-\delta$”, що $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$:

а) $f(x)=x^2,\ \ a=2,\ \ A=4$;

б) $f(x)=\dfrac{1}{x},\ \ a=1,\ \ A=1$;

в) $f(x)=\lg x,\ \ a=1,\ \ A=0$.

У задачах 7.45 – 7.129 знайти границі функцій.

7.45. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-2}{3x^2-5x+1}$. **7.46.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+3}{x^2-3}$.

7.47. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{1-x}$. **7.48.** $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$.

———

7.49. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$. **7.50.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$.

7.51. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$. **7.52.** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$.

7.53. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$. **7.54.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$.

7.55. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$, $m,n\in\mathbf{N}$. **7.56.** $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$.

———

7.57. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$. **7.58.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}$.

7.59. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$. **7.60.** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$.

7.61. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$. **7.62.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$.

7.63. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$. **7.64.** $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$.

7.65. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$. **7.66.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.

7.67. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$, $n,m\in\mathbf{N}$. **7.68.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$.

———

7.69. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$. **7.70.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$.

7.71. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2+1}$. **7.72.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x-3x^2}{1+x^2+3x^3}$.

7.73. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^{10}+(x+2)^{10}+\ldots+(x+100)^{10}}{x^{10}+10^{10}}$.

7.74. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}$. **7.75.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}}$.

7.76. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[5]{x^7+3}+\sqrt[4]{2x^3-1}}{\sqrt[6]{x^8+x^7+1}-x}$.

———

7.77. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

7.78. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x(x-2)^2}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$.

7.79. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-x\right)$. **7.80.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$.

7.81. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)$. **7.82.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$.

7.83. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+6}-x\right)$. **7.84.** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

7.85. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)$.

7.86. $\lim\limits_{x\to\infty}x^{3/2}\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right)$.

7.87. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.

7.88. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,kx}{x}$.

7.89. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,2x}{\sin 5x}$.

7.90. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin x}{3x}$.

7.91. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-\arcsin x}{2x+\mathrm{arctg}\,x}$.

7.92. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

7.93. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$.

7.94. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt[3]{(1-\cos\alpha)^2}}$.

7.95. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$.

7.96. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha-\sin\alpha}{\alpha^3}$.

7.97. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{(1-\cos\alpha)^2}{\mathrm{tg}^3\alpha-\sin^3\alpha}$.

7.98. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,x}\right)$.

7.99. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)^2}$.

7.100. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}}$.

7.101. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{tg}\,x$.

7.102. $\lim\limits_{\alpha\to\pi}\dfrac{\sin\alpha}{1-\dfrac{\alpha^2}{\pi^2}}$.

7.103. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\,\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

7.104. $\lim\limits_{y\to a}\sin\dfrac{y-a}{2}\cdot\mathrm{tg}\dfrac{\pi y}{2a}$.

7.105. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}$.

7.106. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}$.

7.107. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{mx}$; б) $\lim\limits_{t\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{t}\right)^{t}$.

7.108. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$.

7.109. а) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^{x}$; б) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^{x}$.

7.110. а) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{x}$.

7.111. а) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\mathrm{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$.

7.112. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+kx)}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$.

7.113. $\lim\limits_{x\to+\infty}[x(\ln(x+a)-\ln x)]$.

7.114. а) $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$; б) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^h-1}{h}$.

7.115. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{x-1}$.

7.116. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$.

7.117. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}$.

7.118. а) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+\sin x)^{\frac{1}{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$.

У задачах 7.119 – 7.129 знайти границі різних функцій.

7.119. а) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x-2}-2}{\sqrt[3]{x+2}-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{7+x^3}-\sqrt{3+x^2}}{x-1}$.

7.120. а) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right)$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)$.

7.121. а) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{a^x}{a^x+1}$, $a>1$; б) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$, $a>1$.

7.122. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\operatorname{tg} x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$;

д) $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{\sin^4 3\sqrt{x}}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-e^{3x}}{\sin\dfrac{x^2}{2}-\sin x}$.

7.123. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin \pi x}{\sin 3\pi x}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}-2\cos x}{\pi-4x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}-x\right)}{\sqrt{3}-2\cos x}$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$.

7.124. а) $\lim\limits_{x\to 0} x\left(\cos\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{3}{x}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x-3\arcsin 4x}{\sin 5x-2\operatorname{arctg} x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(1+x)\cdot\operatorname{tg}(1-x)-\operatorname{tg}^2 1}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\operatorname{tg}^3 x-3\operatorname{tg} x}{\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)}$.

7.125. а) $\lim\limits_{x\to -1+0}\dfrac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}}$; б) $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$.

7.126. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(4+5e^{6x})}{\ln(1+2e^{3x})}$;

в) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$.

7.127. а) $\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1+x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1+x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1+x}}$.

7.128. а) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+a\sin bx)^{1/x}$.

7.129. а) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x+2}-\dfrac{\pi}{4}\right)$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x+2}-\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+2}\right)$.

Порівняння нескінченно малих

7.130. Довести еквівалентність нескінченно малих функцій $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to 0$:

а) $\alpha(x)=\ln(1+5x)$, $\beta(x)=e^{5x}-1$;

б) $\alpha(x)=xe^x$, $\beta(x)=x$;

в) $\alpha(x)=\dfrac{1-\cos x}{x}$, $\beta(x)=x$;

г) $\alpha(x)=e^{2x}-e^x$, $\beta(x)=\sin 2x-\sin x$.

7.131. Довести, що нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ одного порядку малості:

а) $\alpha(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$, $\quad \beta(x)=1-\sqrt{x}$, $\quad x\to 1$;

б) $\alpha(x)=1-x$, $\quad \beta(x)=1-\sqrt[3]{x}$, $\quad x\to 1$;

в) $\alpha(x)=\sqrt{4-x}-2$, $\quad \beta(x)=x$, $\quad x\to 0$.

7.132. Порівняти нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to 0$:

а) $\alpha(x)=x^2\sin^2 x$, $\quad \beta(x)=x\,\mathrm{tg}\,x$;

б) $\alpha(x)=\ln(1+3x\sin x)$, $\quad \beta(x)=\mathrm{tg}\,x^2$;

в) $\alpha(x)=a^x-1$, $\quad \beta(x)=x\ln a$.

7.133. Довести вказані рівності при $x\to 0$:

а) $x^3\arcsin^2 3x=o(x^3)$;

б) $2x^2+x\,\mathrm{tg}\,x=o(x)$;

в) $\sqrt{2+x^3}-\sqrt{2}=O(x^3)$.

7.134. Визначити порядок малості нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)=x$ при $x\to 0$:

а) $\alpha(x)=x^3+100x^2$; $\quad$ б) $\alpha(x)=\dfrac{x(x+1)}{1+\sqrt{x}}$;

в) $\alpha(x)=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}$; $\quad$ г) $\alpha(x)=\dfrac{7x^{10}}{x^3+1}$;

д) $\alpha(x)=\sqrt{1+x\sin x}-1$; $\quad$ е) $\alpha(x)=\sqrt{\sin 2x}$;

є) $\alpha(x)=\dfrac{3\sqrt{x^3}}{1-x}$.

§2. Неперервність функцій

I. Короткі теоретичні відомості

Означення неперервності. Функція $f(x)$ називається *неперервною* в точці $x=a$, якщо:

1) функція $f(x)$ визначена в точці $x=a$ і деякому її околі;

2) існує скінченна границя $\lim\limits_{x\to a} f(x)$;

3) ця границя дорівнює значенню функції в точці $x=a$, тобто

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a). \tag{7.12}$$

З умови неперервності (7.12) випливає, що

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(\lim_{x\to a} x), \tag{7.13}$$

що дає правило граничного переходу під знаком неперервної функції.

Умова неперервності (7.12) може бути також представлена у вигляді

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(a)=0 \tag{7.14}$$

або у вигляді

$$f(a+0)=f(a-0)=f(a). \tag{7.15}$$

Умова (7.14) означає, що для неперервної в точці $x=a$ функції, нескінченно малому приросту аргументу в точці a відповідає нескінченно мале значення приросту функції в цій точці.

Умова (7.15) означає, що для неперервної в точці $x=a$ функції, границя функції справа в точці a дорівнює границі функції зліва в точці a і дорівнює значенню функції в цій точці.

Якщо функція неперервна в кожній точці деякої області, то вона називається *неперервною в* цій *області*.

Точки розриву. Точка a, в якій порушена хоча б одна з умов неперервності, називається *точкою розриву* функції $f(x)$.

Точки розриву класифікуються таким чином.

Якщо точка a – точка розриву функції $f(x)$ і *існують* скінченні границі $f(a+0)$ і $f(a-0)$, то точка a називається *точкою розриву першого роду*.
До точок розриву першого роду відносяться точки *усувного розриву* та точки розриву *типу “стрибок”*.

Якщо

$$f(a+0)=f(a-0)\neq f(a), \tag{7.16}$$

або

$$f(a+0)=f(a-0),$$

коли функція $f(x)$ невизначена в точці $x=a$, то точка $x=a$ називається точкою *усувного розриву*.

Якщо

$$f(a+0)\neq f(a-0), \tag{7.17}$$

то точка $x=a$ називається точкою *"стрибка"*,
а величина

$$\Delta f = f(a+0)-f(a-0) \tag{7.18}$$

стрибком функції $f(x)$ в точці a.

Точка a називається *точкою розриву другого роду* функції $f(x)$, якщо хоча б одна з границь $f(a+0)$, $f(a-0)$ не існує або дорівнює нескінченності.

Властивості неперервних функцій

Арифметичні операції над неперервними функціями. Нехай функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ неперервні в точці $x=a$. Тоді в цій точці неперервні функції: $c\cdot f(x),\ c=\text{const};\ f(x)\pm\varphi(x);\ f(x)\cdot\varphi(x);\ \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}\ (\varphi(a)\neq 0)$.

Неперервність складної функції. Якщо функція $x=\varphi(t)$ неперервна в точці a, а функція $y=f(x)$ неперервна в точці $b=\varphi(a)$, то складна функція $y=f[\varphi(t)]$ неперервна в точці a.

Неперервність оберненої функції. Нехай функція $y=f(x)$ визначена, зростаюча (спадна) і неперервна на відрізку $[a,b]$, де $f(a)=\alpha$, $f(b)=\beta$ $(\alpha<\beta)$. Тоді ця функція має на відрізку $[a,b]$ обернену функцію $x=f^{-1}(y)$ або $x=\varphi(y)$, яка є зростаючою (спадною) і неперервною.

Неперервність елементарних функцій. Елементарні функції неперервні в усіх точках, в яких вони визначені.

Властивості функцій, неперервних на відрізку

Функція $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a,b]$, якщо вона неперервна в кожній точці відрізка, причому неперервність в точці a означає неперервність справа, тобто $f(a+0)=f(a)$, а неперервність в точці b означає неперервність зліва, тобто $f(b-0)=f(b)$.

Функція $f(x)$, *неперервна на відрізку* $[a,b]$, має такі властивості:

1) обмежена на відрізку $[a,b]$;

2) досягає на відрізку $[a,b]$ свого найбільшого та найменшого значення;

3) приймає всі проміжні значення між $f(a)=A$ і $f(b)=B,\ A\neq B$, тобто для будь-якого числа C, що лежить між числами A і B, знайдеться така точка $c\in(a,b)$, що $f(c)=C$;

4) за умови, що $f(a)\cdot f(b)<0$, існує хоча б одна точка $c\in(a,b)$ така, що $f(c)=0$.

Рівномірна неперервність. Функція $f(x)$ називається *рівномірно неперервною* на проміжку X, якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ знайдеться таке $\delta=\delta(\varepsilon)$, що для будь-яких $x', x''\in X$ з нерівності $|x'-x''|<\delta$ випливає, що $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

Теорема Кантора. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то вона рівномірно неперервна на ньому.

II. Контрольні питання та завдання

1. Дайте означення функції, неперервної в точці.

2. Дайте означення точки розриву функції. Наведіть класифікацію точок розриву функції.

3. За яких умов складна функція неперервна; обернена функція неперервна?

4. Сформулюйте поняття неперервності функції на відрізку.

5. Наведіть властивості функцій, неперервних на відрізку.

6. Дайте означення рівномірно неперервної на проміжку функції.

III. Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Довести, що функція $y=\sin x$ неперервна для будь-якого $x\in\mathbf{R}$.

► Знайдемо Δy:

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=0,$$

бо $\sin\dfrac{\Delta x}{2}\to 0$ при $\Delta x\to 0$, $\left|\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\right|\leq 1\ \forall x\in\mathbf{R}$.

Отже, функція $y=\sin x$ неперервна для будь-якого $x\in\mathbf{R}$. ◄

Приклад 2. Дослідити задану функцію на неперервність, знайти точки розриву і встановити їх характер:

а) $f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}$; б) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$;

в) $f(x)=3^{\frac{1}{x-2}}$; г) $f(x)=e^{\frac{x+1}{x^2-3x-4}}$.

► а) $f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}$.

Функція визначена для всіх x, крім $x=0$, і є неперервною на інтервалах $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$, бо частка від ділення неперервних функцій є функцією неперервною.

Обчислимо $f(0+0)$ і $f(0-0)$:

$$f(0+0)=\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{|x|}=\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1;$$

$$f(0-0)=\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{|x|}=\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{-x}=-\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x}=-1.$$

Маємо, що $f(0+0)\neq f(0-0)$, отже $x=0$ – точка розриву першого роду, типу “стрибок”.

Величина стрибка $\Delta f=f(0+0)-f(0-0)=1-(-1)=2$.

б) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$.

Функція визначена для всіх x, крім $x=3$, і є неперервною на інтервалах $(-\infty,3)$, $(3,+\infty)$.

Обчислимо $f(3+0)$ і $f(3-0)$:

$$f(3+0)=\lim_{x\to3+0}\frac{x^2-9}{x-3}=6;\quad f(3-0)=\lim_{x\to3-0}\frac{x^2-9}{x-3}=6.$$

Маємо, що $f(3+0)=f(3-0)\neq f(3)$, бо при $x=3$ функція невизначена. В точці $x=3$ маємо розрив першого роду – усувний розрив.

в) $f(x)=3^{\frac{1}{x-2}}$.

Маємо показникову функцію, яка неперервна в кожній точці її області визначення. У точці $x=2$ функція невизначена. Отже, функція неперервна на інтервалах $(-\infty,2)$, $(2,+\infty)$.

Обчислимо $f(2+0)$ і $f(2-0)$:

$$f(2+0)=\lim_{x\to2+0}3^{\frac{1}{x-2}}=3^{+\infty}=+\infty;\quad f(2-0)=\lim_{x\to2-0}3^{\frac{1}{x-2}}=3^{-\infty}=0.$$

В точці $x=2$ функція має розрив другого роду.

г) $f(x)=e^{\frac{x+1}{x^2-3x-4}}$.

Функція визначена в усіх точках, крім $x_1=-1, x_2=4$ (це корені рівняння $x^2-3x-4=0$). Отже, функція неперервна на проміжках $(-\infty,-1)$, $(-1,4)$, $(4,+\infty)$, розрив можливий тільки в точках $x_1=-1$, $x_2=4$.

Дослідимо характер точок розриву.

Врахуємо, що $f(x)=e^{\frac{x+1}{(x+1)(x-4)}}=e^{\frac{1}{x-4}}$.

$$f(-1+0)=\lim_{x\to-1+0}e^{\frac{1}{x-4}}=e^{-\frac{1}{5}};\quad f(-1-0)=\lim_{x\to-1-0}e^{\frac{1}{x-4}}=e^{-\frac{1}{5}}.$$

Маємо $f(-1+0)=f(-1-0)$, отже, точка $x=-1$ – точка усувного розриву.

$$f(4+0)=\lim_{x\to4+0}e^{\frac{1}{x-4}}=e^{+\infty}=+\infty;\quad f(4-0)=\lim_{x\to4-0}e^{\frac{1}{x-4}}=e^{-\infty}=0.$$

Точка $x=4$ – точка розриву другого роду. ◄

Приклад 3. Дослідити задану функцію на неперервність і побудувати її графік.

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & -\infty<x\le0;\\(x-1)^2, & 0<x\le2;\\5-x, & 2<x<+\infty.\end{cases}$$

► Функція $f(x)$ визначена і неперервна на інтервалах $(-\infty,0)$, $(0,2)$, $(2,+\infty)$, де вона задана неперервними елементарними функціями. Отже, розрив можливий тільки в точках $x_1=0$ і $x_2=2$. Визначимо характер точок розриву.

$$f(0+0)=\lim_{x\to+0}(x-1)^2=1;\quad f(0-0)=\lim_{x\to-0}x^2=0;\quad f(0)=x^2\big|_{x=0}=0.$$

$f(0+0) \neq f(0-0)$, отже, функція $f(x)$ в точці $x_1 = 0$ має розрив першого роду, типу "стрибок". Величина стрибка $\Delta f = 1 - 0 = 1$.

$$f(2+0) = \lim_{x \to 2+0} (5-x) = 3\,; \quad f(2-0) = \lim_{x \to 2-0} (x-1)^2 = 1\,;$$

$$f(2) = (x-1)^2\Big|_{x=2} = 1\,.$$

$f(2+0) \neq f(2-0)$, отже, функція $f(x)$ в точці $x_2 = 2$ має розрив першого роду, типу "стрибок". Величина стрибка $\Delta f = 3 - 1 = 2$.

Графік заданої функції зображено на рис.7.1.

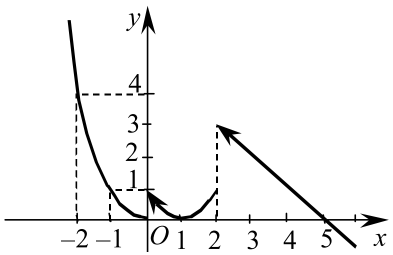


Рис.7.1 ◄

Приклад 4. Дослідити функцію $f(x) = 9^{\frac{1}{x-2}} + 1$ на неперервність в точках $x_1 = 2,\ x_2 = 3$.

► Для точки $x_1 = 2$ маємо:

$$f(2+0) = \lim_{x \to 2+0} \left(9^{\frac{1}{x-2}} + 1 \right) = 9^{+\infty} + 1 = +\infty\,;$$

$$f(2-0) = \lim_{x \to 2-0} \left(9^{\frac{1}{x-2}} + 1 \right) = 9^{-\infty} + 1 = 0 + 1 = 1\,.$$

Отже, в точці $x_1 = 2$ функція має розрив другого роду.

Для точки $x_2 = 3$ маємо:

$$f(3+0) = \lim_{x \to 3+0} \left(9^{\frac{1}{x-2}} + 1 \right) = 9 + 1 = 10\,;$$

$$f(3-0) = \lim_{x \to 3-0} \left(9^{\frac{1}{x-2}} + 1 \right) = 9 + 1 = 10\,;$$

$$f(3) = \left(9^{\frac{1}{x-2}} + 1 \right)\Bigg|_{x=3} = 9 + 1 = 10\,.$$

Отже, в точці $x_2 = 3$ функція неперервна. ◄

Приклад 5. За якого значення параметра A функція

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5}, & x \neq 5; \\ A, & x = 5. \end{cases}$$

буде неперервною?

► Знаходимо $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$:

$$\lim_{x \to 5} f(x) = \lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5} = \lim_{x \to 5} \frac{(\sqrt{x-1} - 2)(\sqrt{x-1} + 2)}{(x-5)(\sqrt{x-1} + 2)} = \lim_{x \to 5} \frac{x-1-4}{(x-5) \cdot 4} = \frac{1}{4}\,.$$

Враховуючи, що функція неперервна за умови, що

$$f(5+0) = f(5-0) = f(5) \text{ і } f(5+0) = f(5-0) = \frac{1}{4}\,,$$

маємо, що $f(5) = A = \frac{1}{4}$.

Отже, функція $f(x)$ неперервна при $A = \frac{1}{4}$. ◄

Приклад 6. Довести, що функція $y = \sin x$ рівномірно неперервна на будь-якому проміжку числової осі.

► Задамо $\varepsilon > 0$. Доведемо, що існує таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що з нерівності $|x' - x''| < \delta$ випливає, що $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Оцінимо $|f(x') - f(x'')|$.

$$|f(x') - f(x'')| = |\sin x' - \sin x''| = \left| 2\sin\frac{x' - x''}{2} \cdot \cos\frac{x' + x''}{2} \right| =$$

$$= 2\left| \sin\frac{x' - x''}{2} \right| \cdot \left| \cos\frac{x' + x''}{2} \right| \leq 2\,\frac{|x' - x''|}{2} = |x' - x''|\,.$$

І повинно бути $|x' - x''| < \varepsilon$.

Отже, $\delta = \varepsilon$, тобто існує таке $\delta = \varepsilon$, що як тільки $|x' - x''| < \delta$, то виконується нерівність $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. ◄

Приклад 7. Довести, що функція $y = \sin\frac{1}{x}$ не є рівномірно неперервною на інтервалі $(0,1)$.

► Задамо ε, що задовольняє умові $0 < \varepsilon < 2$. Доведемо, що для $\forall\varepsilon \in (0,2)$ не можна вказати $\delta > 0$, при якому $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon < 2$ для всіх $x', x'' \in (0,1)$ за умови $|x' - x''| < \delta$. Тобто доведемо, що якими б близькими x' і x'' не брати, $|f(x') - f(x'')| = 2 > \varepsilon$.

Візьмемо $x' = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$, $x'' = \dfrac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2n\pi}$.

Для будь-якого δ можна вибрати n таким, що $|x' - x''| < \delta$.

Але при будь-якому n

$$|f(x') - f(x'')| = \left|\sin\frac{1}{x'} - \sin\frac{1}{x''}\right| = \left|\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right)\right| = |1 - (-1)| = 2 > \varepsilon.$$

Отже, функція $y = \sin\frac{1}{x}$ не є рівномірно неперервною на інтервалі $(0,1)$. ◄

IV. Задачі для практичних занять

7.135. Довести, що вказані функції неперервні в кожній точці їх області визначення:

а) $f(x) = x^n,\ n \in \mathbf{N}$; б) $f(x) = a,\ a \in \mathbf{R}$;

в) $f(x) = \log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1$; г) $f(x) = \cos x$.

7.136. Дослідити задану функцію на неперервність, знайти точки розриву та встановити їх характер:

а) $f(x) = \dfrac{1}{x^2(x-1)}$; б) $f(x) = \dfrac{|3x-5|}{3x-5}$;

в) $f(x) = \dfrac{2^{1/x} - 1}{2^{1/x} + 1}$; г) $f(x) = 3^{\frac{x}{4-x^2}}$;

д) $f(x) = \dfrac{3^{\frac{1}{x-2}} - 1}{3^{\frac{1}{x-2}} + 1}$; е) $f(x) = \dfrac{\sqrt{7+x} - 3}{x^2 - 4}$;

є) $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$; ж) $f(x) = (1+x)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x^2}$;

з) $f(x) = \begin{cases} 2^x, & -1 \le x < 1; \\ 1, & x = 1; \\ x-1, & 1 < x \le 4. \end{cases}$

і) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & -\dfrac{\pi}{2} \le x < \dfrac{\pi}{4}; \\ 1, & x = \dfrac{\pi}{4}; \\ x^2 - \dfrac{\pi^2}{16}, & \dfrac{\pi}{4} < x \le \pi. \end{cases}$

7.137. Для заданої функції $f(x)$ визначити, за якого вибору параметрів, що входять в її означення, функція буде неперервною:

а) $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \le 1; \\ 3 - ax^2, & x > 1. \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 2}{x-1}, & x \neq 1; \\ A, & x = 1. \end{cases}$

в) $f(x) = \begin{cases} ax+1, & x \le \dfrac{\pi}{2}; \\ \sin x + b, & x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$ г) $f(x) = \begin{cases} -2\sin x, & x \le -\dfrac{\pi}{2}; \\ A\sin x + B, & -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ \cos x, & x \ge \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

д) $f(x)=\begin{cases}(x-1)^3, & x\le 0;\\ ax+b, & 0<x<1,\\ \sqrt{x}, & x\ge 1.\end{cases}$ е) $f(x)=\begin{cases}x, & |x|\le 1;\\ x^2+ax+b, & |x|>1.\end{cases}$

7.138. Функція $f(x)$ не визначена при $x=0$. Довизначити $f(0)$ так, щоб функція $f(x)$ була неперервна при $x=0$:

а) $f(x)=\dfrac{(1+x)^n-1}{x}$, $n\in \mathrm{N}$; б) $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

в) $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}$; г) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}$;

д) $f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$; е) $f(x)=x\operatorname{ctg}x$.

7.139. Функція $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$ не визначена при $x=1$. Довизначити $f(1)$ так, щоб функція $f(x)$ була неперервна при $x=1$.

7.140. Якого роду розриви мають функції $y=\dfrac{\sin x}{x}$ і $y=\dfrac{\cos x}{x}$ при $x=0$? Вказати характер графіків цих функцій в околі точки $x=0$.

7.141. Дослідити неперервність функції $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}, & x\ne 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

Побудувати її графік.

7.142. Скільки точок розриву і якого роду має функція $y=\dfrac{1}{\lg|x|}$? Побудувати схематично її графік.

7.143. Функція $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ не визначена в точці $x=0$. Чи можна так довизначити функцію $f(x)$ в точці $x=0$, щоб функція була неперервна в цій точці?

7.144. Довести, що функція $y=\dfrac{1}{1+2^{1/x}}$ в точці $x=0$ має розрив першого роду. Побудувати схематично графік цієї функції в околі точки $x=0$.

У задачах 7.145 – 7.148 дослідити на рівномірну неперервність задані функції на заданих проміжках.

7.145. $f(x)=\dfrac{x}{4-x^2}$, $[-1,1]$.

7.146. $f(x)=\ln x$, $(0,1]$.

7.147. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$, $(0,\pi]$.

7.148. $f(x)=\sqrt{x}$, $[0,+\infty)$.

ГЛАВА 8. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

§1. Диференціювання функцій

I. Короткі теоретичні відомості

Похідна, її механічний та геометричний зміст. *Похідною* від функції $y = f(x)$ у точці x називається $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, якщо ця границя існує.

Позначення: $y'(x)$, y'_x, $\dfrac{dy}{dx}$, $f'(x)$.

Отже, за означенням

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Операція знаходження похідної називається *диференціюванням* функції.

Механічний зміст похідної: швидкість v прямолінійного руху точки в момент часу t є похідна від шляху s за часом t, тобто, якщо $s = s(t)$, то $v = s'(t)$.

Геометричний зміст похідної: похідна в точці x_0 від функції $y = f(x)$ дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка цієї функції в точці з абсцисою x_0, тобто $y' = \operatorname{tg}\alpha$.

Основні правила диференціювання

1. $C' = 0$.
2. $(Cu)' = Cu'$.
3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$.
4. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.
5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$, $v \neq 0$.
6. $\big(f(u)\big)'_x = f'_u \cdot u'_x$.
7. $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$, де $x = x(y)$ – обернена функція для функції $y = y(x)$.

У правилах диференціювання 1–6: C – стала, $u = u(x)$, $v = v(x)$.

Має місце також *правило диференціювання добутку n функцій* $u = u(x)$, $v = v(x)$, $w = w(x), \ldots, z = z(x)$:

$$(u \cdot v \cdot w \ldots z)' = u' \cdot v \cdot w \ldots z + u \cdot v' \cdot w \ldots z + \ldots + u \cdot v \cdot w \ldots z'.$$

Основні формули диференціювання

1. $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$, $\alpha \in \mathbf{R}$.
2. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \ln a} \cdot u'$.
3. $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$.
4. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$.
5. $(e^u)' = e^u \cdot u'$.
6. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.
7. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.
8. $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$.
9. $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$.
10. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.
11. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.
12. $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$.
13. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$.
14. $(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$.
15. $(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$.

16. $(\operatorname{th} u)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u'$.

17. $(\operatorname{cth} u)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'$.

Тут $u = u(x)$. Якщо $u(x) = x$, то $u'(x) = x' = 1$.

Логарифмічне диференціювання. *Логарифмічною похідною* функції $y = f(x)$ називається похідна від логарифму цієї функції, тобто

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y}.$$

Послідовне застосування логарифмування та диференціювання функцій називається *логарифмічним диференціюванням*. У деяких випадках попереднє логарифмування функцій спрощує знаходження її похідної.

Для знаходження похідної від *складної показникової* функції

$$y = u^v,$$

де $u = u(x),\ v = v(x),\ u(x) > 0$, попередньо застосовують логарифмування.

Маємо

$$\ln y = v \ln u,$$

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + v\frac{u'}{u},$$

$$y' = y\left(v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right),$$

$$y' = u^v\left(v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right) = u^v \ln u \cdot v' + v u^{v-1} \cdot u'.$$

Зауважимо, що похідну від складної показникової функції можна знаходити, представивши цю функцію у вигляді

$$y = u^v = e^{\ln u^v} = e^{v \ln u}.$$

Тоді

$$y' = (u^v)' = \left(e^{v \ln u}\right)' = e^{v \ln u}\left(v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right) = u^v\left(v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right) =$$

$$= u^v \ln u \cdot v' + v u^{v-1} \cdot u'.$$

Отримали такий же результат.

Похідна неявної функції. Якщо залежність між x та y задана в неявній формі

$$F(x, y) = 0,$$

то для знаходження похідної $y'_x = y'$ треба:

1) обчислити похідну по x від лівої та правої частини заданого рівняння

$$F(x, y) = 0,$$

вважаючи y функцією від x.

Отримаємо

$$F_1(x, y, y') = 0.$$

2) розв'язати останнє рівняння відносно y'.

Диференціал функції. Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x, тобто має в цій точці скінченну похідну y', то її приріст представлений у вигляді

$$\Delta y = y' \Delta x + \alpha \Delta x,$$

де $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Диференціалом функції $y = f(x)$ називається головна частина її приросту, лінійна відносно приросту аргумента Δx.

Позначення: dy.

Отже,

$$dy = y' \cdot \Delta x$$

або

$$dy = y' \cdot dx.$$

Правила знаходження диференціалів:

1. $dC = 0$.
2. $d(Cu) = C du$.
3. $d(u \pm v) = du \pm dv$.
4. $d(u \cdot v) = v\,du + u\,dv$.
5. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2},\ v \neq 0$.

Тут C – стала, $u = u(x),\ v = v(x)$.

Застосування в наближених обчисленнях. Порівняння Δy з dy показує, що

$$\Delta y \approx dy .$$

Звідси

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x ,$$

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x .$$

Ця формула застосовується для наближеного обчислення значень функції при малому прирості Δx незалежної змінної x.

Геометричний зміст диференціала. Геометрично диференціал dy є приростом ординати дотичної до графіка функції в точці $M(x, y)$: $dy = \operatorname{tg}\alpha \cdot \Delta x$ (рис.8.1).

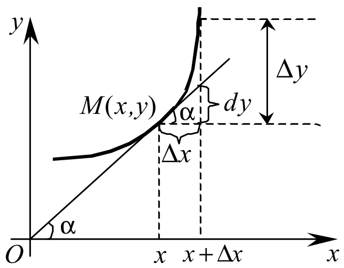


Рис.8.1

Похідна функції, заданої параметрично. Якщо функція $y = f(x)$ задана параметрично рівняннями

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \end{cases}$$

то похідна від неї обчислюється за формулою

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} .$$

Похідні вищих порядків. Похідною другого порядку від функції $y = f(x)$ називається похідна від її першої похідної, тобто

$$\left(f'(x)\right)' = f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2} = y''_{xx} .$$

Аналогічно визначаються похідні більш високих порядків:

$$\left(f''(x)\right)' = f'''(x) = \frac{d^3 y}{dx^3} = y'''_{xxx} ,$$

. . . .

$$\left(f^{(n-1)}(x)\right)' = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n} .$$

Механічний зміст другої похідної. Якщо $s = s(t)$ – функція, що описує закон руху матеріальної точки, то $\dfrac{d^2 s}{dt^2} = a$ – прискорення цієї точки в момент часу t.

Для похідних n-го порядку справедливі наведені нижче формули. В них покладено, що $u = u(x)$, $v = v(x)$, $C = \text{const}$.

1. $(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$.
2. $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$.
3. $(u \cdot v)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$ – *формула Лейбніца*. Тут $u^{(0)} = u$,

$v^{(0)} = v$, C_n^k – число комбінацій з n по k, $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$.

Наведемо також вирази для похідних n-го порядку від деяких функцій:

$$(e^x)^{(n)} = e^x ; \qquad (a^x)^{(n)} = a^x (\ln a)^n ;$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right); \quad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right);$$

$$(x^m)^{(n)} = \begin{cases} m!, & \text{якщо } n = m, \\ 0, & \text{якщо } n > m, \\ m(m-1)\ldots(m-(n-1))x^{m-n}, & \text{якщо } n < m. \end{cases}$$

Похідні вищих порядків функцій, що задані неявно. Нехай функція $y = f(x)$ задана неявно рівнянням

$$F(x, y) = 0 .$$

Продиференціювавши обидві частини цього рівняння по змінній x, вважаючи, що $y = f(x)$, отримаємо рівняння першого степеня відносно y', тобто

$$F_1(x, y, y') = 0 .$$

Звідси знаходимо y'.

Продиференціювавши обидві частини останнього рівняння по x, вважаючи, що y та y' функції від x, отримаємо рівняння відносно y'', тобто

$$F_2(x, y, y', y'') = 0,$$

і т.д.

Похідні вищих порядків функції, заданої параметрично. Нехай функція $y = f(x)$ задана параметрично рівняннями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

Похідні від такої функції обчислюються за формулами

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t},$$

$$y''_{xx} = \frac{d(y'_x)}{dx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t},$$

$$y'''_{xxx} = \frac{d(y''_{xx})}{dx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}$$

і т.д.

Диференціали вищих порядків. *Диференціалом n-го порядку* від функції $y = f(x)$ називається диференціал від диференціала $(n-1)$ порядку цієї функції, тобто

$$d^n y = d(d^{n-1} y).$$

Якщо задана функція $y = f(x)$, де x – *незалежна змінна*, то маємо

$$d^2 y = d(dy) = y'' dx^2,$$

$$d^3 y = d(d^2 y) = y''' dx^3,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$d^n y = d(d^{n-1} y) = y^{(n)} dx^n.$$

Якщо $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, u – *залежна змінна*, то маємо

$$d^2 y = y''_{uu} du^2 + y'_u d^2 u.$$

Аналогічно знаходяться диференціали більш високих порядків.

II. Контрольні питання та завдання

1. Дайте означення похідної. Наведіть її геометричний та механічний зміст.

2. Наведіть формули похідних суми, добутку та частки двох функцій.

3. Наведіть формули диференціювання степеневої та показникової функцій.

4. Що називається логарифмічним диференціюванням?

5. Як знаходиться похідна від складної показникової функції?

6. Сформулюйте означення диференціала. Який його геометричний зміст?

7. Як застосовується диференціал у наближених обчисленнях?

8. Дайте означення похідної n-го порядку.

9. Наведіть формулу Лейбніца для похідної n-го порядку від добутку функцій.

10. Як знаходяться похідні першого та другого порядку від функції, заданої параметрично?

11. Як знаходяться похідні першого та другого порядку від функції, заданої неявно рівнянням $F(x, y) = 0$?

12. Дайте означення диференціала n-го порядку.

13. Наведіть формулу для диференціала n-го порядку від функції $y = f(x)$, коли x – незалежна змінна.

III. Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Знайти похідні вказаних функцій:

а) $y = 5x^3 - 6x^2 + 7x + 4$; б) $y = x^3 \operatorname{arctg} x$;

в) $y = \dfrac{\arcsin x}{x}$; г) $y = \left(17 + \dfrac{3}{x^4}\right)^{12}$;

д) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$; е) $y=x\sqrt{x}(3\ln x-2)$.

► а) застосовуючи правило диференціювання суми функцій, маємо:

$y'=(5x^3-6x^2+7x+4)'=5\cdot 3x^2-6\cdot 2x+7\cdot 1=15x^2-12x+7$;

б) застосовуючи правило диференціювання добутку функцій, маємо:

$$y'=(x^3\operatorname{arctg}x)'=3x^2\operatorname{arctg}x+x^3\frac{1}{1+x^2}=3x^2\operatorname{arctg}x+\frac{x^3}{1+x^2};$$

в) застосовуючи правило диференціювання частки функцій, маємо:

$$y'=\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)'=\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot x-\arcsin x\cdot 1}{x^2}=\frac{x-\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x}{x^2\cdot\sqrt{1-x^2}};$$

г) застосовуючи правило диференціювання складної функції, степеневої функції та суми, маємо:

$$y'=\left(\left(17+\frac{3}{x^4}\right)^{12}\right)'=\left((17+3x^{-4})^{12}\right)'=12(17+3x^{-4})^{11}\cdot 3\cdot(-4)x^{-5}=$$

$$=-\frac{144}{x^5}\left(17+\frac{3}{x^4}\right)^{11};$$

д) застосовуючи правило диференціювання складної функції, логарифмічної функції та суми, маємо:

$$y'=\left(\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right)'=\left(\ln(x+(x^2+1)^{\frac{1}{2}})\right)'=$$

$$=\frac{1}{x+(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}\left(1+\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x\right)=\frac{1}{x+(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}\left(1+\frac{x}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}\right)=$$

$$=\frac{1}{x+(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}+x}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}};$$

е) перепишемо задану функцію

$$y=x\sqrt{x}(3\ln x-2)$$

у вигляді

$$y=x^{\frac{3}{2}}(3\ln x-2).$$

Тоді

$$y'=\left(x^{\frac{3}{2}}(3\ln x-2)\right)'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}(3\ln x-2)+x^{\frac{3}{2}}\cdot 3\cdot\frac{1}{x}=\frac{9}{2}x^{\frac{1}{2}}\ln x.$$ ◄

Приклад 2. Знайти похідну функції $y=x^{\cos 3x}$.

► Маємо складну показникову функцію, бо і основа, і степінь залежать від x.

Прологарифмуємо задану функцію

$$y=x^{\cos 3x}.$$

Маємо

$$\ln y=\cos 3x\cdot\ln x.$$

Далі диференціюємо обидві частини останньої рівності по x:

$$(\ln y)'=(\cos 3x\cdot\ln x)'.$$

Звідси

$$\frac{y'}{y}=-\sin 3x\cdot 3\cdot\ln x+\cos 3x\cdot\frac{1}{x}.$$

Далі знаходимо y':

$$y'=y\left(-3\sin 3x\cdot\ln x+\frac{\cos 3x}{x}\right)$$

або

$$y'=x^{\cos 3x}\left(-3\sin 3x\cdot\ln x+\frac{\cos 3x}{x}\right).$$ ◄

Приклад 3. Знайти похідну функції

$$y=\frac{(2x-1)^3\cdot\sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2\cdot\sqrt[3]{1-x}}.$$

► Запишемо задану функцію у вигляді

$$y=\frac{(2x-1)^3(3x+2)^{\frac{1}{2}}}{(5x+4)^2(1-x)^{\frac{1}{3}}}.$$

Прологарифмуємо задану функцію

$$\ln y=3\ln(2x-1)+\frac{1}{2}\ln(3x+2)-2\ln(5x+4)-\frac{1}{3}\ln(1-x).$$

Продиференціюємо обидві частини останньої рівності по x:

$$(\ln y)' = \left(3\ln(2x-1) + \frac{1}{2}\ln(3x+2) - 2\ln(5x+4) - \frac{1}{3}\ln(1-x)\right)'.$$

Звідси

$$\frac{y'}{y} = 3\cdot\frac{1}{2x-1}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3x+2}\cdot 3 - 2\cdot\frac{1}{5x+4}\cdot 5 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-x}\cdot(-1).$$

$$y' = y\left(\frac{6}{2x-1} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3x+2} - \frac{10}{5x+4} + \frac{1}{3(1-x)}\right).$$

Отже,

$$y' = \frac{(2x-1)^3\cdot\sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2\cdot\sqrt[3]{1-x}}\cdot\left(\frac{6}{2x-1} + \frac{3}{2(3x+2)} - \frac{10}{5x+4} + \frac{1}{3(1-x)}\right). \blacktriangleleft$$

Приклад 4. Знайти диференціал dy функції $y = \sin^6 3x$.

► Згідно з означенням

$$dy = y'dx.$$

Знаходимо похідну заданої функції

$$y' = (\sin^6 3x)' = 6\sin^5 3x\cdot\cos 3x\cdot 3.$$

Отже,

$$dy = 18\sin^5 3x\cdot\cos 3x\,dx. \blacktriangleleft$$

Приклад 5. Обчислити наближене значення $\sqrt[3]{27{,}1}$.

► Розглянемо функцію $y = \sqrt[3]{x}$. Покладемо $x = 27,\ \Delta x = 0{,}1$ і застосуємо формулу

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

У нашому випадку $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

Отже, маємо

$$\sqrt[3]{27{,}1} \approx \sqrt[3]{27} + \frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}}\cdot 0{,}1 = 3 + \frac{1}{3\cdot 3^2}\cdot 0{,}1 = 3 + \frac{0{,}1}{27} = 3{,}0037. \blacktriangleleft$$

Приклад 6. Знайти похідну другого порядку від функції

$$y = \ln(1-x).$$

► Знаходимо першу похідну

$$y' = (\ln(1-x))' = \frac{-1}{1-x}.$$

Тоді

$$y'' = \left(\frac{-1}{1-x}\right)' = \frac{-1}{(1-x)^2}. \blacktriangleleft$$

Приклад 7. Використовуючи формулу Лейбніца, знайти $y^{(15)}$ від функції $y = (x^2+x+1)\sin x$.

► Формула Лейбніца має вигляд

$$(u\cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, u^{(n-k)} v^{(k)}.$$

Для заданої функції $u = x^2+x+1,\ v = \sin x$.

У нашому випадку $n = 15$, а функція u така, що

$u^{(0)} = x^2+x+1,\ u' = 2x+1,\ u'' = 2,\ u''' = 0$.

Отже,

$$y^{(15)} = ((x^2+x+1)\sin x)^{(15)} = C_{15}^0 u^{(0)} v^{(15)} + C_{15}^1 u' v^{(14)} + C_{15}^2 u'' v^{(13)},$$

де $C_{15}^0 = 1,\ C_{15}^1 = 15,\ C_{15}^2 = \frac{15\cdot 14}{2!} = 105,$

$$v^{(n)} = (\sin x)^n = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right),$$

$$v^{(15)} = \sin\left(x + 15\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos x,$$

$$v^{(14)} = \sin\left(x + 14\frac{\pi}{2}\right) = \sin(x+\pi) = -\sin x,$$

$$v^{(13)} = \sin\left(x + 13\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x.$$

Отже, маємо

$$y^{(15)} = ((x^2+x+1)\sin x)^{(15)} = 1\cdot(x^2+x+1)(-\cos x)+$$
$$+15(2x+1)(-\sin x)+105\cdot 2\cos x = (209-x-x^2)\cos x - 15(2x+1)\sin x\ .\ ◄$$

Приклад 8. Знайти $y'_x = \dfrac{dy}{dx}$ та $y''_{xx} = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ від функції, заданої параметрично $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^3+2t+1. \end{cases}$

► $y'_x = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d(t^3+2t+1)}{d(\ln t)} = \dfrac{(t^3+2t+1)'_t}{(\ln t)'_t} = \dfrac{3t^2+2}{\frac{1}{t}} = 3t^3+2t\ .$

$$y''_{xx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(y'_x)}{dx} = \frac{d(3t^3+2t)}{d(\ln t)} = \frac{(3t^3+2t)'_t}{(\ln t)'_t} = \frac{9t^2+2}{\frac{1}{t}} = 9t^3+2t\ .\ ◄$$

Приклад 9. Знайти y' та y'' від функції, заданої неявно рівнянням $x^2+y^2=1$.

► Диференціюємо ліву та праву частини рівняння

$$x^2+y^2=1\ ,$$

вважаючи, що $y=y(x)$. Згідно з правилом диференціювання складної функції, маємо:

$$2x+2y\cdot y'=0$$

або

$$x+y\cdot y'=0\ .$$

Звідси

$$y' = -\frac{x}{y}\ .$$

Далі диференціюємо ліву та праву частини рівняння

$$x+y\cdot y'=0\ ,$$

вважаючи, що $y=y(x),\ y'=y'(x)$.

Маємо

$$1+y'^2+y\cdot y''=0\ .$$

Звідси

$$y'' = -\frac{1+y'^2}{y}\ .$$

Враховуючи вираз для $y' = -\dfrac{x}{y}$, отримуємо

$$y'' = -\frac{1+\frac{x^2}{y^2}}{y} = -\frac{y^2+x^2}{y^3}\ .$$

Але згідно з умовою $x^2+y^2=1$, отже остаточно маємо:

$$y'' = -\frac{1}{y^3}\ .\ ◄$$

Приклад 10. Знайти диференціал другого порядку d^2y від функції $y=\ln(1+x^2)$.

► Згідно з означенням

$$d^2y = y''dx^2\ .$$

Знаходимо y' та y'':

$$y' = \frac{2x}{1+x^2}\ ;\quad y'' = \frac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = 2\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\ .$$

Отже,

$$d^2y = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}dx^2\ .\ ◄$$

IV. Задачі для практичних занять

У задачах 8.1 – 8.14 знайти похідні вказаних функцій.

8.1. $y=3x^2-5x+1$. **8.2.** $y=3-2x+\dfrac{2}{3}x^4$.

8.3. $y=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}$. **8.4.** $y=2\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}+\sqrt{3}$.

8.5. $y=\dfrac{4}{\sqrt[4]{x^3}}-\dfrac{3}{\sqrt[3]{x^2}}$. **8.6.** $y=(x^2-3x+3)(x^2+2x-1)$.

8.7. $y=(x^3-3x+2)(x^4+x^2-1)$.

8.8. $y=(\sqrt{x}+1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-1\right)$.

8.9. $y=(x^2-1)(x^2-4)(x^2+9)$.

8.10. $y=\dfrac{x-1}{x+1}$.

8.11. $y=\dfrac{x^2+1}{x^3-x}$.

8.12. $y=\dfrac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$.

8.13. $y=\dfrac{1}{x^3+3x-1}$.

8.14. $y=\dfrac{a+bx}{c+dx}$.

8.15. $f(x)=3x-2\sqrt{x}$. Знайти: $f(1)$, $f'(1)$, $f(4)$, $f'(4)$.

8.16. $f(t)=\dfrac{t^2-5t-1}{t^3}$. Знайти: $f(-1)$, $f'(-1)$, $f'(2)$.

8.17. $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$. Знайти: $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$.

8.18. $f(x)=\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{3}{x^2+1}$. Знайти: $f'(0)$, $f'(-1)$.

У задачах 8.19 – 8.44 знайти похідні вказаних функцій.

8.19. а) $y=(1+4x^2)^3$; б) $y=(1-x)^{20}$.

8.20. а) $y=(x^3-x)^6$; б) $y=\left(\dfrac{1+x^2}{1+x}\right)^5$.

8.21. а) $y=(1-2\sqrt{x})^4$; б) $y=\sqrt[3]{\dfrac{1}{1+x^2}}$.

8.22. $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$

8.23. а) $y=\sin 3x$; б) $y=3\sin(3x+5)$.

8.24. а) $y=6\cos\dfrac{2x}{3}$; б) $y=\cos^2 x$.

8.25. а) $y=\cos^3 4x$; б) $y=3\sin^2 x-\sin^3 x$.

8.26. а) $y=\cos x^3$. б) $y=\sin^2 x\cdot\sin x^2$.

8.27. а) $y=\sin\sqrt{1+x^2}$; б) $y=(1+\sin^2 x)^4$.

8.28. $y=\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{x}{2}\right)$.

8.29. а) $y=x\arcsin x$; б) $y=(\arcsin x)^2$.

8.30. а) $y=\dfrac{\arccos x}{x}$; б) $y=\arcsin(x-1)$.

8.31. а) $y=\operatorname{arctg} x^2$; б) $y=\arcsin\dfrac{2}{x}$.

8.32. $y=\operatorname{arctg}^2\dfrac{1}{x}$.

8.33. а) $y=x^2\log_3 x$; б) $y=\ln^2 x$.

8.34. а) $y=\dfrac{1}{\ln x}$; б) $y=\ln(x^2-4x)$.

8.35. а) $y=\log_3(x^2-1)$; б) $y=\ln\operatorname{tg} x$.

8.36. $y=\ln^4\sin x$.

8.37. а) $y=x\cdot 10^x$; б) $y=x\cdot e^x$.

8.38. а) $y=e^x\cos x$; б) $y=x^3-3^x$.

8.39. а) $y = 10^{2x-3}$; б) $y = a^{\sin^3 x}$.

8.40. $y = 10^{1-\sin^4 3x}$.

8.41. а) $y = \operatorname{sh}^3 x$; б) $y = \ln \operatorname{ch} x$.

8.42. а) $y = \operatorname{th}(1-x^2)$; б) $y = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x$.

8.43. а) $y = \sqrt{\operatorname{ch} x}$; б) $y = e^{\operatorname{ch}^2 x}$.

8.44. $y = x \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x$.

У задачах 8.45 – 8.48 продиференціювати задані функції, використовуючи логарифмічне диференціювання.

8.45. а) $y = x^{x^2}$; б) $y = (\sin x)^{\cos x}$.

8.46. а) $y = (\ln x)^x$; б) $y = x^{\frac{1}{x}}$.

8.47. а) $y = (x^2+1)^{\sin x}$; б) $y = x^3 e^{x^2} \sin 2x$.

8.48. а) $y = \dfrac{(x-2)^2 \cdot \sqrt[3]{x+1}}{(x-5)^3}$; б) $y = \sqrt{\dfrac{1-\arcsin x}{1+\arcsin x}}$.

У задачах 8.49 – 8.72 знайти похідні від різних функцій.

8.49. а) $y = (1+\sqrt[3]{x})^3$; б) $y = x^5 \sqrt[3]{x^6 - 8}$.

8.50. а) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x-1}$; б) $y = \operatorname{arctg}(x^2 - 3x + 2)$.

8.51. а) $y = 5\operatorname{tg}\dfrac{x}{5} + \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{8}$; б) $y = \dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 2x}$.

8.52. а) $y = \lg(x - \cos x)$; б) $y = 3\cos^2 x - \cos^3 x$.

8.53. а) $y = \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$; б) $y = x^2\sqrt{1+\sqrt{x}}$.

8.54. а) $y = \sin\dfrac{x}{2} \cdot \sin 2x$; б) $y = \sin x \cdot e^{\cos x}$.

8.55. а) $y = e^{-x^2 \ln x}$; б) $y = e^{2x+3}(x^2 - x + 0,5)$.

8.56. а) $y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$; б) $y = \cos 2x \cdot \ln x$.

8.57. а) $y = \dfrac{2\sin^2 x}{\cos 2x}$; б) $y = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{ctg}\frac{x}{2}}{x}$.

8.58. а) $y = \cos x \cdot \sqrt{1+\sin^2 x}$; б) $y = \dfrac{1}{18}\sin^6 3x - \dfrac{1}{24}\sin^8 3x$.

8.59. а) $y = \log_3(x^2 - \sin x)$; б) $y = x \cdot 10^{\sqrt{x}}$.

8.60. а) $y = x^3 \operatorname{arctg} x^3$; б) $y = x - \sqrt{1-x^2} \arcsin x$.

8.61. а) $y = \ln\dfrac{x+\sqrt{1-x^2}}{x}$; б) $y = x\arcsin(\ln x)$.

8.62. а) $y = \dfrac{\ln\sin x}{\ln\cos x}$; б) $y = \dfrac{\arcsin 4x}{1-4x}$.

8.63. а) $y = e^{\frac{1}{\ln x}}$; б) $y = 10^{x \operatorname{tg} x}$.

8.64. а) $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$; б) $y = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) - \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

8.65. а) $y = e^x \sin x \cos^3 x$; б) $y = x\sqrt{1+x^2} \sin x$.

8.66. а) $y = (\operatorname{tg} 2x)^{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}$; б) $y = \dfrac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}$.

8.67. а) $y=\dfrac{1+x\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt{1+x^2}}$; б) $y=\dfrac{1}{\cos(x-\cos x)}$.

8.68. $y=\ln\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}-\mathrm{ctg}\,x\cdot\ln(1+\sin x)-x$.

8.69. $y=x(\arcsin x)^2-2x+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x$.

8.70. $y=\dfrac{3x^2-1}{3x^3}+\ln\sqrt{1+x^2}+\mathrm{arctg}\,x$.

8.71. $y=2\arcsin\dfrac{x-2}{\sqrt{6}}-\sqrt{2+4x-x^2}$.

8.72. $y=\dfrac{xe^x\mathrm{arctg}\,x}{\ln^5 x}$.

У задачах 8.73 – 8.82 знайти похідні від функцій y, заданих неявно.

8.73. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. **8.74.** $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$.

8.75. $x^3+y^3-3axy=0$. **8.76.** $y^3-3y+2ax=0$.

8.77. $y^2-2xy+b^2=0$. **8.78.** $\sin(xy)+\cos(xy)=0$.

8.79. $2^x+2^y=2^{x+y}$. **8.80.** $y=\cos(x+y)$.

8.81. $\mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$. **8.82.** $y=1+xe^y$.

У задачах 8.83 – 8.87 знайти диференціал заданих функцій.

8.83. $y=(1+x-x^2)^3$. **8.84.** $y=\mathrm{tg}^2 x$.

8.85. $y=2^{-\frac{1}{\cos x}}$. **8.86.** $y=\dfrac{\cos x}{1-x^2}$.

8.87. $y=3^{-\frac{1}{x^2}}+3x^3-4\sqrt{x}$.

8.88. Обчислити наближено:

а) $\arcsin 0{,}05$; б) $\mathrm{arctg}\,1{,}04$; в) $\ln 1{,}2$.

8.89. Обчислити наближено:

а) $\mathrm{arctg}\,1{,}02$; б) $\mathrm{arctg}\,0{,}97$.

8.90. Обчислити наближено:

а) $\sqrt{5}$, $\sqrt{17}$; б) $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt[3]{70}$; в) $\sqrt[4]{17}$.

8.91. Обчислити наближено:

а) $\sin 31^\circ$; б) $\cos 61^\circ$; в) $\mathrm{tg}\,44^\circ$.

8.92. Знайти наближені значення функцій:

а) $f(x)=\sqrt{x^2-7x+10}$ при $x=0{,}98$;

б) $f(x)=\sqrt{1+x}$ при $x=0{,}2$;

в) $f(x)=e^{1-x^2}$ при $x=1{,}05$.

У задачах 8.93 – 8.103 знайти похідну $y'=\dfrac{dy}{dx}$ від функцій, заданих параметрично.

8.93. $\begin{cases} x=2t-1, \\ y=t^3. \end{cases}$ **8.94.** $\begin{cases} x=1-t^2, \\ y=t-t^3. \end{cases}$

8.95. $\begin{cases} x=\dfrac{t+1}{t}, \\ y=\dfrac{t-1}{t}. \end{cases}$ **8.96.** $\begin{cases} x=a\cos\varphi, \\ y=b\sin\varphi. \end{cases}$

8.97. $\begin{cases} x=a\cos^3\varphi, \\ y=b\sin^3\varphi. \end{cases}$ **8.98.** $\begin{cases} x=a(\varphi-\sin\varphi), \\ y=a(1-\cos\varphi). \end{cases}$

8.99. $\begin{cases} x=\ln(1+t^2), \\ y=t-\mathrm{arctg}\,t. \end{cases}$ **8.100.** $\begin{cases} x=e^{-t}, \\ y=e^{2t}. \end{cases}$

8.101. $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[3]{t}. \end{cases}$

8.102. $\begin{cases} x = e^t \sin t, \\ y = e^t \cos t. \end{cases}$

8.103. $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t). \end{cases}$

У задачах 8.104 – 8.112 знайти похідні другого порядку від заданих функцій.

8.104. $y = x^2 - 3x + 2$.

8.105. $y = (x^2+1)^3$.

8.106. $y = \cos^2 x$.

8.107. $y = \operatorname{arctg} x^2$.

8.108. $y = xe^{x^2}$.

8.109. $y = \dfrac{1}{1+x^3}$.

8.110. $y = (1+x^2)\operatorname{arctg} x$.

8.111. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$.

8.112. $y = \sqrt{1-x^2}\arcsin x$.

8.113. Знайти $f'''(1)$, якщо $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

8.114. Знайти $f^{(4)}(1)$, якщо $f(x) = x^6 - 4x^3 + 4$.

8.115. Знайти $f''(0)$, якщо $f(x) = e^{2x-1}$.

8.116. Знайти $y'(0)$, $y''(0)$, $y'''(0)$, якщо $y(x) = e^{2x}\sin 3x$.

8.117. Знайти $y'''(2)$, якщо $y(x) = \ln(x-1)$.

8.118. Знайти $y^{(4)}(1)$, якщо $y(x) = x^3 \ln x$.

У задачах 8.119 – 8.124 знайти формулу для похідної n-го порядку від заданих функцій.

8.119. $y = e^{ax}$.

8.120. $y = e^{-x}$.

8.121. $y = xe^x$.

8.122. $y = \dfrac{1}{ax+b}$.

8.123. $y = \ln(ax+b)$.

8.124. $y = \log_a x$.

У задачах 8.125 – 8.129 знайти похідні вказаних порядків, застосовуючи формулу Лейбніца.

8.125. $y = (x^2+1)\sin x$. Знайти $y^{(15)}$.

8.126. $y = (x^2 - x)e^x$. Знайти $y^{(20)}$.

8.127. $y = \sin x \cdot e^{-x}$. Знайти $y^{(5)}$.

8.128. $y = x\log_2 x$. Знайти $y^{(10)}$.

8.129. $y = x \operatorname{sh} x$. Знайти $y^{(100)}$.

У задачах 8.130 – 8.136 знайти похідні вказаних порядків для функцій, заданих неявно.

8.130. $y^2 = 2px$. Знайти y''.

8.131. $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Знайти y''.

8.132. $x^2 + y^2 = r^2$. Знайти y'''.

8.133. $y = \operatorname{tg}(x+y)$. Знайти y'''.

8.134. $s = 1 + t\cdot e^s$. Знайти s''.

8.135. $y^3 + x^3 - 3axy = 0$. Знайти y''.

8.136. $e^{x+y} = xy$. Знайти y''.

У задачах 8.137 – 8.143 знайти похідні вказаних порядків від функцій, заданих параметрично.

8.137. $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^3. \end{cases}$ Знайти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

8.138. $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$ Знайти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

8.139. $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$ Знайти $\dfrac{d^3y}{dx^3}$.

8.140. $\begin{cases} x = a(\varphi - \sin\varphi), \\ y = a(1-\cos\varphi). \end{cases}$ Знайти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

8.141. $\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = t^3. \end{cases}$ Знайти $\dfrac{d^3y}{dx^3}$.

8.142. $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^2 - 1. \end{cases}$ Знайти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

8.143. $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$ Знайти $\dfrac{d^3y}{dx^3}$.

У задачах 8.144 – 8.150 знайти диференціали вказаних порядків.

8.144. $y = \sqrt[3]{x^2}$. Знайти d^2y.

8.145. $y = x^m$. Знайти d^3y.

8.146. $y = (x+1)^3(x-1)^2$. Знайти d^2y.

8.147. $y = 4^{-x^2}$. Знайти d^2y.

8.148. $y = x(\ln x - 1)$. Знайти dy, d^2y, d^3y.

8.149. $y = x^2e^{-x}$. Знайти d^3y.

8.150. $y = \dfrac{x^4}{2-x}$. Знайти d^4y.

§2. Застосування диференціального числення

I. Короткі теоретичні відомості

Геометричні та механічні застосування похідної

Рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці (x_0, y_0) має вигляд

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Рівняння нормалі (перпендикуляра до дотичної в точці дотику) має вигляд

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Дотична та нормаль до кривої $y = f(x)$ у точці M визначає такі чотири відрізки (рис.8.2): $t = TM$ – відрізок дотичної, $s_t = TK$ – *піддотична*, $n = NM$ – відрізок нормалі, $s_n = KN$ – *піднормаль*.

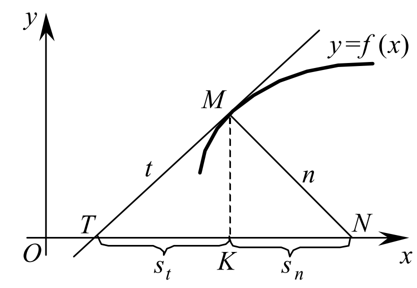


Рис.8.2

Кутом між двома кривими $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$ у точці їх перетину $M_0(x_0, y_0)$ називається кут φ між дотичними до цих кривих у точці M_0. Кут між двома кривими знаходиться за формулою

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0)\cdot f_2'(x_0)}.$$

Якщо при прямолінійному русі точки задано закон руху $s = s(t)$, то *швидкість* руху в момент часу t є похідна від шляху по часу: $v = s'(t)$; *прискорення* цієї точки в момент часу t: $a = s''(t)$.

Теореми про диференційовні функції

Теорема 1 (*Ферма*). Якщо функція $f(x)$:

1) неперервна на $[a,b]$;

2) диференційовна на (a,b);

3) приймає в точці $c \in (a,b)$ найменше або найбільше значення,

то $f'(c) = 0$.

Теорема 2 (*Ролля*). Якщо функція $f(x)$:

1) неперервна на $[a,b]$;

2) диференційовна на (a,b);

3) $f(a)=f(b)$,

то існує така точка $c\in(a,b)$, що $f'(c)=0$.

Теорема 3 (*Коші*). Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$:

1) неперервні на $[a,b]$;

2) диференційовні на (a,b);

3) $g'(x)\neq 0$ на (a,b),

то існує така точка $c\in(a,b)$, що

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Теорема 4 (*Лагранжа*). Якщо функція $f(x)$:

1) неперервна на $[a,b]$;

2) диференційовна на (a,b),

то існує така точка $c\in(a,b)$, що

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

Розкриття невизначеностей за правилом Лопіталя

Розкриття невизначеностей типу $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ *та* $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$

Теорема 5 (*правило Лопіталя*). Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$:

1) задовольняють умовам теореми Коші в деякому околі точки $x=a$;
2) прямують до нуля (або $\pm\infty$) при $x\to a$;
3) існує границя $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (скінченна або нескінченна, рівна $+\infty$ або $-\infty$),

то існує і $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, причому

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Правило Лопіталя справедливе і при $a=\pm\infty$.

Правило Лопіталя може застосовуватись повторно. На кожному етапі застосування правила Лопіталя слід користуватись спрощуючими тотожними перетвореннями, а також комбінувати це правило з будь-якими іншими способами обчислення границь, зокрема, використовувати еквівалентні нескінченно малі та нескінченно великі.

Слід також пам'ятати, що $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ може існувати, а $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ не існує. Тоді правило Лопіталя не може бути застосовано.

Розкриття невизначеностей типу $\{0\cdot\infty\}$ *та* $\{\infty-\infty\}$

У цих випадках слід алгебраїчно перетворити дану функцію так, щоб привести її до невизначеностей типу $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ або $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, а далі використовувати правило Лопіталя.

а) нехай $f(x)\to 0,\ g(x)\to\infty$ при $x\to a$. Перетворимо $f(x)\cdot g(x)$ таким чином:

$$f\cdot g=\frac{f}{\frac{1}{g}}\quad\text{або}\quad f\cdot g=\frac{g}{\frac{1}{f}}.$$

Тоді маємо невизначеність типу $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ або $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ при $x\to a$.

б) нехай $f(x)\to+\infty,\ g(x)\to+\infty$ при $x\to a$. Перетворимо вираз $f(x)-g(x)$ таким чином:

$$f-g=\frac{1}{\frac{1}{f}}-\frac{1}{\frac{1}{g}}=\frac{\frac{1}{g}-\frac{1}{f}}{\frac{1}{f}\cdot\frac{1}{g}}.$$

Маємо невизначеність типу $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ при $x\to a$.

Розкриття невизначеностей типу $\{1^\infty\},\ \{\infty^0\},\ \{0^0\}$

У всіх трьох випадках розглядаємо обчислення границі виразу $(f(x))^{g(x)}$ при $x\to a$, причому:

якщо $f\to 1,\ g\to\infty$, маємо невизначеність типу $\{1^\infty\}$;

якщо $f\to\infty,\ g\to 0$, маємо невизначеність типу $\{\infty^0\}$;

якщо $f\to 0,\ g\to 0$, маємо невизначеність типу $\{0^0\}$.

Перетворимо вираз $(f(x))^{g(x)}$ таким чином:

$$f^g = e^{g \ln f}.$$

Тоді

$$\lim_{x \to a} f^g = \lim_{x \to a} e^{g \ln f} = e^{\lim\limits_{x \to a} g \ln f}.$$

В усіх трьох випадках вираз $g \ln f$ при $x \to a$ представляє невизначеність типу $\{0 \cdot \infty\}$.

До такого ж результату приходимо, якщо попередньо прологарифмуємо ліву та праву частину рівності

$$y = f^g.$$

Маємо

$$\ln y = g \ln f.$$

Звідси

$$y = e^{g \ln f}$$

або

$$f^g = e^{g \ln f}.$$

Формула Тейлора

Нехай функція $f(x)$ диференційовна $n+1$ раз у точці $x = a$ та деякому її околі $O(a, \varepsilon)$. Тоді для будь-якого $x \in O(a, \varepsilon)$ справедлива формула

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x),$$

де $R_n(x)$ – залишковий член, $f^{(0)}(a) = f(a)$, яка називається *формулою Тейлора* для функції $f(x)$ з центром у точці a.

Формула Тейлора дає представлення функції у вигляді многочлена та залишкового члена.

Залишковий член у *формі Лагранжа* має вигляд:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

де ξ лежить між точками a і x, тобто $\xi = a + \theta(x-a)$, причому $0 < \theta < 1$.

Залишковий член у *формі Пеано* має вигляд:

$$R_n(x) = o((x-a)^n) \text{ при } x \to a.$$

При $a = 0$ з формули Тейлора, як частинний випадок, отримуємо *формулу Маклорена*:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x).$$

Для цієї формули залишкові члени мають вигляд:

у формі Лагранжа $\quad R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}, \ 0 < \theta < 1;$

у формі Пеано $\quad R_n(x) = o(x^n)$ при $x \to 0$.

Наведемо основні розклади функцій за формулою Маклорена з залишковим членом у формі Пеано.

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n);$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + o(x^{2n});$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1});$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n);$$

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!} x^k + o(x^n).$$

У випадку залишкового члена у формі Лагранжа маємо

для функції e^x: $\quad R_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}, \ 0 < \theta < 1;$

для функції $\sin x$: $\quad |R_{2n}| \le \dfrac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!};$

для функції $\cos x$: $\quad |R_{2n+1}| \le \dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!};$

для функції $\ln(1+x)$: $\quad R_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+1}\left(\dfrac{x}{1+\theta x}\right)^{n+1}, \ 0 < \theta < 1;$

для функції $(1+x)^m$: $\quad R_n(x) = \dfrac{m(m-1)\ldots(m-n)}{(n+1)!} x^{n+1}(1+\theta x)^{m-n-1}, \ 0<\theta<1.$

Формула Тейлора широко застосовується при обчисленні значень функції з заданою точністю. Нехай, наприклад, треба обчислити значення функції $f(x)$ в точці x_0 з абсолютною похибкою, яка не перевищує ε, якщо відомо значення цієї функції та її похідних у точці a. З формули Тейлора випливає, що

$$f(x_0) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x_0 - a) + \ldots + \frac{f^{(n_0)}(a)}{n_0!}(x_0 - a)^{n_0},$$

де n_0 – мінімальний з номерів n, для яких $|R_{n+1}(x)| < \varepsilon$.

Дослідження функцій та побудова графіків

Зростання та спадання функцій. Функція $f(x)$ називається *зростаючою* на інтервалі (a,b), якщо для $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$ і таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$. Якщо ж при $x_1 < x_2$ виконується нерівність $f(x_1) > f(x_2)$, то функція називається *спадною*.

Якщо $f'(x) > 0$ на (a,b), то функція $f(x)$ *зростає* на цьому інтервалі.

Якщо $f'(x) < 0$ на (a,b), то функція $f(x)$ *спадає* на цьому інтервалі.

Інтервали зростання та спадання функції називаються інтервалами *монотонності*.

Екстремуми функцій. Точка $x = x_0$ називається точкою *локального максимуму* функції $f(x)$, якщо існує такий окіл точки x_0 $O(x_0, \delta)$, що для $\forall x \in O(x_0, \delta),\ x \neq x_0$ виконується нерівність

$$f(x) < f(x_0).$$

Аналогічно точка $x = x_0$ – точка *локального мінімуму* функції $f(x)$, якщо для $\forall x \in O(x_0, \delta),\ x \neq x_0$ виконується нерівність

$$f(x) > f(x_0).$$

Точки локального максимуму та локального мінімуму функції $f(x)$ називаються точками *локального екстремуму* цієї функції.

Необхідна умова екстремуму. Якщо функція $f(x)$ має в точці x_0 екстремум, то $f'(x_0) = 0$ або $f'(x_0)$ не існує.

Точка x_0, в якій $f'(x_0) = 0$, називається *стаціонарною*. Точки, в яких $f'(x_0) = 0$ або $f'(x_0)$ не існує, називаються *критичними* точками. У цих точках дотична до кривої $y = f(x)$ або горизонтальна, або вертикальна, або немає двосторонньої дотичної.

Достатні умови екстремуму. Ці умови задаються такими правилами:

1. Нехай функція $f(x)$ диференційовна в деякому околі $O(x_0, \delta)$ критичної точки x_0, за виключенням, можливо, самої точки x_0. Тоді, якщо:

а) $f'(x) > 0$, $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ і $f'(x) < 0$, $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то x_0 – точка локального максимуму функції $f(x)$;

б) $f'(x) < 0$, $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ і $f'(x) > 0$, $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то x_0 – точка локального мінімуму функції $f(x)$;

в) $f'(x)$ не змінює знака при $x \in O(x_0, \delta)$, $x \neq x_0$, то точка x_0 не є точкою локального екстремуму.

2. Нехай функція $f(x)$ двічі диференційовна в критичній точці x_0 і в деякому її околі. Тоді, якщо:

а) $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка максимуму;

б) $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка мінімуму;

в) $f''(x_0) = 0$, то потрібне додаткове дослідження.

3. Нехай функція $f(x)$ n раз диференційовна в критичній точці x_0 і в деякому її околі і $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,\ f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тоді, якщо:

а) n – парне число, то x_0 – точка локального екстремуму. При цьому, якщо

$f^{(n)}(x_0) < 0$, то точка x_0 – точка локального максимуму,

$f^{(n)}(x_0) > 0$, то точка x_0 – точка локального мінімуму;

б) n – непарне число, то точка x_0 – не є точкою локального екстремуму.

Опуклість, вгнутість. Точки перегину. Нехай $f(x)$ диференційовна функція на інтервалі (a,b). Графік функції $f(x)$ називається *опуклим уверх* або *опуклим* на інтервалі (a,b), якщо він розташований нижче дотичної, проведеної в будь-якій точці цього інтервалу. Графік функції $f(x)$ називається *вгнутим униз* або *вгнутим* на інтервалі (a,b), якщо він розташований вище дотичної, проведеної в будь-якій точці цього інтервалу.

Точка $(x_0, f(x_0))$ графіка функції, яка відділяє його опуклу частину від вгнутої, називається *точкою перегину*.

Достатня умова опуклості (вгнутості) графіка функції. Нехай функція $f(x)$ двічі диференційовна на інтервалі (a,b). Тоді, якщо:

а) $f''(x)<0$ на (a,b), то графік функції $f(x)$ є опуклим на (a,b);

б) $f''(x)>0$ на (a,b), то графік функції $f(x)$ є вгнутим на (a,b).

Із означення точки перегину та достатніх умов опуклості (вгнутості) випливає, що, коли x_0 – абсциса точки перегину графіка функції $y=f(x)$, то друга похідна дорівнює нулю, нескінченності або не існує.

Точки, в яких $f''(x)=0$, нескінченності або не існує, називаються *критичними точками другого роду*.

Достатня умова точки перегину. Нехай функція $f(x)$ двічі диференційовна в деякому околі $O(x_0,\delta)$ критичної точки другого роду x_0, за виключенням, можливо, самої точки x_0. Тоді, якщо $f''(x)$ в інтервалах $(x_0-\delta,x_0)$, $(x_0,x_0+\delta)$ має протилежні знаки, то x_0 – абсциса точки перегину. Якщо ж $f''(x)$ має однаковий знак у цих інтервалах, то точка з абсцисою x_0 не є точкою перегину.

Асимптоти. Пряма L називається *асимптотою* графіка функції $f(x)$, якщо відстань від точки M графіка функції до прямої L $\rho(M,L)\to 0$ при віддаленні точки M у нескінченність.

Вертикальні асимптоти. Пряма $x=a$ є *вертикальною* асимптотою графіка функції $f(x)$, якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$. Неперервні функції не мають вертикальних асимптот.

Похилі асимптоти. Пряма $y=kx+b$ є *похилою* асимптотою графіка функції $f(x)$, якщо існують скінченні границі

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=k\,,\quad \lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=b\,.$$

Горизонтальні асимптоти. Пряма $y=b$ є *горизонтальною* асимптотою графіка функції $f(x)$. Горизонтальна асимптота є частинним випадком похилої асимптоти $y=kx+b$ при $k=0$.

Схема повного дослідження функції. Для повного дослідження функції та побудови її графіка можна рекомендувати таку схему:

1) вказати область визначення функції;

2) дослідити функцію на парність, непарність (симетрію графіка), періодичність;

3) знайти точки перетину графіка функції з осями координат;

4) знайти точки розриву функції, якщо вони існують, і встановити їх характер;

5) знайти асимптоти графіка функції;

6) визначити інтервали зростання та спадання функції та екстремуми;

7) визначити інтервали опуклості та вгнутості функції та точки перегину;

8) провести необхідні додаткові дослідження: сталість знаку функції, розташування графіка відносно осей координат (вище, нижче), поведінка функції на нескінченності, тощо.

Побудову графіка рекомендується виконувати поступово, переходячи від пункту до пункту схеми, з нанесенням знайдених у кожному пункті характеристик.

Знаходження найбільшого та найменшого значення функції на відрізку

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то вона досягає на цьому відрізку своїх найбільшого та найменшого значень. Для знаходження цих значень треба:

а) знайти всі критичні точки функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$;

б) обчислити значення функції $f(x)$ у критичних точках;

в) обчислити значення функції $f(x)$ у точках $x=a$, $x=b$;

г) серед обчислених значень вибрати найбільше та найменше.

II. Контрольні питання та завдання

1. Сформулюйте теорему Ролля. Вкажіть її геометричний зміст.

2. Сформулюйте теорему Лагранжа. Вкажіть її геометричний зміст.

3. Сформулюйте правило Лопіталя для розкриття невизначеності типу $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ та $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$.

4. Як розкриваються невизначеності типів $\{0\cdot\infty\}$ та $\{\infty-\infty\}$ з використанням правила Лопіталя?

5. Як розкриваються степеневі невизначеності з використанням правила Лопіталя?

6. Запишіть формулу Тейлора із залишковим членом у формі Лагранжа.

7. Який вигляд має залишковий член у формулі Тейлора у формі Пеано?

8. Запишіть формулу Маклорена.

9. Як знаходяться інтервали зростання та спадання функції?

10. Яка необхідна умова локального екстремуму?

11. Які точки називаються критичними?

12. Сформулюйте достатню ознаку екстремуму функції, пов'язану з похідною першого порядку?

13. Сформулюйте достатню ознаку екстремуму функції, пов'язану з похідною другого порядку?

14. Як знаходити проміжки опуклості, вгнутості, точки перегину?

15. Які точки називаються критичними точками другого роду?

16. Як знаходити вертикальні асимптоти графіка функції; похилі асимптоти?

17. Як знаходиться найбільше та найменше значення функції на відрізку?

III. Приклади розв'язання задач

У цьому пункті наведено 28 прикладів розв'язання задач, які за своєю тематикою розподілились таким чином:

1. Геометричні та механічні застосування похідної:
приклади 1 – 6.

2. Теореми про диференційовні функції: *приклади 7 – 11.*

3. Розкриття невизначеностей за правилом Лопіталя:
приклади 12 – 17.

4. Формула Тейлора: *приклади 18 – 22.*

5. Дослідження функцій та побудова графіків:
приклади 23 – 26.

6. Знаходження найбільшого та найменшого значення функції: *приклади 27, 28.*

Геометричні та механічні застосування похідної

Приклад 1. Які кути утворюють з віссю Ox дотичні до кривої $y = x - x^2$ у точках з абсцисами:

а) $x = 0$; б) $x = \frac{1}{2}$; в) $x = 1$?

► Знайдемо похідну від функції $y = x - x^2$: $y' = 1 - 2x$.

а) при $x = 0$: $y' = 1$, тобто $\operatorname{tg}\alpha = 1$, $\alpha = 45^{\circ}$;

б) при $x = \frac{1}{2}$: $y' = 0$, тобто $\operatorname{tg}\alpha = 0$, $\alpha = 0^{\circ}$;

в) при $x = 1$: $y' = -1$, тобто $\operatorname{tg}\alpha = -1$, $\alpha = 135^{\circ}$.

Результати проілюстровано на рис.8.3.

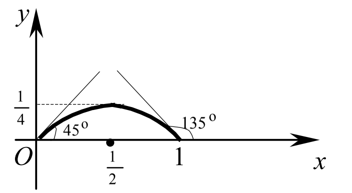


Рис.8.3 ◄

Приклад 2. Написати рівняння дотичної і нормалі до параболи $y = \sqrt{x}$ у точці з абсцисою $x = 4$.

► Знаходимо похідну функції $y = \sqrt{x}$:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Звідси кутовий коефіцієнт дотичної $k = y'(4) = \frac{1}{4}$. Оскільки точка дотику має координати $x = 4$, $y = 2$, то рівняння дотичної є:

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4) \quad \text{або} \quad x - 4y + 4 = 0.$$

В силу умови перпендикулярності кутовий коефіцієнт нормалі $k_1 = -4$. Звідси рівняння нормалі має вигляд:

$$y - 2 = -4(x-4) \quad \text{або} \quad 4x + y - 18 = 0\,. ◄$$

Приклад 3. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої $x^2 + 2xy^2 + 3y^4 = 6$ у точці $M(1,-1)$.

► З рівняння кривої $x^2 + 2xy^2 + 3y^4 = 6$ знаходимо похідну y':

$$2x + 2y^2 + 4xyy' + 12y^3y' = 0\,,$$

$$y' = -\frac{x+y^2}{2xy+6y^3}\,.$$

Звідси $y'\big|_{(1,-1)} = -\dfrac{1+(-1)^2}{2\cdot 1\cdot(-1)+6\cdot(-1)^3} = \dfrac{1}{4}$.

Рівняння дотичної:

$$y + 1 = \frac{1}{4}(x-1) \quad \text{або} \quad x - 4y - 5 = 0\,.$$

Рівняння нормалі:

$$y + 1 = -4(x-1) \quad \text{або} \quad 4x + y - 3 = 0\,. ◄$$

Приклад 4. Знайти кут між параболами $y = 8 - x^2$ та $y = x^2$.

► Розв'язуємо сумісно рівняння парабол:

$$\begin{cases} y = 8 - x^2 \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow 8 - x^2 = x^2 \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2\,.$$

Тоді $y = 4$.

Отже, маємо дві точки перетину парабол $A(2,4)$, $B(-2,4)$.

Продиференціюємо рівняння парабол:

з рівняння $y = 8 - x^2$ маємо $y' = -2x$, з рівняння $y = x^2$ маємо $y' = 2x$.

Знайдемо кутові коефіцієнти дотичних до парабол у точці $A(2,4)$:

$$k_1 = (-2x)\big|_{x=2} = -4,\ \ k_2 = (2x)\big|_{x=2} = 4\,.$$

Отже,

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{4+4}{1-16} = -\frac{8}{15}\,,$$

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg}\left(-\frac{8}{15}\right).$$

Аналогічно, визначається кут між кривими в точці $B(-2,4)$:

$$k_1 = (-2x)\big|_{x=-2} = 4\,,\ k_2 = (2x)\big|_{x=-2} = -4\,.$$

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{-4-4}{1-16} = \frac{8}{15}\,,$$

$$\varphi_2 = \operatorname{arctg}\frac{8}{15}\,. ◄$$

Приклад 5. Залежність шляху від часу при прямолінійному русі точки задана рівнянням $s = \dfrac{t^5}{5} + \dfrac{2}{\pi}\sin\dfrac{\pi t}{8}$ (t – у секундах, s – у метрах). Визначити швидкість руху в кінці другої секунди.

► Знаходимо похідну від шляху по часу. Отримуємо швидкість руху:

$$v = \frac{ds}{dt} = t^4 + \frac{1}{4}\cos\frac{\pi t}{8}\,.$$

При $t = 2$ маємо $v\big|_{t=2} = 16 + \dfrac{1}{8}\cdot\sqrt{2} \approx 16{,}18$.

Отже, швидкість руху в кінці другої секунди $v \approx 16{,}18$ м/с. ◄

Приклад 6. Вздовж параболи $y = x(8-x)$ рухається точка так, що її абсциса змінюється в залежності від часу t за законом $x = t\sqrt{t}$ (t – у секундах, x – у метрах). Яка швидкість зміни ординати у точці $M(1,7)$?

► Знайдемо закон зміни ординати, поклавши $x = t\sqrt{t}$ у рівнянні параболи $y = x(8-x)$. Отримаємо $y = 8t\sqrt{t} - t^3$. Швидкість зміни ординати є похідна від ординати по часу: $y' = 12\sqrt{t} - 3t^2$. Для точки $M(1,7)$ значення $t = 1$. Отже, $y'\big|_{t=1} = 9$, тобто швидкість зміни ординати дорівнює 9 м/с. ◄

Теореми про диференційовні функції

Приклад 7. Показати, що задана функція $f(x)$ задовольняє умовам теореми Ролля на $[a,b]$. Знайти відповідне значення $c \in (a,b)$, таке, що $f'(c) = 0$.

а) $f(x)=x^2-6x+100$; $a=1,\ b=5$;

б) $f(x)=\sqrt[3]{8x-x^2}$; $a=0,\ b=8$.

► а) функція $f(x)=x^2-6x+100$ неперервна на відрізку $[1,5]$; $f'(x)=2x-6$, отже, функція диференційовна на інтервалі $(1,5)$; $f(1)=f(5)=95$. Умови теореми Ролля виконані.

Для знаходження $c\in(1,5)$, такого, що $f'(c)=0$, розв'язуємо рівняння:

$$f'(x)=2x-6=0,$$
$$x=3.$$

Отже, $c=x=3$.

б) функція $f(x)=\sqrt[3]{8x-x^2}$ неперервна на відрізку $[0,8]$; похідна $f'(x)=\dfrac{8-2x}{3\cdot\sqrt[3]{(8x-x^2)^2}}$ існує для $x\neq 0,\ x\neq 8$, тобто на інтервалі $(0,8)$; $f(0)=f(8)=0$. Умови теореми Ролля виконуються.

Для знаходження c, розв'язуємо рівняння:

$$f'(x)=\frac{8-2x}{3\cdot\sqrt[3]{(8x-x^2)^2}}=0,$$
$$8-2x=0,$$
$$x=4.$$

Отже, $c=x=4$.◄

Приклад 8. Чи виконуються умови теореми Ролля для таких функцій:

а) $f(x)=\dfrac{5-x^2}{x^4}$ на відрізку $[-1,1]$;

б) $f(x)=\sqrt[3]{(x-8)^2}$ на відрізку $[0,16]$?

► а) для функції $f(x)=\dfrac{5-x^2}{x^4}$ порушена умова неперервності функції на відрізку $[-1,1]$. Точка $x=0\in[-1,1]$ є точкою розриву функції.

б) для функції $f(x)=\sqrt[3]{(x-8)^2}$ порушена умова диференційовності функції на інтервалі $(0,16)$.

Дійсно, $f'(x)=\dfrac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x-8}}$ у точці $x=8\in(0,16)$ не існує.◄

Приклад 9. Показати, що похідна многочлена $f(x)=x^3-x^2-x+1$ має дійсний корінь в інтервалі $(-1,1)$.

► Функція $f(x)$ задовольняє умовам теореми Ролля (вона неперервна на $[-1,1]$, диференційовна на $(-1,1)$, $f(-1)=f(1)=0$). Отже, існує така точка $c\in(-1,1)$, що $f'(c)=0$, тобто існує хоча б один дійсний корінь рівняння $f'(x)=0$. Знайдемо цей корінь, розв'язавши рівняння:

$$f'(x)=3x^2-2x-1=0.$$

Корені цього рівняння $x_1=-\dfrac{1}{3}$, $x_2=1$; $x_1=c=-\dfrac{1}{3}\in(-1,1)$.◄

Приклад 10. Перевірити виконання умов теореми Лагранжа для функції $f(x)=x-x^3$ на відрізку $[-2,1]$ і знайти відповідне проміжне значення c.

► Функція $f(x)=x-x^3$ неперервна на відрізку $[-2,1]$; $f'(x)=1-3x^2$, отже, функція диференційовна на інтервалі $(-2,1)$. Умови теореми Лагранжа виконані, отже, існує таке $c\in(-2,1)$, що

$$f(1)-f(-2)=f'(c)(1-(-2));$$
$$0-6=f'(c)\cdot 3;$$
$$f'(c)=-2.$$

Враховуючи вираз для $f'(x)$, маємо:
$1-3c^2=-2\Rightarrow 3c^2=3\Rightarrow c^2=1\Rightarrow c=\pm 1$.

Шукане $c=-1$, бо $-1\in(-2,1)$.◄

Приклад 11. На дузі AB кривої $f(x)=2x-x^2$ знайти точку M, в якій дотична паралельна хорді AB, якщо $A(1,1)$, $B(3,-3)$.

► Функція $f(x)=2x-x^2$ неперервна та диференційовна при всіх значеннях x, а значить і на відрізку $[1,3]$. Згідно з теоремою Лагранжа існує така точка $c\in(1,3)$, що виконується рівність:

$$f(3)-f(1)=f'(c)(3-1),$$

де $f'(x)=2-2x$.

Підставивши відповідне значення, маємо:

$$(2\cdot 3-3^2)-(2\cdot 1-1^2)=(2-2c)\cdot 2,$$
$$-4=4(1-c),$$
$$1-c=-1,$$
$$c=2.$$

Тоді $f(2)=0$. Отже, шукана точка $M(2,0)$. ◄

Розкриття невизначеностей за правилом Лопіталя

Приклад 12. Показати, що правило Лопіталя не може бути використане для обчислення вказаної границі:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x+\cos x}.$$

Обчислити цю границю, не використовуючи правила Лопіталя.

► Чисельник і знаменник даного дробу неперервні, диференційовні та прямують до нескінченності. Знайдемо границю відношення похідних:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+\sin x)'}{(x+\cos x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1-\sin x}.$$

Ця границя не існує, бо, враховуючи, що $|\cos x|\le 1$, $|\sin x|\le 1$, чисельник (знаменник) приймають значення, що належать відрізку $[0,2]$, а саме відношення похідних приймає будь-які невід'ємні значення.

Отже, правило Лопіталя не може бути використано згідно з теоремою 5 цього параграфа, бо границя відношення похідних не існує.

Обчислюємо границю безпосередньо, не використовуючи цього правила:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x+\cos x}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\cos x}{x}}=1. ◄$$

Приклад 13. Знайти границі, використовуючи правило Лопіталя (невизначеність типу $\left\{\frac{0}{0}\right\}$):

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg}x}{e^{\frac{3}{x}}-1}$.

► а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+\frac{1}{x}}{e^x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+1}{xe^x}=\dfrac{3}{e}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{6x}=$

$=\left|\sin x\underset{x\to 0}{\sim}x\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{6x}=\dfrac{1}{6}$ (тут правило Лопіталя застосовано двічі);

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x}{3x^2}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x^2\cos^2 x}=$

$=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{x^2\cos^2 x}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)\cdot 3}{x^2\cdot 1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=$

$=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x}=\left|\sin x\underset{x\to 0}{\sim}x\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2x}=\dfrac{1}{2}$;

г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg}x}{e^{\frac{3}{x}}-1}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2\frac{1}{1+x^2}}{e^{\frac{3}{x}}\left(-\frac{3}{x^2}\right)}=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}=$

$=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{2x}=\dfrac{2}{3}$. ◄

Приклад 14. Знайти границі, використовуючи правило Лопіталя (невизначеність типу $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$):

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x\ln(x-5)}{\ln(e^x-e^5)}$.

► а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=$

$=\left|\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x\right|=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x=0$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x^3}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{3x^2}=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^3}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=$

$=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{3x^2}=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{3x^3}=0$;

в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x\ln(x-5)}{\ln(e^x-e^5)}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=5\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\frac{1}{x-5}}{\frac{1}{e^x-e^5}\cdot e^x}=5\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{e^x-e^5}{(x-5)e^5}=$

$=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\dfrac{5}{e^5}\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{e^x}{1}=\dfrac{5}{e^5}e^5=5$. ◄

Приклад 15. Знайти границі, використовуючи правило Лопіталя (невизначеність типу $\{0\cdot\infty\}$):

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3e^{-x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\sin(x-1)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$; в) $\lim\limits_{x\to+0}x^2\ln x$.

► а) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3e^{-x}=\{0\cdot\infty\}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{e^x}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2}{e^x}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=$

$=3\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{e^x}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=6\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}\sin(x-1)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}=\{0\cdot\infty\}=\left|\sin(x-1)\underset{x\to 1}{\sim}x-1\right|=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{-\frac{1}{\sin^2\frac{\pi x}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}}=-\dfrac{2}{\pi}\lim\limits_{x\to 1}\sin^2\dfrac{\pi x}{2}=-\dfrac{2}{\pi}$;

в) $\lim\limits_{x\to+0}x^2\ln x=\{0\cdot\infty\}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1/x}{-\frac{2}{x^3}}=$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to+0}x^2=0$. ◄

Приклад 16. Знайти границі, використовуючи правило Лопіталя (невизначеність типу $\{\infty-\infty\}$):

а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^3 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\operatorname{ctg} x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$.

► а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)=\{\infty-\infty\}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}\right)=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=$

$=\left|x^2\sin^2 x\underset{x\to 0}{\sim}x^4\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin^2 x}{x^4}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-\sin 2x}{4x^3}=$

$=\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\cos 2x\cdot 2}{3x^2}==\dfrac{1}{6}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\dfrac{1}{6}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 2x}{2x}=$

$=\left|\sin 2x\underset{x\to 0}{\sim}2x\right|=\dfrac{1}{6}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x}=\dfrac{1}{3}$;

б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\operatorname{ctg} x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)=\{\infty-\infty\}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x\cdot\sin x}{\cos x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{2x\sin x-\pi}{2\cos x}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{2\sin x+2x\cos x}{2(-\sin x)}=-1$. ◄

Приклад 17. Знайти границі, використовуючи правило Лопіталя (невизначеності типу $\{1^\infty\}, \{\infty^0\}, \{0^0\}$):

а) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x)^{2\cos x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$.

► а) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$.

Скористаємось співвідношенням:

$$(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} = e^{\ln(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}} = e^{\frac{3}{x^2}\ln\cos 2x}.$$

Тоді

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} = \{1^\infty\} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{3}{x^2}\ln\cos 2x} = \left\{e^{\frac{0}{0}}\right\} = e^{3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{x^2}} = e^{3A}.$$

Тут позначено $A = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 2x}{x^2}$. Знайдемо цю границю, застосовуючи правило Лопіталя:

$$A = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{x^2} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos 2x}\cdot(-\sin 2x)\cdot 2}{2x} = \left|\begin{array}{l}\sin 2x \underset{x\to 0;}{\sim} 2x,\\ \cos 2x \underset{x\to 0.}{\to} 1,\end{array}\right| =$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{2x} = -2.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} = e^{3\cdot(-2)} = e^{-6}$.

б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x)^{2\cos x}$.

Враховуючи, що $(\operatorname{tg} x)^{2\cos x} = e^{2\cos x\cdot\ln\operatorname{tg} x}$, маємо

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x)^{2\cos x} = \{\infty^0\} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} e^{2\cos x\cdot\ln\operatorname{tg} x} = \{e^{0\cdot\infty}\} = e^{2\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\operatorname{tg} x}{\frac{1}{\cos x}}} = e^{2\cdot A},$$

де $$A = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\operatorname{tg} x}{\frac{1}{\cos x}} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{1}{\cos^2 x}\cdot(-\sin x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\operatorname{tg} x\cdot\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x = 0.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x)^{2\cos x} = e^{2\cdot 0} = e^0 = 1$.

в) $$\lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}} = \{0^0\} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}\cdot\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln(e^x-1)}} = e^A,$$

де $$A = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln(e^x-1)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{e^x-1}e^x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x e^x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1} = 1.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}} = e$. ◄

Формула Тейлора

Приклад 18. Розкласти многочлен $P(x)=x^3-2x^2+3x+5$ за степенями двочлена $(x-2)$.

► Знаходимо похідні многочлена та їх значення в точці $x=2$:

$P'(x) = 3x^2-4x+3$; $P''(x) = 6x-4$; $P'''(x) = 6$; $P^{(n)}(x) = 0$ при $n\ge 4$.

$P(2) = 11$; $P'(2) = 7$; $P''(2) = 8$; $P'''(2) = 6$.

Отже, за формулою Тейлора маємо:

$$x^3-2x^2+3x+5 = 11+7(x-2)+\frac{8}{2!}(x-2)^2+\frac{6}{3!}(x-2)^3$$

або

$$x^3-2x^2+3x+5 = 11+7(x-2)+4(x-2)^2+(x-2)^3. ◄$$

Приклад 19. Розкласти функцію $f(x) = \operatorname{tg} x$ за формулою Маклорена до члена, що містить x^3 включно.

► Знаходимо похідні функції $f(x) = \operatorname{tg} x$ до третього порядку включно, а також їх значення при $x = 0$.

Маємо

$f(x) = \operatorname{tg} x$, $\qquad f(0) = 0$;

$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \cos^{-2} x$, $\qquad f'(0) = 1$;

$f''(x) = (-2)\cos^{-3} x \cdot (-\sin x) = 2\cos^{-3} x \cdot \sin x$, $\qquad f''(0) = 0$;

$f'''(x) = 6\cos^{-4} x \cdot \sin^2 x + 2\cos^{-2} x$, $\qquad f'''(0) = 2$.

За формулою Маклорена з залишковим членом у формі Пеано маємо

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Або враховуючи, що

$f^{(4)}(x) = 6(4\cos^{-5} x \cdot \sin^3 x + \cos^{-4} x \cdot 2\sin x \cdot \cos x) + 2(-2)\cos^{-3} x \cdot (-\sin x)$,

$f^{(4)}(0) = 0$, залишковий член можна записати у вигляді $o(x^4)$, тобто маємо

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4). \blacktriangleleft$$

Приклад 20. Розкласти функцію $f(x) = \sqrt[3]{x}$ за формулою Тейлора з центром розкладу у точці $a = 1$ (за степенями $(x-1)$) до члена з $(x-1)^3$ включно.

► Обчислимо значення функції $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ та її похідних до третього порядку включно при $x = a = 1$.

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}};\ f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}};\ f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}};\ f'''(x) = \frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}}.$$

$$f(1) = 1;\ f'(1) = \frac{1}{3};\ f''(1) = -\frac{2}{9};\ f'''(1) = \frac{10}{27}.$$

Отже, за формулою Тейлора маємо:

$$\sqrt[3]{x} = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{2}{9 \cdot 2!}(x-1)^2 + \frac{10}{27 \cdot 3!}(x-1)^3 + o((x-1)^3). \blacktriangleleft$$

Приклад 21. Обчислити з точністю до 10^{-3} наближене значення $\sqrt[3]{29}$.

► Представимо заданий корінь у вигляді:

$$\sqrt[3]{29} = \sqrt[3]{27+2} = 3\left(1 + \frac{2}{27}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Скористаємось біноміальним розкладом:

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + R_n.$$

Звідси маємо наближену рівність

$$(1+x)^m \approx 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n,$$

похибка якої

$$R_n = \frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\theta x)^{m-n-1}$$

може бути зроблена як завгодно малою при $|x| < 1$ та достатньо великому n.

Поклавши $x = \dfrac{2}{27}$ і $m = \dfrac{1}{3}$, отримаємо

$$\sqrt[3]{29} = 3\left(1 + \frac{2}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = 3\left(1 + \frac{2}{81} - \frac{2^2}{81^2} + \frac{2^3 \cdot 5}{3 \cdot 81^3} - \frac{2^5 \cdot 5}{3 \cdot 81^4} + \cdots + R_n\right).$$

Оцінюючи величини послідовних похибок обчислення $3|R_n|$, знаходимо

$$3|R_1| < 3\frac{2^2}{81^2} < 0{,}002;\quad 3|R_2| < \frac{2^3 \cdot 5}{81^3} < 0{,}00007.$$

Отже, для обчислення з заданою точністю достатньо взяти три члени, які передують залишку R_2, тобто

$$\sqrt[3]{29} \approx 3(1 + 0{,}024 - 0{,}0006) = 3{,}072. \blacktriangleleft$$

Приклад 22. Використовуючи розклади функцій за формулою Тейлора (Маклорена), обчислити задані границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{5x^2+7x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)-\sin 2(x-1)}{(x-1)+\sin 3(x-1)}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x+2\sin x-3x}{x^4}$.

► а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{5x^2+7x^3}=\left|5x^2+7x^3\underset{x\to 0}{\sim}5x^2\right|=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{5x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3(1-\cos x)}{5x^2}=$$

$$=\left|\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+o(x^3)\right|=\frac{3}{5}\lim_{x\to 0}\frac{1-1+\frac{x^2}{2!}-o(x^3)}{x^2}=\frac{3}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2!}-o(x^3)}{x^2}=$$

$$=\left|\frac{x^2}{2!}-o(x^3)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{x^2}{2!}\right|=\frac{3}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2!}}{x^2}=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{10};$$

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)-\sin 2(x-1)}{(x-1)+\sin 3(x-1)}=\left|\begin{array}{l}\sin 2(x-1)=\dfrac{2(x-1)}{1!}+o(x-1)\\ \sin 3(x-1)=\dfrac{3(x-1)}{1!}+o(x-1)\end{array}\right|=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)-2(x-1)-o(x-1)}{(x-1)+3(x-1)+o(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)}{4(x-1)}=-\frac{1}{4};$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x+2\sin x-3x}{x^4}=\left|\begin{array}{l}\operatorname{tg} x=x+\dfrac{x^3}{3}+o(x^4)\\ \sin x=x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^4)\end{array}\right|=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+\frac{x^3}{3}+o(x^4)+2\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)-3x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{o(x^4)}{x^4}=0.$$ ◄

Дослідження функцій та побудова графіків

Приклад 23. Дослідити функцію $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x-2}$ та побудувати її графік.

► 1. Область визначення функції $D(f)=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$. На інтервалі $(-\infty,2)$ $f(x)<0$, на інтервалі $(2,+\infty)$ $f(x)>0$.

2. Функція не є парною, не є непарною, бо

$$f(-x)=\frac{(-x+1)^2}{-x-2}=-\frac{(-x+1)^2}{x+2},$$

тобто $f(-x)\neq f(x)$, $f(-x)\neq -f(x)$.

Функція неперіодична, бо не існує такого числа T, $T>0$, щоб

$$f(x+T)=f(x),\ \forall x\in D(f).$$

Отже, маємо функцію загального вигляду.

3. Точки перетину з осями координат $(-1,0)$ та $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$.

4. Точка розриву функції $x=2$. Маємо розрив другого роду, бо

$$\lim_{x\to 2-0}f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to 2+0}f(x)=+\infty.$$

5. Вертикальна асимптота $x=2$, бо $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\infty$.

Похилі асимптоти шукаємо у вигляді $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x+1)^2}{x(x-2)}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{(x+1)^2}{x-2}-x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x+1}{x-2}=4.$$

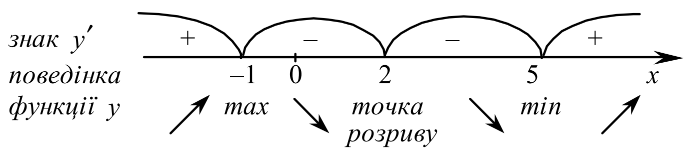
Отже, $y=x+4$ – похила асимптота.

6. Знаходимо точки екстремуму та визначаємо інтервали монотонності функції.

$$f'(x)=\frac{2(x+1)(x-2)-(x+1)^2}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x-5}{(x-2)^2}=\frac{(x+1)(x-5)}{(x-2)^2}.$$

Для знаходження критичних точок розв'язуємо рівняння $f'(x)=0$, тобто $(x+1)(x-5)=0$, $(x-2)^2 \neq 0$, звідки $x_1=-1$, $x_2=5$.

Критичні точки $x_1=-1$, $x_2=5$ та точка $x=2$ (це точка розриву функції) поділяють область визначення функції на інтервали, які вказані на наведеній нижче схемі. На цій схемі над віссю Ox вказано знак похідної функції $y'=f'(x)$, під віссю Ox показана поведінка функції $y=f(x)$ на вказаних інтервалах. Тут стрілками ↗, ↘ вказується відповідно, що функція зростає чи спадає. Слова *max*, *min* вказують відповідно точки, де функція досягає максимуму чи мінімуму.



Отже, $y_{\max}=y(-1)=0$, $y_{\min}=y(5)=12$.

На проміжках $(-\infty,-1)$, $(5,+\infty)$ функція зростає;

на проміжках $(-1,2)$, $(2,5)$ функція спадає.

7. Знаходимо точки перегину графіка кривої та визначаємо інтервали опуклості та вгнутості.

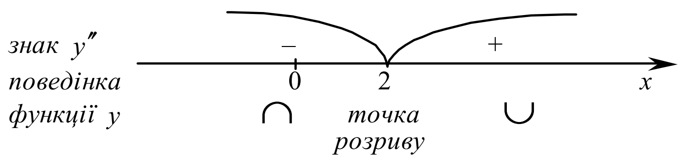
$$f''(x)=\left(\frac{x^2-4x-5}{(x-2)^2}\right)'=\frac{(2x-4)(x-2)^2-(x^2-4x-5)2(x-2)}{(x-2)^4}=\frac{18}{(x-2)^3}$$

$f''(x)\neq 0$;

$f''(x)<0$ на проміжку $(-\infty,2)$, тобто крива опукла на цьому проміжку;

$f''(x)>0$ на проміжку $(2,+\infty)$, тобто крива вгнута на цьому проміжку.

Точок перегину немає, бо точка $x=2$, в околі якої змінюється знак другої похідної, є точкою розриву функції. Результати цього дослідження наведено на схемі.



Тут знак ∩ означає опуклість, знак ∪ – вгнутість.

8. Проводимо додаткові дослідження:

а) на інтервалі $(-\infty,2)$ $f(x)<0$ (графік нижче осі Ox), на інтервалі $(2,+\infty)$ $f(x)>0$ (графік вище осі Ox);

б) дослідимо поведінку функції на нескінченності:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x+1)^2}{x-2}=\pm\infty .$$

На основі дослідження поступово будуємо графік функції $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x-2}$, який наведено на рис.8.4.

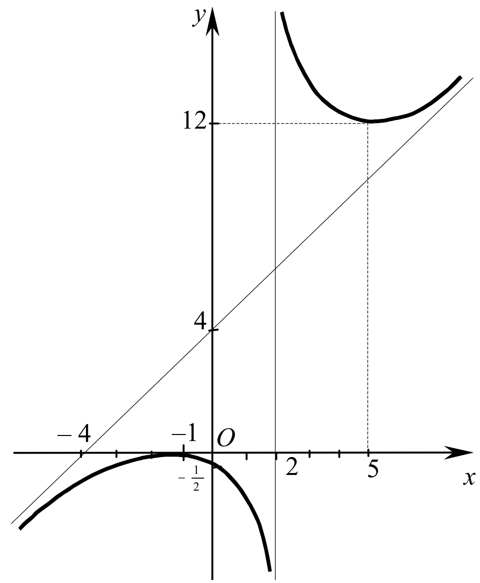


Рис.8.4 ◀

Приклад 24. Дослідити функцію $f(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}$ та побудувати її графік.

▶ 1. Область визначення функції $D(f)=(-\infty,+\infty)$.

2. Функція є непарною, бо $f(-x)=-xe^{-\frac{(-x)^2}{2}}=-xe^{-\frac{x^2}{2}}=-f(x)$, отже, її графік симетричний відносно початку координат.

Функція неперіодична, бо не існує такого числа T, $T>0$, щоб

$$f(x+T)=f(x),\ \forall x\in D(f).$$

Отже, маємо функцію загального вигляду.

3. Точка перетину графіка функції з осями координат $(0,0)$.

4. Точок розриву функція не має.

5. Вертикальних асимптот функція не має, бо не існує такого числа a, щоб $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$.

Похилі асимптоти шукаємо у вигляді $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{xe^{-\frac{x^2}{2}}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{e^{x^2/2}}=0;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\pm\infty}xe^{-\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{e^{x^2/2}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{e^{x^2/2}\cdot x}=0$$

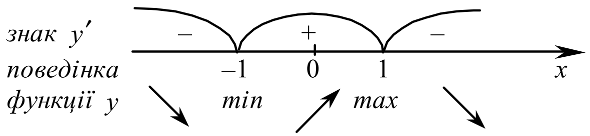
Отже, маємо горизонтальну асимптоту $y=0$.

6. Досліджуємо функцію на екстремум та знаходимо інтервали монотонності.

$$f'(x)=\left(xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)'=e^{-\frac{x^2}{2}}+xe^{-\frac{x^2}{2}}\cdot(-x)=e^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2)=\frac{1-x^2}{e^{x^2/2}}.$$

$$f'(x)=0;\quad \frac{1-x^2}{e^{x^2/2}}=0;\quad 1-x^2=0;\quad x_1=-1,\ x_2=1.$$

Отримали критичні точки, які розбивають числову вісь на три інтервали. Дослідження знаку першої похідної на цих інтервалах та висновки відносно поведінки функції на них наведено на схемі.



На проміжках $(-\infty,-1)$, $(1,+\infty)$ функція спадає;

на проміжку $(-1,1)$ функція зростає.

$$y_{\min}=y(-1)=-e^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{e^{1/2}}\approx-0{,}6;\quad y_{\max}=y(1)=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{e^{1/2}}\approx 0{,}6.$$

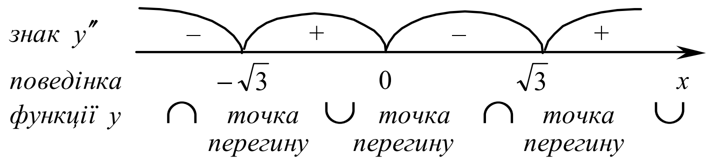
7. Досліджуємо функцію на опуклість, вгнутість та знаходимо точки перегину.

$$f''(x)=\left(\frac{1-x^2}{e^{x^2/2}}\right)'=\frac{-2xe^{x^2/2}-(1-x^2)e^{x^2/2}\cdot x}{e^{x^2}}=$$

$$=\frac{xe^{x^2/2}(-2-1+x^2)}{e^{x^2}}=\frac{x(x^2-3)}{e^{x^2/2}}.$$

$$f''(x)=0;\quad x(x^2-3)=0;\quad x_1=0,\ x_2=-\sqrt{3},\ x_3=\sqrt{3}.$$

Отримали критичні точки другого роду, які розбивають числову вісь на п'ять інтервалів.



Функція опукла на проміжку $(-\infty,-\sqrt{3})\cup(0,\sqrt{3})$, бо $f''(x)<0$;

функція вгнута на проміжку $(-\sqrt{3},0)\cup(\sqrt{3},+\infty)$, бо $f''(x)>0$.

Оскільки в околі точок $x=\pm\sqrt{3}$, $x=0$ y'' змінює знак, то при цих значеннях абсцис маємо точки перегину.

Підрахуємо значення функції в цих точках:

$$y(\pm\sqrt{3})=\pm\frac{\sqrt{3}}{e^{3/2}}\approx\pm0{,}4;\quad y(0)=0.$$

Маємо три точки перегину $P_1(-\sqrt{3};-0{,}4)$, $P_2(\sqrt{3};0{,}4)$, $P_3(0;0)$.

8. Проводимо додаткові дослідження:

а) на інтервалі $(-\infty,0)$ $f(x)<0$ (графік нижче осі Ox), на інтервалі $(0,+\infty)$ $f(x)>0$ (графік вище осі Ox);

б) дослідимо поведінку функції на нескінченності:

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}xe^{-\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{e^{x^2/2}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{e^{x^2/2}\cdot x}=0.$$

На основі дослідження поступово будуємо графік функції $f(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}$, який наведено на рис.8.5.

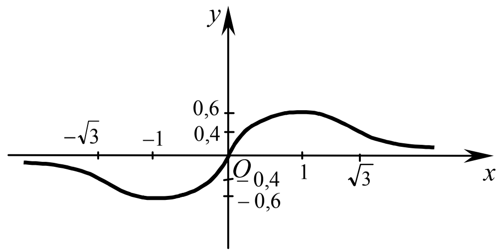


Рис.8.5 ◄

Приклад 25. Дослідити та побудувати графік функції, заданої параметрично рівняннями $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \ \ a > 0. \end{cases}$

► 1. Область визначення.

Параметр $t \in (-\infty, +\infty)$, але оскільки функції $\cos^3 t$, $\sin^3 t$ періодичні з періодом 2π, будемо вважати, що $t \in [0, 2\pi]$. Змінна $x \in [-a, a]$.

Область значень функції $D(y) = [-a, a]$.

2. Симетрія кривої. Враховуючи, що $x(t) = x(-t)$, $y(t) = -y(t)$, маємо, що крива симетрична відносно осі Ox.

3. Знаходимо нулі функцій $x = x(t)$, $y = y(t)$ та області знакосталості цих функцій.

$$x = a\cos^3 t = 0 \ \Rightarrow \ t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2},$$

функція $x(t)$ знакододатна на проміжку $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

$$y = a\sin^3 t = 0 \Rightarrow t = 0, \pi, 2\pi,$$

функція $y(t)$ знакододатна на проміжку $[0, \pi]$.

4. Крива не має похилих асимптот, бо $y \in [-a, a]$.

5. Знаходимо точки t_k, в яких хоча б одна з похідних x'_t, y'_t дорівнює нулю або розривна.

$x'_t = -3a\cos^2 t \cdot \sin t$; $x'_t = -3a\cos^2 t \cdot \sin t = 0$, $t = 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$.

$y'_t = 3a\sin^2 t \cdot \cos t$; $y'_t = 3a\sin^2 t \cdot \cos t = 0$, $t = 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$.

Знаходимо y'_x: $\frac{dy}{dx} = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3a\sin^2 t \cdot \cos t}{-3a\cos^2 t \cdot \sin t} = -\mathrm{tg}\, t$.

Далі складаємо таблицю, враховуючи отримані точки та значення похідних.

Область зміни t	Відповідна область зміни x	Відповідна область зміни y	Знак $\frac{dy}{dx}$	Характер зміни y як функції від x ($y = f(x)$)
$0 < t < \frac{\pi}{2}$	$a > x > 0$	$0 < y < a$	–	спадає
$\frac{\pi}{2} < t < \pi$	$0 > x > -a$	$a > y > 0$	+	зростає
$\pi < t < \frac{3\pi}{2}$	$-a < x < 0$	$0 > y > -a$	–	спадає
$\frac{3\pi}{2} < t < 2\pi$	$0 < x < a$	$-a < y < 0$	+	зростає

З таблиці видно, що задані параметричні рівняння визначають дві неперервні функції вигляду $y = f(x)$:

при $0 \le t \le \pi$ маємо $y \ge 0$ (два перші рядки таблиці);

при $\pi \le t \le 2\pi$ маємо $y \le 0$ (два останні рядки таблиці).

З виразу для похідної $\frac{dy}{dx} = -\mathrm{tg}\, t$ випливає, що

$$\lim_{t \to \frac{\pi}{2}} \frac{dy}{dx} = -\infty; \quad \lim_{t \to \frac{3\pi}{2}} \frac{dy}{dx} = +\infty.$$

У цих точках дотична до кривої вертикальна.

При $t = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$, $y = a$. Отже, $y_{\max} = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = a$.

При $t = \frac{3\pi}{2}$, $x = 0$, $y = -a$. Отже, $y_{\min} = y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -a$.

Враховуючи, що

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=\pi} = 0, \quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=2\pi} = 0,$$

маємо, що дотична до кривої в цих точках горизонтальна.

7. Знаходимо точки, в яких $\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(y'_x)}{dx}=\frac{d(-\operatorname{tg}t)}{d(a\cos^3 t)}=\frac{-\dfrac{1}{\cos^2 t}}{3a\cos^2 t\cdot(-\sin t)}=\frac{1}{3a\cos^4 t\cdot\sin t}.$$

Маємо, що $\dfrac{d^2y}{dx^2}>0$ при $0<t<\pi$ – крива вгнута,

$\dfrac{d^2y}{dx^2}<0$ при $\pi<t<2\pi$ – крива опукла.

На основі дослідження будуємо криву. Ця крива називається *астроїдою*.

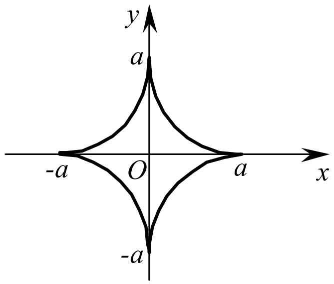


Рис.8.6 ◄

Приклад 26. Дослідити та побудувати графік функції, заданої в полярних координатах рівнянням $\rho=a\sin 3\varphi$ (трипелюсткова троянда).

► 1. Періодичність (знаходження такого значення T, що $f(\varphi+T)=f(\varphi)$).

$$\sin[3(\varphi+T)]=\sin 3\varphi,$$
$$3(\varphi+T)=3\varphi+2\pi,$$
$$3T=2\pi,$$
$$T=\frac{2\pi}{3}.$$

2. Область визначення (ті значення φ, при яких $\rho\ge 0$).

$$\sin 3\varphi\ge 0,$$
$$0\le 3\varphi\le\pi,$$
$$0\le\varphi\le\frac{\pi}{3}.$$

Далі, з урахуванням періоду, маємо $\dfrac{2\pi}{3}\le\varphi\le\pi$, $\dfrac{4\pi}{3}\le\varphi\le\dfrac{5\pi}{3}$.

3. Промені симетрії (такі півпрямі, що виходять з полюса, відносно яких графік функції симетричний).

Враховуючи, що для функції $y=\sin\varphi$ промінь симетрії $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$, то для функції $\rho=a\sin 3\varphi$ маємо $3\varphi=\dfrac{\pi}{2}$, звідки $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$ – промінь симетрії. Враховуючи періодичність, отримуємо ще два промені:

$$\varphi=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}=\frac{5\pi}{6};\quad \varphi=\frac{5\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}=\frac{9\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}.$$

4. Знаходимо точки екстремуму.

$\rho'=3a\cos 3\varphi$; $\rho'=3a\cos 3\varphi=0$, $\cos 3\varphi=0$, $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$.

$\rho''=-9a\sin 3\varphi<0$ на $\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$, отже, $\rho_{\max}=\rho\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=a\sin\dfrac{\pi}{2}=a$.

$\rho'>0$ при $\varphi\in\left[0,\dfrac{\pi}{6}\right)$ – функція зростає на цьому проміжку;

$\rho'<0$ при $\varphi\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right]$ – функція спадає на цьому проміжку.

5. Складаємо таблицю значень функції на проміжку $\left[0,\dfrac{\pi}{6}\right]$.

φ	0	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$
3φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin 3\varphi$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
ρ	0	$\frac{1}{2}a$	$\frac{\sqrt{2}}{2}a$	a

На основі дослідження будуємо графік *трипелюсткової троянди*.

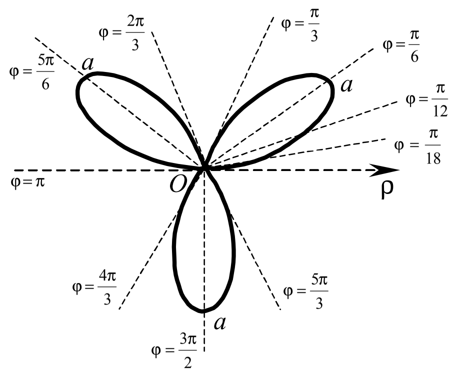


Рис.8.7 ◄

Відшукання найбільших та найменших значень функції

Приклад 27. Знайти найбільше M та найменше m значення функції $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ на відрізку $[-4,4]$.

► Знаходимо критичні точки даної функції, що лежать всередині відрізка $[-4,4]$ і обчислюємо значення функції в цих точках:

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$; $3x^2 - 6x - 9 = 0$;

$x = -1$, $x = 3$ – критичні точки функції, що належать заданому відрізку; $f(-1) = 40$, $f(3) = 8$.

Обчислюємо значення даної функції в точках $x = -4$, $x = 4$ – межах відрізка $[-4,4]$: $f(-4) = -41$, $f(4) = 15$.

З отриманих чотирьох значень вибираємо найбільше та найменше.

Отже, $M = f(-1) = 40$, $m = f(-4) = -41$. ◄

Приклад 28. Знайти такий циліндр, який мав би найбільший об'єм при заданій повній поверхні S.

► Нехай радіус основи циліндра $R = x$, а висота $H = y$.

Тоді

$$S = 2S_{осн} + S_{бічн} = 2\pi x^2 + 2\pi xy .$$

Звідси

$$y = \frac{S - 2\pi x^2}{2\pi x} .$$

Отже, об'єм циліндра представиться так:

$$V = V(x) = S_{осн} \cdot H = \pi x^2 \cdot \frac{S - 2\pi x^2}{2\pi x} = \frac{S}{2}x - \pi x^3 .$$

Задача зводиться до дослідження функції $V(x)$ на максимум при $x > 0$.

$$V'(x) = \frac{S}{2} - 3\pi x^2 ; \quad \frac{S}{2} - 3\pi x^2 = 0 ; \quad x = \sqrt{\frac{S}{6\pi}} .$$

Це критична точка. Дослідимо її на екстремум.

$$V''(x) = -6\pi x ; \quad V''\left(\sqrt{\frac{S}{6\pi}}\right) = -6\pi\sqrt{\frac{S}{6\pi}} = -\sqrt{6\pi S} < 0 .$$

Отже, в точці $x = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ функція має максимум, тобто об'єм має найбільше значення. Висота циліндра при цьому така:

$$H = y = \frac{S - 2\pi\frac{S}{6\pi}}{2\pi\sqrt{\frac{S}{6\pi}}} = 2\sqrt{\frac{S}{6\pi}} = 2x = 2R .$$

Отже, висота H циліндра дорівнює $2R$ – діаметру основи циліндра. За цієї умови циліндр має найбільший об'єм. ◄

IV. Задачі для практичних занять

Геометричні та механічні застосування похідної

8.151. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної, яка проведена до параболи $y = x^2$: 1) у початку координат; 2) у точці $(3,9)$; 3) у точці $(-2,4)$; 4) у точках перетину її з прямою $y = 3x - 2$.

8.152. В яких точках кутовий коефіцієнт дотичної до кубічної параболи $y = x^3$ дорівнює 3?

8.153. В якій точці дотична до параболи $y = x^2$:

1) паралельна осі Ox; 2) утворює з віссю Ox кут у 45^{o}?

8.154. В яких точках дотична до параболи $y = x^2$:

1) паралельна прямій $y = 4x - 5$; 2) перпендикулярна до прямої $2x - 6y + 5 = 0$; 3) утворює з прямою $3x - y + 1 = 0$ кут у 45°?

8.155. На лінії $y = x^2(x-2)^2$ знайти точки, в яких дотична паралельна осі абсцис.

8.156. На лінії $y = \dfrac{1}{(x+2)^2}$ знайти точку, в якій дотична паралельна осі абсцис.

8.157. На параболі $y = x^2$ зафіксовано дві точки з абсцисами $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Через ці точки проведено січну. В якій точці параболи дотична до неї паралельна проведеній січній?

8.158. Написати рівняння дотичної і нормалі, проведених до кривої $y = x^3$ у точці з абсцисою 2. Знайти піддотичну s_t і піднормаль s_n.

8.159. Скласти рівняння дотичної та нормалі до гіперболи $y = \dfrac{1}{x}$ у точці з абсцисою $x = -\dfrac{1}{2}$. Знайти піддотичну s_t та піднормаль s_n.

У задачах 8.160 – 8.164 скласти рівняння дотичної та нормалі до даних ліній в даній точці.

8.160. $y = x^2 - 5x + 4$, $x_0 = -1$.

8.161. $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$, $x_0 = -2$.

8.162. $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$.

8.163. $y = \operatorname{tg} 2x$, $x_0 = 0$.

8.164. $y = \ln x$, $x_0 = 1$.

8.165. Написати рівняння дотичної і нормалі в точці $M_0(2,2)$ до кривої, заданої параметрично

$$\begin{cases} x = \dfrac{1+t}{t^3}, \\ y = \dfrac{3}{2t^2} + \dfrac{1}{2t}. \end{cases}$$

8.166. Написати рівняння дотичної до кривої

$$\begin{cases} x = t\cos t, \\ y = t\sin t \end{cases}$$

у початку координат і в точці $t = \dfrac{\pi}{4}$.

8.167. Написати рівняння дотичної та нормалі до кривої $x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0$ в точці з ординатою $y_0 = 3$.

8.168. Написати рівняння дотичної у точці $M_0(1,1)$ до кривої $x^5 + y^5 - 2xy = 0$.

8.169. Довести, що дотична до еліпса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ в точці $M(x_0, y_0)$ має рівняння $\dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2} = 1$.

8.170. Довести, що дотична до гіперболи $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ в точці $M(x_0, y_0)$ має рівняння $\dfrac{xx_0}{a^2} - \dfrac{yy_0}{b^2} = 1$.

8.171. Під яким кутом перетинається парабола $y = x^2$ з прямою $3x - y - 2 = 0$?

У задачах 8.172 – 8.177 знайти кути, під якими перетинаються задані криві.

8.172. Параболи $y = x^2$ та $y^2 = x$.

8.173. Гіпербола $y = \dfrac{1}{x}$ з параболою $y = \sqrt{x}$.

8.174. Кола $x^2 + y^2 - 4x = 1$ та $x^2 + y^2 + 2y = 9$.

8.175. Параболи $y = (x-2)^2$ та $y = 4x - x^2 + 4$.

8.176. Коло $x^2 + y^2 = 8$ та парабола $y^2 = 2x$.

8.177. Гіпербола $x^2 - y^2 = 5$ та еліпс $\dfrac{x^2}{18} + \dfrac{y^2}{8} = 1$.

8.178. Відстань, пройдена матеріальною точкою за час t, є $s = \dfrac{1}{4}t^4 - \dfrac{1}{3}t^3 + 2t + 1$ (t – у секундах, s – у метрах). Знайти швидкість руху даної точки у моменти часу $t = 0;\ 1;\ 2$ с.

8.179. Задано рівняння руху точки вздовж осі Ox $x = 100 + 5t - 0{,}001t^3$ (t – у секундах, x – у метрах). Знайти швидкість v та прискорення a цієї точки у моменти часу $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 10$ с.

8.180. Точка рухається прямолінійно, закон її руху $s = \dfrac{2}{9}\sin\dfrac{\pi t}{2} + s_0$. Знайти прискорення в кінці першої секунди (t – у секундах, s – у сантиметрах).

8.181. Закон руху матеріальної точки по прямій має вигляд $x = \dfrac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2$. Визначити:

а) в які моменти часу точка знаходиться у початку координат?

б) в які моменти часу її швидкість дорівнює нулю?

в) в які моменти часу напрямок її руху співпадає з додатним напрямом осі Ox?

г) в які моменти часу її прискорення дорівнює нулю?

8.182. Залежність шляху від часу задана рівнянням $s = t\ln(t+1)$ (t – у секундах, s – у метрах). Знайти швидкість руху в кінці другої секунди.

8.183. Вздовж кубічної параболи $y = x^3$ рухається точка так, що її ордината змінюється в залежності від часу t за законом $y = at^3$. Яка швидкість зміни абсциси в залежності від часу?

Теореми про диференційовні функції

У задачах 8.184 – 8.187 перевірити справедливість теореми Ролля для заданої функції $f(x)$ на даному відрізку $[a,b]$.

8.184. $f(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$, $[-1,2]$.

8.185. $f(x) = \ln\sin x$, $\left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right]$.

8.186. $f(x) = 4^{\sin x}$, $[0,\pi]$.

8.187. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}$, $[1,2]$.

8.188. Функція $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$ на кінцях відрізка $[0,4]$ приймає рівні значення $f(0) = f(4) = \sqrt[3]{4}$. Чи справедлива для цієї функції теорема Ролля на відрізку $[0,4]$?

8.189. Чи виконані умови теореми Ролля для функції $f(x) = \operatorname{tg} x$ на відрізку $[0,\pi]$?

8.190. Чи виконані умови теореми Ролля для функції $f(x) = \dfrac{2 - x^2}{x^4}$ на відрізку $[-1,1]$?

8.191. Перевірити виконання умов теореми Лагранжа і знайти відповідну проміжну точку c для функції $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$ на відрізку $[-1,1]$.

8.192. Записавши формулу Лагранжа на відрізку $[0,1]$ для функції $f(x) = \sqrt{3}\,x^3 + 3x$, знайти на інтервалі $(0,1)$ відповідне значення c.

8.193. Для дуги параболи $y = x^2$, що міститься між точками $A(1,1)$ та $B(3,9)$, знайти точку, дотична до якої паралельна хорді AB.

8.194. Записавши формулу Коші на відрізку $[0,2]$ для функцій $f(x)=2x^3+5x+1$ та $g(x)=x^2+4$, знайти відповідне значення c.

8.195. Для заданих функцій $f(x)$ та $g(x)$ перевірити виконання умов теореми Коші на заданому відрізку $[a,b]$ та знайти відповідне значення c:

а) $f(x)=x^2+2$, $g(x)=x^3-1$, $[a,b]=[1,2]$;

б) $f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$, $[a,b]=\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Розкриття невизначеностей за правилом Лопіталя

У задачах 8.196 – 8.207 знайти границі, використовуючи правило Лопіталя (невизначеність типу $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$).

8.196. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$.

8.197. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x}$.

8.198. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin x}$.

8.199. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-\cos\alpha x}{e^{\beta x}-\cos\beta x}$.

8.200. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$.

8.201. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$.

8.202. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$.

8.203. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}$.

8.204. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\arcsin 3x}$.

8.205. $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{\operatorname{ctg} x-1}{\sin 4x}$.

8.206. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg} x}{e^{3/x}-1}$.

8.207. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x\sqrt{1-x^2}}$.

У задачах 8.208 – 8.215 знайти границі, використовуючи правило Лопіталя (невизначеність типу $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$).

8.208. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x}$.

8.209. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{x^5}$.

8.210. $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$.

8.211. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x^m}$, $m>0$.

8.212. $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$.

8.213. $\lim\limits_{x\to 3+0}\dfrac{\cos x\cdot\ln(x-3)}{\ln(e^x-e^3)}$.

8.214. $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{\ln(x-1)}{\operatorname{ctg}\pi x}$.

8.215. $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$.

У задачах 8.216 – 8.221 знайти границі, використовуючи правило Лопіталя (невизначеність типу $\{0\cdot\infty\}$).

8.216. $\lim\limits_{x\to +\infty} x(e^{1/x}-1)$.

8.217. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^n e^{-x}$.

8.218. $\lim\limits_{x\to \infty} x\sin\dfrac{a}{x}$.

8.219. $\lim\limits_{x\to 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$.

8.220. $\lim\limits_{x\to +0} x\ln^3 x$.

8.221. $\lim\limits_{x\to \pi}(\pi-x)\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

У задачах 8.222 – 8.227 знайти границі, використовуючи правило Лопіталя (невизначеність типу $\{\infty-\infty\}$).

8.222. $\lim\limits_{x\to 1+0}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$.

8.223. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x-\dfrac{1}{x}\right)$.

8.224. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

8.225. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{arctg} x}-\dfrac{1}{x}\right)$.

8.226. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\left(\dfrac{x}{\operatorname{ctg} x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$.

8.227. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$.

У задачах 8.228 – 8.239 знайти границі, використовуючи правило Лопіталя (невизначеності типу $\{1^\infty\}$, $\{\infty^0\}$, $\{0^0\}$).

8.228. а) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(e^x + x)^{\frac{1}{x}}$.

8.229. а) $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{x}$.

8.230. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

8.231. а) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to \pi/2}(\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$.

8.232. а) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$.

8.233. а) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2^x)^{\frac{1}{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to \pi/2}(\pi-2x)^{\cos x}$.

У задачах 8.234 – 8.239 знайти границі різних функцій, використовуючи правило Лопіталя.

8.234. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x\cdot\cos x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{tg} x}-e^x}{\operatorname{tg} x - x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-1-x^3}{\sin^6 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{a\sqrt{x}}-1}{\sqrt{\sin bx}}$.

8.235. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^2}{2}-x-1}{\cos x+\dfrac{x^2}{2}-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)^4-4x+2x^2-\dfrac{4}{3}x^3+x^4}{6\sin x-6x+x^3}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg} x}{\ln(1+\frac{1}{x})}$.

8.236. а) $\lim\limits_{x\to a}\left[(a^2-x^2)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2a}\right]$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[(\pi-2\operatorname{arctg} x)\ln x\right]$.

8.237. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1-x)+\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}}{\operatorname{ctg}\pi x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi x}{2}\ln(1-x)}$.

8.238. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\dfrac{1}{\ln x}\right]$.

8.239. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^{x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$.

8.240. Довести, що задані границі не можуть бути знайдені за правилом Лопіталя. Знайти ці границі безпосередньо.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$.

Формула Тейлора

8.241. Розкласти многочлен $P(x)=x^4-5x^3+x^2-3x+4$ за степенями двочлена $x-4$.

8.242. Розкласти многочлен $P(x)=x^3+3x^2-2x+4$ за степенями двочлена $x+1$.

8.243. Нехай $P(x)$ – многочлен четвертого степеня. Обчислити $P(-1)$, $P'(0)$, $P''(1)$, якщо відомо, що $P(2)=-1$, $P'(2)=0$, $P''(2)=2$, $P'''(2)=-12$, $P^{IV}(2)=26$.

8.244. Розкласти задану функцію $f(x)$ за формулою Маклорена до члена вказаного порядку включно.

а) $f(x) = e^{-x}$, до члена з x^n;

б) $f(x) = e^{2x-x^2}$, до члена з x^5;

в) $f(x) = \sqrt{1-x+2x^2}$, до члена з x^3;

г) $f(x) = xe^x$, до члена з x^n.

8.245. Розкласти задану функцію $f(x)$ за формулою Тейлора з центром розкладу у точці $x = a$ (за степенями $(x-a)$) до члена вказаного порядку включно.

а) $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = -1$, до члена з $(x+1)^n$;

б) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 4$, до члена з $(x-4)^2$;

в) $f(x) = x^3 \ln x$, $a = 1$, до члена з $(x-1)^4$;

г) $f(x) = \sin\frac{\pi x}{2}$, $a = 1$, до члена з $(x-1)^4$.

8.246. Написати формулу Тейлора для заданої функції $f(x)$ з центром у точці $x = a$ до члена вказаного порядку включно. Побудувати графік даної функції і її многочлена Тейлора.

а) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $a = 0$, до члена з x;

б) $f(x) = \arcsin x$, $a = 0$, до члена з x^3;

в) $f(x) = \ln x$, $a = 1$, до члена з $(x-1)^2$.

8.247. За допомогою формули Тейлора обчислити наближені значення чисел з точністю до 10^{-3}.

а) $\sin 1$; б) $\sqrt{e}$; в) $\ln 1{,}05$; г) $\sqrt[5]{33}$.

8.248. Використовуючи розклади функцій за формулою Маклорена, обчислити задані границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2+x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3+x^4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2\operatorname{tg} x}{\ln(1+x^3)}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{2x^2}$.

Дослідження функцій та побудова графіків

У задачах 8.249 – 8.269 провести повне дослідження функцій та побудувати їх графіки.

8.249. $y = \frac{x}{1+x^2}$. **8.250.** $y = \frac{1}{1-x^2}$.

8.251. $y = \frac{x}{x^2-1}$. **8.252.** $y = \frac{x^2}{x^2-1}$.

8.253. $y = \frac{(x^2-5)^3}{125}$. **8.254.** $y = \frac{x^3}{2(x-1)^2}$.

8.255. $y = \frac{x^3}{x^2-3}$. **8.256.** $y = \frac{x}{e^x}$.

8.257. $y = e^{2x-x^2}$. **8.258.** $y = xe^{\frac{1}{x}}$.

8.259. $y = (2x-1)e^{\frac{2}{x}}$. **8.260.** $y = \frac{1}{x\ln x}$.

8.261. $y = x-\ln(x+1)$. **8.262.** $y = \ln(x^2+1)$.

8.263. $y = \sqrt[3]{x^2 - 2x}$.

8.264. $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$.

8.265. $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^4 + 1}}$.

8.266. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

8.267. $y^2 = x^3 + 1$.

8.268. $y^2 = x(x-1)^2$.

8.269. $y^2 = \dfrac{x^3 - 2}{3x}$.

У задачах 8.270 – 8.273 дослідити функції, задані параметрично, та побудувати їх графіки.

8.270. $x = t^2 - 2t,\ y = t^2 + 2t$.

8.271. $x = t + e^{-t},\ y = 2t + e^{-2t}$.

8.272. $x = t^3 - 3\pi,\ y = t^3 - 6\,\mathrm{arctg}\,t$.

8.273. $x = \dfrac{3t}{1+t^3},\ y = \dfrac{3t^2}{1+t^3}$.

У задачах 8.274 – 8.278 дослідити лінії, рівняння яких задані у полярних координатах, та побудувати їх.

8.274. а) $\rho = a\sin 3\varphi$ (трипелюсткова троянда);

б) $\rho = a\cos 3\varphi$ (трипелюсткова троянда).

8.275. а) $\rho = 3|\sin 2\varphi|$ (чотирипелюсткова троянда);

б) $\rho = 3|\cos 2\varphi|$ (чотирипелюсткова троянда).

8.276. $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ (лемніската Бернуллі).

8.277. $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ (кардіоїда).

8.278. $\rho = \sqrt{\dfrac{\pi}{\varphi}}$ (жезл).

У задачах 8.279 – 8.280 дослідити та побудувати лінії, попередньо привівши їх рівняння до полярних координат.

8.279. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

8.280. $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$.

Задачі на відшукання найбільших та найменших значень функції

У задачах 8.281 – 8.286 знайти найбільше M та найменше m значення функцій на вказаних відрізках.

8.281. $y = x^4 - 2x^2 + 5$; $[-2, 2]$.

8.282. $y = \sqrt{100 - x^2}$; $[-6, 8]$.

8.283. $y = \dfrac{x-1}{x+1}$; $[0, 4]$.

8.284. $y = \dfrac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2}$; $[0, 1]$.

8.285. $y = \sin 2x - x$; $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

8.286. $y = \mathrm{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}$; $[0, 1]$.

8.287. Число 8 розбити на два таких доданки, щоб сума їх кубів була найменшою.

8.288. Яке додатне число, складене з оберненим йому числом, дає найменшу суму?

8.289. Число 36 розкласти на два таких множники, щоб сума їх квадратів була найменшою.

8.290. Об'єм правильної трикутної призми дорівнює V. Яка повинна бути сторона основи, щоб повна поверхня призми була найменшою?

8.291. Периметр осьового перерізу циліндра дорівнює $6a$. Знайти найбільший об'єм такого циліндра.

8.292. Циліндр вписаний в конус з висотою h і радіусом основи r. Знайти найбільший об'єм вписаного циліндра.

8.293. Знайти найменший об'єм конуса, описаного навколо кулі радіуса r.

8.294. Знайти найбільший об'єм конуса при заданій довжині l його твірної.

8.295. Визначити найбільшу площу прямокутника, вписаного в круг радіуса r.

8.296. На параболі $y=x^2$ знайти точку N, яка найменш віддалена від прямої $y=2x-4$.

8.297. У півколо радіуса R вписано прямокутник з найбільшою площею. Визначити його основу x та висоту y.

8.298. Відрізок довжини a розділити на дві частини так, щоб сума площ квадратів, побудованих на цих частинах, була найменшою.

ГЛАВА 9. ***ТИПОВІ РОЗРАХУНКОВІ ЗАВДАННЯ***

§1. Індивідуальне завдання 1.

Векторна алгебра та аналітична геометрія

Задача 1. [*гл. 1, §2, приклади 9, 7, 5*].

Задані вектори $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$.
Визначити:

1) довжину вектора $\vec{a}$: $|\vec{a}|$;

2) скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$: $(\vec{a}, \vec{b})$;

3) косинус кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$;

4) векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$: $\vec{a} \times \vec{b}$;

5) площу паралелограма S_1 та площу трикутника S_2, побудованих на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$;

6) мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$;

7) об'єм паралелепіпеда V_1 та об'єм трикутної піраміди V_2, побудованих на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$;

8) чи колінеарні вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$;

9) чи компланарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Варіанти завдань

1. $\vec{a} = (2, 3, 1)$,	$\vec{b} = (-1, 0, -1)$,	$\vec{c} = (2, 2, 2)$.
2. $\vec{a} = (2, 3, 1)$,	$\vec{b} = (2, 3, 4)$,	$\vec{c} = (3, 1, -1)$.
3. $\vec{a} = (1, 5, 2)$,	$\vec{b} = (-1, 1, -1)$,	$\vec{c} = (1, 1, 1)$.
4. $\vec{a} = (1, -1, -3)$,	$\vec{b} = (2, 3, 1)$,	$\vec{c} = (2, 3, 4)$.
5. $\vec{a} = (3, 3, 1)$,	$\vec{b} = (1, -2, 1)$,	$\vec{c} = (1, 1, 1)$.
6. $\vec{a} = (3, 1, -1)$,	$\vec{b} = (-2, -1, 0)$,	$\vec{c} = (5, 2, -1)$.
7. $\vec{a} = (4, 3, 1)$,	$\vec{b} = (1, -2, 1)$,	$\vec{c} = (2, 2, 2)$.
8. $\vec{a} = (4, 3, 1)$,	$\vec{b} = (6, 7, 4)$,	$\vec{c} = (2, 0, -1)$.
9. $\vec{a} = (3, 2, 1)$,	$\vec{b} = (1, -3, -7)$,	$\vec{c} = (1, 2, 3)$.
10. $\vec{a} = (3, 7, 2)$,	$\vec{b} = (-2, 0, -1)$,	$\vec{c} = (2, 2, 1)$.

11. $\vec{a}=(1,-2,6)$, $\vec{b}=(1,0,1)$, $\vec{c}=(2,-6,7)$.

12. $\vec{a}=(6,3,4)$, $\vec{b}=(-1,-2,-1)$, $\vec{c}=(2,1,1)$.

13. $\vec{a}=(7,3,4)$, $\vec{b}=(-1,-2,-1)$, $\vec{c}=(4,2,4)$.

14. $\vec{a}=(2,3,2)$, $\vec{b}=(4,7,5)$, $\vec{c}=(1,-1,1)$.

15. $\vec{a}=(5,3,4)$, $\vec{b}=(-1,0,-1)$, $\vec{c}=(4,2,4)$.

16. $\vec{a}=(3,10,5)$, $\vec{b}=(-2,-2,-3)$, $\vec{c}=(2,4,3)$.

17. $\vec{a}=(-2,-4,-3)$, $\vec{b}=(4,3,1)$, $\vec{c}=(6,7,4)$.

18. $\vec{a}=(3,1,-1)$, $\vec{b}=(1,0,-1)$, $\vec{c}=(8,3,-2)$.

19. $\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(-2,3,0)$, $\vec{c}=(2,1,-6)$.

20. $\vec{a}=(3,-2,3)$, $\vec{b}=(-1,2,1)$, $\vec{c}=(4,2,0)$.

21. $\vec{a}=(-2,3,2)$, $\vec{b}=(4,6,4)$, $\vec{c}=(2,-1,3)$.

22. $\vec{a}=(4,0,3)$, $\vec{b}=(1,-2,4)$, $\vec{c}=(1,-1,2)$.

23. $\vec{a}=(5,-3,2)$, $\vec{b}=(-4,1,5)$, $\vec{c}=(0,2,4)$.

24. $\vec{a}=(2,3,0)$, $\vec{b}=(2,-1,1)$, $\vec{c}=(-2,-2,1)$.

25. $\vec{a}=(1,1,-2)$, $\vec{b}=(-2,-5,3)$, $\vec{c}=(-1,0,2)$.

26. $\vec{a}=(-3,1,0)$, $\vec{b}=(1,6,5)$, $\vec{c}=(1,1,0)$.

27. $\vec{a}=(1,3,7)$, $\vec{b}=(-1,3,5)$, $\vec{c}=(-6,0,2)$.

28. $\vec{a}=(-4,-3,0)$, $\vec{b}=(3,2,-1)$, $\vec{c}=(-3,2,2)$.

29. $\vec{a}=(0,6,-3)$, $\vec{b}=(-1,6,0)$, $\vec{c}=(4,4,2)$.

30. $\vec{a}=(0,-5,4)$, $\vec{b}=(4,-1,-2)$, $\vec{c}=(5,0,4)$.

31. $\vec{a}=(-3,3,1)$, $\vec{b}=(1,0,-3)$, $\vec{c}=(2,1,6)$.

Задача 2. [*гл. 1, §2, приклад 8; §1, приклад 2*].

Перевірити, що вектори $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ утворюють базис. Написати розклад вектора $\vec{x}$ за цим базисом.

Варіанти завдань

1. $\vec{x}=(-2,4,7)$, $\vec{p}=(0,1,2)$, $\vec{q}=(1,0,1)$, $\vec{r}=(-1,2,4)$.
2. $\vec{x}=(6,12,-1)$, $\vec{p}=(1,3,0)$, $\vec{q}=(2,-1,1)$, $\vec{r}=(0,-1,2)$.
3. $\vec{x}=(1,-4,4)$, $\vec{p}=(2,1,-1)$, $\vec{q}=(0,3,2)$, $\vec{r}=(1,-1,1)$.

4. $\vec{x}=(-9,5,5)$, $\vec{p}=(4,1,1)$, $\vec{q}=(2,0,3)$, $\vec{r}=(-1,2,1)$.
5. $\vec{x}=(-5,-5,5)$, $\vec{p}=(-2,0,1)$, $\vec{q}=(1,3,-1)$, $\vec{r}=(0,4,1)$.
6. $\vec{x}=(13,2,7)$, $\vec{p}=(5,1,0)$, $\vec{q}=(2,-1,3)$, $\vec{r}=(1,0,-1)$.
7. $\vec{x}=(-19,1,7)$, $\vec{p}=(0,1,1)$, $\vec{q}=(-2,0,1)$, $\vec{r}=(3,1,0)$.
8. $\vec{x}=(3,-3,4)$, $\vec{p}=(1,0,2)$, $\vec{q}=(0,1,1)$, $\vec{r}=(2,-1,4)$.
9. $\vec{x}=(3,3,-1)$, $\vec{p}=(3,1,0)$, $\vec{q}=(-1,2,1)$, $\vec{r}=(-1,0,2)$.
10. $\vec{x}=(-1,7,-4)$, $\vec{p}=(-1,2,1)$, $\vec{q}=(2,0,3)$, $\vec{r}=(1,1,-1)$.
11. $\vec{x}=(6,5,-14)$, $\vec{p}=(1,1,4)$, $\vec{q}=(0,-3,2)$, $\vec{r}=(2,1,-1)$.
12. $\vec{x}=(6,-1,7)$, $\vec{p}=(1,-2,0)$, $\vec{q}=(-1,1,3)$, $\vec{r}=(1,0,4)$.
13. $\vec{x}=(5,15,0)$, $\vec{p}=(1,0,5)$, $\vec{q}=(-1,3,2)$, $\vec{r}=(0,-1,1)$.
14. $\vec{x}=(2,-1,11)$, $\vec{p}=(1,1,0)$, $\vec{q}=(0,1,-2)$, $\vec{r}=(1,0,3)$.
15. $\vec{x}=(11,5,-3)$, $\vec{p}=(1,0,2)$, $\vec{q}=(-1,0,1)$, $\vec{r}=(2,5,-3)$.
16. $\vec{x}=(8,0,5)$, $\vec{p}=(2,0,1)$, $\vec{q}=(1,1,0)$, $\vec{r}=(4,1,2)$.
17. $\vec{x}=(3,1,8)$, $\vec{p}=(0,1,3)$, $\vec{q}=(1,2,-1)$, $\vec{r}=(2,0,-1)$.
18. $\vec{x}=(8,1,12)$, $\vec{p}=(1,2,-1)$, $\vec{q}=(3,0,2)$, $\vec{r}=(-1,1,1)$.
19. $\vec{x}=(-8,-9,3)$, $\vec{p}=(1,4,1)$, $\vec{q}=(-3,2,0)$, $\vec{r}=(1,-1,2)$.
20. $\vec{x}=(-5,9,-13)$, $\vec{p}=(0,1,-2)$, $\vec{q}=(3,-1,1)$, $\vec{r}=(4,1,0)$.
21. $\vec{x}=(-15,5,6)$, $\vec{p}=(0,5,1)$, $\vec{q}=(3,2,-1)$, $\vec{r}=(-1,1,0)$.
22. $\vec{x}=(8,9,4)$, $\vec{p}=(1,0,1)$, $\vec{q}=(0,-2,1)$, $\vec{r}=(1,3,0)$.
23. $\vec{x}=(2,-4,-3)$, $\vec{p}=(2,1,0)$, $\vec{q}=(1,-1,0)$, $\vec{r}=(-3,2,5)$.
24. $\vec{x}=(3,1,3)$, $\vec{p}=(2,1,0)$, $\vec{q}=(1,0,1)$, $\vec{r}=(4,2,1)$.
25. $\vec{x}=(-1,7,0)$, $\vec{p}=(0,3,1)$, $\vec{q}=(1,-1,2)$, $\vec{r}=(2,-1,0)$.
26. $\vec{x}=(11,-1,4)$, $\vec{p}=(1,-1,2)$, $\vec{q}=(3,2,0)$, $\vec{r}=(-1,1,1)$.
27. $\vec{x}=(-13,2,18)$, $\vec{p}=(1,1,4)$, $\vec{q}=(-3,0,2)$, $\vec{r}=(1,2,-1)$.
28. $\vec{x}=(0,-8,9)$, $\vec{p}=(0,-2,1)$, $\vec{q}=(3,1,-1)$, $\vec{r}=(4,0,1)$.
29. $\vec{x}=(8,-7,-13)$, $\vec{p}=(0,1,5)$, $\vec{q}=(3,-1,2)$, $\vec{r}=(-1,0,1)$.
30. $\vec{x}=(2,7,5)$, $\vec{p}=(1,0,1)$, $\vec{q}=(1,-2,0)$, $\vec{r}=(0,3,1)$.

31. $\vec{x}=(15,-20,-1)$, $\vec{p}=(0,2,1)$, $\vec{q}=(0,1,-1)$, $\vec{r}=(5,-3,2)$.

Задача 3. [*гл. 1, §2, приклад 9*].

Встановити, чи колінеарні вектори $\vec{c}_1$ та $\vec{c}_2$, побудовані за векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Варіанти завдань

1. $\vec{a}=(1,-2,3)$, $\vec{b}=(3,0,-1)$, $\vec{c}_1=(2\vec{a}+4\vec{b})$, $\vec{c}_2=(3\vec{b}-\vec{a})$.
2. $\vec{a}=(1,0,1)$, $\vec{b}=(-2,3,5)$, $\vec{c}_1=(\vec{a}+2\vec{b})$, $\vec{c}_2=(3\vec{a}-\vec{b})$.
3. $\vec{a}=(-2,4,1)$, $\vec{b}=(1,-2,7)$, $\vec{c}_1=(5\vec{a}+3\vec{b})$, $\vec{c}_2=(2\vec{a}-\vec{b})$.
4. $\vec{a}=(1,2,-3)$, $\vec{b}=(2,-1,1)$, $\vec{c}_1=(4\vec{a}+3\vec{b})$, $\vec{c}_2=(8\vec{a}-\vec{b})$.
5. $\vec{a}=(3,5,4)$, $\vec{b}=(5,9,7)$, $\vec{c}_1=(-2\vec{a}+\vec{b})$, $\vec{c}_2=(3\vec{a}-2\vec{b})$.
6. $\vec{a}=(1,4,-2)$, $\vec{b}=(1,1,-1)$, $\vec{c}_1=(\vec{a}+\vec{b})$, $\vec{c}_2=(4\vec{a}+2\vec{b})$.
7. $\vec{a}=(1,-2,5)$, $\vec{b}=(3,-1,0)$, $\vec{c}_1=(4\vec{a}-2\vec{b})$, $\vec{c}_2=(\vec{b}-2\vec{a})$.
8. $\vec{a}=(3,4,-1)$, $\vec{b}=(2,-1,1)$, $\vec{c}_1=(6\vec{a}-3\vec{b})$, $\vec{c}_2=(\vec{b}-2\vec{a})$.
9. $\vec{a}=(-2,-3,2)$, $\vec{b}=(1,0,5)$, $\vec{c}_1=(3\vec{a}+9\vec{b})$, $\vec{c}_2=(-\vec{a}-3\vec{b})$.
10. $\vec{a}=(-1,4,2)$, $\vec{b}=(3,-2,6)$, $\vec{c}_1=(2\vec{a}-\vec{b})$, $\vec{c}_2=(3\vec{b}-6\vec{a})$.
11. $\vec{a}=(5,0,1)$, $\vec{b}=(7,2,3)$, $\vec{c}_1=(2\vec{a}-\vec{b})$, $\vec{c}_2=(3\vec{b}-6\vec{a})$.
12. $\vec{a}=(0,3,-2)$, $\vec{b}=(1,-2,1)$, $\vec{c}_1=(5\vec{a}-2\vec{b})$, $\vec{c}_2=(3\vec{a}+5\vec{b})$.
13. $\vec{a}=(-2,7,-1)$, $\vec{b}=(-3,5,2)$, $\vec{c}_1=(2\vec{a}+3\vec{b})$, $\vec{c}_2=(3\vec{a}+2\vec{b})$.
14. $\vec{a}=(3,7,0)$, $\vec{b}=(1,-3,4)$, $\vec{c}_1=(4\vec{a}-2\vec{b})$, $\vec{c}_2=(\vec{b}-2\vec{a})$.
15. $\vec{a}=(-1,2,-1)$, $\vec{b}=(2,-7,1)$, $\vec{c}_1=(6\vec{a}-2\vec{b})$, $\vec{c}_2=(\vec{b}-3\vec{a})$.
16. $\vec{a}=(7,9,-2)$, $\vec{b}=(5,4,3)$, $\vec{c}_1=(4\vec{a}-\vec{b})$, $\vec{c}_2=(4\vec{b}-\vec{a})$.
17. $\vec{a}=(5,0,-2)$, $\vec{b}=(6,4,3)$, $\vec{c}_1=(5\vec{a}-3\vec{b})$, $\vec{c}_2=(6\vec{b}-10\vec{a})$.
18. $\vec{a}=(8,3,-1)$, $\vec{b}=(4,1,3)$, $\vec{c}_1=(2\vec{a}-\vec{b})$, $\vec{c}_2=(2\vec{b}-4\vec{a})$.
19. $\vec{a}=(3,-1,6)$, $\vec{b}=(5,7,10)$, $\vec{c}_1=(4\vec{a}-2\vec{b})$, $\vec{c}_2=(\vec{b}-2\vec{a})$.
20. $\vec{a}=(1,-2,4)$, $\vec{b}=(7,3,5)$, $\vec{c}_1=(6\vec{a}-3\vec{b})$, $\vec{c}_2=(\vec{b}-2\vec{a})$.
21. $\vec{a}=(3,7,0)$, $\vec{b}=(4,6,-1)$, $\vec{c}_1=(3\vec{a}+2\vec{b})$, $\vec{c}_2=(5\vec{a}+7\vec{b})$.
22. $\vec{a}=(2,-1,4)$, $\vec{b}=(3,-7,6)$, $\vec{c}_1=(2\vec{a}-3\vec{b})$, $\vec{c}_2=(3\vec{a}-2\vec{b})$.

23. $\vec{a}=(5,-1,-2)$, $\vec{b}=(6,0,7)$, $\vec{c}_1=(3\vec{a}-2\vec{b})$, $\vec{c}_2=(4\vec{b}-6\vec{a})$.
24. $\vec{a}=(-9,5,3)$, $\vec{b}=(7,1,-2)$, $\vec{c}_1=(2\vec{a}-\vec{b})$, $\vec{c}_2=(3\vec{a}+5\vec{b})$.
25. $\vec{a}=(4,2,9)$, $\vec{b}=(0,-1,3)$, $\vec{c}_1=(4\vec{b}-3\vec{a})$, $\vec{c}_2=(4\vec{a}-3\vec{b})$.
26. $\vec{a}=(2,-1,6)$, $\vec{b}=(-1,3,8)$, $\vec{c}_1=(5\vec{a}-2\vec{b})$, $\vec{c}_2=(2\vec{a}-5\vec{b})$.
27. $\vec{a}=(5,0,8)$, $\vec{b}=(-3,1,7)$, $\vec{c}_1=(3\vec{a}-4\vec{b})$, $\vec{c}_2=(12\vec{b}-9\vec{a})$.
28. $\vec{a}=(-1,3,4)$, $\vec{b}=(2,-1,0)$, $\vec{c}_1=(6\vec{a}-2\vec{b})$, $\vec{c}_2=(\vec{b}-3\vec{a})$.
29. $\vec{a}=(4,2,-7)$, $\vec{b}=(5,0,-3)$, $\vec{c}_1=(\vec{a}-3\vec{b})$, $\vec{c}_2=(6\vec{b}-2\vec{a})$.
30. $\vec{a}=(-9,5,3)$, $\vec{b}=(7,1,-2)$, $\vec{c}_1=(2\vec{a}-\vec{b})$, $\vec{c}_2=(3\vec{a}+5\vec{b})$.
31. $\vec{a}=(-1,2,8)$, $\vec{b}=(3,7,-1)$, $\vec{c}_1=(4\vec{a}-3\vec{b})$, $\vec{c}_2=(9\vec{b}-12\vec{a})$.

Задача 4. [*гл. 1, §2, приклад 4*].

Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

Варіанти завдань

1. $\vec{a}=\vec{p}+2\vec{q}$, $\vec{b}=3\vec{p}-\vec{q}$; $|\vec{p}|=1$, $|\vec{q}|=2$, $(\vec{p},\hat{\ }\vec{q})=\dfrac{\pi}{6}$.
2. $\vec{a}=3\vec{p}+\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-2\vec{q}$; $|\vec{p}|=4$, $|\vec{q}|=1$, $(\vec{p},\hat{\ }\vec{q})=\dfrac{\pi}{4}$.
3. $\vec{a}=\vec{p}-3\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}+2\vec{q}$; $|\vec{p}|=\dfrac{1}{5}$, $|\vec{q}|=1$, $(\vec{p},\hat{\ }\vec{q})=\dfrac{\pi}{2}$.
4. $\vec{a}=3\vec{p}-2\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}+5\vec{q}$; $|\vec{p}|=4$, $|\vec{q}|=\dfrac{1}{2}$, $(\vec{p},\hat{\ }\vec{q})=\dfrac{5\pi}{6}$.
5. $\vec{a}=\vec{p}-2\vec{q}$, $\vec{b}=2\vec{p}+\vec{q}$; $|\vec{p}|=2$, $|\vec{q}|=3$, $(\vec{p},\hat{\ }\vec{q})=\dfrac{3\pi}{4}$.
6. $\vec{a}=\vec{p}+3\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-2\vec{q}$; $|\vec{p}|=2$, $|\vec{q}|=3$, $(\vec{p},\hat{\ }\vec{q})=\dfrac{\pi}{3}$.
7. $\vec{a}=2\vec{p}-\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}+3\vec{q}$; $|\vec{p}|=3$, $|\vec{q}|=2$, $(\vec{p},\hat{\ }\vec{q})=\dfrac{\pi}{2}$.
8. $\vec{a}=4\vec{p}+\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-\vec{q}$; $|\vec{p}|=7$, $|\vec{q}|=2$, $(\vec{p},\hat{\ }\vec{q})=\dfrac{\pi}{4}$.
9. $\vec{a}=\vec{p}-4\vec{q}$, $\vec{b}=3\vec{p}+\vec{q}$; $|\vec{p}|=1$, $|\vec{q}|=2$, $(\vec{p},\hat{\ }\vec{q})=\dfrac{\pi}{6}$.
10. $\vec{a}=\vec{p}+4\vec{q}$, $\vec{b}=2\vec{p}-\vec{q}$; $|\vec{p}|=7$, $|\vec{q}|=2$, $(\vec{p},\hat{\ }\vec{q})=\dfrac{\pi}{3}$.

11. $\vec a = 3\vec p + 2\vec q$, $\vec b = \vec p - \vec q$; $|\vec p| = 10$, $|\vec q| = 1$, $(\vec p \,\hat{,}\, \vec q) = \frac{\pi}{2}$.

12. $\vec a = 4\vec p - \vec q$, $\vec b = \vec p + 2\vec q$; $|\vec p| = 5$, $|\vec q| = 4$, $(\vec p \,\hat{,}\, \vec q) = \frac{\pi}{4}$.

13. $\vec a = 2\vec p + 3\vec q$, $\vec b = \vec p - 2\vec q$; $|\vec p| = 6$, $|\vec q| = 7$, $(\vec p \,\hat{,}\, \vec q) = \frac{\pi}{3}$.

14. $\vec a = 3\vec p - \vec q$, $\vec b = \vec p + 2\vec q$; $|\vec p| = 3$, $|\vec q| = 4$, $(\vec p \,\hat{,}\, \vec q) = \frac{\pi}{3}$.

15. $\vec a = 2\vec p + 3\vec q$, $\vec b = \vec p - 2\vec q$; $|\vec p| = 2$, $|\vec q| = 3$, $(\vec p \,\hat{,}\, \vec q) = \frac{\pi}{4}$.

16. $\vec a = 2\vec p - 3\vec q$, $\vec b = 3\vec p + \vec q$; $|\vec p| = 4$, $|\vec q| = 1$, $(\vec p \,\hat{,}\, \vec q) = \frac{\pi}{6}$.

17. $\vec a = 5\vec p + \vec q$, $\vec b = \vec p - 3\vec q$; $|\vec p| = 1$, $|\vec q| = 2$, $(\vec p \,\hat{,}\, \vec q) = \frac{\pi}{3}$.

18. $\vec a = 7\vec p - 2\vec q$, $\vec b = \vec p + 3\vec q$; $|\vec p| = \frac{1}{2}$, $|\vec q| = 2$, $(\vec p \,\hat{,}\, \vec q) = \frac{\pi}{2}$.

19. $\vec a = 6\vec p - \vec q$, $\vec b = \vec p + \vec q$; $|\vec p| = 3$, $|\vec q| = 4$, $(\vec p \,\hat{,}\, \vec q) = \frac{\pi}{4}$.

20. $\vec a = 10\vec p + \vec q$, $\vec b = 3\vec p - 2\vec q$; $|\vec p| = 4$, $|\vec q| = 1$, $(\vec p \,\hat{,}\, \vec q) = \frac{\pi}{6}$.

21. $\vec a = 6\vec p - \vec q$, $\vec b = \vec p + 2\vec q$; $|\vec p| = 8$, $|\vec q| = \frac{1}{2}$, $(\vec p \,\hat{,}\, \vec q) = \frac{\pi}{3}$.

22. $\vec a = 3\vec p + 4\vec q$, $\vec b = \vec q - \vec p$; $|\vec p| = \frac{5}{2}$, $|\vec q| = 2$, $(\vec p \,\hat{,}\, \vec q) = \frac{\pi}{2}$.

23. $\vec a = 7\vec p + \vec q$, $\vec b = \vec p - 3\vec q$; $|\vec p| = 3$, $|\vec q| = 1$, $(\vec p \,\hat{,}\, \vec q) = \frac{3\pi}{4}$.

24. $\vec a = \vec p + 3\vec q$, $\vec b = 3\vec p - \vec q$; $|\vec p| = 3$, $|\vec q| = 5$, $(\vec p \,\hat{,}\, \vec q) = \frac{2\pi}{3}$.

25. $\vec a = 3\vec p + \vec q$, $\vec b = \vec p - 3\vec q$; $|\vec p| = 7$, $|\vec q| = 2$, $(\vec p \,\hat{,}\, \vec q) = \frac{\pi}{4}$.

26. $\vec a = 5\vec p - \vec q$, $\vec b = \vec p + \vec q$; $|\vec p| = 5$, $|\vec q| = 3$, $(\vec p \,\hat{,}\, \vec q) = \frac{5\pi}{6}$.

27. $\vec a = 3\vec p - 4\vec q$, $\vec b = \vec p + 3\vec q$; $|\vec p| = 2$, $|\vec q| = 3$, $(\vec p \,\hat{,}\, \vec q) = \frac{\pi}{4}$.

28. $\vec a = 6\vec p - \vec q$, $\vec b = 5\vec q + \vec p$; $|\vec p| = \frac{1}{2}$, $|\vec q| = 4$, $(\vec p \,\hat{,}\, \vec q) = \frac{5\pi}{6}$.

29. $\vec a = 2\vec p + 3\vec q$, $\vec b = \vec p - 2\vec q$; $|\vec p| = 2$, $|\vec q| = 1$, $(\vec p \,\hat{,}\, \vec q) = \frac{\pi}{3}$.

30. $\vec a = 2\vec p - 3\vec q$, $\vec b = 5\vec p + \vec q$; $|\vec p| = 2$, $|\vec q| = 3$, $(\vec p \,\hat{,}\, \vec q) = \frac{\pi}{2}$.

31. $\vec a = 3\vec p + 2\vec q$, $\vec b = 2\vec p - \vec q$; $|\vec p| = 4$, $|\vec q| = 3$, $(\vec p \,\hat{,}\, \vec q) = \frac{3\pi}{4}$.

Задача 5. [*гл. 2, §1, приклад 4*].

Задано прямі l_1 та l_2 і точка M.

Знайти:

1) кутовий коефіцієнт прямої l_1 і відрізок, який відтинає ця пряма на осі ординат;

2) рівняння прямих l_1 та l_2 у відрізках;

3) точку N перетину прямих l_1 і l_2;

4) рівняння прямої l_3, що проходить через точку M паралельно прямій l_2;

5) рівняння прямої l_4, що проходить через точку M перпендикулярно до прямої l_2;

6) відстань від точки M до прямої l_2: $\rho(M, l_2)$.

Усі результати ілюструвати графічно.

Варіанти завдань

1. $l_1: 5x + 3y + 8 = 0$, $l_2: x - 4y + 20 = 0$; $M(7, -2)$.
2. $l_1: 3x + 2y + 2 = 0$, $l_2: 4x - 3y + 31 = 0$; $M(6, 0)$.
3. $l_1: x - 5y + 9 = 0$, $l_2: 3x + 2y + 10 = 0$; $M(7, 3)$.
4. $l_1: 5x + 2y + 13 = 0$, $l_2: 2x - 5y + 11 = 0$; $M(6, 4)$.
5. $l_1: 4x + y + 10 = 0$, $l_2: 3x + 7y - 5 = 0$; $M(5, -4)$.
6. $l_1: 5x + 2y + 17 = 0$, $l_2: 2x - 3y + 3 = 0$; $M(5, 2)$.
7. $l_1: 9x - 5y + 17 = 0$, $l_2: 4x + y + 14 = 0$; $M(8, 4)$.
8. $l_1: 3x - 2y - 16 = 0$, $l_2: x + 7y + 10 = 0$; $M(-10, 3)$.
9. $l_1: 2x + 3y - 15 = 0$, $l_2: 3x - 7y - 11 = 0$; $M(-5, -4)$.
10. $l_1: x - 7y + 8 = 0$, $l_2: 2x + 5y - 22 = 0$; $M(-4, -7)$.
11. $l_1: 3x - 8y + 6 = 0$, $l_2: x + 2y - 12 = 0$; $M(-8, -3)$.
12. $l_1: 2x - 3y + 17 = 0$, $l_2: 4x - y + 9 = 0$; $M(6, -2)$.
13. $l_1: 3x - y + 10 = 0$, $l_2: 5x + 2y + 2 = 0$; $M(3, 10)$.

14. $l_1: \ 11x+6y+9=0, \quad l_2: \ 3x-y+16=0; \quad M(5,-4).$

15. $l_1: \ 2x+3y-5=0, \quad l_2: \ 3x+y-4=0; \quad M(2,3).$

16. $l_1: \ 3x-2y+7=0, \quad l_2: \ 5x+y+3=0; \quad M(1,4).$

17. $l_1: \ 2x-3y+5=0, \quad l_2: \ 2x+5y-12=0; \quad M(3,-4).$

18. $l_1: \ 4x-3y+5=0, \quad l_2: \ x+4y-13=0; \quad M(-2,-3).$

19. $l_1: \ 3x+y-7=0, \quad l_2: \ 2x-3y-1=0; \quad M(-5,-8).$

20. $l_1: \ 2x+5y-14=0, \quad l_2: \ x-3y+4=0; \quad M(-4,-4).$

21. $l_1: \ 5x-2y+12=0, \quad l_2: \ 4x+3y+5=0; \quad M(-7,-8).$

22. $l_1: \ 4x+y-13=0, \quad l_2: \ x-5y-8=0; \quad M(-4,7).$

23. $l_1: \ 3x-2y-13=0, \quad l_2: \ 2x+7y+8=0; \quad M(-1,9).$

24. $l_1: \ 2x-3y+3=0, \quad l_2: \ 3x+y-12=0; \quad M(-5,-6).$

25. $l_1: \ 4x+y+5=0, \quad l_2: \ 5x-2y+16=0; \quad M(4,-5).$

26. $l_1: \ 5x+y-7=0, \quad l_2: \ 3x-2y-12=0; \quad M(-6,8).$

27. $l_1: \ 2x-3y-5=0, \quad l_2: \ 4x+y-17=0; \quad M(-5,-2).$

28. $l_1: \ 8x+3y-4=0, \quad l_2: \ 2x+5y-18=0; \quad M(8,3).$

29. $l_1: \ 2x-3y+13=0, \quad l_2: \ 2x+7y-8=0; \quad M(7,4).$

30. $l_1: \ 5x+y+7=0, \quad l_2: \ 7x-2y+20=0; \quad M(5,-6).$

31. $l_1: \ x+2y-3=0, \quad l_2: \ 3x-4y+11=0; \quad M(2,9).$

Задача 6. [*гл. 2, §1, приклади 9, 12, 13*].
Задано рівняння площини P_1, прямої L_1 і точка M.
Знайти:

1) рівняння площини P_2, що проходить через точку M паралельно площині P_1;

2) рівняння площини P_3, що проходить через точку M перпендикулярно до прямої L_1;

3) рівняння прямої L_2, що проходить через точку M перпендикулярно до площини P_1;

4) рівняння прямої L_3, що проходить через точку M паралельно прямій L_1;

5) точку N перетину прямої L_1 і площини P_1;

6) відстань від точки M до площини P_1: $\rho(M,P_1)$;

7) відстань від точки M до прямої L_1: $\rho(M,L_1)$.

8) проекцію точки M на площину P_1;

9) проекцію точки M на пряму L_1.

Варіанти завдань

1. $P_1: \ 5x-3z+2=0, \quad L_1: \ \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{1}, \quad M(0,2,3).$

2. $P_1: \ x-3y+2z+4=0, \quad L_1: \ \dfrac{x}{0}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{-3}, \quad M(1,0,-3).$

3. $P_1: \ 2x-3y+7z=0, \quad L_1: \ \dfrac{x}{3}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{4}, \quad M(-4,5,0).$

4. $P_1: \ 3x+y-2z=0, \quad L_1: \ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+4}{1}, \quad M(2,-1,0).$

5. $P_1: \ 4x-2y+z=0, \quad L_1: \ \dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{-3}, \quad M(3,0,-2).$

6. $P_1: \ 5x+3y-6=0, \quad L_1: \ \dfrac{x}{-3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{5}, \quad M(-2,1,1).$

7. $P_1: \ x+3y-z=0, \quad L_1: \ \dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{2}, \quad M(0,0,4).$

8. $P_1: \ 2x-5z+3=0, \quad L_1: \ \dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{3}, \quad M(1,-1,0).$

9. $P_1: \ 3x-4y-4z=0, \quad L_1: \ \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-1}{1}, \quad M(0,5,5).$

10. $P_1: \ x+2y+2z-5=0, \quad L_1: \ \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{2}, \quad M(0,0,4).$

11. $P_1: \ 4x-3y+1=0, \quad L_1: \ \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{1}, \quad M(1,-2,1).$

12. $P_1: \ x+2y-3z+4=0, \quad L_1: \ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+4}{-1}, \quad M(-1,0,3).$

13. $P_1: \ 2x-y+2z-3=0, \quad L_1: \ \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-1}{2}, \quad M(0,2,-1).$

14. $P_1: \ 4x-y+z+1=0, \quad L_1: \ \dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{1}, \quad M(1,-1,2).$

15. $P_1: \ 5x+2z-3=0$, $\quad L_1: \ \frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{3}$, $\quad M(2,3,0)$.

16. $P_1: \ 6x-5y+2=0$, $\quad L_1: \ \frac{x}{3}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-1}{2}$, $\quad M(2,5,1)$.

17. $P_1: \ 3y+5z-4=0$, $\quad L_1: \ \frac{x+5}{-2}=\frac{y+4}{3}=\frac{z}{1}$, $\quad M(0,-2,3)$.

18. $P_1: \ 3x-4y+5=0$, $\quad L_1: \ \frac{x+2}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z-1}{-2}$, $\quad M(1,0,-4)$.

19. $P_1: \ x-3y+2z-1=0$, $\quad L_1: \ \frac{x-2}{0}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z}{4}$, $\quad M(1,2,3)$.

20. $P_1: \ 2x+y-3z=0$, $\quad L_1: \ \frac{x}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{-3}$, $\quad M(0,3,4)$.

21. $P_1: \ 3x+2z-5=0$, $\quad L_1: \ \frac{x-3}{2}=\frac{y}{5}=\frac{z+2}{4}$, $\quad M(-1,2,-1)$.

22. $P_1: \ 3x+2y-z=0$, $\quad L_1: \ \frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$, $\quad M(1,0,2)$.

23. $P_1: \ x-3y+2z-1=0$, $\quad L_1: \ \frac{x-2}{0}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z}{4}$, $\quad M(1,3,2)$.

24. $P_1: \ 4x-y-2z+3=0$, $\quad L_1: \ \frac{x+1}{-3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z}{1}$, $\quad M(1,0,-1)$.

25. $P_1: \ 5x+3z-7=0$, $\quad L_1: \ \frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{3}$, $\quad M(2,-3,0)$.

26. $P_1: \ 3x+2y-6=0$, $\quad L_1: \ \frac{x}{4}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-1}{5}$, $\quad M(3,0,-2)$.

27. $P_1: \ 5x-y+2z=0$, $\quad L_1: \ \frac{x-5}{0}=\frac{y}{3}=\frac{z}{1}$, $\quad M(1,2,-1)$.

28. $P_1: \ 2x-3y+z+1=0$, $\quad L_1: \ \frac{x+1}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{-1}$, $\quad M(0,1,-2)$.

29. $P_1: \ x+2y-3z=0$, $\quad L_1: \ \frac{x-4}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{3}$, $\quad M(2,0,1)$.

30. $P_1: \ 3x-4z+11=0$, $\quad L_1: \ \frac{x}{5}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{1}$, $\quad M(2,9,0)$.

31. $P_1: \ 4x+3y-9=0$, $\quad L_1: \ \frac{x-3}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{-5}$, $\quad M(1,-2,1)$.

Задача 7. [*гл. 2, §1, приклад 11*].

Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$. Знайти:

1) рівняння прямої L, яка проходить через точки A_1, A_2, та довжину ребра A_1A_2;

2) рівняння площини P, яка проходить через точки A_1, A_2, A_3, та площу S грані $A_1A_2A_3$;

3) рівняння висоти H, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$, та її довжину h;

4) об'єм V піраміди $A_1A_2A_3A_4$;

5) кут α між ребрами A_1A_2 та A_1A_4;

6) кут β між ребром A_1A_4 та гранню $A_1A_2A_3$.

Зробити рисунок.

Варіанти завдань

1. $A_1(1,3,6)$, $\quad A_2(2,2,1)$, $\quad A_3(-1,0,1)$, $\quad A_4(-4,6,-3)$.
2. $A_1(-4,2,6)$, $\quad A_2(2,-3,0)$, $\quad A_3(-10,5,8)$, $\quad A_4(-5,2,-4)$.
3. $A_1(7,2,4)$, $\quad A_2(7,-1,-2)$, $\quad A_3(3,3,1)$, $\quad A_4(-4,2,1)$.
4. $A_1(2,1,4)$, $\quad A_2(-1,5,-2)$, $\quad A_3(-7,-3,2)$, $\quad A_4(-6,-3,6)$.
5. $A_1(-1,-5,2)$, $\quad A_2(-6,0,-3)$, $\quad A_3(3,6,-3)$, $\quad A_4(-10,6,7)$.
6. $A_1(0,-1,-1)$, $\quad A_2(-2,3,5)$, $\quad A_3(1,-5,-9)$, $\quad A_4(-1,-6,3)$.
7. $A_1(5,2,0)$, $\quad A_2(2,5,0)$, $\quad A_3(1,2,4)$, $\quad A_4(-1,1,1)$.
8. $A_1(2,-1,-2)$, $\quad A_2(1,2,1)$, $\quad A_3(5,0,-6)$, $\quad A_4(-10,9,-7)$.
9. $A_1(-2,0,-4)$, $\quad A_2(-1,7,1)$, $\quad A_3(4,-8,-4)$, $\quad A_4(1,-4,6)$.
10. $A_1(14,4,5)$, $\quad A_2(-5,-3,2)$, $\quad A_3(-2,-6,3)$, $\quad A_4(-2,2,-1)$.
11. $A_1(1,2,0)$, $\quad A_2(3,0,-3)$, $\quad A_3(5,2,6)$, $\quad A_4(8,4,-9)$.
12. $A_1(2,-1,2)$, $\quad A_2(1,2,-1)$, $\quad A_3(3,2,1)$, $\quad A_4(-4,2,5)$.
13. $A_1(1,1,2)$, $\quad A_2(-1,1,3)$, $\quad A_3(2,-2,4)$, $\quad A_4(-1,0,-2)$.
14. $A_1(2,3,1)$, $\quad A_2(4,1,-2)$, $\quad A_3(6,3,7)$, $\quad A_4(7,5,-3)$.

15. $A_1(1,1,-1)$, $A_2(2,3,1)$, $A_3(3,2,1)$, $A_4(5,9,-8)$.

16. $A_1(1,5,-7)$, $A_2(-3,6,3)$, $A_3(-2,7,3)$, $A_4(-4,8,-12)$.

17. $A_1(-3,4,-7)$, $A_2(1,5,-4)$, $A_3(-5,-2,0)$, $A_4(2,5,4)$.

18. $A_1(-1,2,-3)$, $A_2(4,-1,0)$, $A_3(2,1,-2)$, $A_4(3,4,5)$.

19. $A_1(4,-1,3)$, $A_2(-2,1,0)$, $A_3(0,-5,1)$, $A_4(3,2,-6)$.

20. $A_1(1,-1,1)$, $A_2(-2,0,3)$, $A_3(2,1,-1)$, $A_4(2,-2,-4)$.

21. $A_1(1,2,0)$, $A_2(1,-1,2)$, $A_3(0,1,-1)$, $A_4(-3,0,1)$.

22. $A_1(1,0,2)$, $A_2(1,2,-1)$, $A_3(2,-2,1)$, $A_4(2,1,0)$.

23. $A_1(1,2,-3)$, $A_2(1,0,1)$, $A_3(-2,-1,6)$, $A_4(0,-5,-4)$.

24. $A_1(3,10,-1)$, $A_2(-2,3,-5)$, $A_3(-6,0,-3)$, $A_4(1,-1,2)$.

25. $A_1(-1,2,4)$, $A_2(-1,-2,-4)$, $A_3(3,0,-1)$, $A_4(7,-3,1)$.

26. $A_1(0,-3,1)$, $A_2(-4,1,2)$, $A_3(2,-1,5)$, $A_4(3,1,-4)$.

27. $A_1(1,3,0)$, $A_2(4,-1,2)$, $A_3(3,0,1)$, $A_4(-4,3,5)$.

28. $A_1(-2,-1,-1)$, $A_2(0,3,2)$, $A_3(3,1,-4)$, $A_4(-4,7,3)$.

29. $A_1(-3,-5,6)$, $A_2(2,1,-4)$, $A_3(0,-3,-1)$, $A_4(-5,2,-8)$.

30. $A_1(2,-4,-3)$, $A_2(5,-6,0)$, $A_3(-1,3,-3)$, $A_4(-10,-8,7)$.

31. $A_1(1,-1,2)$, $A_2(2,1,2)$, $A_3(1,1,4)$, $A_4(6,-3,8)$.

Задача 8. [*гл. 2, §1, приклад 8*].
Написати канонічні рівняння прямої L.

Варіанти завдань

1. $L: \begin{cases} 2x+y+z-2=0; \\ 2x-y-3z+6=0. \end{cases}$

2. $L: \begin{cases} x-3y+2z+2=0; \\ x+3y+z+14=0. \end{cases}$

3. $L: \begin{cases} x-2y+z-4=0; \\ 2x+2y-z-8=0. \end{cases}$

4. $L: \begin{cases} x+y+z-2=0; \\ x-y-2z+2=0. \end{cases}$

5. $L: \begin{cases} 2x+3y+z+6=0; \\ x-3y-2z+3=0. \end{cases}$

6. $L: \begin{cases} 3x+y-z-6=0; \\ 3x-y+2z=0. \end{cases}$

7. $L: \begin{cases} x+5y+2z+11=0; \\ x-y-z-1=0. \end{cases}$

8. $L: \begin{cases} 3x+4y-2z+1=0; \\ 2x-4y+3z+4=0. \end{cases}$

9. $L: \begin{cases} 5x+y-3z+4=0; \\ x-y+2z+2=0. \end{cases}$

10. $L: \begin{cases} x-y-z-2=0; \\ x-2y+z+4=0. \end{cases}$

11. $L: \begin{cases} 4x+y-3z+2=0; \\ 2x-y+z-8=0. \end{cases}$

12. $L: \begin{cases} 3x+3y-2z-1=0; \\ 2x-3y+z+6=0. \end{cases}$

13. $L: \begin{cases} 6x-7y-4z-2=0; \\ x+7y-z-5=0. \end{cases}$

14. $L: \begin{cases} 8x-y-3z-1=0; \\ x+y+z+1=0. \end{cases}$

15. $L: \begin{cases} 6x-5y-4z+8=0; \\ 6x+5y+3z+4=0. \end{cases}$

16. $L: \begin{cases} x+5y-z-5=0; \\ 2x-5y+2z+5=0. \end{cases}$

17. $L: \begin{cases} 2x-3y+z+6=0; \\ x-3y-2z+3=0. \end{cases}$

18. $L: \begin{cases} 5x+y+2z+4=0; \\ x-y-3z+2=0. \end{cases}$

19. $L: \begin{cases} 4x+y+z+2=0; \\ 2x-y-3z-8=0. \end{cases}$

20. $L: \begin{cases} 2x+y-3z-2=0; \\ 2x-y+z-6=0. \end{cases}$

21. $L: \begin{cases} x+y-2z-2=0; \\ x-y+z+2=0. \end{cases}$

22. $L: \begin{cases} x+5y-z+11=0; \\ x-y+2z-1=0. \end{cases}$

23. $L: \begin{cases} x-y+z-2=0; \\ x-2y-z+4=0. \end{cases}$

24. $L: \begin{cases} 6x-7y-z-2=0; \\ x+7y-4z-5=0. \end{cases}$

25. $L: \begin{cases} x+5y+2z-5=0; \\ 2x-5y-z+5=0. \end{cases}$

26. $L: \begin{cases} x-3y+z+2=0; \\ x+3y+2z+14=0. \end{cases}$

27. $L: \begin{cases} 2x+3y-2z+6=0; \\ x-3y+z+3=0. \end{cases}$

28. $L: \begin{cases} 3x+4y+3z+1=0; \\ 2x-4y-2z+4=0. \end{cases}$

29. $L: \begin{cases} 3x+3y+z-1=0; \\ 2x-3y-2z+6=0. \end{cases}$

30. $L: \begin{cases} 6x-5y+3z+8=0; \\ 6x+5y-4z+4=0. \end{cases}$

31. $L: \begin{cases} 2x-3y-2z+6=0; \\ x-3y+z+3=0. \end{cases}$

Задача 9. [*гл. 2, §1, приклад 12*].
Знайти точку M', симетричну точці M відносно прямої L.

Варіанти завдань

1. $M(0,-3,-2)$, $L: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1{,}5}{-1}=\dfrac{z}{1}$.
2. $M(2,-1,1)$, $L: \dfrac{x-4{,}5}{1}=\dfrac{y+3}{0{,}5}=\dfrac{z-2}{1}$.
3. $M(1,1,1)$, $L: \dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y+1{,}5}{2}=\dfrac{z-1}{1}$.
4. $M(1,2,3)$, $L: \dfrac{x-0{,}5}{0}=\dfrac{y+1{,}5}{-1}=\dfrac{z-1{,}5}{1}$.
5. $M(1,0,-1)$, $L: \dfrac{x-3{,}5}{2}=\dfrac{y-1{,}5}{-1}=\dfrac{z}{0}$.
6. $M(2,1,0)$, $L: \dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y+1{,}5}{-1}=\dfrac{z+0{,}5}{1}$.
7. $M(-2,-3,0)$, $L: \dfrac{x+0{,}5}{1}=\dfrac{y+1{,}5}{-1}=\dfrac{z-0{,}5}{1}$.
8. $M(-1,0,-1)$, $L: \dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-0{,}5}{0}=\dfrac{z-2}{1}$.
9. $M(0,2,1)$, $L: \dfrac{x-1{,}5}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{1}$.
10. $M(3,-3,-1)$, $L: \dfrac{x-6}{5}=\dfrac{y-3{,}5}{4}=\dfrac{z+0{,}5}{0}$.
11. $M(3,3,3)$, $L: \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1{,}5}{0}=\dfrac{z-3}{1}$.
12. $M(-1,2,0)$, $L: \dfrac{x+0{,}5}{1}=\dfrac{y+0{,}7}{-0{,}2}=\dfrac{z-2}{2}$.
13. $M(2,-2,-3)$, $L: \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+0{,}5}{0}=\dfrac{z+1{,}5}{0}$.
14. $M(-1,0,1)$, $L: \dfrac{x+0{,}5}{0}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z-4}{2}$.
15. $M(0,-3,-2)$, $L: \dfrac{x-0{,}5}{0}=\dfrac{y+1{,}5}{-1}=\dfrac{z-1{,}5}{1}$.

16. $M(1,2,3)$, $L: \dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+1}{4}$.
17. $M(0,1,3)$, $L: \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-3}{-4}=\dfrac{z+1}{5}$.
18. $M(-1,0,4)$, $L: \dfrac{x+1}{-3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{-2}$.
19. $M(0,3,5)$, $L: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-4}{1}$.
20. $M(1,2,0)$, $L: \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-3}{0}$.
21. $M(0,2,1)$, $L: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+2}{3}$.
22. $M(3,-1,0)$, $L: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{0}=\dfrac{z+1}{-1}$.
23. $M(0,-1,3)$, $L: \dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+3}{2}$.
24. $M(1,0,-1)$, $L: \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-8}{0}$.
25. $M(0,2,3)$, $L: \dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z+1}{3}$.
26. $M(-1,2,0)$, $L: \dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+5}{3}$.
27. $M(2,-2,-3)$, $L: \dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z+3}{-2}$.
28. $M(0,1,4)$, $L: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-5}=\dfrac{z-3}{-2}$.
29. $M(-1,0,1)$, $L: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{0}=\dfrac{z+2}{-2}$.
30. $M(-1,0,-1)$, $L: \dfrac{x+3}{0}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z+5}{11}$.
31. $M(2,1,0)$, $L: \dfrac{x-7}{3}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+1}{-2}$.

Задача 10. [*гл. 2, §1, приклад 13*].

Знайти точку M', симетричну точці M відносно площини P.

Варіанти завдань

1. $M\,(1,0,1)$, $P:\ 4x+6y+4z-25=0$.
2. $M\,(-1,0,-1)$, $P:\ 2x+6y-2z+11=0$.
3. $M\,(0,2,1)$, $P:\ 2x+4y-3=0$.
4. $M\,(2,1,0)$, $P:\ y+z+2=0$.
5. $M\,(-1,2,0)$, $P:\ 4x-5y-z-7=0$.
6. $M\,(2,-1,1)$, $P:\ x-y+2z-2=0$.
7. $M\,(1,1,1)$, $P:\ x+4y+3z+5=0$.
8. $M\,(1,2,3)$, $P:\ 2x+y+z+1=0$.
9. $M\,(0,-3,-2)$, $P:\ 2x+10y+10z-1=0$.
10. $M\,(1,0,-1)$, $P:\ 2y+4z-1=0$.
11. $M\,(3,-3,1)$, $P:\ 2x-4y-4z-13=0$.
12. $M\,(-2,-3,0)$, $P:\ x+5y+4=0$.
13. $M\,(2,-2,-3)$, $P:\ y+z+2=0$.
14. $M\,(-1,0,1)$, $P:\ 2x+4y-3=0$.
15. $M\,(3,3,3)$, $P:\ 8x+6y+8z-25=0$.
16. $M\,(-2,0,3)$, $P:\ 2x-2y+10z+1=0$.
17. $M\,(0,-3,-2)$, $P:\ x+2y+3z+14=0$.
18. $M\,(2,-1,1)$, $P:\ x+2y-5z+20=0$.
19. $M\,(1,1,1)$, $P:\ x-3y+7z-24=0$.
20. $M\,(1,2,3)$, $P:\ 3x+y-5z-12=0$.
21. $M\,(1,0,-1)$, $P:\ x+3y-5z+9=0$.
22. $M\,(2,1,0)$, $P:\ x-2y+5z+17=0$.
23. $M\,(-2,-3,0)$, $P:\ 2x-3y-5z-7=0$.
24. $M\,(-1,0,-1)$, $P:\ 3x-2y-4z-8=0$.

25. $M\,(0,2,1)$, $P:\ x+2y-z-2=0$.
26. $M\,(3,-3,-1)$, $P:\ 5x-y+4z+3=0$.
27. $M\,(3,3,3)$, $P:\ x+3y+5z-42=0$.
28. $M\,(-1,2,0)$, $P:\ x-2y+z+4=0$.
29. $M\,(2,-2,3)$, $P:\ 2x-3y+z+6=0$.
30. $M\,(-1,0,1)$, $P:\ x+y+z+10=0$.
31. $M\,(0,-3,-2)$, $P:\ x-3y-2z+3=0$.

Задача 11. [*гл. 2, §2, приклади 1,2,4*].

Встановити тип кривої другого порядку L та знайти всі її характеристики: для кола – координати центра та радіус; для еліпса – координати центра, півосі, ексцентриситет, рівняння директрис; для гіперболи – координати центра, дійсну та уявну півосі, координати фокусів, ексцентриситет, рівняння директрис, рівняння асимптот; для параболи – параметр параболи, координати вершини, координати фокуса, рівняння директриси.

Побудувати графіки кривих.

Варіанти завдань

1. $L:\ 9x^2+4y^2+6x-4y-2=0$.
2. $L:\ 9x^2-16y^2-6x+8y-144=0$.
3. $L:\ 12x^2-12x-32y-29=0$.
4. $L:\ 16x^2+25y^2+32x-100y-284=0$.
5. $L:\ 9x^2-16y^2+90x+32y-367=0$.
6. $L:\ 9y^2-7y-16=8x$.
7. $L:\ 4x^2+3y^2-8x+12y-32=0$.
8. $L:\ 16x^2-9y^2-64x-18y+199=0$.
9. $L:\ x=2y^2-12y+14$.
10. $L:\ 4x^2+9y^2-4x+6y-2=0$.
11. $L:\ -16x^2+9y^2+8x-6y-144=0$.
12. $L:\ 12y^2-12x-32y-29=0$.
13. $L:\ 25x^2+16y^2-100x+32y-284=0$.

14. $L:\ -16x^2+9y^2+32x+90y-367=0$.

15. $L:\ x=-\frac{1}{4}y^2+y$.

16. $L:\ 3x^2+4y^2+12x-8y-32=0$.

17. $L:\ -9x^2+16y^2-18x-64y+199=0$.

18. $L:\ y=2x^2-12x+14$.

19. $L:\ x^2-2x+4y^2-3=0$.

20. $L:\ 4x^2-y^2+2y-3=0$.

21. $L:\ y=4x^2-8x+6$.

22. $L:\ x^2+2y^2+4x-4y=0$.

23. $L:\ 2x^2-3y^2-6x+9y-2=0$.

24. $L:\ 4x^2+4x+2y-1=0$.

25. $L:\ x^2+y^2-3x-5y+1{,}25=0$.

26. $L:\ 2x^2+6x+3y+6=0$.

27. $L:\ -4x^2+y^2+8x-6y-8=0$.

28. $L:\ 9x^2+4y^2+6x-4y-2=0$.

29. $L:\ 2x+y^2-3y+4=0$.

30. $L:\ x^2-4y^2+8y-5=0$.

31. $L:\ 4x^2-8x+y^2=0$.

Задача 12. [*гл. 2, §2, приклади 5 – 9*].
Встановити тип заданої поверхні P та побудувати її.

Варіанти завдань

1. $P:\ x^2+y^2+z^2=2az$. 2. $P:\ z=4-x^2$.

3. $P:\ x^2+y^2=2az$. 4. $P:\ y^2+z^2=4z$.

5. $P:\ x^2+z^2=2az$. 6. $P:\ x^2+y^2-z^2=0$.

7. $P:\ x^2-y^2=2az$. 8. $P:\ y^2+z^2-\frac{x^2}{4}=0$.

9. $P:\ x^2-y^2=z^2$. 10. $P:\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{1}-1=0$.

11. $P:\ x^2=6z$. 12. $P:\ z=-(x^2+y^2)$.

13. $P:\ z=2+x^2+y^2$. 14. $P:\ -x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=0$.

15. $P:\ x^2+z^2=25$. 16. $P:\ z=1-x^2-y^2$.

17. $P:\ \frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{16}=1$. 18. $P:\ y^2=6x-4$.

19. $P:\ \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. 20. $P:\ 2x^2-3z^2=12y$.

21. $P:\ 2x^2-3z^2=-12y$. 22. $P:\ 2x^2-y^2+6z^2=12$.

23. $P:\ x^2+4y^2-4=0$. 24. $P:\ 2x^2+y^2-3z^2+6z=0$.

25. $P:\ y^2+z^2=-z$. 26. $P:\ 2x^2+y^2+2z+1=0$.

27. $P:\ y^2=ax$. 28. $P:\ 2x^2-y^2+2z+1=0$.

29. $P:\ xz=4$. 30. $P:\ 2x^2+z^2+2x+z=0$.

31. $P:\ x^2+y^2=ax$.

§2. Індивідуальне завдання 2.

Визначники. Матриці. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Задача 1. [*гл. 3, §1, приклади 4 – 6*].
Обчислити визначник четвертого порядку.

Варіанти завдань

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$. 2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$. 3. $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 & 3 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & -8 \end{vmatrix}$. 5. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 8 & 3 \\ -4 & 3 & -9 & 1 \\ 6 & 1 & 10 & 3 \end{vmatrix}$. 6. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. 8. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & -5 & 2 \\ 3 & 1 & -7 & 3 \end{vmatrix}$. 9. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -4 & 7 & -8 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$.

10. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & 1 & 5 \\ 9 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$. 11. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 9 \\ 3 & 8 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$. 12. $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -3 & 12 \\ 3 & -7 & -5 & 15 \end{vmatrix}$.

13. $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$. 14. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$. 15. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

16. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. 17. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$. 18. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 6 & 0 \end{vmatrix}$.

19. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$. 20. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$. 21. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

22. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -7 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}$. 23. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$. 24. $\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

25. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$. 26. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. 27. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

28. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 7 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & -4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$. 29. $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & -2 & 1 & -4 \\ 6 & -3 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. 30. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 5 & 4 \\ -3 & -10 & 2 & 11 \end{vmatrix}$.

31. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

Задача 2. [*гл. 3, §2, приклади 1,3*].
Знайти матрицю C, виконавши вказані операції над матрицями A та B.

Варіанти завдань

1. $C = 2(A+B)B$; $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. $C = A(2A+B)$; $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 7 \\ 2 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

3. $C = 2A(A+B)$; $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

4. $C = 3B(B-2A)$; $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. $C = 2B(B-A)$; $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

6. $C = 2A(A-B)$; $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

7. $C = B(A-3B)$; $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

8. $C = B(A+2B)$; $A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

9. $C = 2A(2B-A)$; $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

10. $C = (A+2B)B$; $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

11. $C = 2(A-B)A$; $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

12. $C = B(A-3B)$; $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -7 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

13. $C = A(2A+B)$; $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

14. $C = (A-B)2A$; $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

15. $C = (A-2B)B$; $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

16. $C = 2(A-B)A$; $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

17. $C = 2A(A+B)$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$.

18. $C = 3(A-B)B$; $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

19. $C = (2A-B)A$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

20. $C = B(A+2B)$; $A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

21. $C = 2(B-A)A$; $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 5 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

22. $C = 3(A+B)B$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

23. $C = 2A(A+B)$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

24. $C = B(2B-3A)$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

25. $C = 2A(B+A)$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

26. $C = B(2A-B)$; $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

27. $C = (3A-2B)B$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

28. $C = (A-2B)A$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

29. $C = (A+2B)A$; $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

30. $C = (A-2B)B$; $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

31. $C = (A+3B)2B$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Задача 3. [*гл. 3, §2, приклад 4*].
Знайти значення многочлена $f(x)$ при $x = A$, де A – задана матриця.

Варіанти завдань

1. $f(x) = x^2 + 4x + 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

3. $f(x) = 3x^2 - x - 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. $f(x) = 2x^2 - x + 3$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

5. $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

6. $f(x) = -2x^2 - 2x + 5$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7. $f(x) = x^2 + 6x - 7$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

8. $f(x) = 3x^2 + 2x - 3$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

9. $f(x) = 5x^2 + x - 6$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

10. $f(x) = -4x^2 - x + 5$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

11. $f(x) = 4x^2 - 5x + 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

12. $f(x) = x^2 - 5x + 3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

13. $f(x)=2x^2+3x-1$, $A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&3&1\\-1&2&0\end{pmatrix}$.

14. $f(x)=x^2+2x-2$, $A=\begin{pmatrix}3&2&1\\0&-1&2\\0&1&0\end{pmatrix}$.

15. $f(x)=3x^2-x+5$, $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&2&3\\0&1&4\end{pmatrix}$.

16. $f(x)=4x^2-x+3$, $A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&0&0\\0&3&-1\end{pmatrix}$.

17. $f(x)=x^2-4x+3$, $A=\begin{pmatrix}2&1&-2\\0&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$.

18. $f(x)=-4x^2+2x-5$, $A=\begin{pmatrix}3&1&-2\\1&0&0\\0&3&-1\end{pmatrix}$.

19. $f(x)=x^2+5x-6$, $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&2&-2\\0&0&3\end{pmatrix}$.

20. $f(x)=5x^2-4x+2$, $A=\begin{pmatrix}2&-3&1\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$.

21. $f(x)=x^2+3x-4$, $A=\begin{pmatrix}5&1&-1\\1&2&0\\3&0&0\end{pmatrix}$.

22. $f(x)=2x^2+3x-5$, $A=\begin{pmatrix}1&-2&-3\\4&0&-1\\3&2&0\end{pmatrix}$.

23. $f(x)=x^2+6x-4$, $A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&0&4\\0&2&-3\end{pmatrix}$.

24. $f(x)=5x^2-2x+7$, $A=\begin{pmatrix}-1&2&1\\3&0&4\\0&-1&0\end{pmatrix}$.

25. $f(x)=6x^2-7x+2$, $A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&2&3\\-1&0&-1\end{pmatrix}$.

26. $f(x)=-3x^2+x+2$, $A=\begin{pmatrix}2&-1&3\\-4&0&2\\0&-1&0\end{pmatrix}$.

27. $f(x)=2x^2-3x+1$, $A=\begin{pmatrix}1&-2&-3\\0&2&4\\0&-4&0\end{pmatrix}$.

28. $f(x)=-4x^2+x+1$, $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&3&-1\\0&0&2\end{pmatrix}$.

29. $f(x)=2x^2-4x+5$, $A=\begin{pmatrix}0&0&-2\\1&-1&2\\-1&2&3\end{pmatrix}$.

30. $f(x)=5x^2-4x+1$, $A=\begin{pmatrix}2&-4&1\\0&-1&2\\-1&2&3\end{pmatrix}$.

31. $f(x)=3x^2-5x+4$, $A=\begin{pmatrix}3&0&2\\5&3&1\\0&-1&-2\end{pmatrix}$.

Задача 4. [*гл. 3, §3, приклад 2*].

Розв'язати задану систему рівнянь трьома методами: 1) матричним методом; 2) за формулами Крамера; 3) методом Гаусса. Виконати перевірку правильності розв'язку.

Варіанти завдань

1. $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=-2;\\5x_1+4x_2-x_3=0;\\3x_1+x_2+x_3=2.\end{cases}$

2. $\begin{cases}4x_1+4x_2+3x_3=5;\\2x_1-x_2+x_3=7;\\3x_1+2x_2-x_3=-4.\end{cases}$

3. $\begin{cases}3x_1-x_2-x_3=1;\\x_1+3x_2+2x_3=6;\\2x_1-4x_2-x_3=-3.\end{cases}$

4. $\begin{cases}7x_1-4x_2+x_3=7;\\x_1+x_2-x_3=1;\\2x_1-2x_2-x_3=2.\end{cases}$

5. $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=-1;\\2x_1+3x_2+4x_3=-1;\\3x_1-x_2-x_3=4.\end{cases}$

6. $\begin{cases}4x_1-x_2-3x_3=5;\\x_1+2x_2-2x_3=0;\\3x_1-3x_2+4x_3=10.\end{cases}$

7. $\begin{cases}2x_1+3x_2-2x_3=-1;\\3x_1-x_2+2x_3=3;\\4x_1+2x_2-x_3=0.\end{cases}$

8. $\begin{cases}x_1-x_2+2x_3=3;\\2x_1+x_2-3x_3=0;\\x_1-2x_2-x_3=5.\end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 8\,; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4\,; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4\,. \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6\,; \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0\,; \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 1\,. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 7\,; \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0\,; \\ 2x_2 - x_3 = 0\,. \end{cases}$ 12. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1\,; \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 2\,; \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = -8\,. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -3\,; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2\,; \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 0\,. \end{cases}$ 14. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -4\,; \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 3\,; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6\,. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 = -1\,; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1\,; \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0\,. \end{cases}$ 16. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0\,; \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 2\,; \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 8\,. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -2\,; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1\,; \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 6\,. \end{cases}$ 18. $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6\,; \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 1\,; \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 1\,. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3\,; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2\,; \\ 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -7\,. \end{cases}$ 20. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 = 0\,; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5\,; \\ 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 4\,. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1\,; \\ 4x_1 - 5x_2 - x_3 = 0\,; \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0\,. \end{cases}$ 22. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 = -1\,; \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 1\,; \\ 5x_1 - x_2 - 4x_3 = 0\,. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1\,; \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -2\,; \\ 4x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0\,. \end{cases}$ 24. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -2\,; \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1\,; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6\,. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2\,; \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 2\,; \\ 5x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -2\,. \end{cases}$ 26. $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - x_3 = 2\,; \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 1\,; \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = 12\,. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2\,; \\ 5x_1 + 4x_2 + x_3 = 0\,; \\ 6x_1 - x_2 - 2x_3 = -2\,. \end{cases}$ 28. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 10\,; \\ 6x_1 - 3x_2 - x_3 = 3\,; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0\,. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6\,; \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16\,; \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16\,. \end{cases}$ 30. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8\,; \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8\,; \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\,. \end{cases}$

31. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6\,; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 13\,; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14\,. \end{cases}$

Задача 5. [*гл. 3, §3, приклад 3*].

Дослідити сумісність системи і у випадку сумісності знайти загальний розв'язок та один частинний розв'язок системи. Виконати перевірку правильності частинного розв'язку.

Варіанти завдань

1. $\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0\,; \\ 3x_1 + x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 3\,; \\ 4x_1 - x_2 + 8x_3 - 4x_4 = -3\,; \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 3\,. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -1\,; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 = -4\,; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1\,; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1\,. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1\,; \\ x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -1\,; \\ 2x_1 + 3x_2 - 6x_3 - x_4 = -2\,; \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 + 3x_4 = -2\,. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -4\,; \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 4\,; \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -2\,; \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 = 2\,. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 1\,; \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1\,; \\ x_1 - 2x_2 + 5x_4 = 2\,; \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = -1\,. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3\,; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -3\,; \\ x_1 + 3x_2 - x_4 = 0\,; \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 6\,. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3-6x_4=4; \\ x_1-4x_2-3x_3=-8; \\ x_1-2x_2-3x_3-2x_4=-4; \\ 2x_1-5x_2-6x_3-3x_4=-10. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=7; \\ x_1-3x_2+x_3-3x_4=0; \\ 2x_2+x_3-2x_4=2; \\ 3x_1-x_3-x_4=9. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3-5x_4=2; \\ x_1+2x_2-5x_3-2x_4=-10; \\ 3x_1-5x_2+x_4=0; \\ x_1+x_2-3x_3-2x_4=-6. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x_1-x_2-2x_4=4; \\ x_1+x_2-3x_3-x_4=2; \\ 3x_1+x_2-5x_3-3x_4=6; \\ x_1-x_3-x_4=2. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3-5x_4=0; \\ 3x_1-4x_3-x_4=-4; \\ 2x_1-3x_2-3x_3=0; \\ x_1+2x_2-2x_3+x_4=-4. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3-x_4=1; \\ 2x_1-3x_2+2x_3+3x_4=-3; \\ 3x_1-x_2+3x_3+x_4=-1; \\ x_1-x_2+x_3+x_4=-1. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3-3x_4=-1; \\ 2x_1-4x_2-x_3=1; \\ 3x_1-5x_2-x_4=0; \\ 4x_1-6x_2-3x_3-2x_4=3. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 3x_1-x_2-x_3-3x_4=-3; \\ 2x_1-x_2-2x_4=-3; \\ x_1+x_2-3x_3-x_4=3; \\ 2x_1+x_2-4x_3-2x_4=3. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-2; \\ 2x_1+x_2+x_3-x_4=-1; \\ 3x_1+2x_2+x_4=3; \\ 3x_1+2x_2+2x_3-x_4=-3. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-2x_3-x_4=1; \\ x_1+2x_2-x_3-x_4=1; \\ 2x_1-x_2-2x_3+2x_4=-3; \\ x_1+x_2-x_3=0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4=6; \\ 2x_1-x_3-x_4=-2; \\ 3x_1+x_2-2x_4=0; \\ x_1-x_2+2x_3-4x_4=4. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=-1; \\ 2x_1-3x_2-2x_3+3x_4=8; \\ x_1-x_2-x_3+x_4=3; \\ 3x_1+x_2-3x_3-2x_4=-1. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3-x_4=2; \\ 3x_1+2x_2-x_3-2x_4=1; \\ x_1-x_2+x_3+x_4=0; \\ 2x_1+3x_2-x_3-3x_4=2. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+5x_4=1; \\ x_1+3x_2-13x_3-22x_4=-1; \\ 3x_1+5x_2+x_3-2x_4=5; \\ 2x_1+3x_2+4x_3-7x_4=4. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3-x_4=1; \\ 2x_1-x_2-3x_4=2; \\ 3x_1-x_3+x_4=-3; \\ 4x_1-2x_2+x_3-4x_4=3. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4; \\ x_2-x_3+x_4=-3; \\ x_1+3x_2-3x_4=1; \\ -7x_2+3x_3+x_4=-3. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-3x_4=2; \\ 4x_1+x_3-7x_4=3; \\ 2x_2-3x_3+x_4=1; \\ 2x_1+3x_2-4x_3-2x_4=3. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3-2x_4=3; \\ 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=5; \\ x_1+5x_2-9x_3+8x_4=1; \\ 5x_1+18x_2+4x_3+5x_4=12. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1-4x_2+2x_3=-1; \\ 2x_1-3x_2-x_3-5x_4=-7; \\ 3x_1-7x_2+x_3-5x_4=-8; \\ x_2-x_3-x_4=-1. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+x_4=1; \\ 8x_1+12x_2-9x_3+8x_4=3; \\ 4x_1+6x_2+3x_3-2x_4=3; \\ 2x_1+3x_2+9x_3-7x_4=3. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4=-2; \\ x_1+2x_2-2x_3-x_4=-5; \\ 2x_1-x_2-3x_3+2x_4=-1; \\ 3x_1-2x_2-2x_3+x_4=-3. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 4x_1+x_2-2x_3+x_4=3; \\ x_1-2x_2-x_3+2x_4=2; \\ 2x_1+5x_2-x_4=-1; \\ 3x_1+3x_2-x_3-3x_4=1. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 2x_1+5x_2+x_3+3x_4=2; \\ 4x_1+6x_2+3x_3+5x_4=4; \\ 4x_1+14x_2+x_3+7x_4=4; \\ 2x_1-3x_2+3x_3-x_4=7. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3+2x_4=-4; \\ 5x_1+4x_2+x_3+3x_4=-5; \\ 2x_1+x_2+x_3+4x_4=2; \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4=-3. \end{cases}$

31. $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+4x_4=5; \\ 4x_1-2x_2+5x_3+6x_4=7; \\ 6x_1-3x_2+7x_3+8x_4=9; \\ 8x_1-4x_2+9x_3+10x_4=11. \end{cases}$

Задача 6. [*гл. 3, §3, приклади 5, 4*].

Дослідити, чи має нетривіальні розв'язки однорідна система рівнянь. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв'язок. Записати також фундаментальну систему розв'язків. Виконати перевірку правильності фундаментальної системи розв'язків.

Варіанти завдань

1. $\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3-2x_4=0\,; \\ 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=0\,; \\ x_1+5x_2+9x_3+8x_4=0\,; \\ 2x_1+8x_2+14x_3+6x_4=0\,. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+2x_4-x_5=0; \\ 5x_1+11x_2-2x_3+8x_4+2x_5=0; \\ 4x_1+10x_2+2x_3+10x_4-3x_5=0; \\ 5x_1+13x_2+4x_3+16x_4-10x_5=0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3-x_4+2x_5=0; \\ x_1+x_2+2x_4+3x_5=0; \\ -2x_1+3x_2-x_3+3x_4+x_5=0; \\ 2x_1-x_2+4x_3-3x_4+4x_5=0; \\ -x_1+x_2-3x_3+2x_4+x_5=0, \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+3x_4=0; \\ 2x_1-x_2+x_3-2x_4=0; \\ 3x_1+x_2-2x_3+x_4=0; \\ -x_1+3x_2+x_3+2x_4=0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-3x_3+2x_4=0; \\ 3x_1+2x_2-x_3+3x_4=0; \\ 2x_1-x_2+5x_3-x_4=0; \\ x_1+3x_2-6x_3+4x_4=0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-3x_3+2x_4=0; \\ 3x_1+2x_2-x_3+3x_4=0; \\ 2x_1-x_2+5x_3-x_4=0; \\ x_1-x_2+2x_3+x_4=0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 4x_1-3x_2+3x_3=0; \\ -x_1+2x_2+3x_3+2x_4=0; \\ x_1-2x_2+x_3-x_4=0; \\ 3x_1-x_2+2x_3+x_4=0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3+x_4=0\,; \\ -x_1+3x_2-x_3+2x_4=0\,; \\ 2x_1+x_2-3x_3+3x_4=0\,; \\ x_1+4x_2-4x_3+5x_4=0\,. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1+x_2-3x_4-x_5=0; \\ x_1-x_2+2x_3-x_4=0; \\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=0; \\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1+5x_2+3x_3+2x_4=0; \\ x_1+x_2+2x_3+3x_4=0; \\ x_1+5x_2+x_3+2x_4=0; \\ x_1+5x_2+5x_3+2x_4=0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3x_1+4x_2-5x_3+7x_4=0; \\ 2x_1-3x_2+3x_3-2x_4=0; \\ 4x_1+11x_2-13x_3+16x_4=0; \\ 7x_1-2x_2+x_3+3x_4=0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3+7x_4=0\,; \\ 2x_1-x_2+3x_3-2x_4=0\,; \\ -3x_1-5x_2+4x_3+16x_4=0\,; \\ -x_1-6x_2+7x_3+14x_4=0\,. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4-x_5=0; \\ 2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=0; \\ x_1+7x_2-5x_3-5x_4+5x_5=0; \\ 3x_1-x_2-2x_3+x_4-x_5=0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 5x_1+x_2+4x_3+2x_4=0; \\ 3x_1+2x_2-x_3+3x_4=0; \\ 2x_1-x_2+5x_3-x_4=0; \\ -x_1+2x_2-x_3+2x_4=0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1-4x_2+3x_3+x_4+2x_5=0; \\ 3x_1-2x_2-x_3+5x_4-x_5=0; \\ 2x_1+2x_2-4x_3+4x_4-3x_5=0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1-3x_2+4x_3-3x_4=0; \\ 3x_1-x_2+11x_3-13x_4=0; \\ 4x_1+5x_2-7x_3-2x_4=0; \\ 13x_1-25x_2+x_3+11x_4=0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 5x_1+6x_2-2x_3+7x_4+4x_5=0; \\ 2x_1+3x_2-x_3+4x_4+2x_5=0; \\ 7x_1+9x_2-3x_3+5x_4+6x_5=0; \\ 5x_1+9x_2-3x_3+x_4+6x_5=0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+5x_4=0; \\ 3x_1-x_2+2x_3-7x_4=0; \\ 4x_1+x_2-3x_3+6x_4=0; \\ x_1+2x_2-5x_3+13x_4=0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+x_4=0; \\ x_1-x_2+2x_3-x_4=0; \\ x_1+2x_2+3x_3+x_4=0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 2x_1-4x_2-6x_3+x_4=0; \\ 4x_1-3x_2+2x_3-7x_4=0; \\ -x_1+2x_2+3x_3=0; \\ -x_1+2x_2+3x_3+x_4=0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3+x_4=0; \\ 3x_1+5x_2-5x_3+5x_4=0; \\ x_1+x_2+x_3+3x_4=0; \\ x_1+2x_2-3x_3+x_4=0. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x_1-3x_2+4x_3-6x_4=0; \\ x_1+2x_2-x_3+4x_4=0; \\ 3x_1+x_2+2x_3+2x_4=0; \\ 2x_1-x_2+3x_3-2x_4=0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4-x_5=0; \\ 2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=0; \\ x_1+7x_2-5x_3-5x_4+5x_5=0; \\ 3x_1-x_2-2x_3+x_4-x_5=0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+5x_4=0; \\ 3x_1+x_2+3x_3-2x_4=0; \\ 4x_1+x_2-3x_3+6x_4=0; \\ x_1-2x_2+4x_3-7x_4=0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+x_4=0\,; \\ 3x_1-2x_2+2x_3-3x_4=0\,; \\ 3x_1+x_2-x_3+2x_4=0\,; \\ 6x_1-x_2+x_3-x_4=0\,. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3-x_4=0; \\ 4x_1-2x_2-2x_3+3x_4=0; \\ 2x_1-x_2+5x_3-6x_4=0; \\ 2x_1-x_2-3x_3+4x_4=0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+2x_4+x_5=0; \\ 8x_1+x_2-5x_3+4x_4-3x_5=0; \\ -3x_1+x_2+2x_3-x_4+2x_5=0; \\ 5x_1+2x_2-3x_3+3x_4-x_5=0. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=0; \\ x_1+3x_2+5x_3-2x_4=0; \\ x_1+5x_2-9x_3+8x_4=0; \\ 5x_1+18x_2+4x_3+5x_4=0. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 0; \\ 5x_1 - 7x_2 + 7x_4 - 3x_5 = 0; \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0; \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0; \\ 2x_1 - 2x_2 + x_4 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 0; \\ 4x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0; \end{cases}$

31. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0; \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0; \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 0; \\ 7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$

Задача 7. [*гл. 3, §3, приклад 6*].

Дослідити систему на сумісність та знайти її загальний розв'язок методом Жордана-Гаусса (повного виключення). Виконати перевірку правильності розв'язку.

Варіанти завдань

1. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_4 = -7; \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1; \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 5; \\ -2x_1 + 5x_2 + x_3 - 7x_4 = 5. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = -2; \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 1; \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1; \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 4. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 7; \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 1; \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 14; \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -11. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7; \\ x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 5; \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 14; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0; \\ 7x_1 + 14x_2 + 20x_3 + 27x_4 = 0; \\ 5x_1 + 10x_2 + 16x_3 + 19x_4 = -2; \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 13x_4 = 5. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 10; \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -2; \\ 4x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 3x_4 = -7; \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -11; \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 14; \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 1; \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 7. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 4; \\ 4x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 7x_4 = 1; \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 1; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = -2. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6; \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4; \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5; \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4; \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_4 = 12; \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4; \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6; \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2; \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -2; \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 12; \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 0; \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 4; \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 16. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 = -6; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -5. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_4 = -7; \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1; \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 5; \\ -2x_1 + 5x_2 + x_3 - 7x_4 = 5. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 4; \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1; \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 1; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = -2. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2; \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1; \\ x_1 + x_4 = 2. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 7; \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 3; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1; \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 = -7. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 8; \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 7; \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 = 6; \\ 5x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 13. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2; \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5; \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7; \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1+3x_2-3x_3=2; \\ 2x_1-3x_2+4x_3=-1; \\ 3x_1+2x_2-x_3=4; \\ x_1-8x_2+9x_3=-6. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4; \\ -x_2-x_3+x_4=-3; \\ x_1+3x_2-4x_4=1; \\ -7x_2+3x_3+x_4=-3. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1+3x_2+x_3-x_4=2; \\ 2x_1-2x_2+x_4=-3; \\ 2x_1+3x_2+x_3-3x_4=-6; \\ 3x_1+4x_2-x_3+2x_4=0. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1-x_2-4x_3+9x_4=22; \\ x_1+2x_2-4x_4=-3; \\ 2x_1-3x_2+x_3+5x_4=-3; \\ 3x_1-2x_2-5x_3+x_4=3. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3-3x_4=4; \\ 3x_1+3x_2+2x_3+3x_4=6; \\ 3x_1-x_2-x_3+x_4=6; \\ 4x_1-x_2+2x_3-x_4=8. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+4x_4=3; \\ 2x_1-x_2+3x_3+4x_4=3; \\ 3x_1+x_2-x_3+2x_4=4; \\ 4x_1+3x_2+4x_3+2x_4=7. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3-7x_4=5; \\ x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4; \\ x_2-x_3+x_4=-3; \\ x_1+3x_2-x_4=1. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3+x_4=1; \\ x_1-x_2+x_3-2x_4=0; \\ 2x_1+x_2+3x_3-7x_4=1; \\ x_1+x_2+x_3+x_4=2. \end{cases}$

31. $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-3x_4=2; \\ 4x_1+x_3-7x_4=3; \\ 2x_2-3x_3+x_4=1; \\ 2x_1+3x_2-4x_3-2x_4=3. \end{cases}$

§3. Індивідуальне завдання 3.

Лінійна алгебра

Задача 1. [*гл. 4, §1, приклад 8*].

Знайти який-небудь базис та визначити вимірність лінійного простору розв'язків системи.

Варіанти завдань

1. $\begin{cases} 3x_1+x_2-8x_3+2x_4+x_5=0; \\ 2x_1-2x_2-3x_3-7x_4+2x_5=0; \\ x_1+11x_2-12x_3+34x_4-5x_5=0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 7x_1+2x_2-x_3-2x_4+2x_5=0; \\ x_1-3x_2+x_3-x_4-x_5=0; \\ 2x_1+5x_2+2x_3+x_4+x_5=0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1+x_2+10x_3+x_4-x_5=0; \\ 5x_1-x_2+8x_3-2x_4+2x_5=0; \\ 3x_1-3x_2-12x_3-4x_4+4x_5=0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 6x_1-9x_2+21x_3-3x_4-12x_5=0; \\ -4x_1+6x_2-14x_3+2x_4+8x_5=0; \\ 2x_1-3x_2+7x_3-x_4-4x_5=0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3-x_4+x_5=0; \\ x_1+10x_2-3x_3-2x_4-x_5=0; \\ 4x_1+19x_2-4x_3-5x_4-x_5=0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 5x_1-2x_2+3x_3-4x_4-x_5=0; \\ x_1+4x_2-3x_3+2x_4-5x_5=0; \\ 6x_1+2x_2-2x_4-6x_5=0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 12x_1-x_2+7x_3+11x_4-x_5=0; \\ 24x_1-2x_2+14x_3+22x_4-2x_5=0; \\ x_1+x_2+x_3-x_4+x_5=0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+4x_4+x_5=0; \\ 2x_1-x_2+3x_3+x_4-5x_5=0; \\ x_1+3x_2-x_3-6x_4-x_5=0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3-x_4-x_5=0; \\ x_1+5x_2-x_3+x_4+2x_5=0; \\ x_1+16x_2-6x_3+4x_4+7x_5=0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \frac{3}{2}x_1+\frac{5}{4}x_2+\frac{5}{7}x_3+x_4=0; \\ \frac{3}{5}x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{2}{7}x_3+\frac{2}{5}x_4=0; \\ \frac{1}{5}x_1+\frac{1}{6}x_2+\frac{2}{21}x_3+\frac{2}{15}x_4=0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0; \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0; \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 12x_4 - x_5 = 0; \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 10x_4 + x_5 = 0; \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 7x_1 - 14x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 7x_5 = 0; \\ 5x_1 - 10x_2 + x_3 + 5x_4 - 13x_5 = 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0; \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 + x_5 = 0; \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0; \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 0; \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0; \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 - x_5 = 0; \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 10x_4 + x_5 = 0; \\ x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 30x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 0; \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 - 7x_5 = 0; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0; \\ x_1 - 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0; \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0; \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 - 34x_4 - 5x_5 = 0; \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 - x_5 = 0; \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0; \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0; \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0; \\ 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 = 0; \\ 7x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0; \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 7x_5 = 0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0; \\ 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0; \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0; \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0; \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 0. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0; \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 0; \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0; \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 0; \\ x_1 + 2x_2 + 11x_3 - 6x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0; \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+4x_3+x_4+2x_5=0; \\ 3x_1+2x_2-2x_3+x_4=0; \\ 3x_1+2x_2+16x_3+x_4+6x_5=0. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+2x_4+x_5=0; \\ x_1-2x_2-3x_3+x_4-x_5=0; \\ 2x_1-x_2-2x_3+3x_4=0. \end{cases}$

31. $\begin{cases} x_1-x_2+x_3-2x_4+x_5=0; \\ x_1+x_2-2x_3-x_4+2x_5=0; \\ x_1-3x_2+4x_3-3x_4=0. \end{cases}$

Задача 2. [*гл. 4, §1, приклади 5, 6*].

Знайти координати вектора $\vec{x}$ у базисі $(\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}',\vec{e}_3{}')$, якщо цей вектор задано в базисі $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$.

Варіанти завдань

1. $\vec{x}=(6,-1,3)$;

$\begin{cases} \vec{e}_1{}'=\vec{e}_1+\vec{e}_2+2\vec{e}_3; \\ \vec{e}_2{}'=2\vec{e}_1-\vec{e}_2; \\ \vec{e}_3{}'=-\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3. \end{cases}$

2. $\vec{x}=(1,2,4)$;

$\begin{cases} \vec{e}_1{}'=\vec{e}_1+\vec{e}_2+3\vec{e}_3; \\ \vec{e}_2{}'=\frac{3}{2}\vec{e}_1-\vec{e}_2; \\ \vec{e}_3{}'=-\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3. \end{cases}$

3. $\vec{x}=(1,3,6)$;

$\begin{cases} \vec{e}_1{}'=\vec{e}_1+\vec{e}_2+4\vec{e}_3; \\ \vec{e}_2{}'=\frac{4}{3}\vec{e}_1-\vec{e}_2; \\ \vec{e}_3{}'=-\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3. \end{cases}$

4. $\vec{x}=(2,4,1)$;

$\begin{cases} \vec{e}_1{}'=\vec{e}_1+\vec{e}_2+\frac{3}{2}\vec{e}_3; \\ \vec{e}_2{}'=3\vec{e}_1-\vec{e}_2; \\ \vec{e}_3{}'=-\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3. \end{cases}$

5. $\vec{x}=(6,3,1)$;

$\begin{cases} \vec{e}_1{}'=\vec{e}_1+\vec{e}_2+\frac{4}{3}\vec{e}_3; \\ \vec{e}_2{}'=4\vec{e}_1-\vec{e}_2; \\ \vec{e}_3{}'=-\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3. \end{cases}$

6. $\vec{x}=(1,4,8)$;

$\begin{cases} \vec{e}_1{}'=\vec{e}_1+\vec{e}_2+5\vec{e}_3; \\ \vec{e}_2{}'=\frac{5}{4}\vec{e}_1-\vec{e}_2; \\ \vec{e}_3{}'=-\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3. \end{cases}$

7. $\vec{x}=(8,4,1)$;

$\begin{cases} \vec{e}_1{}'=\vec{e}_1+\vec{e}_2+\frac{5}{4}\vec{e}_3; \\ \vec{e}_2{}'=5\vec{e}_1-\vec{e}_2; \\ \vec{e}_3{}'=-\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3. \end{cases}$

8. $\vec{x}=(2,5,10)$;

$\begin{cases} \vec{e}_1{}'=\vec{e}_1+\vec{e}_2+6\vec{e}_3; \\ \vec{e}_2{}'=\frac{6}{5}\vec{e}_1-\vec{e}_2; \\ \vec{e}_3{}'=-\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3. \end{cases}$

9. $\vec{x}=(10,5,1)$;

$\begin{cases} \vec{e}_1{}'=\vec{e}_1+\vec{e}_2+\frac{6}{5}\vec{e}_3; \\ \vec{e}_2{}'=6\vec{e}_1-\vec{e}_2; \\ \vec{e}_3{}'=-\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3. \end{cases}$

10. $\vec{x}=(1,6,12)$;

$\begin{cases} \vec{e}_1{}'=\vec{e}_1+\vec{e}_2+7\vec{e}_3; \\ \vec{e}_2{}'=\frac{7}{6}\vec{e}_1-\vec{e}_2; \\ \vec{e}_3{}'=-\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3. \end{cases}$

11. $\vec{x}=(-12,6,1)$;

$\begin{cases} \vec{e}_1{}'=\vec{e}_1+\vec{e}_2+\frac{7}{6}\vec{e}_3; \\ \vec{e}_2{}'=7\vec{e}_1-\vec{e}_2; \\ \vec{e}_3{}'=-\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3. \end{cases}$

12. $\vec{x}=(-1,7,14)$;

$\begin{cases} \vec{e}_1{}'=\vec{e}_1+\vec{e}_2+8\vec{e}_3; \\ \vec{e}_2{}'=\frac{8}{7}\vec{e}_1-\vec{e}_2; \\ \vec{e}_3{}'=-\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3. \end{cases}$

13. $\vec{x}=(-3,2,4)$;

$\begin{cases} \vec{e}_1{}'=\vec{e}_1+\vec{e}_2-\vec{e}_3; \\ \vec{e}_2{}'=\frac{1}{2}\vec{e}_1-\vec{e}_2; \\ \vec{e}_3{}'=-\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3. \end{cases}$

14. $\vec{x}=(2,4,3)$;

$\begin{cases} \vec{e}_1{}'=\vec{e}_1+\vec{e}_2+\frac{1}{2}\vec{e}_3; \\ \vec{e}_2{}'=-\vec{e}_1-\vec{e}_2; \\ \vec{e}_3{}'=-\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3. \end{cases}$

15. $\vec{x}=(2,6,-3)$;

$\begin{cases} \vec{e}_1{}'=\vec{e}_1+\vec{e}_2-2\vec{e}_3; \\ \vec{e}_2{}'=\frac{2}{3}\vec{e}_1-\vec{e}_2; \\ \vec{e}_3{}'=-\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3. \end{cases}$

16. $\vec{x}=(12,3,-1)$;

$\begin{cases} \vec{e}_1{}'=\vec{e}_1+\vec{e}_2+\frac{2}{3}\vec{e}_3; \\ \vec{e}_2{}'=-2\vec{e}_1-\vec{e}_2; \\ \vec{e}_3{}'=-\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3. \end{cases}$

17. $\vec{x}=(1,-4,8)$;
$$\begin{cases}\vec{e}_1{}'=\vec{e}_1+\vec{e}_2-3\vec{e}_3;\\ \vec{e}_2{}'=\frac{3}{4}\vec{e}_1-\vec{e}_2;\\ \vec{e}_3{}'=-\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3.\end{cases}$$

18. $\vec{x}=(1,4,-8)$;
$$\begin{cases}\vec{e}_1{}'=\vec{e}_1+\vec{e}_2-3\vec{e}_3;\\ \vec{e}_2{}'=\frac{3}{4}\vec{e}_1-\vec{e}_2;\\ \vec{e}_3{}'=-\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3.\end{cases}$$

19. $\vec{x}=(7,-5,10)$;
$$\begin{cases}\vec{e}_1{}'=\vec{e}_1+\vec{e}_2-4\vec{e}_3;\\ \vec{e}_2{}'=\frac{4}{5}\vec{e}_1-\vec{e}_2;\\ \vec{e}_3{}'=-\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3.\end{cases}$$

20. $\vec{x}=(5,-5,-4)$;
$$\begin{cases}\vec{e}_1{}'=\vec{e}_1+\vec{e}_2+\frac{4}{5}\vec{e}_3;\\ \vec{e}_2{}'=-4\vec{e}_1-\vec{e}_2;\\ \vec{e}_3{}'=-\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3.\end{cases}$$

21. $\vec{x}=(1,-6,6)$;
$$\begin{cases}\vec{e}_1{}'=\vec{e}_1+\vec{e}_2-5\vec{e}_3;\\ \vec{e}_2{}'=\frac{5}{6}\vec{e}_1-\vec{e}_2;\\ \vec{e}_3{}'=-\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3.\end{cases}$$

22. $\vec{x}=(6,6,2)$;
$$\begin{cases}\vec{e}_1{}'=\vec{e}_1+\vec{e}_2+\frac{5}{6}\vec{e}_3;\\ \vec{e}_2{}'=-5\vec{e}_1-\vec{e}_2;\\ \vec{e}_3{}'=-\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3.\end{cases}$$

23. $\vec{x}=(1,7,-7)$;
$$\begin{cases}\vec{e}_1{}'=\vec{e}_1+\vec{e}_2-6\vec{e}_3;\\ \vec{e}_2{}'=\frac{6}{7}\vec{e}_1-\vec{e}_2;\\ \vec{e}_3{}'=-\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3.\end{cases}$$

24. $\vec{x}=(7,7,2)$;
$$\begin{cases}\vec{e}_1{}'=\vec{e}_1+\vec{e}_2+\frac{6}{7}\vec{e}_3;\\ \vec{e}_2{}'=6\vec{e}_1-\vec{e}_2;\\ \vec{e}_3{}'=-\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3.\end{cases}$$

25. $\vec{x}=(3,-8,8)$;
$$\begin{cases}\vec{e}_1{}'=\vec{e}_1+\vec{e}_2-7\vec{e}_3;\\ \vec{e}_2{}'=\frac{7}{8}\vec{e}_1-\vec{e}_2;\\ \vec{e}_3{}'=-\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3.\end{cases}$$

26. $\vec{x}=(1,-9,9)$;
$$\begin{cases}\vec{e}_1{}'=\vec{e}_1+\vec{e}_2-8\vec{e}_3;\\ \vec{e}_2{}'=\frac{8}{9}\vec{e}_1-\vec{e}_2;\\ \vec{e}_3{}'=-\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3.\end{cases}$$

27. $\vec{x}=(9,9,2)$;
$$\begin{cases}\vec{e}_1{}'=\vec{e}_1+\vec{e}_2+\frac{8}{9}\vec{e}_3;\\ \vec{e}_2{}'=-8\vec{e}_1-\vec{e}_2;\\ \vec{e}_3{}'=-\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3.\end{cases}$$

28. $\vec{x}=(3,-10,10)$;
$$\begin{cases}\vec{e}_1{}'=\vec{e}_1+\vec{e}_2-9\vec{e}_3;\\ \vec{e}_2{}'=\frac{9}{10}\vec{e}_1-\vec{e}_2;\\ \vec{e}_3{}'=-\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3.\end{cases}$$

29. $\vec{x}=(10,10,7)$;
$$\begin{cases}\vec{e}_1{}'=\vec{e}_1+\vec{e}_2+0{,}9\vec{e}_3;\\ \vec{e}_2{}'=-9\vec{e}_1-\vec{e}_2;\\ \vec{e}_3{}'=-\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3.\end{cases}$$

30. $\vec{x}=(1,9,18)$;
$$\begin{cases}\vec{e}_1{}'=\vec{e}_1+\vec{e}_2+10\vec{e}_3;\\ \vec{e}_2{}'=\frac{10}{9}\vec{e}_1-\vec{e}_2;\\ \vec{e}_3{}'=-\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3.\end{cases}$$

31. $\vec{x}=(1,10,10)$;
$$\begin{cases}\vec{e}_1{}'=\vec{e}_1+\vec{e}_2+11\vec{e}_3;\\ \vec{e}_2{}'=1{,}1\vec{e}_1-\vec{e}_2;\\ \vec{e}_3{}'=-\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3.\end{cases}$$

Задача 3. [*гл. 5, §1, приклад 5*].

Нехай $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$. Встановити, чи є лінійними наступні перетворення.

Варіанти завдань

1. $\mathscr{A}\,\vec{x}=(6x_1-5x_2-4x_3\,,\,-3x_1-3x_2-x_3\,,\,x_2+2x_3)$,
   $\mathscr{B}\,\vec{x}=(6-5x_2-4x_3\,,\,3x_1-2x_2-x_3\,,\,x_2+2)$,
   $\mathscr{C}\,\vec{x}=(x_3^4\,,\,3x_1-2x_2-x_3\,,\,x_2+2x_3)$.

2. $\mathscr{A}\,\vec{x}=(5x_1-4x_2-3x_3\,,\,2x_1-x_2\,,\,x_2+2)$,
   $\mathscr{B}\,\vec{x}=(5x_1-4x_2-3x_3\,,\,0,x_2^4+2x_3)$,
   $\mathscr{C}\,\vec{x}=(5x_1-4x_2-3x_3\,,\,2x_1-x_2\,,\,x_2+2x_3)$.

3. $\mathscr{A}\,\vec{x} = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3\,,\ x_1\,,\ x_1 + 2x_2^4 + 3x_3)$,
$\mathscr{B}\,\vec{x} = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3\,,\ x_1\,,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3)$,
$\mathscr{C}\,\vec{x} = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3\,,\ x_1\,,\ x_1 + 2x_2 + 3)$,

4. $\mathscr{A}\,\vec{x} = (3x_1 + 2x_2 + x_3\,,\ x_3\,,\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3)$,
$\mathscr{B}\,\vec{x} = (3x_1 + 2x_2 + x_3\,,\ 1,\ 2x_1 - 3x_2 - 4)$,
$\mathscr{C}\,\vec{x} = (3x_1 + 2x_2 + x_3\,,\ x_3\,,\ 2x_1^4 - 3x_2 - 4x_3)$,

5. $\mathscr{A}\,\vec{x} = (x_1\,,\ x_1 - 2x_2 - 3,\ 4x_1 - 5x_2 - 6)$,
$\mathscr{B}\,\vec{x} = (x_1\,,\ x_1 - 2x_2 - 3x_3\,,\ 4x_1 - 5x_2 - 6x_3)$,
$\mathscr{C}\,\vec{x} = (x_1\,,\ x_1 - 2x_2 - 3x_3\,,\ 4x_1^2 - 5x_2 - 6x_3)$.

6. $\mathscr{A}\,\vec{x} = (2x_1 + x_2\,,\ x_2 - 2x_3\,,\ 3x_1 - 4x_2^2 - 5x_3)$,
$\mathscr{B}\,\vec{x} = (2x_1 + x_2\,,\ x_2 - 2x_3\,,\ 3x_1 - 4x_2 - 5x_3)$,
$\mathscr{C}\,\vec{x} = (2x_1 + x_2\,,\ x_2 - 2,\ 3x_1 + 4x_2 - 5)$.

7. $\mathscr{A}\,\vec{x} = (x_1\,,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3\,,\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3)$,
$\mathscr{B}\,\vec{x} = (x_1\,,\ x_1 + 2x_2 + 3,\ 4x_1 + 5x_2 + 6)$,
$\mathscr{C}\,\vec{x} = (x_1\,,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3\,,\ 4x_1^4 + 5x_2 + 6x_3)$.

8. $\mathscr{A}\,\vec{x} = (3x_1 - 2x_2 - x_3\,,\ 1,\ x_1 + 2x_2 + 3)$,
$\mathscr{B}\,\vec{x} = (3x_1 - 2x_2 - x_3\,,\ 0,\ x_1^3 + 2x_2 + 3x_3)$,
$\mathscr{C}\,\vec{x} = (3x_1 - 2x_2 - x_3\,,\ x_3\,,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3)$.

9. $\mathscr{A}\,\vec{x} = (2x_1 - x_2\,,\ x_3\,,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3^4)$,
$\mathscr{B}\,\vec{x} = (2x_1 - x_2\,,\ x_3\,,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3)$,
$\mathscr{C}\,\vec{x} = (2x_1 - x_2\,,\ 1,\ x_1 + 2x_2 + 3)$.

10. $\mathscr{A}\,\vec{x} = (x_3\,,\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3\,,\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3)$,
$\mathscr{B}\,\vec{x} = (x_3\,,\ 2x_1 + 3x_2 + 4,\ 5x_1 + 6x_2 + 7)$,
$\mathscr{C}\,\vec{x} = (x_3\,,\ 0,\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3)$.

11. $\mathscr{A}\,\vec{x} = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3\,,\ 3x_1 - 2x_2 - x_3\,,\ 0)$,
$\mathscr{B}\,\vec{x} = (6x_1 - 5x_2 - 4,\ 3x_1 - 2x_2 - x_3\,,\ 0)$,
$\mathscr{C}\,\vec{x} = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3\,,\ 3x_1 - 2x_2 - x_3^2\,,\ 0)$.

12. $\mathscr{A}\,\vec{x} = (5x_1 - 4x_2 - 3,\ 2x_1 - x_2\,,\ x_3^2)$,
$\mathscr{B}\,\vec{x} = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3\,,\ 2x_1 - x_2\,,\ 1)$,
$\mathscr{C}\,\vec{x} = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3\,,\ 2x_1 - x_2\,,\ x_3)$.

13. $\mathscr{A}\,\vec{x} = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3\,,\ x_1^2\,,\ x_2 + 2x_3)$,
$\mathscr{B}\,\vec{x} = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3\,,\ x_1\,,\ x_2 + 2x_3)$,
$\mathscr{C}\,\vec{x} = (4x_1 - 3x_2 - 2,\ x_1\,,\ x_2 + 2)$.

14. $\mathscr{A}\,\vec{x} = (3x_1 + 2x_2 + x_3\,,\ 0,\ x_1 - 2x_2 - 3x_3)$,
$\mathscr{B}\,\vec{x} = (3x_1 + 2x_2 + 1,\ 0,\ x_1 - 2x_2 - 3)$,
$\mathscr{C}\,\vec{x} = (3x_1 + 2x_2 + x_3\,,\ 0,\ x_1^2 - 2x_2 - 3x_3)$.

15. $\mathscr{A}\,\vec{x} = (x_1\,,\ x_2 - 2x_3\,,\ 3x_1 - 4x_2 - 5)$,
$\mathscr{B}\,\vec{x} = (x_1\,,\ x_2^2 - 2x_3\,,\ 3x_1 - 4x_2 - 5)$,
$\mathscr{C}\,\vec{x} = (x_1\,,\ x_2 - 2x_3\,,\ 3x_1 - 4x_2 - 5x_3)$.

16. $\mathscr{A}\,\vec{x} = (2x_1 + x_2\,,\ x_3^2\,,\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3)$,
$\mathscr{B}\,\vec{x} = (2x_1 + x_2\,,\ x_3\,,\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3)$,
$\mathscr{C}\,\vec{x} = (2x_1 + x_2\,,\ x_3\,,\ 2x_1 - 3x_2 - 4)$,

17. $\mathscr{A}\,\vec{x} = (x_1\,,\ x_2 + 2x_3\,,\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3)$,
$\mathscr{B}\,\vec{x} = (x_1\,,\ x_2 + 2x_3\,,\ 3x_1 + 4x_2 + 5)$,
$C\,\vec{x} = (x_1\,,\ x_2^2 + 2x_3\,,\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3)$,

18. $\mathscr{A}\,\vec{x} = (3x_1 - 2x_2 - 1,\ 0,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3)$,
$\mathscr{B}\,\vec{x} = (3x_1^2 - 2x_2 - x_3\,,\ 0,\ 0)$,
$C\,\vec{x} = (3x_1 - 2x_2 - x_3\,,\ 0,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3)$.

19. $\mathscr{A}\,\vec{x} = (2x_1^2 - x_2\,,\ x_3\,,\ 2x_2 + 3x_3)$,
$\mathscr{B}\,\vec{x} = (2x_1 - x_2\,,\ x_3\,,\ 2x_2 + 3x_3)$,
$C\,\vec{x} = (2x_1 - x_2\,,\ x_3\,,\ 2x_2 + 3)$.

20. $\mathscr{A}\,\vec{x} = (0,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3\,,\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3)$,
$\mathscr{B}\,\vec{x} = (0,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3\,,\ 4x_1 + 5x_2 + 6)$,
$C\,\vec{x} = (0,\ x_1^2 + 2x_2 + 3x_3\,,\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3)$.

21. $\mathscr{A}\,\vec{x} = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3\,,\ 3x_1 - 2x_2 - x_3\,,\ x_2)$,
$\mathscr{B}\,\vec{x} = (6x_1 - 5x_2 - 4,\ 3x_1 - 2x_2 - x_3\,,\ x_2)$,
$C\,\vec{x} = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3^3,\ 3x_1 - 2x_2 - x_3\,,\ 0)$.

22. $\mathscr{A}\,\vec{x} = (5x_1 - 4x_2 - 3,\ 2x_1 - x_2\,,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3)$,
$\mathscr{B}\,\vec{x} = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3\,,\ 2x_1 - x_2\,,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3)$,
$C\,\vec{x} = (5x_1^2 - 4x_2 - 3x_3\,,\ 2x_1 - x_2\,,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3)$.

23. $\mathscr{A}\,\vec{x} = (4x_1 - 3x_2^3 - 2x_3\,,\ x_1 + x_3\,,\ 0)$,
$\mathscr{B}\,\vec{x} = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3\,,\ x_1 + x_3\,,\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3)$,
$C\,\vec{x} = (4x_1 - 3x_2^3 - 2,\ x_1 + x_3\,,\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3)$.

24. $\mathscr{A}\,\vec{x} = (3x_1 + 4x_2 + 5x_3\,,\ 6x_1 + 7x_2 + 8x_3\,,\ 9x_1 + x_2)$,
$\mathscr{B}\,\vec{x} = (3x_1 + 4x_2 + 5,\ 6x_1 + 7x_2 + 8,\ 9x_1 + x_3)$,
$C\,\vec{x} = (3x_1 + 4x_2 + 5x_3^3,\ 6x_1 + 7x_2 + 8x_3\,,\ 0)$.

25. $\mathscr{A}\,\vec{x} = (2x_1 + 3x_2 + 4,\ 5x_1 + 6x_2 + 7,\ 8x_1 + x_3)$,
$\mathscr{B}\,\vec{x} = (2x_1 + 3x_2 + 4x_3^3,\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3\,,\ 0)$,
$C\,\vec{x} = (2x_1 + 3x_2 + 4x_3\,,\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3\,,\ 8x_1 + x_3)$.

26. $\mathscr{A}\,\vec{x} = (x_1^3 + x_3\,,\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3\,,\ 0)$,
$\mathscr{B}\,\vec{x} = (x_1 + x_3\,,\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3\,,\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3)$,
$C\,\vec{x} = (x_1 + 1,\ 2x_1 + 3x_2 + 4,\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3)$.

27. $\mathscr{A}\,\vec{x} = (3x_1 - 2x_2 - x_3\,,\ x_2 + 2x_3\,,\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3)$,
$\mathscr{B}\,\vec{x} = (3x_1 - 2x_2 - 1,\ x_2 + 2,\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3)$,
$C\,\vec{x} = (3x_1 - 2x_2 - x_3\,,\ x_2 + 2x_3\,,\ 0)$.

28. $\mathscr{A}\,\vec{x} = (2x_1 - x_2\,,\ x_1 + 2x_2 + 3,\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3)$,
$\mathscr{B}\,\vec{x} = (2x_1 - x_2^3,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3\,,\ 0)$,
$C\,\vec{x} = (2x_1 - x_2\,,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3\,,\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3)$.

29. $\mathscr{A}\,\vec{x} = (x_1^3 + 2x_2 + 3x_3\,,\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3\,,\ 7x_1 + 8x_2)$,
$\mathscr{B}\,\vec{x} = (x_1 + 2x_2 + 3x_3\,,\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3\,,\ 7x_1 + 8x_2)$,
$C\,\vec{x} = (x_1 + 2x_2 + 3,\ 4x_1 + 5x_2 + 6,\ 7x_1 + 8x_2)$.

30. $\mathscr{A}\,\vec{x} = (x_2 + 2x_3\,,\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3\,,\ 6x_1 + 7x_2 + 8x_3)$,
$\mathscr{B}\,\vec{x} = (x_2 + 2,\ 3x_1 + 4x_2 + 5,\ 6x_1 + 7x_2 + 8x_3)$,
$C\,\vec{x} = (x_2^3 + 2x_3\,,\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3\,,\ 6x_1 + 7x_2 + 8x_3)$.

31. $\mathscr{A}\,\vec{x} = (x_1^2\,,\ x_1 - x_3\,,\ x_2 + x_3)$,
$\mathscr{B}\,\vec{x} = (1,\ x_1 - x_3\,,\ x_2 + x_3)$,
$C\,\vec{x} = (x_1\,,\ x_1 - x_3\,,\ x_2 + x_3)$.

Задача 4. [*гл. 5, §1, приклади 18, 19*].

Нехай $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $\mathcal{A}\,\vec{x}=(x_2-x_3,\ x_1,\ x_1+x_3)$, $\mathcal{B}\vec{x}=(x_2,\ 2x_3,\ x_1)$. Виконати вказані дії над операторами.

Варіанти завдань

1. $(\mathcal{A}\mathcal{B}-3\mathcal{A})\,\vec{x}$. 2. $(\mathcal{A}^2+3\mathcal{B})\,\vec{x}$. 3. $(\mathcal{A}^2-\mathcal{B})\,\vec{x}$.

4. $(\mathcal{B}^4-\mathcal{A})\,\vec{x}$. 5. $(\mathcal{B}^2+\mathcal{A}+2\mathcal{B})\,\vec{x}$. 6. $(2\mathcal{A}+3\mathcal{B}^2)\,\vec{x}$.

7. $(\mathcal{A}^2+\mathcal{B}^2)\,\vec{x}$. 8. $(\mathcal{B}^2+5\mathcal{A})\,\vec{x}$. 9. $(\mathcal{B}\mathcal{A}-\mathcal{A}\mathcal{B}+2\mathcal{A})\,\vec{x}$.

10. $\mathcal{B}(2\mathcal{A}-\mathcal{B})\,\vec{x}$. 11. $\mathcal{A}(2\mathcal{B}-\mathcal{A})\,\vec{x}$. 12. $2(\mathcal{A}\mathcal{B}+2\mathcal{A})\,\vec{x}$.

13. $(\mathcal{A}-\mathcal{B})^2\,\vec{x}$. 14. $(\mathcal{B}-2\mathcal{A})^2\,\vec{x}$. 15. $(\mathcal{B}\mathcal{A}^2-2\mathcal{B})\,\vec{x}$.

16. $(3\mathcal{A}^2+\mathcal{B})\,\vec{x}$. 17. $(\mathcal{A}^2+\mathcal{B})\,\vec{x}$. 18. $2(\mathcal{B}+2\mathcal{A}^2+\mathcal{B}^2)\,\vec{x}$.

19. $(2\mathcal{A}-\mathcal{B}^2)\,\vec{x}$. 20. $(\mathcal{B}^3-4\mathcal{A})\,\vec{x}$. 21. $(\mathcal{B}^2-2\mathcal{A})\,\vec{x}$.

22. $\mathcal{A}(\mathcal{B}+\mathcal{A})\,\vec{x}$. 23. $(\mathcal{A}\mathcal{B}^2-3\mathcal{A})\,\vec{x}$. 24. $\mathcal{A}(\mathcal{B}-\mathcal{A})\,\vec{x}$.

25. $(\mathcal{A}^2-\mathcal{B}^2)\,\vec{x}$. 26. $\mathcal{B}(\mathcal{A}-\mathcal{B})\,\vec{x}$. 27. $(\mathcal{B}-\mathcal{A}+\mathcal{B}^2)\,\vec{x}$.

28. $\mathcal{B}(\mathcal{A}+\mathcal{B})\,\vec{x}$. 29. $(\mathcal{A}+\mathcal{B}\mathcal{A}-\mathcal{B})\,\vec{x}$. 30. $(3\mathcal{B}+2\mathcal{A}^2)\,\vec{x}$.

31. $\mathcal{B}(2\mathcal{A}+\mathcal{B})\,\vec{x}$.

Задача 5. [*гл. 5, §1, приклад 16*].

Знайти матрицю A в базисі $(\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}',\vec{e}_3{}')$, де $\vec{e}_1{}'=\vec{e}_1-\vec{e}_2+\vec{e}_3$, $\vec{e}_2{}'=-\vec{e}_1+\vec{e}_2-2\vec{e}_3$, $\vec{e}_3{}'=-\vec{e}_1+2\vec{e}_2+\vec{e}_3$, якщо ця матриця задана в базисі $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$.

Варіанти завдань

1. $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\3&-1&0\\1&1&-2\end{pmatrix}$. 2. $A=\begin{pmatrix}2&1&3\\3&0&0\\1&-1&2\end{pmatrix}$. 3. $A=\begin{pmatrix}0&2&3\\4&1&0\\2&-1&-2\end{pmatrix}$.

4. $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&0&-1\\2&1&-1\end{pmatrix}$. 5. $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&0&2\\-1&1&2\end{pmatrix}$. 6. $A=\begin{pmatrix}0&3&2\\2&1&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}$.

7. $A=\begin{pmatrix}1&3&0\\2&1&-1\\0&2&1\end{pmatrix}$. 8. $A=\begin{pmatrix}2&1&2\\3&0&2\\1&0&1\end{pmatrix}$. 9. $A=\begin{pmatrix}0&1&2\\4&0&1\\-1&-2&1\end{pmatrix}$.

10. $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\2&3&1\end{pmatrix}$. 11. $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&0&2\\1&3&-1\end{pmatrix}$. 12. $A=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&-1&0\\2&1&-1\end{pmatrix}$.

13. $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&2&0\\-1&1&1\end{pmatrix}$. 14. $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&2&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$. 15. $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$.

16. $A=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&0&1\\2&0&1\end{pmatrix}$. 17. $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&2\\3&-1&1\end{pmatrix}$. 18. $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\3&0&-1\\1&-2&1\end{pmatrix}$.

19. $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}$. 20. $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&2&1\end{pmatrix}$. 21. $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&-1&1\\-1&2&1\end{pmatrix}$.

22. $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\2&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}$. 23. $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&2&1\\-1&2&1\end{pmatrix}$. 24. $A=\begin{pmatrix}0&2&1\\0&3&2\\1&1&-1\end{pmatrix}$.

25. $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&-1\\1&1&-1\end{pmatrix}$. 26. $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&1&1\\0&2&-1\end{pmatrix}$. 27. $A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\-1&3&1\\0&1&0\end{pmatrix}$.

28. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$. 29. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. 30. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

31. $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

Задача 6. [*гл. 5, §1, приклади 1 – 12, 21, 22*].

Довести лінійність заданого оператора, знайти його матрицю, ядро та образ, базиси ядра та образу, а також ранг і дефект.

Варіанти завдань

1. Оператор проектування на вісь Ox.
2. Оператор проектування на площину $z=0$.
3. Оператор проектування на вісь Oz.
4. Оператор дзеркального відображення відносно площини Oyz.
5. Оператор проектування на вісь Oy.
6. Оператор проектування на площину $y=0$.
7. Оператор дзеркального відображення відносно площини $x-y=0$.
8. Оператор дзеркального відображення відносно площини $y+z=0$.
9. Оператор проектування на площину $y-z=0$.
10. Оператор проектування на площину $y=\sqrt{3}\,x$.
11. Оператор проектування на площину Oyz.
12. Оператор дзеркального відображення відносно площини $x-z=0$.
13. Оператор дзеркального відображення відносно площини Oxy.
14. Оператор повороту відносно осі Ox на кут $\frac{\pi}{2}$ в додатному напрямку.
15. Оператор проектування на площину $x-y=0$.
16. Оператор проектування на площину $y+z=0$.

17. Оператор дзеркального відображення відносно площини $x+y=0$.
18. Оператор дзеркального відображення відносно площини $y-z=0$.
19. Оператор проектування на площину $x+y=0$.
20. Оператор проектування на площину $x-z=0$.
21. Оператор дзеркального відображення відносно площини $x+z=0$.
22. Оператор повороту відносно осі Oz в додатному напрямку на кут $\frac{\pi}{2}$.
23. Оператор проектування на площину $\sqrt{3}\,y+z=0$.
24. Оператор дзеркального відображення відносно площини Oxz.
25. Оператор повороту в додатному напрямку відносно осі Oy на кут $\frac{\pi}{2}$.
26. Оператор проектування на площину $x+z=0$.
27. Оператор проектування на площину $y+\sqrt{3}\,z=0$.
28. Оператор проектування на площину $\sqrt{3}\,x+z=0$.
29. Оператор проектування на площину $\sqrt{3}\,x+y=0$.
30. Оператор повороту відносно осі Oz в додатному напрямку на кут $\frac{\pi}{2}$.
31. Оператор проектування на площину $x-\sqrt{3}\,z=0$.

Задача 7. [*гл. 5, §2, приклади 1 – 7*].

Знайти власні значення та власні вектори лінійного оператора $\mathcal{A}$, що заданий матрицею A. Чи зводиться ця матриця до діагонального вигляду? У випадку позитивної відповіді навести цю діагональну матрицю та базис, в якому матриця має діагональний вигляд.

Варіанти завдань

1. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 1 & 0 & 3\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}$. 2. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$. 3. $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$.

4. $A=\begin{pmatrix}5&-1&-1\\0&4&-1\\0&-1&4\end{pmatrix}$. 5. $A=\begin{pmatrix}6&-2&-1\\-1&5&-1\\1&-2&4\end{pmatrix}$. 6. $A=\begin{pmatrix}3&1&-1\\2&2&-1\\-2&1&4\end{pmatrix}$.

7. $A=\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&1&-1\\-1&0&2\end{pmatrix}$. 8. $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\-1&1&3\end{pmatrix}$. 9. $A=\begin{pmatrix}4&1&0\\1&4&0\\-1&1&5\end{pmatrix}$.

10. $A=\begin{pmatrix}5&1&-1\\-2&4&-1\\-2&1&6\end{pmatrix}$. 11. $A=\begin{pmatrix}5&-4&4\\2&1&2\\2&0&3\end{pmatrix}$. 12. $A=\begin{pmatrix}3&-2&2\\2&-1&2\\2&-2&3\end{pmatrix}$.

13. $A=\begin{pmatrix}3&-2&2\\0&3&0\\0&2&1\end{pmatrix}$. 14. $A=\begin{pmatrix}5&-2&2\\0&5&0\\0&2&3\end{pmatrix}$. 15. $A=\begin{pmatrix}7&-4&4\\2&3&2\\2&0&5\end{pmatrix}$.

16. $A=\begin{pmatrix}7&-6&6\\4&-1&4\\4&-2&5\end{pmatrix}$. 17. $A=\begin{pmatrix}7&-6&6\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix}$. 18. $A=\begin{pmatrix}13&2&-2\\6&9&-6\\2&-2&5\end{pmatrix}$.

19. $A=\begin{pmatrix}-1&3&-1\\-3&5&-1\\-3&3&1\end{pmatrix}$. 20. $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\2/3&7/3&4/3\\2/3&2/3&5/3\end{pmatrix}$. 21. $A=\begin{pmatrix}7/3&2/3&2/3\\4/3&5/3&2/3\\0&0&1\end{pmatrix}$.

22. $A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$. 23. $A=\begin{pmatrix}4&2&-6\\2&1&-3\\-6&-3&9\end{pmatrix}$. 24. $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}$.

25. $A=\begin{pmatrix}6&1&-1\\2&5&-2\\1&-1&4\end{pmatrix}$. 26. $A=\begin{pmatrix}5&0&0\\1&4&-1\\1&-1&4\end{pmatrix}$. 27. $A=\begin{pmatrix}4&-3&-3\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$.

28. $A=\begin{pmatrix}7&-4&-2\\-2&5&-2\\0&0&9\end{pmatrix}$. 29. $A=\begin{pmatrix}3&-2&-2\\-2/3&5/3&-2/3\\-2/3&2/3&-13/3\end{pmatrix}$.

30. $A=\begin{pmatrix}19/3&2/3&-2/3\\2&5&-2\\2/3&-2/3&11/3\end{pmatrix}$. 31. $A=\begin{pmatrix}5/3&-2/3&-4/3\\0&1&0\\-2/3&2/3&7/3\end{pmatrix}$.

Задача 8. [*гл. 6, §1, приклади 5, 6*].

Звести квадратичну форму $L(x_1, x_2, x_3)$ до канонічного вигляду методом Лагранжа. Виписати матрицю переходу T до канонічного базису та лінійне перетворення, що зводить до канонічного вигляду.

Варіанти завдань

1. $L(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3+4x_3^2$.
2. $L(x_1,x_2,x_3)=4x_1^2+4x_1x_2+8x_1x_3-3x_2^2+4x_3^2$.
3. $L(x_1,x_2,x_3)=4x_1^2+8x_1x_2+4x_2x_3+x_3^2$.
4. $L(x_1,x_2,x_3)=4x_1^2+8x_1x_2+4x_1x_3+3x_2^2-2x_3^2$.
5. $L(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+3x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$.
6. $L(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_1x_2+4x_2x_3+x_3^2$.
7. $L(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3-3x_2^2-6x_2x_3-2x_3^2$.
8. $L(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_1x_2+2x_1x_3+3x_2^2+2x_2x_3+x_3^2$.
9. $L(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_1x_3-x_2^2-2x_2x_3+4x_3^2$.
10. $L(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+x_3^2$.
11. $L(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2^2+12x_2x_3+4x_3^2$.
12. $L(x_1,x_2,x_3)=4x_1^2+4x_1x_2+8x_1x_3+5x_2^2+8x_2x_3+4x_3^2$.
13. $L(x_1,x_2,x_3)=4x_1^2+8x_1x_2+4x_1x_3+8x_2^2+8x_2x_3+x_3^2$.

14. $L(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$.

15. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 12x_2x_3 + 7x_3^2$.

16. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2^2 + 16x_2x_3 + 7x_3^2$.

17. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 10x_2x_3 + 4x_3^2$.

18. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 6x_2x_3 + x_3^2$.

19. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 4x_3^2$.

20. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$.

21. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 + 2x_3^2$.

22. $L(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2^2 + 2x_3^2$.

23. $L(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_3^2$.

24. $L(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 - 4x_3^2$.

25. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 - x_3^2$.

26. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_3^2$.

27. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 3x_2^2 - 6x_2x_3 - 4x_3^2$.

28. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 - x_3^2$.

29. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_3 - x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2$.

30. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - x_3^2$.

31. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 3x_3^2$.

Задача 9. [*гл. 6, §1, приклади 3, 4*].

Звести квадратичну форму $L(x_1, x_2, x_3)$ до канонічного вигляду методом ортогональних перетворень. Виписати матрицю переходу до канонічного базису та лінійне перетворення, що зводить до канонічного вигляду.

Варіанти завдань

1. $L(x_1, x_2, x_3) = 4x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$.

2. $L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 5x_3^2 + 2x_1x_2$.

3. $L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 8x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3$.

4. $L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 9x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$.

5. $L(x_1, x_2, x_3) = -4x_1^2 - 4x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3$.

6. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

7. $L(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

8. $L(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_2^2 - \frac{3}{2}x_3^2 + 2\sqrt{3}x_1x_2 - x_1x_3 + \sqrt{3}x_2x_3$.

9. $L(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - x_2^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 6x_2x_3$.

10. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 7x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$.

11. $L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 4\sqrt{2}x_2x_3$.

12. $L(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - 7x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 8x_1x_3 - 8x_2x_3$.

13. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 5\sqrt{2}x_1x_3 + \sqrt{2}x_2x_3$.

14. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \frac{4}{3}x_1x_2 - \frac{8\sqrt{2}}{3}x_2x_3$.

15. $L(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 9x_2^2 + 9x_3^2 - 12x_1x_2 - 6x_1x_3$.

16. $L(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2x_3$.

17. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

18. $L(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3$.

19. $L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 8x_1x_2 - 4\sqrt{2}x_1x_3 + 2\sqrt{2}x_2x_3$.

20. $L(x_1, x_2, x_3) = -4x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

21. $L(x_1, x_2, x_3) = 10x_1^2 + 14x_2^2 + 7x_3^2 - 10x_1x_2 - \sqrt{2}x_1x_3 - 5\sqrt{2}x_2x_3$.

22. $L(x_1, x_2, x_3) = 1{,}5x_1^2 - 5x_2^2 + 1{,}5x_3^2 + 4x_1x_2 - x_1x_3 - 4x_2x_3$.

23. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 2\sqrt{2}x_1x_3 - 2\sqrt{2}x_2x_3$.

24. $L(x_1, x_2, x_3) = 2x_2^2 - 3x_3^2 - 2\sqrt{3}x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4\sqrt{3}x_2x_3$.

25. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \frac{4}{3}x_1x_2 + \frac{8\sqrt{2}}{3}x_2x_3$.

26. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_3^2 + 8x_1x_2 + 4\sqrt{2}x_1x_3 - 2\sqrt{2}x_2x_3$.

27. $L(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 13x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_2x_3$.

28. $L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + \frac{2}{3}x_1x_2 + \frac{4\sqrt{2}}{3}x_2x_3$.

29. $L(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 2\sqrt{2}x_1x_3 + 4\sqrt{2}x_2x_3$.

30. $L(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 + 5x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$.

31. $L(x_1, x_2, x_3) = -3x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3$.

Задача 10. [*гл. 6, §1, приклад 7*].

Звести квадратичну форму до канонічного вигляду методом Якобі. Виписати матрицю переходу до канонічного базису та лінійне перетворення, що зводить до канонічного вигляду.

Варіанти завдань

1. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$.

2. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 - x_3^2$.

3. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_3 - x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2$.

4. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 - x_3^2$.

5. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_3^2$.

6. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 - x_3^2$.

7. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 3x_2^2 - 6x_2x_3 - 4x_3^2$.

8. $L(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 - 4x_3^2$.

9. $L(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_3^2$.

10. $L(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2^2 + 2x_3^2$.

11. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 + 2x_3^2$.

12. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$.

13. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 4x_3^2$.

14. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 6x_2x_3 + x_3^2$.

15. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 10x_2x_3 + 4x_3^2$.

16. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2^2 + 16x_2x_3 + 7x_3^2$.

17. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 6x_2x_3 + x_3^2$.

18. $L(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$.

19. $L(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2^2 + 8x_2x_3 + x_3^2$.

20. $L(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 5x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$.

21. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2^2 + 12x_2x_3 + 4x_3^2$.

22. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_3^2$.

23. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_3 - x_2^2 - 2x_2x_3 + 4x_3^2$.

24. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$.

25. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 3x_2^2 - 6x_2x_3 - 2x_3^2$.

26. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$.

27. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2$.

28. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 3x_3^2$.

29. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 - 2x_2x_3 + 5x_3^2$.

30. $L(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 - 12x_1x_2 - 6x_1x_3 + 9x_2^2 + x_2x_3 - 9x_3^2$.

31. $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 4x_1x_3 + x_2^2 + 4x_2x_3 - x_3^2$.

Задача 11. [*гл. 6, §2, приклад 1*].

Звести задану криву другого порядку L до канонічного вигляду; результати ілюструвати графічно.

Варіанти завдань

1. $L: -x^2 - y^2 + 4xy + 2x - 4y + 1 = 0$.
2. $L: 2x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x - 2y + 1 = 0$.
3. $L: xy + x - y = 0$.
4. $L: -2x^2 - 2y^2 + 2xy - 6x + 6y + 3 = 0$.
5. $L: -3x^2 - 3y^2 + 4xy - 6x + 4y + 2 = 0$.
6. $L: -2xy - 2x - 2y + 1 = 0$.
7. $L: -x^2 - y^2 - 4xy - 4x - 2y + 2 = 0$.
8. $L: -4x^2 - 4y^2 + 2xy + 10x - 10y + 1 = 0$.
9. $L: 2xy + 2x - 2y - 1 = 0$.
10. $L: x^2 + y^2 + 2xy - 8x - 8y + 1 = 0$.
11. $L: x^2 + y^2 + 4xy - 8x - 4y + 1 = 0$.

12. $L: x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 2y - 7 = 0$.
13. $L: 2xy + 2x + 2y - 3 = 0$.
14. $L: 4x^2 + 4y^2 + 2xy + 12x + 12y + 1 = 0$.
15. $L: 3x^2 + 3y^2 + 4xy + 8x + 12y + 1 = 0$.
16. $L: x^2 + y^2 - 8xy - 20x + 20y + 1 = 0$.
17. $L: 3x^2 + 3y^2 - 2xy - 6x + 2y + 1 = 0$.
18. $L: 4xy + 4x + 4y + 1 = 0$.
19. $L: 3x^2 + 3y^2 - 4xy + 6x - 4y - 7 = 0$.
20. $L: -2xy - 2x + 2y + 3 = 0$.
21. $L: 5x^2 + 5y^2 - 2xy + 10x - 2y + 1 = 0$.
22. $L: 2x^2 + 2y^2 + 4xy + 8x + 8y + 1 = 0$.
23. $L: -x^2 - y^2 + 2xy + 2x - 2y + 1 = 0$.
24. $L: 2x^2 + 2y^2 - 4xy - 8x + 8y + 1 = 0$.
25. $L: 3x^2 + 3y^2 + 2xy - 12x - 4y + 1 = 0$.
26. $L: -4xy + 8x + 8y + 1 = 0$.
27. $L: x^2 + y^2 - xy + 3x - 3y - 3 = 0$.
28. $L: x^2 + y^2 + 4xy + 4x + 2y - 5 = 0$.
29. $L: 4xy + 4x - 4y + 1 = 0$.
30. $L: 3x^2 + 3y^2 - 4xy + 4x + 4y + 1 = 0$.
31. $L: x^2 + y^2 - 4xy + 4x - 2y + 1 = 0$.

Задача 12. [*гл. 6, §2, приклад 2*].

Звести задану поверхню другого порядку P до канонічного вигляду; результати ілюструвати графічно.

Варіанти завдань

1. $P:\ x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz-6=0$.
2. $P:\ 2x^2+y^2+2z^2-2xy-2yz+x-4y-3z+2=0$.
3. $P:\ 2x^2+y^2-4xy-4yz+2x-y+1=0$.
4. $P:\ x^2-2y^2+z^2+4xy-8xz-4yz-14x-4y+14z+16=0$.
5. $P:\ 3x^2+3z^2+2xz-5=0$.
6. $P:\ x^2+2y^2+3z^2-4xy-4yz+34x+2y-100=0$.
7. $P:\ x^2+y^2-3z^2-2xy-6xz-6yz+2x+2y+4z=0$.
8. $P:\ 7x^2+6y^2+5z^2-4xy-4yz-6x-24y+18z+30=0$.
9. $P:\ 2x^2-7y^2-4z^2+4xy-16xz+20yz+60x-12y+12z-90=0$.
10. $P:\ 2x^2+2y^2-5z^2+2xy-2x-4y-4z+2=0$.
11. $P:\ 2x^2+2y^2+3z^2+4xy+2xz+2yz-4x+6y-2z+3=0$.
12. $P:\ 4x^2+y^2+4z^2-4xy-8xz+4yz-28x+2y+16z+45=0$.
13. $P:\ 2x^2+5y^2+2z^2-2xy-4xz+2yz+2x-10y-2z-1=0$.
14. $P:\ x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz-2x+6y+2z=0$.
15. $P:\ x^2-2y^2+z^2+4xy-10xz+4yz+2x+4y-10z-1=0$.
16. $P:\ x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz-2x+6y+2z=0$.
17. $P:\ x^2+y^2+4z^2+2xy+4xz+4yz-6z+1=0$.
18. $P:\ 7x^2+6y^2+5z^2-4xy-4yz-6x-24y+18z+30=0$.
19. $P:\ 2x^2+2y^2-5z^2+2xy-2x-4y-4z+2=0$.
20. $P:\ x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz-2x+6y+2z=0$.

21. $P:\ 4x^2+3y^2+2z^2+4xy-4yz+4x-2y-4z-3=0$
22. $P:\ 2x_1^2+5x_2^2-2x_1x_2+2x_2x_3-4x_1x_3-3=0$.
23. $P:\ 7x_1^2+6x_2^2+5x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3-18=0$.
24. $P:\ x_1^2-2x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-4x_2x_3-8x_1x_3-6=0$.
25. $P:\ 6x^2-2y^2+6z^2+4xz+8x-4y-8z+1=0$.
26. $P:\ x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz+6=0$.
27. $P:\ 2x^2+y^2-4xy-4yz+2x-y-1=0$.
28. $P:\ 2x^2-2y^2-5z^2+2xy-2x-4y-4z-2=0$.
29. $P:\ x^2-2y^2+z^2+4xy-10xz+4yz+2x+4y-10z+1=0$.
30. $P:\ x^2+y^2+4z^2+2xy+4xz+4yz-6z-1=0$.
31. $P:\ 4x^2+3y^2+2z^2+4xy-4yz+4x-2y-4z+3=0$.

§4. Індивідуальне завдання 4.

Границі. Неперервність

Задача 1. [*гл.7, § 1, приклад 1*]
Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (вказати $N(\varepsilon)$).

Варіанти завдань

1. $a_n=\dfrac{3n-1}{2n+1},\ a=\dfrac{3}{2}$.
2. $a_n=\dfrac{3n+1}{2n},\ a=\dfrac{3}{2}$.
3. $a_n=\dfrac{n+1}{2n-1},\ a=\dfrac{1}{2}$.
4. $a_n=\dfrac{2n+4}{3n-2},\ a=\dfrac{2}{3}$.
5. $a_n=\dfrac{2n-1}{5n+4},\ a=\dfrac{2}{5}$.
6. $a_n=\dfrac{5n+1}{1-5n},\ a=-1$.
7. $a_n=\dfrac{5n-7}{n+2},\ a=5$.
8. $a_n=\dfrac{4n+3}{2n-1},\ a=2$.

9. $a_n = \dfrac{2n+5}{n-5}$, $a = 2$.

10. $a_n = \dfrac{3n+4}{4n-3}$, $a = \dfrac{3}{4}$.

11. $a_n = \dfrac{7n+1}{2n+5}$, $a = \dfrac{7}{2}$.

12. $a_n = \dfrac{1-3n}{2-3n}$, $a = 1$.

13. $a_n = \dfrac{1-n}{2n+3}$, $a = -\dfrac{1}{2}$.

14. $a_n = \dfrac{5+n^2}{5-n^2}$, $a = -1$.

15. $a_n = \dfrac{4n+3}{3-4n}$, $a = -1$.

16. $a_n = \dfrac{2-n^2}{2+n^2}$, $a = -1$.

17. $a_n = \dfrac{-n+5}{1-5n}$, $a = \dfrac{1}{5}$.

18. $a_n = \dfrac{2n+1}{3n-5}$, $a = \dfrac{2}{3}$.

19. $a_n = \dfrac{2n+3}{2-3n}$, $a = -\dfrac{2}{3}$.

20. $a_n = \dfrac{1+2n^2}{2-n^2}$, $a = -2$.

21. $a_n = \dfrac{n^2-3}{n^2+1}$, $a = 1$.

22. $a_n = \dfrac{1-n^2}{(2+n)^2}$, $a = -1$.

23. $a_n = \dfrac{3+n^2}{1+n^2}$, $a = 1$.

24. $a_n = \dfrac{4n^2-1}{4n^2+n}$, $a = 1$.

25. $a_n = \dfrac{1-7n}{n+7}$, $a = -7$.

26. $a_n = \dfrac{4n-1}{4n+10}$, $a = 1$.

27. $a_n = \dfrac{7-n}{n+7}$, $a = -1$.

28. $a_n = \dfrac{3n^2+2}{4n^2-1}$, $a = \dfrac{3}{4}$.

29. $a_n = \dfrac{4-n}{n+2}$, $a = -1$.

30. $a_n = \dfrac{n^2+3}{3n^2+1}$, $a = \dfrac{1}{3}$.

31. $a_n = \dfrac{1-n}{1+n}$, $a = -1$.

Задача 2. [*гл.7, § 1, приклади 2, 3*]
Обчислити границі числових послідовностей.

Варіанти завдань

1. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3-n)^2+(3+n)^2}{(3-n)^2-(3+n)^2}$;

2. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2+3n+n^2)^2-(2-n+n^2)^2}{4n^3+n+1}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n(n+2)}-\sqrt{n^2-2n+3})$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{(n^2+1)n}-(n+1)\sqrt{n})$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+4)!-(n+2)!}{(n+3)!}$.

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n-3^n}{2^n+9\cdot 3^{n-2}}$.

3. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(11+n)^2-(11-n)^2}{(n+1)^2+1}$;

4. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^4+3}-\sqrt{n^4-2})$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+5n^2}-n)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)!-2}{(n^2+n)(n-1)!}$.

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$.

5. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3n+1)(2n-1)n^2}{(n^2+6)(2n^2+3)}$;

6. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2+5n^2-6(n-1)^2}{n^2-(n-1)^2}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1})$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+3n-2}-\sqrt{n^2-3})$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+4)!-(n+2)!}{(n+3)!}$.

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$.

7. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2n+3n^2}{1-3n+3n^2-n^3}$;

8. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4+1-(n-1)^4}{n^3+(n+1)^3}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2-3n+2}-n)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{3n+1}-\sqrt{3n+2})$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{1+2+\ldots+n}$.

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n-5^{n+1}}{2^{n+1}+5^{n+2}}$.

9. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-n^4+1}{n^3+2n^2+1}$;

10. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)^2+(2n-1)^2}{(n+2)^3-(n-2)^3}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1}-n)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[3]{5+8n^3}-2n)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!}$.

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3+\ldots+n}{\sqrt{9n^4+1}}$.

11. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^6-(n-1)^6}{(n+1)^4+(n-1)^4}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3})$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n)!-(n+1)!}{(2n-1)!(n^2+3n+2)}$.

12. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5+10n+4n^2}{(1-n)^3}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n(n-2)}-\sqrt{n^2-3})$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!+(n+2)!}{(n-1)!+(n+2)!}$.

13. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-n^3-n^2+8}{(n-1)^2(n+3)}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n(n+5)}-n)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n+1)!+2}{(3n)!(n^2+7n-8)}$.

14. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+5n-9}{n^3-(n-1)^3}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\sqrt[3]{5+n^3}-\sqrt[3]{3+n^3})$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{1+2+3+\ldots+n}-\dfrac{2}{3}\right)$.

15. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^3-(2n-1)^3}{(2n+1)^2+(2n-1)^2}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(3n-\sqrt{9n^2+1})$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+4+\ldots+2n}{n+3}$.

16. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(2n-1)(3n+1)}{(3n^2+1)(n+2)}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n(n-1)})$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$.

17. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n^3+6n^2-13}{2n^2+3n-5}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1})$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+4+6+\ldots+2n}{1+3+5+\ldots+(2n-1)}$.

18. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{21n^4+100n^2-1}{(1-7n^2)^2}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(n+\sqrt[3]{4-n^3})$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!-(2n+2)!}$.

19. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-1-2n-49n^2}{(2+7n)(1-7n)}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1})$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+6+9+\ldots+3n}{n^2+4}$.

20. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^4}{(n-1)^2(2n-1)^2}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2+n+1})$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\ldots+n}{n-n^3+3}$.

21. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4+2n+1}{7n^3-10}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1}-n)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)!+(2n^2+1)}{(2n-1)!(n^2+1)}$.

22. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4+n^2+1}{(n+1)^3(n-1)}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2+5})$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{2n}+2^n+1}{(2^n-1)(2^n+3)}$.

23. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3+(n-1)^3+n^3}{(n^2+3n+2)n}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2+5n-3})$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+10^{-n}}{10^n-2^{-n}}$.

24. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3}{n+(n+1)^2+(n+2)^3}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n(n+1)}-\sqrt{(n-1)(n-2)})$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(3n)!(n-1)}$.

25. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{n^2+(2n+1)^2}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^3+n+1}-n\sqrt{n})$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n-2^n}{3^{n-1}+2^n}$.

26. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+(n+1)^3}{(n+1)^4-n^4}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+2}\,(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-4})$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n+3}-n\right)$.

27. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(4n+1)^3-(4n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+1}-2n)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}\right)$.

28. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+2n+1}{(1+n)^2}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{(n^2+1)(n^2-4)}-\sqrt{n^4-9})$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+(n-1)}{n^2}$.

29. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^3+1}{(10n^2+n+7)(n-2)}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n(n+2)}-\sqrt{n^2-2n+3}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$.

30. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2+15n+3}{(2n-1)(1-3n)}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^3+8}\left(\sqrt{n^3+2}-\sqrt{n^3-1}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{2^n}}$.

31. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-4n^2}{(n+1)^3-(n-1)^3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n^2+1)(n^2+2)}-\sqrt{(n^2-1)(n^2-2)}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+7^n}{2^n-7^{n-1}}$.

Задача 3. [*гл.7, § 1, приклади 11 – 15*]
Обчислити границі заданих функцій.

Варіанти завдань

1. а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+4x-5}{2x^3+3x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{x^2-6x-16}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+2x-7}{2x^3+4x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\mathrm{tg}\,4x}{\sqrt{1-\cos 6x}}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-7}{x+5}\right)^{2x}$; е) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\ln(9-2x^2)}{\mathrm{tg}(x^2-4)}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3+x-10}{x^2-4}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x+7}-2}{\sqrt{x+3}-2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+x+5}{0{,}2x^2-x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\mathrm{ctg}\,x}{1-\sin x}$; д) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}}$; е) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{arctg}^2 2x}{\ln(1-4x^2)}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^3-6x-9}{x^2-9}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^4+1}-\sqrt[3]{x^6+1}}{2x^2+4}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x\cdot\mathrm{tg}\,2x}{\mathrm{arctg}^2 3x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-4}\right)^{2x+1}$; е) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\ln\sin 3x}{(6x-\pi)^2}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-x-6}{2x^2+x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x-1}}{x^2-4x-5}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt[3]{x^3+x}-x\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{x\cdot\mathrm{tg}\,3x}$; д) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x+2}{2-3x}\right)^{\frac{1}{x^2+x}}$; е) $\lim\limits_{x\to10}\dfrac{\lg x-1}{x^2-11x+10}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-x^2-4}{x^2-2x}$; б) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt[3]{x+24}-\sqrt[3]{12x-9}}{\sqrt{x+1}-2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+x-20}{0{,}001x^3-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 11x}{\sqrt{1-\cos x}}$; д) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{2x+3}{5+x}\right)^{\frac{1}{x^2-x-2}}$; е) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-3x)}{\mathrm{arctg}\,2x}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-2x-8}{x^2+4x-32}$; б) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt[3]{5x+2}-3}{1-\sqrt{x-4}}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x^5+x}-\sqrt[3]{x^9+1}}{6x^3-x-1000}$;

г) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin\pi x}{\sin 12\pi x}$; д) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{3x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{x^2-x}}$; е) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\log_2(4-3\cdot2^x)}{\arcsin 5x}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^2-4x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x-2}{\sqrt[3]{26+x}-3}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+4x+5}{\sqrt{x^6+1}}$;

г) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\mathrm{tg}\,3x}{\sin x}$; д) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2x^2+1}{1-3x^2}\right)^{-\frac{2x+1}{x^2}}$; е) $\lim\limits_{x\to0}\left(5-\dfrac{4}{\cos x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 3x}}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{48+4x-x^3}{x^2+16x-80}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x}-1}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{arcctg}\,x\cdot\dfrac{x^2+1}{x}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos 2x}{\lg\cos x}$; д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\mathrm{tg}^2 x}$; е) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{\mathrm{tg}^2 3x}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+2x-12}{x^2+5x-14}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+x-19}{x^3+x-21}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\operatorname{ctg}2x$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{x+3}$; е) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\operatorname{tg}3-\operatorname{tg}x}{\ln 3-\ln x}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+6x+5}{x^2-x-30}$; б) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2+x-56}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8+17x^2+9x^4}{(2-3x)(4-2x)}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{\frac{2x^2+x+4}{x-1}}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}x(\ln(2x+1)-\ln(2x-1))$.

11. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$;

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos 5x\cdot\cos\dfrac{1}{2x-\pi}$; г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin x-\sin 3}{\sqrt{x^3-2x^2-8}-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x}$; е) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(\sqrt{x^2+3}-1)}{\operatorname{arctg}(x-1)}$.

12. а) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{x^4-4x^2+4}{x^3-2x}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\arccos\dfrac{x+\sqrt{x^5}}{x^2\ \sqrt{2x}+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$; г) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\cos 3-\cos x}{\sqrt{x^3+28}-\sqrt{x^2-8}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x\sin 2x}}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{x\operatorname{tg}x}}{1-\cos^2 x}$.

13. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+6x-16}{x^3-2x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x^3+1}-\sqrt{x+3}}{\sqrt[3]{2x^2+1}-\sqrt[3]{x+2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\sqrt{x^3+1}+9x}{x\ (\sqrt{x+7}+4)}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x+\cos x-2}{x\cdot\sin^2 x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\pi}\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}x-\sin x}}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}x}{\ln(1+\operatorname{tg}x)}$.

14. а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^3-5x^2+25x-125}{x^3-5x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+7}{(1-x)\ (1+4x)}$; г) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{6}}\dfrac{8\sin^3 x+1}{6x+\pi}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}(2-\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$; е) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{(1-3x)^2}{\operatorname{tg}3\pi x\cdot\sin 3\pi x}$.

15. а) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{9+2x^2}-x}{2x-\sqrt{x^2+27}}$;

в) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin^3 x}{\cos^2 x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{3x^2-1}{1-x^2}}$; е) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\log_3 x-1}{\operatorname{tg}\pi x}$.

16. а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+6x+9}{x^3+5x^2-18}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{10-x}-2}{x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2-1})$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos 5x}{\cos 3x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{3x}\right)^{\operatorname{ctg}\frac{1}{5x+2}}$; е) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos 3a-\cos 3x}{\sqrt{2x^2+2a^2}-\sqrt{x^2+3a^2}}$.

17. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-x^2-5x-3}{-3x^3-4x^2+x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{10-x}-\sqrt{9x}}{\sqrt{2x+2}-\sqrt{1+3x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{2-x^3}$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x-1}{\cos x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}(\sin 3x)^{\frac{1}{\sin x-\cos 2x}}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(5x+1)-\ln(1-5x)}{\arcsin 2x}$.

18. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{2x^3+3x^2-7x-10}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{2-\sqrt{2x^2-4}}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+\sqrt{4x^4+5}}{x^2+\sqrt{x^2-1}}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos 3\pi x}{\operatorname{tg}^2\pi x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+2x}{2x-3}\right)^{\frac{5-x^2}{2x}}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\dfrac{x}{4}\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{5}}{\log_3\cos 2x}$.

19. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{6x^3-23x^2+15x}{x^3-6x^2+27}$; б) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{3-\sqrt[3]{x^2+2}}{\sqrt[3]{6+x}-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x-\sqrt[3]{x^2+1}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-\sin 6x}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}(x^2-3x)\right)}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+4x}{4x-1}\right)^{\frac{2+4x^2}{3x}}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+3x)}{1+\operatorname{tg}2x}\right)^{\frac{2}{x}}$.

20. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4+2x-x^3}{-12+x^2+x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}-2}{x^2+3x-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2+4}-x)$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin^2 2x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 3}\left(3-\dfrac{2x}{3}\right)^{3\operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x+\operatorname{tg}^2 x}{x\sin 3x}$.

21. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-8x-3}{x^3-9x^2+27x-27}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt[3]{4x}-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2\sqrt{x}+11x^2}{7x-4\sqrt{x^5-100}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(3-\dfrac{2}{\cos 2x}\right)^{\operatorname{ctg}^2 2x}$; е) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2^x-2}{\ln x}$.

22. а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x^2+x-6)^2}{(x+3)(x^2+2x-3)}$; б) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x^2}-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to +\infty}\cos\dfrac{1}{x}\cdot\ln\left(\dfrac{x+1}{x^2-4x}\right)$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{(2\cos x-\sqrt{3})\cdot\sin 3x}{(2\sin x-1)\cdot\cos 2x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-x^2+x^3}{7-2x+x^3}\right)^{\frac{2+3x^4}{x^2}}$; е) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\log_2 x}$.

23. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4+x^2+x-22}{x^2+x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+11x})$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{x+1}{x^2+7x+6}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\sin\dfrac{1-x}{2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+3x-x^3}{1-x-x^3}\right)^{\frac{x^2+5}{3}}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\cos 3x}-e^{\cos x}}{\operatorname{arctg}2x}$.

24. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+x^3+3x^2-4x-1}{x^2+x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\cos\dfrac{2}{x}\cdot\dfrac{\sqrt{x+1}+x}{x^2-\sqrt{x}}$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}}\dfrac{\cos\pi x-\sin\pi x}{\operatorname{tg}4\pi x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x+4}{3x+4}\right)^{\frac{1}{(4x-3)\sin\pi x}}$; е) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\lg x-1}{\sqrt{x-9}-1}$.

25. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^4+7x^2-5x-4}{x^3+x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-\sqrt[3]{4x+15}}{1+\sqrt[3]{3x-10}}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x+5}-\sqrt{x^2-2x-1})$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin^3 2x-1}{\sin 4x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\lg x-1}{x^2-13x+30}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+2}{3+4x}\right)^{-4x}$.

26. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+x-10}{x^2+3x-10}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{8x^3+4x-5}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x^2-2x-15}-\sqrt[4]{x+5}}$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\cos^2 3x}{1-\sin 3x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5-2x}{11-2x}\right)^{\frac{1+3x^2}{x+5}}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(1-\dfrac{2}{x}\right)\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{1}{x}$.

27. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4+4x}{(x+1)^2-(x-1)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt[3]{16x}-4}{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x+5}{2x^2+4x-3}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin 5x}{1-\cos\sqrt{x}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{2x^2-1}{\sin^2 x}}$; е) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\ln\cos 6x}{\arcsin(3x-\pi)^2}$.

28. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2+5x-7}{2x^3-x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^3+x}-\sqrt{x^3-x})\,x$;

в) $\lim\limits_{x\to 3}\sin\dfrac{1}{x-3}\cdot\operatorname{tg}(x^2+3x-18)$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{x\cdot\sin 3x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+7}{x^2+7x-1}\right)^{x}$; е) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{\sin 2(x^2-1)}$.

29. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{x^3+2x-33}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{\sqrt[3]{21x-20}-\sqrt[3]{-5x+6}}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{0{,}0001x^3+\sqrt{x^7+1}}{10000-x^3\sqrt{x+4}}$; г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1+\cos 3\pi x}{\sin^2\pi x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 3}(10-3x)^{\frac{1}{\operatorname{tg}\pi x}}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}x[\ln(x-2)-\ln(x+3)]$.

30. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+4x-12}{x^3+x-10}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+7x-4}-\sqrt{x^2+3})$; г) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x-\operatorname{tg}x}{x^3}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+1}\right)^{\frac{1+x^2}{x-2}}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-1)[\ln x-\ln(x+5)]$.

31. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4+6x-2x^3}{6-13x+5x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt[3]{x+8}-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sin(3(x^2+x-2))}{\sin(x+2)}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{1/3}-(1-x)^{1/3}}{\sqrt{1-\cos x}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5-2x}{11-2x}\right)^{\frac{1+3x^2}{x}}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\lg(x+10)-\lg(2x+10)}{\sin x-\sin 2x}$.

Задача 4. [*гл.7, § 2, приклади 2, 3*]

Дослідити на неперервність задані функції, визначити точки розриву і встановити їх характер.

Варіанти завдань

1. $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x-4}\,e^{1/x}$. 2. $f(x)=e^{\frac{1}{x+2}}$.

3. $f(x)=2^{\frac{1}{\sin x}}$. 4. $f(x)=9^{\frac{1}{2-x}}$.

5. $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$. 6. $f(x)=2^{\frac{x-1}{x^2-1}}$.

7. $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-4}$. 8. $f(x)=3^{\frac{2x}{4-x}}$.

9. $f(x)=\dfrac{(x+1)^2-(x-1)^2}{x^2-x}$. 10. $f(x)=e^{\frac{x}{2x+2}}$.

11. $f(x)=\dfrac{1}{\ln(x-3)}$.

12. $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{|x|}$.

13. $f(x)=\dfrac{x}{\ln(1+x)}$.

14. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x(x+2)}$.

15. $f(x)=2^{-\frac{1}{x-3}}$.

16. $f(x)=\dfrac{4}{x^2-2x+1}$.

17. $f(x)=x+\dfrac{x+2}{|x+2|}$.

18. $f(x)=\dfrac{2|x-1|}{x^2-x^3}$.

19. $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}\,3^{1/x}$.

20. $f(x)=\dfrac{12}{x^2-6x+5}$.

21. $f(x)=3^{\frac{4}{1-x}}+1$.

22. $f(x)=5^{\frac{3}{x+4}}+1$.

23. $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-6x+8}$.

24. $f(x)=x+1+\dfrac{|x|}{x}$.

25. $f(x)=\begin{cases} x^2+2, & x\le 1,\\ x-1, & x>1.\end{cases}$

26. $f(x)=\begin{cases} -1/x, & x<0,\\ 2x+x^2, & x\ge 0.\end{cases}$

27. $f(x)=\begin{cases} 1/(x-1), & x<0,\\ (x+1)^2, & 0\le x\le 2,\\ 1-x, & x>2.\end{cases}$

28. $f(x)=\begin{cases} 2^{-x}, & -1\le x<1,\\ 1, & x=1,\\ x+1, & x>1.\end{cases}$

29. $f(x)=\begin{cases} -x^2+4x, & x<0,\\ 5x+1, & x\ge 0.\end{cases}$

30. $f(x)=\begin{cases} 4\cdot 3^x, & x<0,\\ 5+x, & x\ge 0.\end{cases}$

31. $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 1,\\ \dfrac{2}{x-1}, & x>1.\end{cases}$

Задача 5. [*гл.7, § 2, приклад 5*]

Визначити те значення параметра A, за якого функція $f(x)$ буде неперервною (якщо можливо). Зробити рисунок.

Варіанти завдань

1. $f(x)=\begin{cases} x^3, & x\le 2,\\ 2x+A, & x>2.\end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases} 1/x, & x<-1,\\ x^2+A, & x\ge -1.\end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+1}, & x<1,\\ -Ax, & x\ge 1.\end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases} \cos\dfrac{\pi x}{2}, & x<2,\\ x^2+4x+A, & x\ge 2.\end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases} \sin x, & x\le 0,\\ x+A, & x>0.\end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases} 4+Ax, & x<-2,\\ x^2-1, & x\ge -2.\end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases} \lg(x^2+1), & x\le 3,\\ \cos\pi x+A, & x>3.\end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases} 2x^2+6, & x<1,\\ A(x+1)^2, & x\ge 1.\end{cases}$

9. $f(x)=\begin{cases} 2^{-x}, & x\le -1,\\ Ax+2, & x>-1.\end{cases}$

10. $f(x)=\begin{cases} x+3, & x\le 0,\\ A\cdot 3^x+2, & x>0.\end{cases}$

11. $f(x)=\begin{cases} x^2-4, & x\le 2,\\ -x+A, & x>2.\end{cases}$

12. $f(x)=\begin{cases} x^2+4, & x\le -1,\\ x+A, & x>-1.\end{cases}$

13. $f(x)=\begin{cases} x^2+4x+3, & x\le 1,\\ -4x+A, & x>1.\end{cases}$

14. $f(x)=\begin{cases} \sin\pi x, & x\le 1,\\ -x^2+2x+A, & x>1.\end{cases}$

15. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+1}, & x<3,\\ \dfrac{Ax}{3}, & x\ge 3.\end{cases}$

16. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{9}{x^2}, & x\le -3,\\ \dfrac{Ax}{3}, & x>-3.\end{cases}$

17. $f(x)=\begin{cases} \cos x, & x\le -\dfrac{\pi}{2},\\ Ax+1, & x>-\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

18. $f(x)=\begin{cases} \operatorname{arctg} x, & x\le \dfrac{\pi}{4},\\ Ax+3, & x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$

19. $f(x)=\begin{cases} x+3, & x\le 1,\\ -Ax^2, & x>1.\end{cases}$

20. $f(x)=\begin{cases} 2^x, & x<0,\\ A\cdot 2^{-x}, & x\ge 0.\end{cases}$

21. $f(x)=\begin{cases}-x^2+4x+A, & x\le 1,\\ x^2-1, & x>1.\end{cases}$ 22. $f(x)=\begin{cases}\ln x, & x\le e,\\ Ax^2-5, & x>e.\end{cases}$

23. $f(x)=\begin{cases}2x, & x\le 1,\\ -x^2+Ax, & x>1.\end{cases}$ 24. $f(x)=\begin{cases}3x, & x\le 1,\\ -x^2+A, & x>1.\end{cases}$

25. $f(x)=\begin{cases}3^{-x}, & x\le -1,\\ Ax^2+4x-5, & x>-1.\end{cases}$ 26. $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\le \dfrac{\pi}{2},\\ \sin x+A, & x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

27. $f(x)=\begin{cases}x^2+4x+3, & x\le 0,\\ -x+A, & x>0.\end{cases}$ 28. $f(x)=\begin{cases}x+2, & x\le 1,\\ -x^2-4x+A, & x>1.\end{cases}$

29. $f(x)=\begin{cases}\lg(x^2+1), & x\le 3,\\ Ax^2-2x-2, & x>3.\end{cases}$ 30. $f(x)=\begin{cases}x^2+4, & x\le 1,\\ Ax, & x>1.\end{cases}$

31. $f(x)=\begin{cases}\cos\pi x, & x\le 1,\\ -x^2+A, & x>1.\end{cases}$

§5. Індивідуальне завдання 5.

Диференціальне числення функцій однієї змінної

Задача 1. [*гл.8, § 1, приклади 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9*]
Продиференціювати задані функції.

У пунктах а), б), в), г), д) знайти похідні y'; у пункті е) знайти y', y'', dy, d^2y; у пункті є) знайти $y'=\dfrac{dy}{dx}$, $y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Варіанти завдань

1. а) $y=\left(1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^3+\sqrt[4]{(2x^2-1)^5}$; д) $e^x\sin y-e^{-y}\cos x=0$;

б) $y=\dfrac{\arccos x^3}{\sqrt{1+2\sin^8 x^4}}+2^{\cos x}\cdot \mathrm{tg}^4 x$; е) $y=e^{x^2}$;

в) $y=\ln^5(e^{2x}+1)-2\,\mathrm{arctg}^4(e^x)$; є) $\begin{cases}x=\cos 3t,\\ y=\ln\sin 3t.\end{cases}$

г) $y=(\cos x)^{\sin^4 x}$;

2. а) $y=(2+x)\sqrt{3-x}+\dfrac{7}{(2x-3)^4}$; д) $xy=\mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{y}$;

б) $y=5\ln^4(\arcsin^2 5x)+4^{-\sin x}\cdot \mathrm{ctg}3x$; е) $y=(\arcsin x)^2$;

в) $y=\ln^3(x+\sqrt{4+x^2})$; є) $\begin{cases}x=3\cos t,\\ y=3\sin t.\end{cases}$

г) $y=(\mathrm{arctg}\,x^4)^{x^2+1}$;

3. а) $y=\dfrac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x}+\dfrac{3}{(7x-2)^5}$; д) $\ln x+e^{-y/x}=5$;

б) $y=4\arcsin^3(\ln^2 x)$; е) $y=(1+x^2)\,\mathrm{arctg}\,x$;

в) $y=4^{-x}\cdot\ln^5(x^2-1)$; є) $\begin{cases}x=t-\sin t,\\ y=1-\cos t.\end{cases}$

г) $y=(\mathrm{tg}\,x)^{x^2+3}$;

4. а) $y=\sqrt[5]{x+\sqrt{x}}-\dfrac{2}{(4x-5)^6}$; д) $3^x+3^y=\sin y$;

б) $y=\arcsin^2\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^3+\mathrm{tg}^3 2x$; е) $y=\sqrt{1+x^2}$;

в) $y=\sqrt{\ln^4 x+1}+\ln^5(\sqrt{x}+1)^3$; є) $\begin{cases}x=t-\cos^2 t,\\ y=\sin^2 t.\end{cases}$

г) $y=(\arccos 5x)^{x^3+2}$;

5. а) $y=\frac{1}{8}\cdot\frac{x^8}{(1-x^2)^4}+\sqrt[5]{(7-12x^2)^3}$; д) $x=y+\operatorname{arctg} y$;

б) $y=\sqrt[4]{1+\cos^2 x^3}-\arcsin^3 2x$; е) $y=\operatorname{tg} x$;

в) $y=\ln^7\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}$; є) $\begin{cases}x=\ln t,\\ y=t^2-1.\end{cases}$

г) $y=(\operatorname{arctg} x)^{1/x}$;

6. а) $y=x\sqrt{x^2-1}-\frac{5}{(2x^2-3x+7)^4}$; д) $x^3=\frac{x-y}{x+y}$;

б) $y=5\sin^4 x^3+\cos^4 x+\operatorname{arctg}^5 3x$; е) $y=x^3e^x$;

в) $y=\ln\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}+e^{-\cos^2 3x}$; є) $\begin{cases}x=t^3,\\ y=\ln t^2.\end{cases}$

г) $y=(\operatorname{tg} x)^{\sqrt{x}}$;

7. а) $y=\left(\frac{1+x^2}{1-x}\right)^3+\sqrt[4]{(3x^2-1)^5}$; д) $e^x+e^y-2^{xy}-1=0$;

б) $y=\sin x^4\cdot\cos^3 x^2+\arcsin^3 2x$; е) $y=e^{-x^2}$;

в) $y=\ln^3\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x+1}$; є) $\begin{cases}x=t\cos t,\\ y=t\sin t.\end{cases}$

г) $y=(\sin 5x)^{\frac{1}{\ln x}}$;

8. а) $y=\sqrt{x+2\sqrt{x}}+\frac{3}{(5x^2+2x-1)^2}$; д) $x\sin y+y\sin x=0$;

б) $y=\operatorname{arctg}^2\frac{1+x}{1-x}+\operatorname{ctg}^3 4x$; е) $y=\operatorname{ctg} x$;

в) $y=\ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}+e^{\operatorname{tg}^2 3x}$; є) $\begin{cases}x=\arcsin t,\\ y=\sqrt{1-t^2}.\end{cases}$

г) $y=(\cos 3x^2)^{\ln x}$;

9. а) $y=\frac{3}{\sqrt[3]{x}}-\frac{2}{\sqrt{x}}+\sqrt[7]{(8x-3)^5}$; д) $x^4+y^4=x^2y^2$;

б) $y=\operatorname{arctg}^5\sqrt{4x^2-1}+\operatorname{ctg}^7 x^3$; е) $y=\arcsin\frac{x}{2}$;

в) $y=\ln^4(\sin x^3+\sqrt{1+\sin^2 5x})$; є) $\begin{cases}x=\ln(1+t^2),\\ y=t^2.\end{cases}$

г) $y=(\ln 7x)^{1/x}$;

10. а) $y=(1-2\sqrt{x})^4+\frac{4}{(7x^2-3x+2)^3}$; д) $3^x+3^y=\cos y$;

б) $y=\sin^5\sqrt{1+x^2}+\operatorname{arctg}^4 3x$; е) $y=\arccos 2x$;

в) $y=\ln^4\arccos^3 2x$; є) $\begin{cases}x=e^{-3t},\\ y=e^{3t}.\end{cases}$

г) $y=(\sin x)^{\sqrt{x}}$;

11. а) $y=\sqrt[3]{7+5x^3}+\frac{3}{(5x-4)^6}$; д) $y=5x+\operatorname{arctg} y$;

б) $y=5\arcsin^3\frac{2}{x^4}+\operatorname{arctg}5x^2$; е) $y=-\frac{5}{x+3}$;

в) $y=\ln^5(x-2^{-3x})$; є) $\begin{cases}x=\ln t,\\ y=\frac{1}{1-t}.\end{cases}$

г) $y=(\sin 3x)^{\arccos x}$;

12. а) $y=\frac{x^3}{3\sqrt{1-x^4}}-\sqrt[5]{(3x^2+4x-5)^2}$; д) $\sin(xy)+\cos y=0$;

б) $y=\arcsin^5\frac{x^2-1}{x^2}+\operatorname{arctg}^3 4x$; е) $y=\sqrt{4-x^2}$;

в) $y=\ln^7\frac{\sqrt{1-x^2}}{3x}$; є) $\begin{cases}x=\operatorname{arctg} t,\\ y=\frac{t^2}{2}.\end{cases}$

г) $y=(\operatorname{ctg} 2x^3)^{\sin^2 x}$;

13. а) $y=\dfrac{2}{2x-1}-\dfrac{1}{x}-4\sqrt[4]{(1+3x^2)^3}$;

б) $y=\sqrt{\operatorname{arctg} x^3}-\arcsin^5(x^2+1)$;

в) $y=\ln^2(x^4-\sin^3 x^5)$;

г) $y=(\operatorname{tg}(2x+1))^{3/x}$;

д) $y^2=x\sin y$;

е) $y=\sqrt{\operatorname{tg}3x}$;

є) $\begin{cases} x=\cos 2t, \\ y=\sin^2 t. \end{cases}$

14. а) $y=\sqrt[5]{\dfrac{x+2}{x-2}}-\dfrac{4}{(5x+2)^3}$;

б) $y=\sin^2 x^3+\arccos^3 5x$;

в) $y=\sqrt[3]{\ln^2 x+5}+\ln^5 \operatorname{tg} x^3$;

г) $y=(\operatorname{tg}(x^2+4))^{\sin x^2}$;

д) $x\ln y+\dfrac{y^2}{x}=3$;

е) $y=e^{\sqrt{x}}$;

є) $\begin{cases} x=5t^4+t, \\ y=\ln t. \end{cases}$

15. а) $y=\dfrac{1}{10x^5}-\dfrac{1}{4x^4}+\sqrt[5]{(3x+4x^2)^3}$;

б) $y=\operatorname{tg}^3 2x\cdot\arcsin x^5$;

в) $y=\dfrac{1}{2}\ln^5 \operatorname{tg}^2 x+\ln^4\cos(x^3+2)$;

г) $y=\left(\dfrac{x}{x+5}\right)^x$;

д) $y\cos y-\cos(x-y)=0$;

е) $y=xe^{x^2}$;

є) $\begin{cases} x=\cos^3 t, \\ y=\sin^3 t. \end{cases}$

16. а) $y=\dfrac{1}{x-\sqrt{4+x^2}}+\sqrt[3]{5+4x-x^2}$;

б) $y=\operatorname{arctg}^2\left(\dfrac{1}{x}+5x\right)^3+\sin^2 3x$;

в) $y=\ln^7 \sin^5(2x^3+9)$;

г) $y=(\cos 5x)^{\sin\sqrt{x}}$;

д) $x+\sqrt{xy}+y=5$;

е) $y=\dfrac{1}{1+x^3}$;

є) $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t). \end{cases}$

17. а) $y=\dfrac{5}{(x^2-x+1)^4}+\sqrt[3]{(5x-7)^2}$;

б) $y=\sin^3(\cos^5 4x)+\arcsin^3 2x$;

в) $y=\dfrac{1}{\ln^5(x^2+1)}+e^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$;

г) $y=(\cos 3x)^{\arcsin x^2}$;

д) $x^2-2xy+y^3=1$;

е) $y=\dfrac{1}{7+\sqrt{x}}$;

є) $\begin{cases} x=\operatorname{arctg} t, \\ y=\ln(1+t^2). \end{cases}$

18. а) $y=\dfrac{\sqrt{x^2+7}}{4x}+\dfrac{5}{(4x-7)^4}$;

б) $y=\dfrac{\arcsin^2(x+5)}{\arccos x^3}+\operatorname{tg}^6 2x$;

в) $y=\dfrac{1}{3}\ln^3\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+x+1}\right)^4$;

г) $y=(\sin(x^2+3))^{5x}$;

д) $x^2+3xy+y^3+1=0$;

е) $y=\sqrt{1-x^2}\arcsin x$;

є) $\begin{cases} x=\ln t, \\ y=t^3. \end{cases}$

19. а) $y=\dfrac{3}{x^2(x-2)}-\sqrt[5]{(3x^2+4x)^7}$;

б) $y=(\arcsin^5 x^3+2x^2)^7+5^{x^2}$;

в) $y=x\ln^2(2x+5)+e^{-\operatorname{ctg}^2 5x}$;

г) $y=(\operatorname{tg}(x^2+7))^{\sin x^3}$;

д) $y^3-3y+10x=0$;

е) $y=\log_7 x$;

є) $\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=\sin t. \end{cases}$

20. а) $y=\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{16}+\dfrac{7}{(5-4x^2)^3}$;

б) $y=\dfrac{\cos x}{\ln\sin x}+2^{\operatorname{tg}x}\cdot\operatorname{arctg}^5 3x$;

в) $y=e^{-x^2}\ln^6(x-2x^2)+\ln^2\operatorname{tg}(x^2+1)$;

г) $y=(\cos^2 x)^{\ln^5 x}$;

д) $y=\cos(x+y)$;

е) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;

є) $\begin{cases} x=\ln t, \\ y=1/t. \end{cases}$

21. а) $y = x^6\sqrt{4-x^2} - \dfrac{8}{(4x^2-7)^5}$;

б) $y = e^{\cos x^5}\sin^7 x + \operatorname{arctg}^6 7x$;

в) $y = \ln^5\left(1+\dfrac{1}{\cos x^4}\right) + \ln^5 \operatorname{tg} x^4$;

г) $y = (\operatorname{tg} 7x^4)^{\sqrt{3x+1}}$;

д) $x - y + 7\cos y = 0$;

е) $y = e^{\operatorname{arctg} x}$;

є) $\begin{cases} x = e^{-2t}, \\ y = e^{-3t}. \end{cases}$

22. а) $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}} + \dfrac{5}{(2x^2+4x-1)^3}$;

б) $y = \dfrac{2\sin^2 x}{\cos 2x} + 2^{-x}\cdot \operatorname{arctg}^3 4x$;

в) $y = \dfrac{\ln^4 \sin x}{\ln\cos^7 x} + 2^{\operatorname{tg}^4 x}$;

г) $y = (\operatorname{sh}(x^2+2))^{3\cos x}$;

д) $5^x + 5^y = 5^{x+y}$;

е) $y = \dfrac{x}{x^2-1}$;

є) $\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = t^3. \end{cases}$

23. а) $y = \dfrac{x}{7\sqrt{49+x^2}} - \dfrac{4}{(2x-7)^6}$;

б) $y = \dfrac{3\cos x}{\sqrt{\cos 2x}} + e^{-\cos x}\cdot \operatorname{arctg} 7x^5$;

в) $y = \ln^8(3+x+\sqrt{6x+x^2})$;

г) $y = (\operatorname{arctg} 5x)^{1/x}$;

д) $xy^2 - y\ln x = 3$;

е) $y = \sqrt{2x-x^2}$;

є) $\begin{cases} x = \arccos\sqrt{t}, \\ y = \sqrt{t-t^2}. \end{cases}$

24. а) $y = x^5\cdot\sqrt[3]{x^6-8} - \dfrac{6}{(2x^2-5)^3}$;

б) $y = e^{\cos^2 x}\sin x^3 + \operatorname{arctg}^3 2x$;

в) $y = \ln^5\left(1+\dfrac{1}{\cos x}\right)$;

г) $y = (\cos 5x)^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$;

д) $e^{2x} + e^{3y} = 7xy$;

е) $y = \cos e^x + \sin e^x$;

є) $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$

25. а) $y = \dfrac{5}{\sqrt[5]{x^3}} + \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{7} + \dfrac{(x^3-2)^4}{3}$;

б) $y = \sqrt{\sin\sqrt{x}} + 2^{\cos x}\cdot \operatorname{arctg} 5x^3$;

в) $y = \dfrac{\ln^2(3x+1)}{\cos 3x^4}$;

г) $y = (\cos 3x)^{1/x}$;

д) $x + y + 7\cos y = 0$;

е) $y = e^{\arcsin x}$;

є) $\begin{cases} x = e^{2t}, \\ y = e^{3t}. \end{cases}$

26. а) $y = \dfrac{5+\sqrt{x}}{5-\sqrt{x}} + \dfrac{4}{(3x-5)^2}$;

б) $y = \cos^3 4x\cdot \operatorname{arctg}^5 6x$;

в) $y = \ln^7(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}) + \dfrac{\ln^3 x}{\operatorname{ctg}(x-3)}$;

г) $y = (\sin x)^{\ln 5x}$;

д) $x + y + e^y \operatorname{arctg} x = 0$;

е) $y = e^{\arccos x}$;

є) $\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = \sin 3t. \end{cases}$

27. а) $y = \dfrac{x^5}{\sqrt{1-8x^4}} + \dfrac{1}{(6x-1)^3}$;

б) $y = \sqrt[3]{1+\operatorname{tg}^2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)} + \arccos^5 7x$;

в) $y = 2^{\sqrt{\sin x}} + \ln^3 \operatorname{tg} x^2$;

г) $y = (\sqrt{4x+3})^{\operatorname{arctg} 3x}$;

д) $(x+y)\cos x + \sin(xy) = 0$;

е) $y = \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^8$;

є) $\begin{cases} x = (1+\cos t)t, \\ y = (1-\cos t)t^2. \end{cases}$

28. а) $y = \sqrt{x\sqrt{x}} + \dfrac{7}{(1-8x^2)^3}$;

б) $y = \arcsin^5 \dfrac{2x}{1+x^2} + 3^{\operatorname{tg} x}$;

в) $y = \log_5^3(x+\sqrt{x^2+9})$;

г) $y = (x^2+4)^{\cos^5 x}$;

д) $\sin(x+y) = \cos(x+y)$;

е) $y = \log_7 x$;

є) $\begin{cases} x = 1/t, \\ y = t^3+t^2+1. \end{cases}$

29. а) $y=\sqrt[5]{\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}}+\dfrac{3}{(7x^3-x^2-4)^2}$; д) $\operatorname{arctg} y = x+y$;

б) $y=\arccos^3\dfrac{2-x}{x\sqrt{2}}+e^{-\operatorname{tg}^2 x}$; е) $y=\ln(5x+9)$;

в) $y=\ln^4\dfrac{x^2}{\sqrt{1-9x^4}}$; є) $\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=\cos t. \end{cases}$

г) $y=(\operatorname{tg} x)^{(x^3+2)}$;

30. а) $y=x\sqrt{1-x^4}-\dfrac{8}{(6x^2+3x-7)^3}$; д) $3y^2x=e^{y/x}$;

б) $y=3^{\cos x}\cdot\arcsin^2 3x$; е) $y=\dfrac{x-3}{x+4}$;

в) $y=\ln^5(1+\cos^2 x)+e^{-\sin 2x}$; є) $\begin{cases} x=\cos^5 t, \\ y=\sin^5 t. \end{cases}$

г) $y=(\operatorname{tg} x)^{1/\sin x}$;

31. а) $y=x^2\cdot\sqrt[3]{1+x}+\dfrac{3}{(8x-5)^7}$; д) $5y^3x=\cos(xy)$;

б) $y=4^{-\sin x}\cdot\operatorname{arctg}^2 3x$; е) $y=\ln(10x+1)$;

в) $y=\dfrac{x}{\sin^5(x^2+3)}+\ln^3\cos^2 4x$; є) $\begin{cases} x=t+\sin t, \\ y=-\cos t. \end{cases}$

г) $y=(\sin 3x)^{1/x}$;

Задача 2. [*гл.8, § 2, приклади 1 – 4*]
Розв'язати вказані задачі.

Варіанти завдань

1. Знайти точку на кривій $y=\dfrac{x^4}{4}-7$, дотична в якій паралельна прямій $y=8x-4$, і написати рівняння цієї дотичної.

2. Знайти точку на кривій $y=-3x^2+4x+7$, дотична в якій перпендикулярна до прямої $x-20y+5=0$, і написати рівняння цієї дотичної.

3. Написати рівняння дотичної до кривої $y=x\ln x$, яка паралельна прямій $y-x-5=0$.

4. Написати рівняння нормалі до кривої $y=x-\dfrac{1}{x}$, яка паралельна прямій $2y+x+3=0$.

5. Написати рівняння дотичної до кривої $y=2+\sqrt{x}$, перпендикулярної прямій $y+4x-4=0$.

6. Написати рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=\dfrac{x^2+1}{x^3-1}$ в точці з абсцисою $x_0=-1$.

7. Знайти точку на кривій $y=3x^2-4x+6$, дотична в якій паралельна прямій $8x-y-5=0$, і написати рівняння цієї дотичної.

8. Знайти точку на кривій $y=5x^2-4x+1$, дотична в якій перпендикулярна до прямої $x+6y+15=0$, і написати рівняння цієї дотичної.

9. Знайти точки на кривій $y=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{9x^2}{2}+20x-7$, в яких дотична паралельна осі Ox.

10. Написати рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=\dfrac{3x^2+1}{x^2+3}$ в точці з абсцисою $x_0=1$.

11. Написати рівняння дотичної до кривої $y=x\cos x$, яка перпендикулярна прямій $x+y+3=0$.

12. Написати рівняння нормалі до кривої $y=e^{1-x^2}$, яка перпендикулярна прямій $2x+y-4=0$.

13. Написати рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=x\ln(1+x^2)$ в точці з абсцисою $x_0=1$.

14. Вияснити, в якій точці кривої $y=\frac{x^2}{4}-7x+5$ дотична паралельна прямій $y-2x-5=0$, і написати рівняння цієї дотичної.

15. Вияснити, в якій точці кривої $y=7x^2-5x+4$ дотична перпендикулярна прямій $23y+x-1=0$, і написати рівняння цієї дотичної.

16. Знайти точку на кривій $y=-x^2+7x+16$, дотична до якої паралельна прямій $y-3x-4=0$, і написати рівняння цієї дотичної.

17. Вияснити, в яких точках кривої $y=\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+7x+4$ дотична складає з віссю Ox кут $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

18. Вияснити, в яких точках кривої $y=2x^3-1$ дотична складає з віссю Ox кут $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

19. Написати рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=\sin x+\cos x$ в точці з абсцисою $x_0=\frac{\pi}{4}$.

20. Написати рівняння дотичної до кривої $y=e^{\cos x}$, паралельної прямій $y+x+3=0$.

21. Написати рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=x^3+\sqrt[3]{x}$ в точці з абсцисою $x_0=-1$.

22. Написати рівняння дотичної до кривої $y=1-\frac{1}{x^2}$, паралельної прямій $2y+32x+7=0$.

23. В якій точці кривої $y^2=4x^3$ дотична перпендикулярна до прямої $x+3y-1=0$? Написати рівняння цієї дотичної.

24. Вияснити, в яких точках кривої $y=\sin 2x$ дотична складає з віссю Ox кут $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

25. Написати рівняння нормалі до кривої $y=x-\sqrt{x}$, перпендикулярної до прямої $4y-3x+5=0$.

26. Написати рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=\frac{x^3-2}{x^2-4}$ в точці з абсцисою $x_0=3$.

27. Написати рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=\sqrt[3]{x^2-1}$ в точці з абсцисою $x_0=1$.

28. Написати рівняння дотичної до кривої $y=x^3-3x^2-5$, яка перпендикулярна прямій $2x-6y+1=0$.

29. Написати рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=\frac{x^3+1}{x^2+4}$ в точці з абсцисою $x_0=-1$.

30. Знайти кути, під якими перетинаються лінії, задані рівняннями $y=x^2$ і $x^2+2y^2=3$.

31. На дузі параболи $y=x^2$, що обмежена точками $A(1,1)$, $B(3,9)$, знайти точку, дотична в якій паралельна хорді AB.

Задача 3. [*гл.8, § 2, приклади 12 – 17*]
Знайти границі, використовуючи правило Лопіталя.

Варіанти завдань

1. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}x^{\sin x}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0+0}x^{\frac{3}{4+\ln x}}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}+\sin x-1}{\ln(1+x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0+0}(\operatorname{ctg}x)^{1/\ln x}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\ln\sin 3x}{\ln\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg}x)^{\sin x}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\ln\operatorname{tg}7x}{\ln\operatorname{tg}2x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{1/x}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^{3}}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x)^{2x-\pi}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg}x}{x^{3}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{1}{\ln(e^{x}-1)}}$.

11. а) $\lim\limits_{x\to +\infty}x^{2}e^{-x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$.

12. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\arcsin x)^{\operatorname{tg}x}$.

13. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{x}-7^{x}}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(e^{x}+x)^{1/x}$.

14. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{\operatorname{arctg}x}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$.

15. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\ln(1+x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x^{2}}$.

16. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^{3}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{3/x^{2}}$.

17. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{\sin^{2}5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 5x)^{4/x^{2}}$.

18. а) $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x)^{1/x}$.

19. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\sin 7x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$.

20. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{7}{x-1}}$.

21. а) $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln x}{\ln\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{9}{x^{2}-1}}$.

22. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg}x}{e^{3/x}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^{2}}}$.

23. а) $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{\ln(x-1)}{\operatorname{ctg}\pi x}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$.

24. а) $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{\ln(x-1)}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{7}{x}\right)^{x}$.

25. а) $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{\ln(x-a)}{\ln(e^{x}-e^{a})}$; б) $\lim\limits_{x\to +0}x^{\frac{6}{1+2\ln x}}$.

26. а) $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg}x}$; б) $\lim\limits_{x\to +0}(\operatorname{ctg}2x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

27. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

28. а) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(e^{2x}+x)^{1/x}$.

29. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\sin\pi x}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)^{\cos x}$.

30. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2^x)^{1/x}$.

31. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{tg}x}-e^x}{\operatorname{tg}x-x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2+5}\right)^x$.

Задача 4. [*гл.8, § 2, приклади 23 – 26*]

Дослідити функції методами диференціального числення та побудувати їх графіки.

Варіанти завдань

1. а) $y=x^2+\dfrac{2}{x}$; б) $y=e^{-1/x}$.

2. а) $y=\dfrac{x}{x^2-4}$; б) $y=x-\ln(x+1)$.

3. а) $y=\dfrac{6x^2-x^4}{9}$; б) $y=\ln(x^2+1)$.

4. а) $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$; б) $y=(x+1)e^{2x}$.

5. а) $y=\dfrac{1}{x^2+3}$; б) $y=(x-1)e^{3x+1}$.

6. а) $y=\dfrac{3x^4+1}{x^3}$; б) $y=\dfrac{\ln x}{x}$.

7. а) $y=\dfrac{x^4-3}{x}$; б) $y=x^2e^{-x^2}$.

8. а) $y=\dfrac{8}{x^2-4}$; б) $y=xe^{-x}$.

9. а) $y=\dfrac{16}{x^2(x-4)}$; б) $y=x+\dfrac{\ln x}{x}$.

10. а) $y=\dfrac{x}{5+x^2}$; б) $y=x^2e^{-x}$.

11. а) $y=x^2+\dfrac{1}{x^2}$; б) $y=x^3e^{-x}$.

12. а) $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$; б) $y=\dfrac{1}{e^x-1}$.

13. а) $y=\dfrac{4-2x}{1-x^2}$; б) $y=x^2e^{-x^2/2}$.

14. а) $y=\dfrac{1}{x}+4x^2$; б) $y=x+e^{-x}$.

15. а) $y=x+\dfrac{4}{x+2}$; б) $y=\dfrac{e^x}{x}$.

16. а) $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$; б) $y=e^{2x-x^2}$.

17. а) $y=\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^4}$; б) $y=\dfrac{x^2}{2\ln x}$.

18. а) $y=\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^3}$; б) $y=\dfrac{1}{2}x^2-\ln x$.

19. а) $y=2+\dfrac{12}{x^2-4}$; б) $y=x\ln x$.

20. а) $y=(x^2-1)^3$; б) $y=x^2\ln x$.

21. а) $y=\dfrac{5x}{4-x^2}$; б) $y=\dfrac{x^2}{\ln x}$.

22. а) $y=\dfrac{x}{(x-1)^2}$; б) $y=e^{\frac{1}{2-x}}$.

23. а) $y=\dfrac{2+x}{(x+1)^2}$; б) $y=e^{1/x}$.

24. а) $y=\dfrac{x+2}{x^3}$; б) $y=x^4-2x^2+3$.

25. а) $y=\dfrac{1-x^3}{x^2}$; б) $y=2x^3+3x^2-5$.

26. а) $y=\frac{4+x}{x^2}$; б) $y=2x^3+9x^2+12x$.

27. а) $y=\frac{2x^3}{x^2+1}$; б) $y=\frac{1}{4}x^4-2x^3+\frac{7}{4}$.

28. а) $y=\frac{x^2}{x-1}$; б) $y=\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-1$.

29. а) $y=x+\frac{x}{3x-1}$; б) $y=1+2x^2-x^4$.

30. а) $y=x+\frac{4}{x+2}$; б) $y=2-3x^3+x^4$.

31. а) $y=\frac{16}{x^2(x-4)}$; б) $y=2x^3-3x^2+1$.

Задача 5. [*гл.8, § 2, приклад 27*]
Знайти найменше та найбільше значення функції на відрізку $[a,b]$.

Варіанти завдань

1. $y=x^2+\frac{16}{x}-16$, $[1,4]$.
2. $y=x-4\sqrt{x}+5$, $[0,4]$.
3. $y=3-x-\frac{4}{(x+2)^2}$, $[-1,2]$.
4. $y=\ln(x^2-2x+2)$, $[0,3]$.
5. $y=x\ln x$, $[1, 2]$.
6. $y=x^3e^{x+1}$, $[-4,0]$.
7. $y=\frac{3x}{x^2+1}$, $[0,5]$.
8. $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$, $[-0{,}5;0]$.
9. $y=\frac{x^5-8}{x^4}$, $[-3,-1]$.
10. $y=x^5-5x^4+5x^3+1$, $[-1,2]$.
11. $y=(3-x)e^{-x}$, $[0,5]$.
12. $y=108x-x^4$, $[-1,4]$.
13. $y=\frac{4x}{4+x^2}$, $[-4,2]$.
14. $y=-\frac{2(x^2+3)}{x^2+2x+5}$, $[-5,1]$.

15. $y=\frac{4}{x^2}-8x-15$, $[-2;-0{,}5]$.
16. $y=8x+\frac{4}{x^2}-15$, $[0{,}5;2]$.
17. $y=\frac{2(x^2+3)}{x^2-2x+5}$, $[-3,3]$.
18. $y=\frac{10(x+1)}{x^2+2x+2}$, $[-1,2]$.
19. $y=2x^2+\frac{108}{x}-59$, $[2,4]$.
20. $y=\frac{10x}{1+x^2}$, $[0,3]$.
21. $y=4-x-\frac{4}{x^2}$, $[1,4]$.
22. $y=3-x-\frac{4}{(x+2)^2}$, $[-1,2]$.
23. $y=(x+2)e^{1-x}$, $[-2,2]$.
24. $y=\ln(x^2-2x+4)$, $[-1;1{,}5]$.
25. $y=\frac{x^3}{x^2-x+1}$, $[-1,1]$.
26. $y=\sqrt{x-x^3}$, $[-2,2]$.
27. $y=\frac{x^3+4}{x^2}$, $[1,2]$.
28. $y=\frac{x}{9-x^2}$, $[-2,2]$.
29. $y=e^{4x-x^2}$, $[1,3]$.
30. $y=\frac{x^5-8}{x^4}$, $[-3,-1]$.
31. $y=x^2-2x+\frac{2}{x-1}$, $[-1,3]$.

ГЛАВА 10. **ДОВІДКОВИЙ МАТЕРІАЛ**

§1. Основні формули векторної алгебри

Таблиця 1.1

Величина або співвідношення, що визначаються	Формула
1	2
Сума векторів	$\vec a+\vec b=(a_x+b_x)\,\vec i+(a_y+b_y)\,\vec j+(a_z+b_z)\,\vec k$.
Добуток вектора на число	$\alpha\vec a=\alpha a_x\vec i+\alpha a_y\vec j+\alpha a_z\vec k$.
Скалярний добуток векторів	$(\vec a,\vec b)=\vec a\,\vec b=\lvert\vec a\rvert\lvert\vec b\rvert\cos\varphi$ $(\vec a,\vec b)=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.
Векторний добуток векторів	$[\vec a,\vec b]=\vec a\times\vec b=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$.
Мішаний добуток векторів	$(\vec a,\vec b,\vec c)=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$.
Подвійний векторний добуток	$\vec a\times(\vec b\times\vec c)=\vec b(\vec a\,\vec c)-\vec c(\vec a\,\vec b)$; $(\vec a\times\vec b)\times\vec c=\vec b(\vec a\,\vec c)-\vec a(\vec b\,\vec c)$.
Довжина вектора	$\lvert\vec a\rvert=\sqrt{(\vec a,\vec a)}=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$.
Відстань між точками $M_1(x_1,y_1,z_1)$ та $M_2(x_2,y_2,z_2)$	$\rho(M_1,M_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.
Кут між векторами	$\cos\varphi=\dfrac{(\vec a,\vec b)}{\lvert\vec a\rvert\lvert\vec b\rvert}$; $\cos\varphi=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$.

Продовження таблиці 1.1

1	2
Координати точки, що ділить відрізок у даному відношенні λ	$\vec r=\dfrac{\vec r_1+\lambda\vec r_2}{1+\lambda}$; $x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ z=\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$.
Площа паралелограма та трикутника, побудованих на векторах $\vec a$ та $\vec b$	$S_{пар}=\lvert\vec a\times\vec b\rvert;\ S_{тр}=\dfrac{1}{2}\lvert\vec a\times\vec b\rvert$.
Об'єм паралелепіпеда та піраміди, побудованих на векторах $\vec a,\vec b,\vec c$	$V_{парал}=\lvert(\vec a,\vec b,\vec c)\rvert;\ V_{пір}=\dfrac{1}{6}\lvert(\vec a,\vec b,\vec c)\rvert$.
Колінеарність та ортогональність двох векторів	$\vec a\parallel\vec b\ \Leftrightarrow\ \vec a\times\vec b=0,\ \dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$; $\vec a\perp\vec b\ \Leftrightarrow\ (\vec a,\vec b)=0,\ a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$.
Компланарність трьох векторів	$(\vec a,\vec b,\vec c)=0;\ \begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=0$.
Формули перетворення координат на площині	
Паралельний перенос початку системи координат у точку (a,b)	$\begin{cases}x_1=x-a\\ y_1=y-b,\end{cases}\ \begin{cases}x=x_1+a\\ y=y_1+b.\end{cases}$
Поворот системи координат на кут α	$\begin{cases}x_1=\ \ x\cos\alpha+y\sin\alpha\\ y_1=-x\sin\alpha+y\cos\alpha,\end{cases}\ \begin{cases}x=x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha\\ y=x_1\sin\alpha+y_1\cos\alpha.\end{cases}$
Загальні формули (паралельний перенос та поворот)	$\begin{cases}x_1=\ \ (x-a)\cos\alpha+(y-b)\sin\alpha\\ y_1=-(x-a)\sin\alpha+(y-b)\cos\alpha,\end{cases}$ $\begin{cases}x=a+x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha\\ y=b+x_1\sin\alpha+y_1\cos\beta.\end{cases}$

§2. Основні формули аналітичної геометрії

Таблиця 2.1 – Пряма на площині

	Вигляд рівняння прямої l	Назва рівняння	Пояснення
1.	$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$	Рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0,y_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}$	$\vec{n}\perp l$; $\vec{n}=(A,B)$, $M_0\in l$.
2.	$Ax+By+C=0$	Загальне рівняння	$\vec{n}\perp l$, $\vec{n}=(A,B)$
3.	$y=kx+b$	Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом	$k=\mathrm{tg}\alpha$ – кутовий коефіцієнт, $\alpha=(l\hat{,}Ox)$; точка $(0,b)\in l$.
4.	$y-y_0=k(x-x_0)$	Рівняння прямої, що має кутовий коефіцієнт k та проходить через задану точку	$M_0(x_0,y_0)\in l$, $k=\mathrm{tg}\alpha$, $\alpha=(l\hat{,}Ox)$.
5.	$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}$	Канонічне рівняння прямої	$M_0(x_0,y_0)\in l$, $\vec{s}\parallel l$; $\vec{s}=(m,n)$.
6.	$\begin{cases}x=x_0+mt;\\ y=y_0+nt.\end{cases}$	Параметричні рівняння прямої	$M_0(x_0,y_0)\in l$, $\vec{s}\parallel l$; $\vec{s}=(m,n)$, $t\in\mathbf{R}$.
7.	$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$	Рівняння прямої у відрізках	Точки $(a,0),(0,b)\in l$.
8.	$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$	Рівняння прямої, що проходить через дві точки	$M_1(x_1,y_1)\in l$, $M_2(x_2,y_2)\in l$.
9.	$x\cos\alpha+y\cos\beta-p=0$	Нормальне рівняння прямої	$\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta)$, $\vec{n}\perp l$, $p=\rho(O,l)\geq 0$.

Відстань від точки $M_0(x_0,y_0)$ до прямої l	
$l:\ Ax+By+C=0$	$\rho(M_0,l)=\dfrac{\lvert Ax_0+By_0+C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}$.
$l:\ x\cos\alpha+y\cos\beta-p=0$	$\rho(M_0,l)=\lvert x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta-p\rvert$.

Продовження таблиці 2.1

Кут між прямими l_1 та l_2 на площині	
$l_1:\ y=k_1x+b_1$ $l_2:\ y=k_2x+b_2$	$\mathrm{tg}\varphi=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}$.
$l_1:\ A_1x+B_1y+C_1=0$ $l_2:\ A_2x+B_2y+C_2=0$	$\cos\varphi=\dfrac{(\vec{n}_1,\vec{n}_2)}{\lvert\vec{n}_1\rvert\lvert\vec{n}_2\rvert}=\dfrac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$.

Паралельність та перпендикулярність прямих l_1 та l_2 на площині		
	$l_1\parallel l_2$	$l_1\perp l_2$
$l_1:\ y=k_1x+b_1$ $l_2:\ y=k_2x+b_2$	$k_1=k_2$.	$k_1k_2=-1$.
$l_1:\ A_1x+B_1y+C_1=0$ $l_2:\ A_2x+B_2y+C_2=0$	$\vec{n}_1\times\vec{n}_2=0$; $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}$.	$(\vec{n}_1,\vec{n}_2)=0$; $A_1A_2+B_1B_2=0$.
$l_1:\ \dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}$ $l_2:\ \dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}$	$\vec{s}_1\times\vec{s}_2=0$; $\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}$.	$(\vec{s}_1,\vec{s}_2)=0$; $m_1m_2+n_1n_2=0$.

Таблиця 2.2 – Площина у просторі

	Вигляд рівняння площини P	Назва рівняння	Пояснення
1.	$A(x-x_0)+B(y-y_0)+$ $+C(z-z_0)=0$	Рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\vec{n}$	$M_0(x_0,y_0,z_0)\in P$, $\vec{n}\perp P$, $\vec{n}=(A,B,C)$.
2.	$Ax+By+Cz+D=0$	Загальне рівняння	$\vec{n}\perp P$, $\vec{n}=(A,B,C)$.
3.	$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$	Рівняння площини у відрізках	Точки $(a,0,0)$, $(0,b,0)$, $(0,0,c)\in P$.
4.	$\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0$	Рівняння площини, що проходить через задані точки M_1,M_2,M_3	$M_1(x_1,y_1,z_1)\in P$, $M_2(x_2,y_2,z_2)\in P$, $M_3(x_3,y_3,z_3)\in P$.

Продовження таблиці 2.2

5.	$P: x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$	Нормальне рівняння площини	$\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, $\vec{n} \perp P, p = \rho(O, l) \ge 0$.

Відстань від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини P	
$P: Ax + By + Cz + D = 0$	$\rho(M_0, P) = \dfrac{\lvert Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\rvert}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.
$P: x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$	$\rho(M_0, P) = \lvert x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p\rvert$.
Кут між площинами P_1 та P_2	
$P_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ $P_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$	$\cos\varphi = \dfrac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{\lvert\vec{n}_1\rvert\lvert\vec{n}_2\rvert} = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$

Паралельність та перпендикулярність площин P_1 та P_2		
	$P_1 \parallel P_2$	$P_1 \perp P_2$
$P_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ $P_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$	$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = 0$; $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.	$(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 0$; $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Таблиця 2.3 – Пряма у просторі

	Вигляд рівняння прямої L.	Назва рівняння	Пояснення
1.	$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$	Загальні рівняння прямої	Пряма визначається перетином двох непаралельних площин
2.	$\begin{cases} x = x_0 + mt; \\ y = y_0 + nt; \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$	Параметричні рівняння прямої	Точка $A(x_0, y_0, z_0) \in L$, $\vec{s} \parallel l$; $\vec{s} = (m, n, p)$, $t \in \mathbf{R}$.
3.	$\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$	Канонічні рівняння прямої	$A(x_0, y_0, z_0) \in L$, $\vec{s} \parallel l$; $\vec{s} = (m, n, p)$.
4.	$\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$	Рівняння прямої, що проходить через дві точки M_1, M_2	$M_1(x_1, y_1, z_1) \in L$, $M_2(x_2, y_2, z_2) \in L$.

Продовження таблиці 2.3

Відстань від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до прямої L	
$L: \dfrac{x - x_1}{m} = \dfrac{y - y_1}{n} = \dfrac{z - z_1}{p}$	$\rho(M_0, L) = \dfrac{\lvert \overrightarrow{AM_0} \times \vec{s}\rvert}{\lvert\vec{s}\rvert}$, $A(x_1, y_1, z_1) \in L$, $\vec{s} = (m, n, p)$.
Кут між прямими L_1 та L_2	
$L_1: \dfrac{x - x_1}{m_1} = \dfrac{y - y_1}{n_1} = \dfrac{z - z_1}{p_1}$ $L_2: \dfrac{x - x_2}{m_2} = \dfrac{y - y_2}{n_2} = \dfrac{z - z_2}{p_2}$	$\cos\varphi = \dfrac{(\vec{s}_1, \vec{s}_2)}{\lvert\vec{s}_1\rvert\lvert\vec{s}_2\rvert} = \dfrac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$.
Кут між прямою L та площиною Q	
$L: \dfrac{x - x_1}{m} = \dfrac{y - y_1}{n} = \dfrac{z - z_1}{p}$ $Q: Ax + By + Cz + D = 0$	$\sin\varphi = \dfrac{\lvert Am + Bn + Cp\rvert}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$.
Відстань між двома мимобіжними прямими	
$L_1: \dfrac{x - x_1}{m_1} = \dfrac{y - y_1}{n_1} = \dfrac{z - z_1}{p_1}$ $L_2: \dfrac{x - x_2}{m_2} = \dfrac{y - y_2}{n_2} = \dfrac{z - z_2}{p_2}$	$\rho(L_1, L_2) = \dfrac{\lvert(\overrightarrow{A_1A_2}, \vec{s}_1, \vec{s}_2)\rvert}{\lvert\vec{s}_1 \times \vec{s}_2\rvert}$; $A_1(x_1, y_1, z_1) \in L_1$, $A_2(x_2, y_2, z_2) \in L_2$; $\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$, $\vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$.

Паралельність та перпендикулярність прямих L_1 та L_2		
	$L_1 \parallel L_2$	$L_1 \perp L_2$
$L_1: \dfrac{x - x_1}{m_1} = \dfrac{y - y_1}{n_1} = \dfrac{z - z_1}{p_1}$ $L_2: \dfrac{x - x_2}{m_2} = \dfrac{y - y_2}{n_2} = \dfrac{z - z_2}{p_2}$	$\vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = 0$; $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$.	$(\vec{s}_1, \vec{s}_2) = 0$; $m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$.
Паралельність та перпендикулярність прямої L та площини Q		
	$L \parallel Q$	$L \perp Q$
$L: \dfrac{x - x_1}{m} = \dfrac{y - y_1}{n} = \dfrac{z - z_1}{p}$ $Q: Ax + By + Cz + D = 0$	$(\vec{s}, \vec{n}) = 0$; $Am + Bn + Cp = 0$.	$\vec{s} \times \vec{n} = 0$; $\dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n} = \dfrac{C}{p}$.

Таблиця 2.4 – Криві другого порядку

	Назва кривої	Канонічне рівняння
1.	Коло	$x^2+y^2=r^2$
2.	Еліпс	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
3.	Гіпербола	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
4.	Парабола	$y^2=2px, \quad p>0$

Таблиця 2.5 – Поверхні другого порядку

	Назва поверхні	Канонічне рівняння
1.	Сфера	$x^2+y^2+z^2=R^2$
2.	Еліпсоїд	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
3.	Гіперболоїди: а) однопорожнинний гіперболоїд б) двопорожнинний гіперболоїд	 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$
4.	Параболоїди: а) еліптичний параболоїд б) гіперболічний параболоїд	 $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z, \quad pq>0$ $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z, \quad pq>0$
5.	Циліндри а) еліптичний б) гіперболічний в) параболічний	 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \forall z$ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \forall z$ $y^2=2px \quad \forall z$
6.	Конічна поверхня	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$

§3. Матриці. Системи лінійних рівнянь

Таблиця 3.1 – Різновиди матриць

	Назва матриці	Вигляд матриці
	1	2
1.	**Прямокутна**, розміру $m\times n$	$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $(a_{ij})_{m,n}$, $A_{m\times n}$
2.	**Транспонована** по відношенню до матриці A	$A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$
3.	**Квадратна**, порядку n	$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $(a_{ij})_{n,n}$, $A_{n\times n}$
4.	**Приєднана** до квадратної матриці A	$\widetilde{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$
5.	**Обернена** до квадратної матриці A	$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\widetilde{A}$
6.	**Нульова**	$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$
7.	**Одинична**	$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$
8.	**Діагональна**	$D=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $D=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},...,a_{nn})$

Продовження таблиці 3.1

	1	2
9.	**Верхня трикутна**	$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$
10.	**Нижня трикутна**	$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$
11.	**Трапецієвидна**	$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1r+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2r} & a_{2r+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{rr} & a_{rr+1} & \cdots & a_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, $a_{ii} \neq 0$, при $i=\overline{1,r}$
12.	**Блочна**	$A=\begin{pmatrix} B & C \\ D & F \end{pmatrix}$, B, C, D, F – матриці
13.	**Квазидіагональна**	$A=\begin{pmatrix} A & O & O \\ O & B & O \\ O & O & C \end{pmatrix}$, A, B, C – матриці, O – нульова матриця
14.	**Квазитрикутна**	$A=\begin{pmatrix} A & B & C \\ O & D & F \\ O & O & G \end{pmatrix}$, A, B, C, D, F, G – матриці, O – нульова матриця

Продовження таблиці 3.1

	1	2
15.	**Комплексна**	$C=A+B\,i$, A, B – дійсні матриці
16.	Комплексно-спряжена до матриці C	$\overline{C}=A-B\,i$, A, B – дійсні матриці
17.	**Спряжена** до матриці C	$C^*=\overline{C}^T$
18.	**Симетрична**	$A=A^T$, $a_{ij}=a_{ji}$
19.	**Кососиметрична**	$A=-A^T$, $a_{ij}=-a_{ji}$
20.	**Ортогональна**	$A\,A^T=A^T A=E$, $A^T=A^{-1}$
21.	**Ермітова**	$A=A^*$, $a_{ij}=\overline{a}_{ji}$
22.	**Косоермітова**	$A=-A^*$, $a_{ij}=-\overline{a}_{ji}$
23.	**Унітарна**	$A\,A^*=A^*A=E$, $A^*=A^{-1}$
24.	**Клітина Жордана** m - го порядку з власним значенням λ	$G_m(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$
25.	**Матриця Жордана**	$G=(G_{m_1}(\lambda_1), G_{m_2}(\lambda_2), \ldots, G_{m_k}(\lambda_k))=$ $=\begin{pmatrix} G_{m_1}(\lambda_1) & O & \cdots & O \\ O & G_{m_2}(\lambda_2) & \cdots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & \cdots & G_{m_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}$, $G_{m_i}(\lambda_i)$ – клітини Жордана, O – нульова матриця

Таблиця 3.2 – Різновиди систем лінійних рівнянь, їх сумісність та розв'язки

Поняття або співвідношення, що визначаються	Формула
1	2
Загальна система лінійних алгебраїчних рівнянь	$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$
Основна матриця системи	$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$
Матриця-стовпець вільних членів	$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$
Матриця-стовпець невідомих	$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
Матрична форма запису системи	$AX = B$
Розширена матриця системи	$\overline{A} = (A \vert B) = \left(\begin{array}{cccc\|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$
Умова сумісності системи	$\mathrm{Rg}\,A = \mathrm{Rg}\,\overline{A}$
Система має єдиний розв'язок	$\mathrm{Rg}\,A = \mathrm{Rg}\,\overline{A} = r = n$
Система має безліч розв'язків	$\mathrm{Rg}\,A = \mathrm{Rg}\,\overline{A} = r < n$
Система несумісна	$\mathrm{Rg}\,A \neq \mathrm{Rg}\,\overline{A}$

Продовження таблиці 3.2

1	2
Квадратна система лінійних алгебраїчних рівнянь	$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$
Квадратна система має єдиний розв'язок	$\det A \neq 0$
Квадратна система має безліч розв'язків	$\det A = 0$, $\mathrm{Rg}\,A = \mathrm{Rg}\,\overline{A} = r < n$
Квадратна система несумісна	$\det A = 0$, $\mathrm{Rg}\,A \neq \mathrm{Rg}\,\overline{A}$
Однорідна система рівнянь	$AX = 0$
Однорідна система має тільки нульовий розв'язок	$\mathrm{Rg}\,A = n$
Однорідна система має нетривіальні розв'язки	$\mathrm{Rg}\,A = r < n$
Квадратна однорідна система має тільки нульовий розв'язок	$\det A \neq 0$
Квадратна однорідна система має нетривіальні розв'язки	$\det A = 0$
Структура загального розв'язку однорідної системи	$X = \sum_{i=1}^{n-r} c_i E_i$, $E_1, E_2, \ldots, E_{n-r}$ – Ф. С. Р. c_i, $i = \overline{1, n-r}$ – довільні числа; $r = \mathrm{Rg}\,A < n$, n – число невідомих.
Структура загального розв'язку неоднорідної системи	$Y = Y_0 + X$, де Y_0 – деякий частинний розв'язок неоднорідної системи, X – загальний розв'язок відповідної однорідної системи.

§4. Границі. Неперервність

Таблиця 4.1

Поняття або співвідношення, що визначаються	Формула
1	2
Число e	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$
Границя суми, добутку, частки за умови: $\exists\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\exists\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\lim\limits_{x\to a} c\,f(x) = c\lim\limits_{x\to a} f(x),\ c=\text{const}$; $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x)\pm\lim\limits_{x\to a} g(x)$; $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)$; $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)},\ \lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$
Перша важлива границя	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$
Наслідки з першої важливої границі	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{arctg}\,x}{x} = 1$
Друга важлива границя	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$
Наслідки з другої важливої границі	$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu-1}{x} = \mu$

Продовження таблиці 4.1

1	2
Еквівалентні нескінченно малі	$x\sim\sin x\sim\mathrm{tg}\,x\sim\arcsin x\sim\mathrm{arctg}\,x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1$ $x\to 0$ $u(x)\sim\sin u(x)\sim\mathrm{tg}\,u(x)\sim\arcsin u(x)\sim\mathrm{arctg}\,u(x)\sim$ $\sim\ln(1+u(x))\sim e^{u(x)}-1$, $u(x)\to 0$ при $x\to a$ $a^x-1\sim x\ln a$, $\log_a(1+x)\sim\frac{x}{\ln a}$, $(1+x)^\mu-1\sim\mu x$ при $x\to 0$
Еквівалентні нескінченно великі	$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1}+\ldots+a_n\sim a_0x^n$ при $x\to\infty$
Таблиця визначеностей	1) $\frac{c}{0}=\infty,\ c\neq 0$; 2) $\frac{\infty}{0}=\infty$; 3) $\frac{c}{\infty}=0$; 4) $\frac{0}{\infty}=0$; 5) $c\cdot\infty=\infty,\ c\neq 0$; 6) $\infty\cdot\infty=\infty$; 7) $\infty+\infty=\infty$; 8) $0^\infty=0$; 9) $\infty^\infty=\infty$.
Типи невизначеностей	$\left\{\frac{0}{0}\right\}, \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}, \{0\cdot\infty\}, \{\infty-\infty\}, \{1^\infty\}, \{\infty^0\}, \{0^0\}$
Неперервність функції в точці $x=a$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(a) = 0$ $f(a+0)=f(a-0)=f(a)$
Розрив першого роду а) усувний б) стрибок	$\exists\ f(a+0),\ f(a-0)$; $f(a+0)=f(a-0)\neq f(a)$ або $f(a+0)=f(a-0)$, якщо функція $f(x)$ невизначена при $x=a$; $f(a+0)\neq f(a-0)$
Розрив другого роду	Хоча б одна з границь $f(a+0),\ f(a-0)$ не існує або дорівнює нескінченності.

§5. Основні формули диференціального числення

Таблиця 5.1 – Основні правила та формули диференціювання

Основні правила диференціювання
1. $C' = 0$. 2. $(Cu)' = Cu'$. 3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$. 4. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$. 5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$, $v \neq 0$. 6. $\left(f(u)\right)'_x = f'_u \cdot u'_x$. 7. $x'_y = \frac{1}{y'_x}$, де $x = x(y)$ – обернена функція для функції $y = y(x)$. Тут C – стала, $u = u(x)$, $v = v(x)$. Правило диференціювання добутку n функцій $u = u(x)$, $v = v(x)$, $w = w(x), \ldots, z = z(x)$: $(u \cdot v \cdot w \ldots z)' = u' \cdot v \cdot w \ldots z + u \cdot v' \cdot w \ldots z + \ldots + u \cdot v \cdot w \ldots z'$.
Основні формули диференціювання
1. $(u^{\alpha})' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$, $\alpha \in \mathbf{R}$. 2. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$. 3. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$. 4. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$. 5. $(e^u)' = e^u \cdot u'$. 6. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$. 7. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$. 8. $(\mathrm{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$. 9. $(\mathrm{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$.

Продовження таблиці 5.1

10. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$. 11. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$. 12. $(\mathrm{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$. 13. $(\mathrm{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$. 14. $(\mathrm{sh} u)' = \mathrm{ch} u \cdot u'$. 15. $(\mathrm{ch} u)' = \mathrm{sh} u \cdot u'$. 16. $(\mathrm{th} u)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 u} \cdot u'$. 17. $(\mathrm{cth} u)' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 u} \cdot u'$. Тут $u = u(x)$. Якщо $u(x) = x$, то $u'(x) = x' = 1$.

Таблиця 5.2 – Основні поняття та формули

Поняття або співвідношення, що визначаються	Формула
1	2
Похідна	$y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$
Диференціал	$dy = y' \cdot \Delta x$ або $dy = y' \cdot dx$
Похідна n-го порядку	$\frac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$
Формула Лейбніца	$(u \cdot v)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$. Тут $u^{(0)} = u$, $v^{(0)} = v$, C_n^k – число комбінацій з n по k, $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

Продовження таблиці 5.2

1	2
Похідні від функції, заданої параметрично $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$	$y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$ $y''_{xx} = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}$
Диференціал n -го порядку	$d^n y = d(d^{n-1}y)$

Таблиця 5.3 – Застосування похідної

Поняття або співвідношення, що визначаються	Формула
1	2
Рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці (x_0, y_0)	$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$
Рівняння нормалі до кривої $y = f(x)$ у точці (x_0, y_0)	$y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$
Кут між двома кривими $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$ у точці їх перетину (x_0, y_0)	$\mathrm{tg}\,\varphi = \dfrac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0)\cdot f_2'(x_0)}$
При прямолінійному русі точки з законом руху $s = s(t)$: швидкість v прискорення a	$v = s'(t)$ $a = s''(t)$
Формула Коші (відношення скінченних приростів)	$\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$, $c \in (a,b)$
Формула Лагранжа (формула скінченних приростів)	$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$, $c \in (a,b)$
Формула Тейлора для функції $f(x)$ з центром розкладу в точці $x = a$	$f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x)$

Продовження таблиці 5.3

1	2
Залишковий член у формі Лагранжа	$R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, $\xi = a + \theta(x - a)$, $0 < \theta < 1$
Залишковий член у формі Пеано	$R_n(x) = o((x-a)^n)$, $x \to a$
Формула Маклорена (Тейлора при $a = 0$)	$f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R_n(x)$
Основні розклади функцій за формулою Маклорена	
$e^x = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} + o(x^n)$; $\sin x = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \dfrac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + o(x^{2n})$; $\cos x = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$; $\ln(1+x) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \dfrac{x^k}{k} + o(x^n)$; $(1+x)^m = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!}x^k + o(x^n)$.	
Екстремуми функцій	
Необхідна умова локального екстремуму функції $f(x)$ в точці x_0	
$f'(x_0) = 0$ або $f'(x_0)$ не існує	
Достатні умови локального екстремуму в точці x_0	
I правило. $f'(x)$ змінює знак з "+" на "–" в околі $O(x_0, \delta)$ $\Rightarrow$ $f(x_0) = y_{\max}$; $f'(x)$ змінює знак з "–" на "+" в околі $O(x_0, \delta)$ $\Rightarrow$ $f(x_0) = y_{\min}$; $f'(x)$ не змінює знаку в околі $O(x_0, \delta)$ $\Rightarrow$ $f(x_0) \neq y_{\max}$, $f(x_0) \neq y_{\min}$. II правило. $f''(x_0) < 0$ $\Rightarrow$ $f(x_0) = y_{\max}$; $f''(x_0) > 0$ $\Rightarrow$ $f(x_0) = y_{\min}$; $f''(x_0) = 0$ $\Rightarrow$ потрібне додаткове дослідження.	

§ 6. Основні формули елементарної математики

6.1 Алгебраїчні функції

6.1.1 Властивості степенів

Для будь-яких x, y та додатних a, b мають місце такі рівності:

$$a^0 = 1; \qquad (ab)^x = a^x b^x;$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}; \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x};$$

$$a^x : a^y = a^{x-y}; \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x}.$$

$$(a^x)^y = a^{xy};$$

6.1.2 Многочлени

Для будь-яких a, b, c мають місце такі рівності:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b);$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2);$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2);$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

де x_1, x_2 - корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, $\quad x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Для $n \in \mathbf{N}$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Якщо n – парне,

$$a^n - b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots + ab^{n-2} - b^{n-1}).$$

Якщо n – непарне,

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

6.1.3 Властивості арифметичних коренів

Для будь-яких натуральних n, k, більших одиниці, та будь-яких невід'ємних a, b мають місце такі рівності:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \ (a \ge 0);$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \ (b \ne 0); \qquad \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}, \text{ якщо } 0 \le a < b;$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}; \qquad \sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & \text{при } a \ge 0, \\ -a & \text{при } a < 0; \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[kn]{a}; \qquad \sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|;$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}; \qquad \sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a} \ (a \ge 0).$$

6.2 Тригонометричні функції

(У всіх формулах, наведених нижче, слід враховувати область припустимих значень лівої та правої частин формул)

6.2.1 Співвідношення між тригонометричними функціями одного і того ж аргументу

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \qquad \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1;$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}; \qquad 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}; \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

6.2.2 Формули додавання

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y;$$

$$\sin(x-y)=\sin x\,\cos y-\cos x\,\sin y\,;$$
$$\cos(x+y)=\cos x\,\cos y-\sin x\,\sin y\,;$$
$$\cos(x-y)=\cos x\,\cos y+\sin x\,\sin y\,;$$
$$\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\,\operatorname{tg}y}\,;\qquad \operatorname{ctg}(x+y)=\frac{\operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}y-1}{\operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}y}\,;$$
$$\operatorname{tg}(x-y)=\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y}{1+\operatorname{tg}x\,\operatorname{tg}y}\,;\qquad \operatorname{ctg}(x-y)=\frac{\operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}y+1}{\operatorname{ctg}y-\operatorname{ctg}x}\,.$$

6.2.3 Формули подвійного аргументу

$$\sin 2x=2\sin x\,\cos x\,;$$
$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x\,;$$
$$\operatorname{tg}2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2 x}\,;\qquad \operatorname{ctg}2x=\frac{\operatorname{ctg}^2 x-1}{2\operatorname{ctg}x}\,.$$

6.2.4 Формули половинного аргументу

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}\,;\qquad \cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}\,;$$
$$\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\,;\qquad \operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\,;$$
$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{1-\cos x}{\sin x}\,;\qquad \operatorname{ctg}\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1-\cos x}=\frac{1+\cos x}{\sin x}\,.$$

6.2.5 Формули зниження степеня

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}\,;\qquad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}\,.$$

6.2.6 Формули перетворення суми в добуток

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\,;$$
$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\,;$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\,;$$
$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\,;$$
$$\cos x+\sin x=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right);$$
$$\cos x-\sin x=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right).$$
$$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=\frac{\sin(x+y)}{\cos x\,\cos y}\,;\qquad \operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}y=\frac{\sin(x+y)}{\sin x\sin y}\,;$$
$$\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y=\frac{\sin(x-y)}{\cos x\,\cos y}\,;\qquad \operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}y=-\frac{\sin(x-y)}{\sin x\sin y}\,.$$

6.2.7 Формули перетворення добутку в суму

$$\sin x\,\sin y=\frac{1}{2}\left(\cos(x-y)-\cos(x+y)\right);$$
$$\cos x\,\cos y=\frac{1}{2}\left(\cos(x-y)+\cos(x+y)\right);$$
$$\sin x\,\cos y=\frac{1}{2}\left(\sin(x-y)+\sin(x+y)\right).$$

6.2.8 Вираження тригонометричних функцій через тангенс половинного кута

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\,;\qquad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\,;$$
$$\operatorname{tg}x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\,;\qquad \operatorname{ctg}x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\,.$$

6.2.9 Формули зведення

Назва функції не змінюється				Назва функції змінюється на подібну			
u	$-\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
tg	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$
ctg	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$

6.2.10 Значення тригонометричних функцій

Значення кута α		Ф у н к ц і ї			
град	рад	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$
0^0	0	0	1	0	∞
30^0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45^0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60^0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90^0	$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞	0
180^0	π	0	-1	0	∞
270^0	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	∞	0
360^0	2π	0	1	0	∞

6.2.11 Властивості обернених тригонометричних функцій

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a, \quad |a| \le 1$$
$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a, \quad |a| \le 1$$
$$\mathrm{arctg}(-a) = -\mathrm{arctg}\, a, \ a \in \mathbf{R}$$
$$\mathrm{arcctg}(-a) = \pi - \mathrm{arcctg}\, a, \ a \in \mathbf{R}$$
$$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}, \quad |a| \le 1$$
$$\mathrm{arctg}\, a + \mathrm{arcctg}\, a = \frac{\pi}{2}, \ a \in \mathbf{R}$$

6.2.12 Розв'язки найпростіших тригонометричних рівнянь

Рівняння	Розв'язки рівняння
$\sin x = a, \quad |a| \le 1$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \ n \in \mathbf{Z}$
$\cos x = a, \quad |a| \le 1$	$x = \pm\arccos a + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}$
$\mathrm{tg}\, x = a, \quad a \in \mathbf{R}$	$x = \mathrm{arctg}\, a + \pi n, \ n \in \mathbf{Z}$
$\mathrm{ctg}\, x = a, \quad a \in \mathbf{R}$	$x = \mathrm{arcctg}\, a + \pi n, \ n \in \mathbf{Z}$

Окремі розв'язки тригонометричних рівнянь

$$\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pi n, \ n \in \mathbf{Z},$$
$$\sin x = \pm 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z},$$
$$\cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in \mathbf{Z},$$
$$\cos x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z},$$
$$\cos x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pi + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}.$$

6.3 Властивості логарифмів

1^0. Основна логарифмічна тотожність :

$$x = a^{\log_a x}, \quad x > 0, \ a > 0, \ a \ne 1.$$

2^0. Логарифм основи дорівнює одиниці :

$$\log_a a = 1.$$

3^0. Логарифм одиниці дорівнює нулю :

$$\log_a 1 = 0.$$

4^0. Формула для логарифма добутку :

$$\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2, \quad x_1 > 0, \ x_2 > 0.$$

5^0. Формула для логарифма частки :

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2, \quad x_1 > 0, \ x_2 > 0.$$

6^0. Формула для логарифма степеня :

$$\log_a x^p = p\,\log_a x\,,\quad x>0\,,\ p\in\mathbf{R}\,.$$

7^0. Формула переходу до нової основи логарифма :

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}\,,\quad x>0\,,\ b\in\mathbf{R}\,,\ b>0\,,\ b\neq 1\,.$$

Зокрема,

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}\,;\qquad \log_a b\cdot\log_b a = 1\,.$$

6.4 Прогресії

Арифметична прогресія	Геометрична прогресія
$a_n = a_{n-1}+d\,,\quad n\geq 2$ де d – різниця прогресії	$b_n = b_{n-1}\,q\,,\quad n\geq 2$ де q – знаменник прогресії
Формула n-го члена	
$a_n = a_1+(n-1)\,d$ $n=1,2,\ldots$	$b_n = b_1\,q^{n-1}$ $n=1,2,\ldots$
Формула суми перших n членів	
$S_n = \dfrac{a_1+a_n}{2}\,n$	$S_n = b_1\dfrac{1-q^n}{1-q}\,,\ q\neq 1$
Формула для різниці	Формула для знаменника
$d = a_n - a_{n-1},\quad n\geq 2$	$q=\dfrac{b_n}{b_{n-1}}\,,\quad n\geq 2$
Сума натуральних чисел від 1 до n	Сума нескінченно спадної геометричної прогресії
$S=\dfrac{n(n+1)}{2}$	$S=\dfrac{b_1}{1-q}\,,\ \lvert q\rvert<1$

6.5 Основні формули комбінаторики. Біном Ньютона

Число перестановок з n елементів знаходяться за формулою

$$\mathrm{P}_n = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)\,n = n!\,,\qquad 0!=1\,.$$

Число розміщень з n елементів по m елементів знаходяться за формулою

$$\mathrm{A}_n^m = n\,(n-1)\ldots(n-(m-1)) = \frac{n!}{(n-m)!}\,.$$

Число комбінацій з n елементів по m елементів знаходяться за формулою

$$\mathrm{C}_n^m = \frac{\mathrm{A}_n^m}{\mathrm{P}_m} = \frac{n\,(n-1)\ldots(n-(m-1))}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m}$$

або

$$\mathrm{C}_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}\,,\qquad \mathrm{C}_n^n = \mathrm{C}_n^0 = 1\,.$$

Властивості комбінацій:

$$\mathrm{C}_n^m = \mathrm{C}_n^{n-m}\,;\qquad\qquad \mathrm{C}_n^m + \mathrm{C}_n^{m+1} = \mathrm{C}_{n+1}^{m+1}\,.$$

Формула бінома Ньютона має вигляд

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n}\mathrm{C}_n^m a^{n-m}b^m = \mathrm{C}_n^0 a^n + \mathrm{C}_n^1 a^{n-1}b + \ldots + \mathrm{C}_n^{n-1}a\,b^{n-1} + \mathrm{C}_n^n b^n\,,$$

де $\mathrm{C}_n^m = \dfrac{n!}{m!\,(n-m)!}$ – число комбінацій з n елементів по m елементів; $n\in\mathbf{N}$.

Сума біноміальних коефіцієнтів $\sum\limits_{m=0}^{n}\mathrm{C}_n^m = 2^n$.

6.6 Числові значення деяких величин

Позначення величини	Числове значення	Позначення величини	Числове значення
π	3,14159	e	2,71828
2π	6,28318	$1/e$	0,36788
$\pi/2$	1,57080	e^2	7,38906
$\pi/3$	1,04720	$\sqrt{e}$	1,64872
$\pi/4$	0,78540	$\lg e$	0,43429
$\pi/6$	0,52360	$\ln 10$	2,30258
$1/\pi$	0,31831	1 радіан	$57^\circ 17' 45''$
π^2	9,86960	1° (град)	0,0174 (рад)
$\sqrt{\pi}$	1,77245	$\sqrt{2}$	1,41421
$\sqrt[3]{\pi}$	1,46459	$\sqrt{3}$	1,73205

СЛОВНИК КЛЮЧОВИХ СЛІВ

Українською мовою	Російською мовою	Англійською мовою
абсолютний	абсолютный	absolute
абсциса	абсцисса	abscissa, x–coordinate
адитивність	аддитивность	additivity
аксіома	аксиома	axiom
алгебра	алгебра	algebra
алгебра векторна	алгебра векторная	vector algebra
алгебра лінійна	алгебра линейная	algebra linear
алгебраїчне доповнення	алгебраическое дополнение	cofactor
алгебраїчний	алгебраический	algebraic
аналіз; математичний аналіз; гармонічний аналіз	анализ; математический анализ; гармонический анализ	analysis; calculus; harmonic analysis
аналізувати	анализировать	analyse
аналітична геометрія	аналитическая геометрия	analytic geometry
антикомутативність	антикоммутативность	anticommutativity
анулювання	аннулирование	annulment
апліката	аппликата	z-coordinate
аргумент	аргумент	argument, independent variable
арксинус	арксинус	arcsine
арктангенс	арктангенс	arctangent
асимптота	асимптота	asymptote
асоціативність	ассоциативность	associativity
базис	базис	basis
біном	бином	binomial

Українською мовою	Російською мовою	Англійською мовою
біном Ньютона	бином Ньютона	binomial formula
блок	блок	block
будь-який, усякий	любой	any, arbitrary
варіація	вариация	variation
вгнутий	вогнутый	concavity
вгнутість	вогнутость	concave
Вейєрштрас	Вейерштрасс	Weierstrass
векторний добуток	векторное произведение	vector product
векторний простір	векторное пространство	vector space
велика вісь	большая ось	major axis
величина	величина	quantity, size
величина змінна	величина переменная	variable value
верхній	верхний	upper, top
верхня межа; верхня грань	верхняя граница; верхняя грань	upper bound; supremum
взагалі	вообще	in general, generally
взаємно однозначна	взаимно однозначное	one-to-one
відповідність	соответствие	correspondence
взаємоспряжений	взаимносопряжённый	self–conjugate
вигляд; у вигляді; явний вигляд	вид; в виде; явный вид	aspect, form, view; in the form, as; explicit form
визначник	определитель	determinant
використання; повторне використання	использование; повторное использование	use, utilization; reuse, reusing
вимагати	требовать	is required
вимірність	размерность	dimension

Українською мовою	Російською мовою	Англійською мовою
вимірювання, вимір; число вимірів	измерение; число измерений	measurement,dimension; dimension
вимога	требование	condition
виняток; за винятком	исключение; за исключением	exclusion, exception; with the exception of
вираз, вираження	выражение	expression
висновок; робити висновок	вывод; делать вывод	conclusion; draw a conclusion
виходити; вихідний, початковий; вихідне рівняння; вихідні данні; вихідна формула; виходячи	исходить; исходный; исходное уравнение; исходные данные; исходная формула; исходя	come from, start from; initial, original, input; input equation; input data; assumption formula; starting from, beginning from
вищевикладений; вищевказаний; вищедоведений; вищезгаданий;	вышеизложенный; вышеуказанный; вышедоказанный; вышеупомянутый;	stated above; above-mentioned; proved above; above-cited, above-mentioned;
вищеописаний; вищенаведений	вышеописанный; вышеприведенный	described above; foregoing, above-mentioned
вищий	высший	higher
від'ємний; від'ємник; віднімання; віднімати; відняти	отрицательный; вычитаемое; вычитание; вычитать; вычесть	negative; subtrahend; subtraction, deduction; subtract, deduct; subtract
від'ємно визначений	отрицательно определённый	negative definite
відновити	восстановить	restore, reestablish
відношення	отношение	ratio, quotient, relation
відповідність; у відповідності	соответствие; в соответствии	correspondence; accordingly
відповідь	ответ	answer, reply, response
відрізок	отрезок	segment, closed interval

Українською мовою	Російською мовою	Англійською мовою
відстань	расстояние	distance
відтворювати	воспроизводить	reproduce
вісь	ось	axis
вказівка	указание	indication
включно	включительно	inclusively
власне значення	собственное значение	eigenvalue, characteristic value
власний	собственный	characteristic
власний вектор	собственный вектор	eigenvector
властивість	свойство	property
внаслідок	вследствие	so that, on account of
вперше	впервые	first, for the first time
вправо, праворуч	вправо	to the right
враховувати	учитывать	consider
всередині; рівномірно збігається всередині D	внутри; равномерно сходится внутри D	in, inside, subsets of; uniformly convergent on compact subsets of D
вступ	введение	introduction
геометричний	геометрический	geometric
гіпербола	гипербола	hyperbola
гіперболічний	гиперболический	hyperbolic
головна вісь	главная ось	principal axis
головний;	главный;	principal, essential, main;
головним чином; головна частина	главным образом; главная часть	chiefly, mainly; principal part
границя	предел	limit
граничний перехід	предельный переход	passage to the limit
громіздкий	громоздкий	cumbersome, bulky

Українською мовою	Російською мовою	Англійською мовою
груба помилка	грубая ошибка	gross error
давати	давать	give
Даламбер	Даламбер	d'Alembert
двічі	дважды	twice
двовимірний	двумерный	two-dimensional
двократний	двукратный	repeated, double
двопорожнинний гіперболоїд	двуполостный гиперболоид	hyperboloid of two sheets
Декарт	Декарт	Descartes
декартів	декартов	Cartesian
директриса	директриса	directrix
диференціал; диференціювання;	дифференциал; дифференцирование;	differential; differentiation, derivation;
диференціювати;	дифференцировать;	differentiate, distinguish;
диференційовність;	дифференцируемость;	differentiability;
диференційовний	дифференцируемый	differentiable, differentiated
діагоналізація; діагоналізовний; діагоналізовність; діагональ; діагональний	диагонализация; диагонализуемый; диагонализируемость; диагональ; диагональный	diagonalization; diagonalizable; diagonalizability; diagonal; diagonal
діаметр	диаметр	diameter
дійсна вісь	действительная ось	real axis
дійсний	действительный	real, true
дійсно	действительно	really, in fact
ділене	делимое	dividend
ділення	деление	division
діло	дело	business, matter, case

Українською мовою	Російською мовою	Англійською мовою
дільник	делитель	divisor
Діріхле	Дирихле	Dirichlet
добування кореня	извлечение корня	taking the root
добуток	произведение	product, composition
добуток матриць	произведение матриц	matrix product
доведемо;	докажем;	we shall prove, let us prove;
доведений; доведення; доводити	доказанный; доказательство; доказывать	proved; proof, demonstration; prove, demonstrate
довжина	длина	length, path
довизначити	доопределить	define, determine
довідковий	справочный	reference
довільний	произвольный	arbitrary
додавання	сложение	addition, supplement
доданок	слагаемое	addend
додатно визначений	положительно определённый	positive definite
додаток	приложение	application, supplement
доповнення	дополнение	adjunct, complement
доповнення до повного квадрата	дополнение до полного квадрата	completing the square
допоміжне твердження	вспомогательное утверждение	lemma
допоміжний	вспомогательный	auxiliary, subsidiary
дослідження	исследование	investigation, research
достатні	достаточные	enough
достатньо; достатність	достаточно; достаточность	sufficiently, enough; sufficiency
достатня умова	достаточное условие	sufficient condition
досягати	достигать	reach, achieve, attain

Українською мовою	Російською мовою	Англійською мовою
дріб; похідна дробу; раціональний дріб; правильний дріб	дробь; производная дроби; рациональная дробь; правильная дробь	fraction, quotient; derivative of a quotient; rational fraction; proper fraction
дробово-раціональний	дробно-рациональный	rational, bilinear, linear fractional
другий	другой	second
дужка	скобка	parenthesis, brace
евклідів	евклидов	Euclidean
ексцентриситет	эксцентриситет	eccentricity
еліпс	эллипс	ellipse
еліпсоїд	эллипсоид	ellipsoid
Ерміт	Эрмит	Hermit
ермітово симетричний	эрмитово симметричный	Hermitian–symmetric
ермітово кососиметричний	эрмитово кососимметричный	skew–Hermitian
єдиний	единственный	unique
єдиність	единственность	uniqueness
Жордан	Жордан	Jordan
жорданів блок	жорданов блок	Jordan block
жорданова клітина	жорданова клетка	Jordan box
загальний розв'язок однорідного рівняння	общее решение однородного уравнения	complementary function, general solution of the homogeneous equation
загальний; загальна сума	общий; общая сума	common, general, total; sum total
задавати; завдання, задання; задання кривих у параметричній формі заданий; задамо	задавать; задание; задание кривых в параметрической форме заданный; зададим	set, assign, give; task, job, representation; parametric representation of curves; given, defined; let us give

Українською мовою	Російською мовою	Англійською мовою
задача	задача	problem, task
закінчувати	заканчивать	finish, complete
закривати	закрывать	close, shut
залежність	зависимость	dependence, relation
залишковий	остаточный	residual, remainder
залишковий член	остаточный член	remainder form
заміна; заміна змінних	замена; замена переменных	substitution, change; change of variables
замкнений	замкнутый	closed, isolated
занумерувати	занумеровать	number, index
запис	запись	notation, listing, writing
застосування	применение	application
застосування, додаток	приложение	application, supplement
зафіксувати	зафиксировать	fix, settle
збільшувати	увеличивать	increase
звичайний	обыкновенный	ordinary, usual
зводити; зводячи подібні члени	приводить; приводя подобные члены	reduce, bring, perform; collecting similar terms
згрупувати	сгруппировать	group, arrange into group
зліва, ліворуч	слева	from the left
зменшуване	уменьшаемое	minuend
зменшувати	уменьшать	reduce
зміна	изменение	change, variation
змінна	переменная	variable, argument
зміст	содержание	contents
знаковизначеність	знакоопределённость	property of having fixed sign

Українською мовою	Російською мовою	Англійською мовою
знаковизначенний	знакоопределённый	of fixed sign
знакозмінний	знакопеременный	with alternating signs
знакосталий	знакопостоянный	of constant signs
знаменник; загальний знаменник	знаменатель; общий знаменатель	denominator; common denominator
знаходження	нахождение	determination, finding
значення; мати значення; власне значення	значение; иметь значение; собственное значение	value, significance; to mean; eigenvalue
зобразити	изобразить	represent
зростання; зростати; зростаючий	возрастание; возрастать; возрастающий	increase, rise, growth; increase, grow, ascend; increasing, growing, accelerating, ascending
інваріантність	инвариантность	invariance
інверсія	инверсия	inversion
індекс; верхній індекс; нижній індекс	индекс; верхний индекс; нижний индекс	index; superscript; subscript
індукція	индукция	induction, displacement
інтервал	интервал	interval
інтерпретувати	интерпретировать	interpret
ірраціональність	иррациональность	irrationality
канонічний	канонический	canonical, classical
квадрант	квадрант	quadrant
квадрат; у квадраті; повний квадрат; квадратний; квадратне рівняння	квадрат; в квадрате; полный квадрат; квадратный; квадратное уравнение	square; squared; perfect square; square, quadratic; quadratic equation
кількість	количество	amount, quantity,number
класифікація	классификация	classification

Українською мовою	Російською мовою	Англійською мовою
колінеарність	коллинеарность	collinearity
коло	окружность	circle
комбінаторика	комбинаторика	combinatorial analysis
комбінація, сполучення	сочетание	combination, set
компланарний	компланарный	coplanar
компланарність	компланарность	coplanarity
комплексний	комплексный	complex
комплексно- спряжена матриця	комплексно- сопряженная матрица	adjoint matrix
комплексно- спряжений	комплексно- сопряженный	complex conjugate
конічний	конический	conic
конус	конус	cone
координата	координата	coordinate
корінь; знак кореня; квадратний корінь; кубічний корінь; корінь рівняння	корень; знак корня; квадратный корень; кубический корень; корень уравнения	root, radical; radical sign; square root; cube root; solution of an equation, root of an equation
коротко	коротко	briefly
косоермітів	косоэрмитов	skew-Hermitian
кососиметричний	кососимметрический	skew-symmetric
Крамер	Крамер	Cramer
кратний	кратный	multiple, divisible
кратність	кратность	multiplicity
крива	кривая	curve
критерій	критерий	criterion
критичний	критический	critical

Українською мовою	Російською мовою	Англійською мовою
Кронекер	Кронекер	Kronecker
круг	круг	circle, disk
куля	шар	ball, solid sphere
кусково-неперервний	кусочно-непрерывный	piecewise continuous
кут	угол	angle, corner
кутовий	угловой	angular, corner
кутовий коефіцієнт	угловой коэффициент	slope
Лагранж; теорема Лагранжа	Лагранж; теорема Лагранжа	Lagrange; Lagrange's theorem
Лаплас	Лаплас	Laplace
лінійна залежність	линейная зависимость	linear dependence
лінійна оболонка	линейная оболочка	linear hull
лінійне перетворення	линейное преобразование	linear transformation
лінійний	линейный	linear, arcwise
лінійно незалежний розв'язок	линейно независимое решение	linearly independent solution
лінія	линия	line
лінія пряма, крива	линия прямая, кривая	line axis, curve
логарифм; логарифмування	логарифм; логарифмирование	logarithm; taking the logarithm
локальний	локальный	local
Лопіталь	Лопиталь	L'Hospital
максимум	максимум	maximum, peak
мала; нескінченно мала	малая; бесконечно малая	small quantity; infinitesimal
математика; математичний	математика; математический	mathematics; mathematical
мати; мати справу; мати значення;	иметь; иметь дело; иметь значение;	have; deal, have to do(with); mean, have meaning;

Українською мовою	Російською мовою	Англійською мовою
мати місце; мати на увазі	иметь место; иметь в виду	occur, take place; keep in mind
матриця	матрица	matrix
матриця-рядок	матрица-строка	row matrix
матриця-стовпець	матрица-столбец	column matrix
метод	метод	method
мимобіжні прямі	скрещивающиеся прямые	skew lines
мінімум	минимум	minimum
мінор	минор	minor
мішаний добуток	смешанное произведение	mixed product
многочлен	многочлен	polynomial
множення	умножение	multiplying
множина	множество	set
множник; розкладання на множники	множитель; разложение на множители	factor, multiplier; factorization
монотонний	монотонный	monotone
наближений	приближенный	approximate
навколо	вокруг	around, round
надавати	придавать	add, attach, give
надавати значення	придавать значение	attach importance
найбільший	наибольший	greatest, largest
найменший	наименьший	least, smallest
належати	принадлежать	belong, belong to
напрям, напрямок	направление	direction
напрямний	направляющий	direction
напрямний косинус	направляющий косинус	direction cosine

Українською мовою	Російською мовою	Англійською мовою
невизначеність	неопределенность	indeterminacy, indefiniteness
невироджена матриця	невырожденная матрица	nonsingular matrix
невироджений	невырожденный	nondegenerate
недиференційовність	недифференцируемость	nondifferentiable
недолік	недостаток	deficiency
недопустимий, неприпустимий	недопустимый	inadmissible
незалежний; незалежна величина	независимый; независимая величина	independent; independent variable
незростаючий	невозрастающий	nonincreasing
некомпланарний	некомпланарный	noncoplanar
нелінійний	нелинейный	nonlinear
необмежений	неограниченный	unlimited, unbounded
необхідність	необходимость	necessity
непарний	нечетный	odd
нескінченний	бесконечный	infinite
нескінченність; до нескінченності	бесконечность; до бесконечности	infinity; ad infinitum
нескінченно	бесконечно	infinitely
нескінченно віддалена точка	бесконечно удаленная точка	point at infinite
нескінченно малі	бесконечно малые	infinitesimal
неспадаючий	неубывающий	nondecreasing
неявний	неявный	implicit
нижня грань	нижняя грань	lower bound, infimum
норма	норма	norm
нормаль	нормаль	normal
нормувальний	нормирующий	normalizing

Українською мовою	Російською мовою	Англійською мовою
нормування	нормирование	normalization
нуль	нуль	zero, origin
нульовий	нулевой	zero, null, trivial
нульовий розв’язок	нулевое решение	trivial solution
Ньютон	Ньютон	Newton
об’єм	объём	volume
обвідний	окаймляющий	bounding
обґрунтування	обоснование	proof, basis, justification
обернена матриця	обратная матрица	inverse matrix, reciprocal matrix
обернений, зворотний; обернене перетворення; обертатися; перетворюватися в нуль; обернення	обратный; обратное преобразование; обращаться; обращаться в нуль; обращение	inverse, reciprocal; inverse transformation; reduce to revert, turn; vanish; conversion, inversion
обернення матриці	обращение матрицы	inversion of matrix
обертання	вращение	rotation
обертати	обращать	invert, convert
область; область визначення; область значень	область; область определения; область значений	domain, region, range; domain of definition; range of values
обмежений; обмежений зверху; обмежений знизу	ограниченный; ограниченный сверху; ограниченный снизу	bounded, limited; bounded above; bounded below
образ	образ	image
обчислення;	вычисление;	calculation, computation;
обчислювати	вычислять	calculate, compute
одиниця	единица	unit, identity
одинична матриця	единичная матрица	identity matrix
одиничне коло	единичный круг	unit circle

Українською мовою	**Російською мовою**	**Англійською мовою**
одиничний оператор	единичный оператор	identity operator
однозначно	однозначно	identically, uniquely
однопорожнинний гіперболоїд	однополостный гиперболоид	hyperboloid of one sheet
однорідний	однородный	homogeneous
ознака	признак	indication, sign, mark
означений, визначений	определенный	definite, defined, determinate, determined
означення; за означенням	определение; по определению	definition,determination; by definition
окіл	окрестность	neighbourhood, vicinity
оператор	оператор	operator
опуклість; опуклий	выпуклость; выпуклый	convexity; convex
ордината	ордината	ordinate, y–coordinate
ортогоналізація	ортогонализация	orthogonalization
ортогональний	ортогональный	orthogonal
ортонормований	ортонормированный	orthonormalized, orthonormal
ортонормування	ортонормирование	orthonormalization
особлива точка	особая точка	singular point
особливий	особый	singular, particular
остаточний вираз	окончательное выражение	resultant expression
остаточно	окончательно	final, definitive
отже	следовательно	consequently, therefore
отримувати	получать	get, obtain, receive
парабола	парабола	parabola
параболоїд	параболоид	paraboloid
паралелепіпед	параллелепипед	parallelepiped

Українською мовою	**Російською мовою**	**Англійською мовою**
паралелограм	параллелограмм	parallelogram
параметр	параметр	parameter
параметричний	параметрический	parametric
парний	чётный	even
перевірка	проверка	testing, control, check
перегин; точка перегину	перегиб; точка перегиба	inflection; point of inflection
перегрупування	перегруппировка	regrouping
перелік, перелічення	перечисление	enumeration, transfer
перелічення, перерахування	пересчет	recalculation, recount
перемноження	перемножение	multiplication
перенос	перенос	transfer
перепозначати	переобозначить	rename
переріз	сечение	cross-section, cut
перестановка	перестановка	permutation
перетворення подібності	преобразование подобия	similarity transformation
перетворення обернене; перетворення Фур’є	преобразование обратное; преобразование Фурье	transformation inverse; Fourier transformation
перетин; точка перетину	пересечение; точка пересечения	intersection; point of intersection
перехід; перехід до границі	переход; переход к пределу	passage, transfer; passage to the limit
періодичний	периодический	periodic, recurrent
перпендикулярність	перпендикулярность	perpendicularity
питання	вопрос	question, problem, issue
піввісь	полуось	semiaxis
півколо	полуокружность	semicircle

Українською мовою	**Російською мовою**	**Англійською мовою**
півкруг	полукруг	half-disk
півпряма	полупрямая	ray, half-line
півсума	полусумма	half-sum
півсфера	полусфера	hemisphere
підбір	подбор	selection, choice
підібрати	подобрать	select, pickout
підкореневий	подкоренной	subradical
підносити	возводить	raise, erect
підносити до квадрату	возводить в квадрат	square
підносити до третього степеня	возводить в третью степень	raise to the third power
підпослідовність	подпоследовательность	subsequence
підпростір	подпространство	subspace
підрахунок	подсчет	count, enumeration
підстановка	подстановка	substitution, permutation
підхід	подход	approach
піраміда	пирамида	pyramid
площа	площадь	area, space
площина	плоскость	plane, flat, subspace
побудова	построение	structure, construction
поверхня	поверхность	surface
поворот	поворот	turn, rotation
подібне перетворення	подобное преобразование	similitude
подібний	подобный	similar
поділити	разделить	divide, separate
по-друге	во-вторых	second, in the second place

Українською мовою	**Російською мовою**	**Англійською мовою**
позначення	обозначение	designation, notation
показник; показник степеня; показникова функція	показатель; показатель степени; показательная функция	index, exponent; exponent; exponential function
поле	поле	field
поліном	полином	polynomial
помітити	заметить	notice, remark, note
по-перше	во-первых	in the first place
порівнювати	сравнивать	compare, equal
послідовність	последовательность	sequence, succession
постановка	постановка	statement, posing, formulation
похибка	погрешность	error, mistake
похідна	производная	derivative
початок	начало	beginning, origin
початок координат	начало координат	origin of coordinates
почленно	почленно	termwise
пояснення	пояснение	explanation
правило	правило	rule, principle, law
правило Крамера	правило Крамера	Cramer's rule
приєднана матриця	присоединённая матрица	adjoint matrix, augmented matrix
приклад	пример	example, instance
припущення, допущення	допущение	assumption
прирівнювати	приравнивать	equate, set equal
приріст	приращение	increment, increase
прогресія	прогрессия	progression
продиференціювавши	продифференцировав	having differentiated, after differentiating

Українською мовою	**Російською мовою**	**Англійською мовою**
проекція	проекция	projection
прологарифмувати	прологарифмировать	take the logarithm
проміжний	промежуточный	intermediate
проміжок	промежуток	interval, space
пронормувати	пронормировать	normalize
пропорційний	пропорциональный	proportional
пропорційність	пропорциональность	proportionality
простір	пространство	space
протилежний	противоположный	opposite, inverse
протиріччя	противоречие	contradiction
прямокутна система координат	прямоугольная система координат	Cartesian coordinate system
прямокутний	прямоугольный	rectangular
прямокутний трикутник	прямоугольный треугольник	right-angled triangle
прямокутник	прямоугольник	rectangle
прямувати, прагнути, наближатися	стремиться	strive, try
радіус	радиус	radius
радіус-вектор	радиус-вектор	radius-vector
ранг матриці	ранг матрицы	rank of matrix
раціональний	рациональный	rational
результат	результат	result
рекурентна формула	рекуррентная формула	recursion relation
рекурентний	рекуррентный	recursion, recurrent
рівний; рівність; знак рівності	равный; равенство; знак равенства	equal; equality; equality sign
рівнобедрений	равнобедренный	isosceles

Українською мовою	**Російською мовою**	**Англійською мовою**
рівномірний	равномерный	uniform
рівносильний	равносильный	equivalence
рівняння	уравнение	equation
різниця	разность	difference, remainder
робити	делать	make
робити висновок	делать вывод	conclude
розбіжний	расходящийся	divergent
розбіжність	расходимость	divergence
розв’язок, розв’язання, розв’язування	решение	solution, decision
розв’язувальний	разрешающий	solving, decision
розглядання	рассмотрение	examination, consideration
розкладання, розклад	разложение	expansion, decomposition
розкладати	разлагать	expand, factor
розкриття	раскрытие	uncovering, opening
самоспряжений	самосопряжённый	selfadjoint
середній	средний	middle, average
система	система	class, system
січна	секущая	secant, transversal
скалярний добуток	скалярное произведение	scalar product
скінченний; скінченний приріст	конечный; конечное приращение	final, finite; finite increment
складна функція	сложная функция	composite function
складний	сложный	complicated, complex
скористатися	воспользоваться	take advantage of use
спадати спадний	убывать убывающий	decrease decreasing

Українською мовою	Російською мовою	Англійською мовою
спектр	спектр	spectrum
співвідношення	соотношение	relation
спосіб	способ	way, method
справа, праворуч	справа	from the right
спрощення	упрощение	simplification
спрощувати	упрощать	simplify
сталий	постоянный	constant, fixed
стаціонарний	стационарный	stationary
степеневий	степенной	power, degree
степінь	степень	power, degree, extent
сума	сумма	sum, union
сумісний	совместный	compatible
сумісність	совместность	compatibility
сфера	сфера	sphere
сферичний	сферический	spherical
твірна	образующая	generator, element
твірна циліндра	образующая цилиндра	element of cylinder
теорема	теорема	theorem
тетраедр	тетраэдр	tetrahedron
точка перетину	точка пересечения	point of intersection
точка; критична точка	точка; критическая точка	point, place; critical point
точний	точный	precise, exact, explicit
точність	точность	exactness, accuracy
транспонована матриця	транспонированная матрица	transpose matrix
транспонування	транспонирование	transposition

Українською мовою	Російською мовою	Англійською мовою
трапецієвидний	трапециевидный	trapezoidal
трапеція	трапеция	trapezium
тривимірний	трёхмерный	three-dimensional
трикутник	треугольник	triangle
тричлен	трехчлен	trinomial
у подальшому	впоследствии	afterwards, later on
узагальнення	обобщение	generalization, extension
указати	указать	indicate, find, determine
умова; достатня умова; необхідна умова	условие; достаточное условие; необходимое условие	condition; sufficient condition; necessary condition
умовний	условный	conditional
унітарний	унитарный	unitary
унітарність матриць	унитарность матриц	unitary property of matrix
фігура	фигура	figure
фокус	фокус	focus
формула	формула	formula
фундаментальний	фундаментальный	fundamental
функціональний	функциональный	functional
функція; обернена функція	функция; обратная функция	function; inverse function
циліндр	цилиндр	cylinder
ціле	целое	integer
частина; права частина; ліва частина	часть; правая часть; левая часть	part, side; right part; left part
частковий	частичный	partial
чисельник	числитель	numeration

Українською мовою	**Російською мовою**	**Англійською мовою**
число;	число;	number;
натуральне число	натуральное число	natural number
числова пряма	числовая прямая	number line
числовий	числовой	numerical
член	член	member
чудовий, визначний	замечательный	remarkable, wonderful
шукане	искомое	unknown,quantity
ядро	ядро	kernel

ВІДПОВІДІ

Глава 1

1.1. а) $|\overrightarrow{a_1}|=\sqrt{5}$, $(\vec{a}_1)_0=(-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}},0)$; б) $\cos(\vec{a}_1\,\hat{,}\,\vec{j})=\frac{2}{\sqrt{5}}$; в) $x=-\frac{19}{3}$; г) $пр_{\vec{j}}\,\vec{a}=y=0$. **1.2.** $\vec{a}=-2\vec{e}$. **1.3.** $\vec{a}=-\frac{4}{5}\vec{e}_1-\frac{2}{5}\vec{e}_2$. **1.4.** $\vec{a}=-2\vec{e}_1+\vec{e}_2-$ $-\vec{e}_3$. **1.5.** а) $\vec{a}_0=(\frac{2}{\sqrt{13}},\frac{3}{\sqrt{13}},0)$; б) $\vec{d}=(3,\frac{11}{2},0)$; в) $\vec{f}=-2\vec{j}$; г) $пр_{\vec{j}}(\vec{a}-\vec{b})=6$. **1.6.** $(\frac{6}{11},\frac{7}{11},-\frac{6}{11})$. **1.7.** $\pm 3\sqrt{6}$. **1.8.** $|\vec{p}|=\sqrt{154}$, $\cos\alpha=\frac{9}{\sqrt{154}}$, $\cos\beta=\frac{8}{\sqrt{154}}$, $\cos\gamma=\frac{3}{\sqrt{154}}$. **1.9.** $\vec{x}=-5\vec{i}+10\vec{j}+10\vec{k}$. **1.10.** $\vec{x}=2\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$. **1.11.** $\vec{x}=\pm 5\vec{i}+\frac{5}{\sqrt{2}}\vec{j}-\frac{5}{\sqrt{2}}\vec{k}$. **1.12.** $\alpha=-1,\beta=4$. **1.13.** $D(9,-5,6)$. **1.14.** $C(6,-2)$, $D(2,-4)$. **1.15.** $A(-6,-2)$, $B(2,8)$, $C(10,-6)$. **1.16.** $M_1(7,0)$ та $M_2(-1,0)$. **1.17.** $M(0,1,0)$. **1.18.** 7. **1.19.** $(4,0)$ та $(5,2)$. **1.20.** $(-1,2,4)$ та $(8,-4,-2)$. **1.21.** а) 9; б) -61; в) 13. **1.22.** $\alpha=\pm\frac{3}{5}$. **1.23.** $15,\sqrt{593}$. **1.24.** $\frac{2\pi}{3}$. **1.25.** $\frac{1}{2}$. **1.26.** $(\vec{e}_1\,\hat{,}\,\vec{e}_2)=\frac{\pi}{3}$. **1.27.** а) 22; б) -200; в) 41; г) $\sqrt{105}$; д) $\frac{11}{3}$; е) $\frac{22}{7}$; є) $\cos\alpha=\frac{2}{3},\cos\beta=-\frac{1}{3},\cos\gamma=-\frac{2}{3}$; ж) $-\frac{84}{\sqrt{129}}$; з) $\frac{11}{21}$. **1.28.** $M_1(1,0)$ та $M_2(6,0)$. **1.29.** а) $-\frac{41}{5}$; б) $\frac{73}{7}$. **1.30.** 4. **1.31.** $(1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$. **1.32.** $(-3,3,3)$. **1.33.** а) $\sqrt{3}$; б) $3\sqrt{3}$; в) $10\sqrt{3}$. **1.34.** $[\vec{a}_1,\vec{a}_2]=0$, тобто $\vec{a}_1\parallel\vec{a}_2$. **1.35.** а) $2(\vec{k}-\vec{i})$; б) $2[\vec{a},\vec{c}]$; в) $[\vec{a},\vec{c}]$; г) 3. **1.36.** $50\sqrt{2}$. **1.37.** а) $(-3,5,7)$; б) $(-6,10,14)$; в) $(-12,20,28)$. **1.38.** $2\sqrt{6}$. **1.39.** 5. **1.40.** $\alpha=-6,\beta=21$. **1.41.** $(-20,7,-11)$. **1.42.** $-4\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$. **1.43.** -3. **1.44.** -7. а) Ліва;

б) права; в) права. **1.45.** а) Ні; б) так. **1.46.** а) 42; б) 24. **1.47.** $\frac{32}{\sqrt{504}}$.

1.48. $\frac{17}{2}$. **1.49.** 6. **1.50.** $3\sqrt{2}$. **1.51.** а) Так; б) ні. **1.52.** а) -3; б) за будь-якого λ.

Глава 2

2.1. а) $2(x+1)+2(y-2)=0$; $x+y-1=0$; $\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y-\frac{1}{\sqrt{2}}=0$; $p=\frac{1}{\sqrt{2}}$;

б) $2(x-2)=0$; $x-2=0$, пряма паралельна осі Oy; $x-2=0$, $p=2$;

в) $2(x-1)-(y-1)=0$; $2x-y-1=0$; $\frac{2}{\sqrt{5}}x-\frac{1}{\sqrt{5}}y-\frac{1}{\sqrt{5}}=0$, $p=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

2.2. а) $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-1}$; $x+3y-5=0$; $\frac{1}{\sqrt{10}}x+\frac{3}{\sqrt{10}}y-\frac{5}{\sqrt{10}}=0$, $p=\frac{5}{\sqrt{10}}$;

б) $\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{-1}$; $-x+1=0$, пряма паралельна осі Oy; $x-1=0$, $p=1$;

в) $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{0}$; $y-1=0$, пряма паралельна осі Ox; $y-1=0$, $p=1$.

2.3. а) $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{-2}$; $x-y+1=0$; $-\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y-\frac{1}{\sqrt{2}}=0$, $p=\frac{1}{\sqrt{2}}$;

б) $\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{-3}$; $x-1=0$, пряма паралельна осі Oy; $x-1=0$, $p=1$;

в) $\frac{x-2}{-2}=\frac{y-2}{0}$; $y-2=0$, пряма паралельна осі Ox; $y-2=0$, $p=2$.

2.4. а) $\rho(M,l)=\frac{3}{\sqrt{5}}$, l': $\frac{x+1}{-2}=\frac{y-2}{1}$, l'': $-2(x+1)+(y-2)=0$;

б) $\rho(M,l)=\frac{1}{2}$, l': $\frac{x-1}{0}=\frac{y}{2}$, l'': $2y=0$; в) $\rho(M,l)=0$, l': $\frac{x}{1}=\frac{y+1}{1}$, l'': $x+y+1=0$. **2.5.** Перетинаються у точці $M_0(-\frac{3}{4},-\frac{1}{2})$, $\cos(l_1\hat{,}\,l_2)=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

2.6. Перетинаються у точці $M_0(1,0)$, $\cos(l_1\hat{,}\,l_2)=\frac{2}{\sqrt{5}}$. **2.7.** Паралельні, $\rho(l_1,l_2)=\frac{\sqrt{2}}{4}$. **2.8.** Паралельні, $\rho(l_1,l_2)=\sqrt{2}$. **2.9.** а) $2x-y+z-2=0$, $1/\sqrt{6}$; б) $x-y=0$, $1/\sqrt{2}$. **2.10.** а) $x+y-3=0$; б) $x+2y-2=0$.

2.11. а) $x-2y+z=0$; б) $-x+y+2z-5=0$. **2.12.** а) $-x+2y+3z-3=0$; б) $2x-2y-z+1=0$. **2.13.** а) $x+y-3=0$; б) $2x-y-1=0$.

2.14. Перетинаються, $\cos(P_1\hat{,}\,P_2)=-\frac{1}{2\sqrt{15}}$. **2.15.** Паралельні, $\rho(P_1,P_2)=\frac{3}{2\sqrt{6}}$. **2.16.** 8. **2.17.** $2x-y-z-2=0$. **2.18.** а) $\vec{s}=[\vec{n}_1,\vec{n}_2]=$ $=-3\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k}$, рівняння у проекціях: $\begin{cases}4x+3y-5=0;\\5x+3z-7=0;\\5y-4z+1=0;\end{cases}$

б) $\vec{s}=[\vec{n}_1,\vec{n}_2]=-\vec{i}-7\vec{j}-5\vec{k}$, рівняння у проекціях: $\begin{cases}7x-y+1=0;\\5x-z-1=0;\\5y-7z-12=0.\end{cases}$

2.19. а) $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+3}{5}$; б) $\frac{x-2}{5}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{-1}$; в) $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{0}$;

г) $\frac{x-2}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{1}$; д) $\frac{x-2}{-4}=\frac{y}{8}=\frac{z+3}{10}$; е) $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{1/2}$.

2.20. а) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{-2}$; б) $\frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-3}$. **2.21.** а) $x-2y+z=0$;

б) $2x+y-1=0$; в) $\begin{cases}x-2y+z=0;\\2x+y-1=0\end{cases}$ або $\frac{x}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{5}$; г) $\frac{18}{\sqrt{30}}$;

д) $M'(\frac{3}{5},-\frac{1}{5},-1)$. **2.22.** а) $1/\sqrt{15}$, $M(1,-6,-4)$; б) $3x-y+2z-1=0$;

в) $\begin{cases}x+y-z+1=0;\\3x-y+2z-1=0.\end{cases}$ **2.23.** 3. **2.24.** а) $\frac{6}{\sqrt{5}}$; б) 21. **2.25.** 25.

2.26. $\frac{x+1}{7}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{-5}$. **2.27.** -11. **2.28.** $\frac{x-15}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z-23}{7}$.

2.29. $\arcsin\frac{3}{2\sqrt{7}}$. **2.30.** б) $6x-3y-2z-26=0$; в) 7;

г) $\begin{cases} 17x+16y+27z-90=0; \\ 31x+58y-6z-20=0. \end{cases}$ **2.31.** б) $2x-3y-4z-74=0$; в) $4\sqrt{26}$; г) $\frac{x+5}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z}{-4}$. **2.32.** а) $a=5, b=3$; б) $F_1(-4,0), F_2(4,0)$; в) $\varepsilon=\frac{4}{5}$; г) $D_1: x=-\frac{25}{4}$, $D_2: x=\frac{25}{4}$. **2.33.** а) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$; б) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; в) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$; г) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$; д) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{1}=1$; е) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$. **2.34.** $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$. **2.35.** а) $C(3,-1)$, $a=3$, $b=\sqrt{5}$, $\varepsilon=\frac{2}{3}$, $D_1: 2x+3=0$, $D_2: 2x-15=0$; б) $C(-1,2)$, $a=5$, $b=4$, $\varepsilon=\frac{3}{5}$, $D_1: 3x+28=0$, $D_2: 3x-22=0$; в) $C(1,-2)$, $a=4$, $b=2\sqrt{3}$, $\varepsilon=\frac{1}{2}$, $D_1: y+10=0$, $D_2: y-6=0$. **2.36.** а) $a=3$, $b=4$; б) $F_1(-5,0)$, $F_2(5,0)$; в) $\varepsilon=\frac{5}{3}$; г) $y=\pm\frac{4}{3}x$; д) $x=\pm\frac{9}{5}$. **2.37.** а) $a=4, b=3$; б) $F_1(0,-5)$, $F_2(0,5)$; в) $\varepsilon=\frac{5}{4}$; г) $y=\pm\frac{4}{3}x$; д) $y=\pm\frac{16}{5}$. **2.38.** а) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$; б) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$; в) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$; г) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$; д) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$; е) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$. **2.39.** $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$. **2.40.** а) $C(2,-3)$, $a=3$, $b=4$, $\varepsilon=\frac{5}{3}$, $4x-3y-17=0$ та $4x+3y+1=0$, $D_1: 5x-1=0$ та $D_2: 5x-19=0$; б) $C(-5,1)$, $a=8$, $b=6$, $\varepsilon=\frac{5}{4}$, $3x+4y+11=0$ та $3x-4y+19=0$, $D_1: x=-11{,}4$ та $D_2: x=1{,}4$; в) $C(2,-1)$, $a=4$, $b=3$, $\varepsilon=\frac{5}{4}$, $4x+3y-5=0$ та $4x-3y-11=0$, $D_1: y=-4{,}2$ та $D_2: y=2{,}2$. **2.41.** а) $p=3$; б) $p=5/2$; в) $p=2$; г) $p=1/2$. **2.42.** а) $y^2=-x$;

б) $x^2=-2y$; в) $x^2=-12y$. **2.43.** а) $(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$; б) $(y-y_0)^2=-2p(x-x_0)$. **2.44.** а) $A(2,0)$, $p=2$; б) $A(0,2)$, $p=1/2$; в) $A(1,3)$, $p=1/8$; г) $A(6,-1)$, $p=3$; д) $A(1,2)$, $p=2$; е) $A(-4,3)$, $p=1/4$. **2.45.** Еліпсоїд. **2.46.** Однопорожнинний гіперболоїд. **2.47.** Двопорожнинний гіперболоїд обертання. **2.48.** Конус. **2.49.** Параболоїд обертання. **2.50.** Гіперболічний параболоїд. **2.51.** Еліптичний параболоїд. **2.52.** Параболічний циліндр. **2.53.** Параболоїд обертання з вершиною $(0, 0, 2)$. **2.54.** Гіперболічний параболоїд. **2.55.** Однопорожнинний гіперболоїд обертання. **2.56.** Двопорожнинний гіперболоїд обертання. **2.62.** Круговий циліндр $(x-2)^2+(z-2)^2=4$. **2.63.** Конус другого порядку $x^2+(y-1)^2-(z-1)^2=0$ з вершиною $S(0,1,1)$. **2.64.** Точка $(0,1,-1)$. **2.65.** Однопорожнинний гіперболоїд з канонічним рівнянням $x_1^2+\frac{y_1^2}{4}-\frac{z_1^2}{4}=1$. **2.66.** Двопорожнинний гіперболоїд з канонічним рівнянням $x_1^2+y_1^2-z_1^2=-1$. **2.67.** Параболоїд обертання з канонічним рівнянням $x_1^2+y_1^2=4z_1$. **2.68.** Гіперболічний параболоїд з канонічним рівнянням $x_1^2-\frac{z_1^2}{9}=2y_1$.

Глава 3

3.1. 18. **3.2.** $4ab$. **3.3.** 1. **3.4.** 1. **3.5.** $x_1=-4$, $x_2=-1$. **3.6.** $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$, $k\in Z$. **3.7.** -2. **3.8.** 4. **3.9.** 0. **3.10.** 22. **3.11.** 28. **3.12.** $x_1=1$, $x_2=-3$. **3.13.** $(-\infty,+\infty)$. **3.14.** $(4,+\infty)$. **3.15.** $(-6,-4)$. **3.20.** 0. **3.21.** 0. **3.22.** 0. **3.26.** а) $8a+15b+12c-19d$; б) $2a-8b+c+5d$; в) $2a-b-c-d$. **3.27.** 0. **3.28.** 48. **3.29.** $(be-cd)^2$. **3.30.** 665. **3.31.** -65. **3.32.** 0. **3.33.** 394. **3.34.** $x^5-x^4+x^3+x^2-2x+1$. **3.35.** $n!$. **3.36.** $2n+1$. **3.37.** 1. **3.38.** $(-1)^{n-1}\cdot n$. **3.39.** α^n. **3.40.** $\alpha^n+\beta^n$. **3.41.** $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ -6 & 7 & -8 \end{pmatrix}$.

3.42. $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$. **3.43.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. **3.44.** $\begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix}$. **3.45.** $\begin{pmatrix} 56 \\ 69 \\ 17 \end{pmatrix}$.

3.46. а) (31); б) $\begin{pmatrix} 12 & 0 & -6 & 9 & 3 \\ 4 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & 2 & -3 & -1 \\ 20 & 0 & -10 & 15 & 5 \\ 8 & 0 & -4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$. **3.47.** $\begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 25 \\ 35 \end{pmatrix}$. **3.48.** $\begin{pmatrix} 13 & -14 \\ 21 & -22 \end{pmatrix}$.

3.49. $\begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **3.50.** $\begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$. **3.51.** $\begin{pmatrix} 8 & 15 \\ 0 & 23 \end{pmatrix}$. **3.52.** $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

3.53. $\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 12 & -4 \end{pmatrix}$. **3.54.** $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 9 \\ -2 & -6 & 3 \\ -8 & -9 & 2 \end{pmatrix}$. **3.55.** $\begin{pmatrix} a & 2b \\ 3b & a+3b \end{pmatrix}$, $\forall a,b$.

3.56. $\begin{pmatrix} a & 3b \\ -5b & a+9b \end{pmatrix}$, $\forall a,b$. **3.57.** $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, де $a^2+bc=0$.

3.58. $\pm E$; $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, де $a^2+bc=1$. **3.59.** $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

3.60. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. **3.61.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$. **3.62.** $\begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

3.63. $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. **3.64.** $\begin{pmatrix} -7/3 & 2 & -1/3 \\ 5/3 & -1 & -1/3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3.65. $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. **3.66.** $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3.67. $\begin{pmatrix} -7 & 5 & 12 & -19 \\ 3 & -2 & -5 & 8 \\ 41 & -30 & -69 & 111 \\ -59 & 43 & 99 & -159 \end{pmatrix}$. **3.68.** $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. **3.69.** $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$.

3.70. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. **3.71.** $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. **3.72.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. **3.73.** $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3.74. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. **3.75.** 2. **3.76.** 3. **3.77.** 2. **3.78.** 2. **3.79.** 2. **3.80.** 3. **3.81.** 5. **3.82.** 4. **3.83.** Лінійно незалежна. **3.84.** Лінійно залежна. **3.85.** 3. **3.86.** $r=3$; $\beta=(\vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4)$. **3.87.** $r=3$; $\beta=(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_5)$. **3.109.** $x=16$, $y=7$. **3.110.** $x=2$, $y=3$. **3.111.** $x=-b$, $y=-\frac{2}{3}a$. **3.112.** $x=2$, $y=-1$, $z=1$. **3.113.** $x=1$, $y=3$, $z=5$. **3.114.** $x=3$, $y=1$, $z=-1$. **3.115.** $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=2$, $x_4=-2$. **3.116.** $x_1=2$, $x_2=x_3=x_4=0$. **3.117.** $x_1=-3$, $x_2=2$, $x_3=1$. **3.118.** $x_1=-1$, $x_2=1$, $x_3=-2$. **3.119.** $x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=-1$, $x_4=-1$. **3.120.** $x_1=-2$, $x_2=0$, $x_3=1$, $x_4=-1$. **3.121.** Система несумісна. **3.122.** $(-1+2c_1, 1+c_1, c_1)^{\mathrm{T}}$, $c_1\in\mathbf{R}$ **3.123.** $(-1, 3, -2, 2)^{\mathrm{T}}$. **3.124.** $\left(0, 2, \frac{1}{3}, -\frac{3}{2}\right)^{\mathrm{T}}$. **3.125.** $\left(-\frac{2}{11}+\frac{1}{11}c_1-\frac{9}{11}c_2, \frac{10}{11}-\frac{5}{11}c_1+\frac{1}{11}c_2, c_1, c_2\right)^{\mathrm{T}}$, $c_1, c_2\in\mathbf{R}$. **3.126.** Система несумісна. **3.127.** $(c_1, -13+3c_1, -7, 0)^{\mathrm{T}}$, $c_1\in\mathbf{R}$. **3.128.** Система несумісна. **3.129.** $\lambda\neq 6$. **3.130.** При будь-якому λ. **3.131.** $\lambda=-2$. **3.132.** Якщо $\lambda\neq 0$, система несумісна; якщо $\lambda=0$,

$$X=\left(-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}c_1-\frac{13}{2}c_2,\ -\frac{7}{2}-\frac{7}{2}c_1-\frac{19}{2}c_2, c_1, c_2\right)^{\mathrm{T}},\ c_1, c_2\in\mathbf{R}.$$

3.133. Якщо $(\lambda-1)(\lambda+3)\neq 0$, $X=\frac{1}{\lambda+3}(1, 1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$; якщо $\lambda=-3$, система несумісна; якщо $\lambda=1$, $X=(1-c_1-c_2-c_3, c_1, c_2, c_3)$, $c_1, c_2, c_3\in\mathbf{R}$.

3.134. $E_1=(3,1,5)^{\mathrm{T}}$, $X=c_1E_1$, $c_1\in\mathbf{R}$. **3.135.** $E_1=(2,1,0)^{\mathrm{T}}$, $E_2=(3,0,1)^{\mathrm{T}}$, $X=c_1E_1+c_2E_2$, $c_1,c_2\in\mathbf{R}$. **3.136.** Система має тільки тривіальний розв'язок. **3.137.** $E_1=(4,1,-5)^{\mathrm{T}}$, $X=c_1E_1$, $c_1\in\mathbf{R}$.

3.138. $E_1=(1,0,0,-\frac{9}{4},\frac{3}{4})^{\mathrm{T}}$, $E_2=(0,1,0,-\frac{3}{2},\frac{1}{2})^{\mathrm{T}}$, $E_3=(0,0,1,-2,1)^{\mathrm{T}}$, $X=c_1E_1+c_2E_2+c_3E_3$, $c_1,c_2,c_3\in\mathbf{R}$. **3.139.** $E_1=\left(1,0,-\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right)^{\mathrm{T}}$, $E_2=(0,1,5,-7)^{\mathrm{T}}$, $X=c_1E_1+c_2E_2$, $c_1,c_2\in\mathbf{R}$. **3.140.** $a_1=2$, $X=c_1E_1$, $E_1=(1,0,-2)^{\mathrm{T}}$; $a_2=-4$, $X=c_1E_1$, $E_1=\left(1,-\frac{24}{5},-\frac{4}{5}\right)^{\mathrm{T}}$, $c_1\in\mathbf{R}$, $c_1\neq 0$.

3.141. $a=-1$, $X=c_1E_1$, $E_1=\left(-\frac{5}{3},\frac{1}{3},1\right)^{\mathrm{T}}$, $c_1\in\mathbf{R}$, $c_1\neq 0$.

3.142. $X=X_0+c_1E_1+c_2E_2+c_3E_3$, $X_0=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},0,0,0\right)^{\mathrm{T}}$, $E_1=(0,1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$, $E_2=(0,1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$, $E_3=\left(\frac{1}{3},-\frac{5}{3},0,0,1\right)^{\mathrm{T}}$, $c_1,c_2,c_3\in\mathbf{R}$.

3.143. $X=X_0+c_1E_1+c_2E_2+c_3E_3$, $X_0=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{6},0,0,0\right)^{\mathrm{T}}$, $E_1=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},1,0,0\right)^{\mathrm{T}}$, $E_2=\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},0,1,0\right)^{\mathrm{T}}$, $E_3=(1,1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$, $c_1,c_2,c_3\in\mathbf{R}$.

3.144. $X=X_0+c_1E_1+c_2E_2+c_3E_3+c_4E_4$, $X_0=\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},0,0,0,0\right)^{\mathrm{T}}$, $E_1=(1,1,0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$, $E_2=(-1,0,1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$, $E_3=(0,0,0,1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $E_4=(0,0,0,-1,0,1)^{\mathrm{T}}$, $c_1,c_2,c_3,c_4\in\mathbf{R}$. **3.145.** $X=X_0+c_1E_1+c_2E_2+c_3E_3$, $X_0=\left(1,-\frac{1}{2},0,0,0\right)^{\mathrm{T}}$, $E_1=\left(0,-\frac{3}{2},1,0,0\right)^{\mathrm{T}}$, $E_2=(0,-2,0,1,0)^{\mathrm{T}}$,

$E_3=\left(0,-\frac{5}{2},0,0,1\right)^{\mathrm{T}}$, $c_1,c_2,c_3\in\mathbf{R}$. **3.146.** $(1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$.

3.147. $(6-c,-5+c,3,-1-c,c)^{\mathrm{T}}$, $c\in\mathbf{R}$. **3.148.** Система несумісна.

3.149. $\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2}c_1,\ c_1,0,0,\frac{11}{5}-\frac{6}{5}c_2,\ c_2\right)^{\mathrm{T}}$, $c_1,c_2\in\mathbf{R}$.

3.150. $(-1+c_1+2c_2,-3+c_1+2c_2,c_1,c_2)^{\mathrm{T}}$, $c_1,c_2\in\mathbf{R}$.

3.151. а) $7+3i$, $22+7i$; б) $2\sqrt{2}$, 5. **3.152.** а) $-0{,}4+2i$, $0{,}12+0{,}24i$; б) $-i$, $\frac{7}{6}-\frac{\sqrt{5}}{6}i$. **3.153.** а) 0; б) $-\frac{11}{17}$; в) 3. **3.154.** а) 0; б) $-2i$; в) 0; г) $-\frac{18}{25}+\frac{23}{50}i$.

3.155. а) $6+11i$; б) $-4i$; в) $-29+22i$. **3.156.** а) $\frac{5}{17}-\frac{3}{17}i$; б) i; в) $\frac{14}{5}i$; г) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$. **3.157.** а) $-\frac{13}{4}+\frac{25}{4}i$; б) $\frac{9}{25}(4+3i)$. **3.158.** а) $x=1$, $y=-2$; б) $x=\frac{20}{17}$, $y=-\frac{36}{17}$; в) $x=\frac{1}{3}$, $y=\frac{1}{4}$; г) $x=-\frac{b}{a^2+b^2}$, $y=-\frac{a}{a^2+b^2}$.

3.159. $(4,3),(5,3),(4,4),(5,4)$. **3.160.** а) $(-2,-2),(2,-2)$; б) $(-1,-4),(1,-4)$.

3.161. а) $-4i$, $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $10-2i$, $-\frac{7}{4}-\frac{17}{4}i$. **3.164.** а) $-1-i$; б) 0, -1, $\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$. **3.165.** $z_1=1-i$, $z_2=i$. **3.166.** а) 1, $\frac{\pi}{2}$; б) 1, $-\frac{\pi}{6}$; в) 5, π; г) $\sqrt{2}$, $-\frac{\pi}{4}$; д) 7, $-\frac{\pi}{3}$; е) 2, $-\frac{2\pi}{3}$; є) 1, $\frac{3\pi}{4}$; ж) $\sqrt{74}$, $-\operatorname{arctg}\frac{7}{5}$; з) $\sqrt{7}$, $-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$; і) $\sqrt{10}$, $-\operatorname{arctg}3$; к) 1, $-\frac{6\pi}{7}$. **3.167.** а) $|z|=3$, $\operatorname{Arg}z=\pi+2k\pi$, $k\in\mathrm{Z}$; б) $|z|=1$, $\operatorname{Arg}z=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$; в) $|z|=1$, $\operatorname{Arg}z=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$. **3.168.** а) $\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$; б) $2(\cos\pi+i\sin\pi)$; в) $2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$; г) $2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$; д) $\cos\frac{6\pi}{7}+i\sin\frac{6\pi}{7}$;

е) $\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$. **3.169.** а) -1728; б) $2^9(1-i\sqrt{3})$; в) $-2^{19}(1-i\sqrt{3})$; г) 0.

3.170. а) $1, -1$; б) $1,\ -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $1,\ i,\ -1,\ -i$.

3.171. а) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$; б) $\frac{1}{2}(\pm\sqrt{3}+i), -i$; в) $\pm\left(\cos\frac{\pi}{8}-i\sin\frac{\pi}{8}\right)$, $\pm\left(\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$; г) $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{9}k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{9}k\right)$, $k=\overline{0,8}$;

д) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i\sqrt{3})$; е) $\sqrt[3]{4}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}k\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}k\right)\right)$, $k=0,1,2$;

є) $\sqrt[10]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{5}k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{5}k\right)\right)$, $k=\overline{0,4}$. **3.172.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $2, 2i, -2, -2i$; в) $\pm1,\ \pm i,\ \frac{\sqrt{2}}{2}(\pm1\pm i)$. **3.173.** а) $2e^{i\pi}$;

б) $1\cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$; в) $1\cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}$; г) $2e^{-\frac{2\pi}{3}i}$; д) $\sqrt{34}\,e^{i\,\mathrm{arctg}\,\frac{3}{5}}$; е) $e^{i\,\mathrm{arctg}\left(-\frac{12}{5}\right)}$;

є) $5e^{i\left(\mathrm{arctg}\,\frac{4}{3}+\pi\right)}$; ж) $\sqrt{5}\,e^{i\left(\pi-\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}\right)}$; з) $1\cdot e^{i\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}$. **3.174.** а) $24e^{-i\frac{\pi}{2}}$, $\frac{8}{3}$;

б) $16e^{i\frac{7\pi}{4}}$, $2e^{-i\frac{\pi}{2}}$. **3.175.** а) Коло радіуса R з центром у точці z_0; зовнішність круга, обмеженого цим колом; внутрішність того самого круга;

б) при $2a>|z_1-z_2|$ – еліпс з фокусами в точках z_1 і z_2, велика піввісь якого дорівнює a; при $2a=|z_1-z_2|$ – відрізок, що сполучає точки z_1 і z_2; при $2a<|z_1-z_2|$ – пуста множина; в) гіпербола з фокусами в точках z_1 і z_2, дійсна вісь якої дорівнює a. **3.176.** а) Вся комплексна площина, з якої вирізано круг радіуса 2 з центром у початку координат; б) круг радіуса 1 з центром у початку координат з виколотою точкою $z=0$.

3.177. а) Коло радіуса $r=8$ з центром у точці $z=5i$; б) круг разом з межею радіуса $r=4$ з центром у точці $z=1+i$. **3.178.** а) Сектор, обмежений променями $l_1:\arg z=0$, $l_2:\arg z=\frac{\pi}{4}$ (промінь l_1 не належить сектору);

б) частина кільця, обмеженого променями $\arg z=\frac{\pi}{4}$ та $\arg z=\frac{\pi}{2}$ і колами радіусів $r=1$, $r=2$ з центром у точці $z=-i$. **3.179.** а) Півплощина, що розташована нижче прямої $y=1$, включаючи цю пряму; б) круг радіуса 1 з центром у точці $z=0$, включаючи коло; в) внутрішня частина круга радіуса 2 з центром у точці $z=-i$, виключаючи його центр і саме коло.

3.180. а) Зовнішність кола радіуса 1 з центром у точці $(1, 0)$; б) півплощина, що знаходиться зліва від уявної осі; в) частина площини зовні параболи $y^2=1-2x$, якій належить точка $z=1$. **3.181.** а) Коло радіуса 1 з центром в точці $z=0$ з виколотою точкою $z=-1$; б) коло радіуса a з центром в точці $z=0$ з виколотою точкою $z=-a$; в) парабола $y^2=2x+1$.

3.182. а) Гіпербола $xy=1$; б) гіпербола $x^2-y^2=1$; в) коло $x^2+(y+1)^2=1$.

3.183. Гіпербола $x^2-y^2=\frac{1}{2}$. **3.184.** Коло $(x+1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$.

3.185. а) Коло $x^2+y^2=1$; б) пряма, перпендикулярна до відрізка z_1z_2, яка проходить через його середину; в) гіпербола $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-y^2=\frac{1}{4}$; г) парабола $y^2=2x+1$. **3.186.** а) $\bar{z}-z=0$ та $\bar{z}+z=0$; б) $z+\bar{z}+i(z-\bar{z})=0$; в) $k(z+\bar{z})+2b+i(z-\bar{z})=0$. **3.187.** а) $z^2+\bar{z}^2=2a^2$; б) $z\cdot\bar{z}+z+\bar{z}=0$.

Глава 4

4.4. Так, якщо пряма проходить через початок координат. **4.5.** Ні.

4.6. $T_{\beta\to\beta'}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-1&2\\0&0&-1\end{pmatrix}$, $X'=\begin{pmatrix}1/2\\-3/2\\-2\end{pmatrix}$. **4.7.** $T_{\beta\to\beta'}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$, $X'=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$. **4.8.** $T_{\beta\to\beta'}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$, $X'=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$. **4.9.** а) Так; б) так; в) ні; г) ні. **4.10.** а) Так; б) ні; в) так. **4.11.** а) Так; б) ні; в) так; г) ні; д) так.

4.12. $r=2$; базисом є, наприклад, система $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$.

4.13. $T_{\beta\to\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. **4.14.** а) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4.16. $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. **4.17.** $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. **4.18.** а) Так; б) так; в) ні; г) ні; д) ні. **4.19.** а) Так; б) ні; в) ні; г) так; д) ні. **4.20.** а) 1, $(1, 7, 5)$; б) 3, $(-0{,}1; 0{,}7; 1; 0; 0)$, $(-0{,}4; -0{,}2; 0; 1; 0)$, $(0{,}4; 0{,}2; 0; 0; 1)$. **4.21.** а) $(3, -2, 5)$, б) $(0, 4, -1)$, в) $(4, 12, 9)$. **4.22.** а) $(-1, 5, 2, 1)$, б) $(3, 7, -4, 12)$.

4.23. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. **4.24.** $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. **4.25.** $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. **4.26.** а) , б) Підпростір вимірності 2, базисом є будь-яка пара неколінеарних векторів з заданої множини; в) не є підпростором. **4.27.** а) Підпростір вимірності $n-2$, б) не є підпростором. **4.28.** Множини, вказані у пп. а) ,б) , г) – підпростори, а множина з в) не є підпростором · Умову, якій задовольняють координати у будь-якій задачі з цієї серії, можна записати у вигляді $AX=0$, де A – деяка матриця, що має n стовпців, а X – стовпець координат у фіксованому базисі. Отже, вимірність відповідного підпростору дорівнює $n - \mathrm{Rg}\, A$, а за базис можна узяти будь-яку фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь $AX=0$. **4.29.** а) Підпростір вимірності $n^2 - C_n^2 = \dfrac{n(n+1)}{2}$; б) не є підпростором. **4.30.** 2. **4.31.** 3; один з базисів є, наприклад, $\beta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_4)$. **4.32.** 3; один з базисів є, наприклад, $\beta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_5)$. **4.33.** а) $|\vec{x}| = \sqrt{5}$, $|\vec{y}| = 3$, $(\vec{x}, \vec{y}) = 3$, $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$; б) $|\vec{x}| = \sqrt{10}$, $|\vec{y}| = \sqrt{5}$, $(\vec{x}, \vec{y}) = 2$, $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{5}$; в) $|\vec{x}| = 13$, $|\vec{y}| = \sqrt{14}$, $(\vec{x}, \vec{y}) = -15$, $\cos\varphi = \dfrac{-15}{13\sqrt{14}}$.

4.34. а) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{14}}, \dfrac{2}{\sqrt{14}}, \dfrac{3}{\sqrt{14}}\right)$, $\left(0, \dfrac{3}{\sqrt{13}}, -\dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)$, $\left(\dfrac{13}{\sqrt{182}}, -\dfrac{2}{\sqrt{182}}, -\dfrac{3}{\sqrt{182}}\right)$;

б) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{14}}, \dfrac{2}{\sqrt{14}}, \dfrac{3}{\sqrt{14}}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{35}}, \dfrac{5}{\sqrt{35}}, -\dfrac{3}{\sqrt{35}}\right)$, $\left(-\dfrac{3}{\sqrt{10}}, 0, \dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)$;

в) $(1, 0, 0)$, $\left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. **4.35.** а) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$, $\left(0, 0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$, $\left(0, 0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

б) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}, 0, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)$, $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, 0, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $(0, 1, 0, 0)$. **4.36.** $\vec{f}_1 = \vec{g}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\vec{f}_2 = (2, 2, -2, -2)$, $\vec{f}_3 = (-1, 1, -1, 1)$. **4.37.** $\vec{f}_1 = \vec{g}_1 = (1, 2, 1, 3)$, $\vec{f}_2 = \left(\dfrac{10}{3}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, -1\right)$, $\vec{f}_3 = \left(-\dfrac{19}{185}, \dfrac{87}{185}, \dfrac{61}{185}, -\dfrac{72}{185}\right)$. **4.38.** $\vec{f}_1 = \vec{g}_1 = (1, 2, 2, -1)$, $\vec{f}_2 = (2, 3, -3, 2)$, $\vec{f}_3 = (2, -1, -1, -2)$. **4.39.** $\beta = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$, $\vec{f}_1 = (1, 2, 2, -1)$, $\vec{f}_2 = (2, 3, -3, 2)$, $\vec{f}_3 = (2, -1, -1, -2)$. **4.40.** $\beta = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$, $\vec{f}_1 = (2, 1, 3, -1)$, $\vec{f}_2 = (3, 2, -3, -1)$, $\vec{f}_3 = (1, 5, 1, 10)$. **4.41.** $\vec{e}_3 = (-4, 2, -1, 3)$, $\vec{e}_4 = (2, 4, 3, 1)$. Для визначення вектора $\vec{e}_3 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ достатньо знайти який-небудь розв'язок системи відносно невідомих x_1, x_2, x_3, x_4 двох лінійних рівнянь $(\vec{e}_3, \vec{e}_1) = 0$, $(\vec{e}_3, \vec{e}_2) = 0$. Для визначення $\vec{e}_4$ аналогічна система складається з трьох рівнянь. **4.42.** $\vec{e}_4 = (1, -1, 1, -1, 0)$, $\vec{e}_5 = (0, 5, 1, -4, -2)$. **4.43.** $\vec{e}_3 = \left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$. **4.44.** $\vec{e}_3 = (1, -2, 1, 0)$, $\vec{e}_4 = (25, 4, -17, -6)$. **4.45.** а) $-1+6i$; б) $2-4i$. **4.46.** а) $91+63i$, $|\vec{a}| = \sqrt{157}$, $|\vec{b}| = \sqrt{106}$; б) $4-4i$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = \sqrt{6}$.

Глава 5

5.1. Є лінійним оператором; $A=\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$. **5.2.** Не є лінійним оператором.

5.3. Є лінійним оператором; якщо $\vec a=a_1\vec i+a_2\vec j+a_3\vec k$, то

$A=\begin{pmatrix}0&-a_3&a_2\\a_3&0&-a_1\\-a_2&a_1&0\end{pmatrix}$. **5.4.** Не є лінійним оператором. **5.5.** Є лінійним оператором; $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\2&0&1\\3&-1&1\end{pmatrix}$. **5.6.** Є лінійним оператором; $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\2&0&1\\3&-1&1\end{pmatrix}$.

5.7. Не є лінійним оператором. **5.8.** Є лінійним оператором; $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

5.9. Є лінійним оператором; $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&-3&1\\2&0&3\end{pmatrix}$. **5.10.** Є лінійним оператором;

$A=\begin{pmatrix}3&1&0\\1&-2&-1\\0&3&2\end{pmatrix}$. **5.11.** Не є лінійним оператором.

5.12. $C=\begin{pmatrix}22&13&-37\\-39&-16&25\\-1&0&-6\end{pmatrix}$, $C\vec x=(22x_1+13x_2-37x_3,\ -39x_1-16x_2+25x_3,\ -x_1-6x_3)$.

5.13. $C=\begin{pmatrix}-15&23&-7\\2&8&-4\\-7&1&7\end{pmatrix}$, $C\vec x=(-15x_1+23x_2-7x_3,\ 2x_1+8x_2-4x_3,\ -7x_1+x_2+7x_3)$.

5.14. $C=0$, $C\vec x=0$. **5.15.** $C=\begin{pmatrix}2&3&-2\\1&0&-4\\5&0&-2\end{pmatrix}$, $C\vec x=(2x_1+3x_2-2x_3,\ x_1-4x_3,\ 5x_1-2x_3)$.

5.16. а) $\begin{pmatrix}1&2&1\\5&3&0\\2&7&6\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}-6&6&3\\13&6&2\\20&6&4\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}1&14&5\\8&-8&-2\\7&23&11\end{pmatrix}$.

5.17. а) $\begin{pmatrix}6&5\\-3&3\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}-2&-5\\11&11\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}1&5\\-9&-1\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}-16&-15\\20&16\end{pmatrix}$.

5.18. а) $A'=\begin{pmatrix}1&0&2&1\\2&3&5&1\\3&-1&0&2\\1&1&2&3\end{pmatrix}$; б) $A'=\begin{pmatrix}-2&0&1&0\\1&-4&-8&-7\\1&4&6&4\\1&3&4&7\end{pmatrix}$.

5.19. $A''=\begin{pmatrix}1&2&2\\3&-1&-2\\2&-3&1\end{pmatrix}$. **5.20.** $[A+B]_{\beta''}=\begin{pmatrix}44&44\\-29{,}5&-25\end{pmatrix}$.

5.21. $p(A)=3A^2-2A+5E=\begin{pmatrix}-6&22\\-22&49\end{pmatrix}$.

5.22. а) $D=\begin{pmatrix}0&1&0&0&\dots&0\\0&0&2&0&\dots&0\\0&0&0&3&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&0&\dots&n-1\\0&0&0&0&\dots&0\end{pmatrix}$; б) $D=\begin{pmatrix}0&1&0&0&\dots&0\\0&0&1&0&\dots&0\\0&0&0&1&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&0&\dots&1\\0&0&0&0&\dots&0\end{pmatrix}$.

5.23. Оператор має обернений тоді і тільки тоді, коли $\lambda\ne0$; $\mathscr{A}^{-1}\vec x=\frac{1}{\lambda}\vec x$.

5.24. $\mathscr{A}^{-1}\vec x=(-x+2y-z)\vec i+(-x-3y-2z)\vec j+(2x-3y+2z)\vec k$.

5.25. Оператор не має оберненого. **5.26.** $\mathscr{A}^{-1}=\mathscr{A}$. **5.27.** Оператор не має оберненого. **5.28.** $\mathscr{A}^{-1}\vec x=\frac{1}{9}(x_1+2x_2+2x_3,\ 2x_1+x_2-2x_3,\ 2x_1-2x_2+x_3)$.

5.29. а) $-\frac{1}{28}\begin{pmatrix}-4&19&-8\\12&-8&-4\\0&-7&0\end{pmatrix}$; б) $\frac{1}{12}\begin{pmatrix}0&5&2\\12&-19&2\\0&1&-2\end{pmatrix}$; в) не існує;

г) $\dfrac{1}{30}\begin{pmatrix} -5 & 15 & -25 \\ -2 & 0 & 14 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

5.30. $\dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = 2$; базис $\operatorname{Im} \mathcal{A}$: $\vec{e}_1 = (2, 1, 1)$, $\vec{e}_2 = (-1, -2, 1)$;

$\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} = 1$; базис $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$: $\vec{e} = (1, 1, 1)$.

5.31. $\dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = 1$; базис $\operatorname{Im} \mathcal{A}$: $\vec{e} = (1, 1, 1)$;

$\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} = 2$; базис $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$: $\vec{e}_1 = (1, -1, 0)$, $\vec{e}_2 = (1, 0, -1)$.

5.32. а) $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \{0\}$, $\operatorname{Im} \mathcal{A} = \mathbf{R}^3$, $\operatorname{Rg} \mathcal{A} = 3$, $\operatorname{def} \mathcal{A} = 0$;

б) $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \{c(-1, 7, 4) \mid \forall c \in \mathbf{R}\}$,

$\operatorname{Im} \mathcal{A} = \{c_1(1,3,4) + c_2(-1,1,0) \mid \forall c_1, c_2 \in \mathbf{R}\}$, $\operatorname{Rg} \mathcal{A} = 2$, $\operatorname{def} \mathcal{A} = 1$;

в) $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \{(c_1, -4c_1 - 2c_2, c_2) \mid \forall c_1, c_2 \in \mathbf{R}\}$;

$\operatorname{Im} \mathcal{A} = \{c(4, 1, 2) \mid \forall c \in \mathbf{R}\}$, $\operatorname{Rg} \mathcal{A} = 1$, $\operatorname{def} \mathcal{A} = 2$;

г) $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \mathbf{R}^3$, $\operatorname{Im} \mathcal{A} = \{0\}$, $\operatorname{Rg} \mathcal{A} = 0$, $\operatorname{def} \mathcal{A} = 3$.

5.33. $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$: сукупність многочленів нульового степеня, тобто констант;

$\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} = 1$;

$\operatorname{Im} \mathcal{A}$: сукупність многочленів, степінь яких $\le n-2$; $\dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = n-1$.

5.34. а) $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$ – власні вектори з власними значеннями $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$ відповідно; б) $\vec{x}_1$ – власний вектор з власним значенням $\lambda_1 = -3$;

в) $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ – власні вектори з власними значеннями $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$ відповідно.

5.35. а) $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$; спектр: 2, 3; б) $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$; спектр: 2, 4; в) $\lambda(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$; спектр: 0, 2, 3; г) $(\lambda-1)^2(\lambda+3) = 0$; спектр: –3, 1, 1; д) $(\lambda-4)^2(\lambda-5) = 0$; спектр: 4, 4, 5; е) $(\lambda-1)^2(\lambda-2)(\lambda+1) = 0$; спектр: –1, 1, 1, 2; є) $(\lambda-4)^2(\lambda-1)^2 = 0$; спектр: 1, 1, 4, 4; ж) $(\lambda-9)^2(\lambda-1)(\lambda+1) = 0$; спектр: –1, 1, 9, 9.

5.36. $\lambda = -1$, $\vec{x}^{(\lambda)} = c(1, 1, -1)$, $c \in \mathbf{R}$, $c \ne 0$.

5.37. $\lambda = 2$, $\vec{x}^{(\lambda)} = c_1(1, 2, 0) + c_2(0, 0, 1)$, $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$, $|c_1| + |c_2| \ne 0$.

5.38. $\lambda_1 = 1$, $\vec{x}^{(\lambda_1)} = c(1, 1, 1)$; $\lambda_2 = 0$, $\vec{x}^{(\lambda_2)} = c(1, 2, 3)$, $c \in \mathbf{R}$, $c \ne 0$.

5.39. $\lambda = 1$, $\vec{x}^{(\lambda)} = c(3, 1, 1)$, $c \in \mathbf{R}$, $c \ne 0$.

5.40. $\lambda_1 = 3$, $\vec{x}^{(\lambda_1)} = c(1, 2, 2)$; $\lambda_2 = -1$, $\vec{x}^{(\lambda_2)} = c(1, 2, 1)$, $c \in \mathbf{R}$, $c \ne 0$.

5.41. $\lambda_1 = 1$, $\vec{x}^{(\lambda_1)} = c_1(2, 1, 0) + c_2(1, 0, -1)$, $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$, $|c_1| + |c_2| \ne 0$;

$\lambda_2 = -1$, $\vec{x}^{(\lambda_2)} = c(3, 5, 6)$, $c \in \mathbf{R}$, $c \ne 0$.

5.42. $\lambda_1 = 2$, $\vec{x}^{(\lambda_1)} = c(0, 1, 0)$; $\lambda_2 = 1$, $\vec{x}^{(\lambda_2)} = c(0, 1, -1)$, $c \in \mathbf{R}$, $c \ne 0$.

5.43. $\lambda = -1$, $x^{(\lambda)} = c_1(5, 0, 1) + c_2(-2, 1, 0)$, $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$, $|c_1| + |c_2| \ne 0$.

5.44. $\lambda_1 = -1$, $\vec{x}^{(\lambda_1)} = c(1, 1, 1)$; $\lambda_2 = 2$, $\vec{x}^{(\lambda_2)} = c(4, 1, 7)$;

$\lambda_3 = -2$, $\vec{x}^{(\lambda_3)} = c(2, 3, 3)$; $c \in \mathbf{R}$, $c \ne 0$.

5.45. $\lambda = 2$, $\vec{x}^{(\lambda)} = c(2, -4, 3)$, $c \in \mathbf{R}$, $c \ne 0$.

5.46. $\lambda_{1,2} = 1 \pm 3i$, $\vec{x}^{(\lambda_1)} = c(1, -i)$, $\vec{x}^{(\lambda_2)} = c(1, i)$, $c \in \mathbf{C}$, $c \ne 0$.

5.47. $\lambda_{1,2} = \pm 3i$, $\vec{x}^{(\lambda_1)} = c(5, 1-3i)$, $\vec{x}^{(\lambda_2)} = c(5, 1+3i)$, $c \in \mathbf{C}$, $c \ne 0$.

5.48. $\lambda_1 = 2$, $\lambda_{2,3} = 3 \pm i$, $\vec{x}^{(\lambda_1)} = c(1, 0, 1)$, $c \in \mathbf{R}$, $c \ne 0$;

$\vec{x}^{(\lambda_2)} = c(1, 1+i, 2-i)$, $c \in \mathbf{C}$, $c \ne 0$;

$\vec{x}^{(\lambda_3)} = c(1, 1-i, 2+i)$, $c \in \mathbf{C}$, $c \ne 0$.

5.49. $\lambda_1 = -2$, $\lambda_{2,3} = \pm 4i$, $\vec{x}^{(\lambda_1)} = c(-4, 1, 1)$, $c \in \mathbf{R}$, $c \ne 0$;

$\vec{x}^{(\lambda_2)} = c(2, i, 2)$, $\vec{x}^{(\lambda_3)} = c(2, -i, 2)$, $c \in \mathbf{C}$, $c \ne 0$.

5.50. $\vec{e}_1 = (1, 0, 0, 0)$; $\vec{e}_2 = (0, 2, -1, 0)$; $\vec{e}_3 = (1, 1, 0, 0)$; $\vec{e}_4 = (1, 0, 2, -1)$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. **5.51.** $\vec{e}_1 = (1, 1, 1, 1)$; $\vec{e}_2 = (1, -1, 1, -1)$; $\vec{e}_3 = (1, 2, 4, 8)$; $\vec{e}_4 = (1, -3, 9, -27)$,

$$D=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&-3\end{pmatrix}.$$

5.52. $\vec{e}_1=(1,\ 1,\ 1)$; $\vec{e}_2=(1,\ 0,\ -1)$; $\vec{e}_3=(0,\ 1,\ -1)$, $D=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

5.53. Не зводиться до діагонального вигляду.

5.54. $\vec{e}_1=(1,\ 0,\ -1)$; $\vec{e}_2=(1,\ 0,\ 1)$; $\vec{e}_3=(0,\ 1,\ 0)$, $D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

5.55. $\vec{e}_1=(1,\ 0,\ -3)$; $\vec{e}_2=(0,\ 1,\ 3)$; $\vec{e}_3=(1,\ 1,\ 1)$, $D=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

5.56. $\vec{e}_1=(1,\ 1,\ 0,\ 0)$; $\vec{e}_2=(1,\ 0,\ 1,\ 0)$; $\vec{e}_3=(1,\ 0,\ 0,\ 1)$; $\vec{e}_4=(1,\ -1,\ -1,\ -1)$, $D=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$.

5.57. $\vec{e}_1=(1,\ 0,0,1)$; $\vec{e}_2=(0,\ 1,1,0)$; $\vec{e}_3=(0,-1,1,0)$; $\vec{e}_4=(-1,\ 0,0,1)$, $D=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$.

5.58. $\vec{e}_1=\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$; $\vec{e}_2=\left(\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$; $\vec{e}_3=\left(-\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$, $D=\begin{pmatrix}9&0&0\\0&-9&0\\0&0&18\end{pmatrix}$.

5.59. $\vec{e}_1=\left(\frac{1}{\sqrt2},\ \frac{1}{\sqrt2},\ 0\right)$; $\vec{e}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{18}},\ -\frac{1}{\sqrt{18}},\ -\frac{4}{\sqrt{18}}\right)$; $\vec{e}_3=\left(\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$, $D=\begin{pmatrix}9&0&0\\0&9&0\\0&0&27\end{pmatrix}$.

5.60. $\vec{e}_1=\left(\frac{1}{\sqrt2},\ -\frac{i}{\sqrt2},\ 0\right)$; $\vec{e}_2=\left(\frac{1}{\sqrt2},\ \frac{i}{\sqrt2},\ 0\right)$; $\vec{e}_3=(0,\ 0,\ 1)$, $D=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}$.

5.61. $\vec{e}_1=\left(\frac{1}{\sqrt2},\ -\frac{1}{\sqrt2},\ 0\right)$; $\vec{e}_2=\left(\frac{1}{\sqrt3},\ \frac{1}{\sqrt3},\ -\frac{1}{\sqrt3}\right)$; $\vec{e}_3=\left(\frac{1}{\sqrt6},\ \frac{1}{\sqrt6},\ \frac{2}{\sqrt6}\right)$,

$$D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&6\end{pmatrix}.$$

5.68. $\begin{pmatrix}3&6\\-1&-3\end{pmatrix}$. **5.69.** $\begin{pmatrix}-83&-59&-45\\107&83&67\\14&10&3\end{pmatrix}$.

5.70. а) $\begin{pmatrix}2&4\\-3&5\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}-1&0&3\\3&1&-1\\2&4&-2\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}0&3&1\\-1&4&0\\2&-5&-3\end{pmatrix}$.

5.71. а) Ні; б) так; в) ні; г) так. **5.72.** а) $\alpha=\frac{1}{\sqrt2}$; б) ні при якому α.

5.73. а) $\begin{pmatrix}-3&-1\\-4&2\end{pmatrix}$; б) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}19&-17\\8&6\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}4/3&3/\sqrt6&5/(3\sqrt2)\\4/\sqrt6&0&1/\sqrt3\\2/(3\sqrt2)&0&-1/3\end{pmatrix}$

5.74. а) Ні; б) так, $\begin{pmatrix}1/\sqrt{10}&3/\sqrt{10}\\-3/\sqrt{10}&1/\sqrt{10}\end{pmatrix}$; в) так, $\begin{pmatrix}1/\sqrt3&0&2/\sqrt3\\2/\sqrt6&-1/\sqrt6&-1/\sqrt6\\2/\sqrt{30}&5/\sqrt{30}&-1/\sqrt{30}\end{pmatrix}$;

г) ні; д) так, $\begin{pmatrix}2/\sqrt{13}&0&3/\sqrt{13}\\0&1&0\\-3/\sqrt{13}&0&2/\sqrt{13}\end{pmatrix}$; е) так, $\begin{pmatrix}1/\sqrt3&1/\sqrt3&1/\sqrt3\\1/\sqrt2&-1/\sqrt2&0\\1/\sqrt6&1/\sqrt6&-2/\sqrt6\end{pmatrix}$.

5.75. $\alpha^2+\beta^2=1$. **5.76.** $\det AB=\pm1$. **5.77.** а) Ні; б) так; в) так.

5.78. Відповідь визначається неоднозначно: а) $\begin{pmatrix}1/\sqrt2&1/\sqrt2\\-1/\sqrt2&1/\sqrt2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix}-\sqrt{5/6}&1/\sqrt6\\1/\sqrt6&\sqrt{5/6}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1&0\\0&5\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}1/\sqrt2&1/\sqrt2\\-1/\sqrt2&1/\sqrt2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2&0\\0&4\end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix}1/\sqrt3&-1/\sqrt2&1/\sqrt6\\1/\sqrt3&1/\sqrt2&1/\sqrt6\\1/\sqrt3&0&-2/\sqrt6\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}7&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix}1/\sqrt2&-1/\sqrt2&0\\1/\sqrt2&1/\sqrt2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{pmatrix};\qquad \text{е)}\ \begin{pmatrix}1/\sqrt{6}&2/\sqrt{5}&1/\sqrt{30}\\-1/\sqrt{6}&0&5/\sqrt{30}\\2/\sqrt{6}&-1/\sqrt{5}&2/\sqrt{30}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&5\end{pmatrix};$$

$$\text{є)}\ \begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}&0\\0&0&1\\1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{pmatrix}.$$

Глава 6

6.1. а) $\begin{pmatrix}2&2\\2&-1\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1&-1/2\\-1/2&3\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}1&0\\0&-2\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}0&3/2\\3/2&0\end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix}1&0&-3\\0&-2&0\\-3&0&1\end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$; є) $\begin{pmatrix}3&0&0\\0&-1&0\\0&0&5\end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix}0&1/2&-1\\1/2&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$;

з) $\begin{pmatrix}0&2&0&0\\2&1&0&0\\0&0&-2&-1\\0&0&-1&3\end{pmatrix}$; і) $\begin{pmatrix}3&0&0&-1/2\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\-1/2&0&0&2\end{pmatrix}$.

6.2. а) 1; б) 2; в) 3; г) 2; д) 4.

6.3. а) $L(x_1, x_2)=(x_1\quad x_2)\begin{pmatrix}3&-3\\-3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$;

б) $L(x_1,x_2)=(x_1\quad x_2)\begin{pmatrix}0&3/2\\3/2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$;

в) $L(x_1,x_2)=(x_1\quad x_2)\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$;

г) $L(x_1, x_2, x_3)=(x_1\quad x_2\quad x_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-3&-2\\0&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$;

д) $L(x_1, x_2, x_3)=(x_1\quad x_2\quad x_3)\begin{pmatrix}5&0&1\\0&0&-1/2\\1&-1/2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$;

е) $L(x_1, x_2, x_3)=(x_1\quad x_2\quad x_3)\begin{pmatrix}0&1/2&3/2\\1/2&0&-1\\3/2&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$.

6.4. а) $L(x_1, x_2)=x_1^2+3x_2^2-4x_1x_2$; б) $L(x_1, x_2)=-3x_2^2+2x_1x_2$;

в) $L(x_1, x_2, x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-2x_2x_3$;

г) $L(x_1, x_2, x_3)=3x_1^2-2x_2^2+x_3^2+4x_1x_3+2x_2x_3$;

д) $L(x_1, x_2, x_3)=-3x_2^2+10x_1x_2$;

е) $L(x_1, x_2, x_3, x_4)=-x_1^2+2x_3^2+6x_1x_2+2x_1x_4+8x_2x_3+10x_3x_4$.

6.5. Відповідь визначається неоднозначно.

а) $\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_2;\\ x_2=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_2,\end{cases}$ $L_1(y_1, y_2)=y_1^2+3y_2^2$;

б) $\begin{cases}x_1=\sqrt{\dfrac{2}{5}}y_1-\sqrt{\dfrac{3}{5}}y_2;\\ x_2=\sqrt{\dfrac{3}{5}}y_1+\sqrt{\dfrac{2}{5}}y_2,\end{cases}$ $L_1(y_1, y_2)=4y_1^2-y_2^2$;

в) $\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_2;\\ x_2=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_2,\end{cases}$ $L_1(y_1, y_2)=y_1^2-y_2^2$;

г) $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{6}} y_3 \ ; \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{6}} y_3 \ ; \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 \qquad - \frac{2}{\sqrt{6}} y_3 \ , \end{cases}$ $L_1(y_1, y_2, y_3) = 4y_1^2 + 4y_2^2 - 2y_3^2$;

д) $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 - \frac{1}{\sqrt{6}} y_3 \ ; \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 - \frac{1}{\sqrt{6}} y_3 \ ; \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 \qquad + \frac{2}{\sqrt{6}} y_3 \ , \end{cases}$ $L_1(y_1, y_2, y_3) = 9y_1^2 + 6y_2^2 + 6y_3^2$;

е) $\begin{cases} x_1 = \qquad - \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_3 \ ; \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{2} y_2 + \frac{1}{2} y_3 \ ; \\ x_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{2} y_2 + \frac{1}{2} y_3 \ , \end{cases}$ $L_1(y_1, y_2, y_3) = \sqrt{2} y_2^2 - \sqrt{2} y_3^2$;

є) $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 - \frac{1}{\sqrt{6}} y_3 \ ; \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 - \frac{1}{\sqrt{6}} y_3 \ ; \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 \qquad + \frac{2}{\sqrt{6}} y_3 \ , \end{cases}$ $L_1(y_1, y_2, y_3) = -y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2$.

6.6. $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_3 \ ; \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} y_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} y_3 \ ; \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1 - \frac{2}{\sqrt{6}} y_2 \ , \end{cases}$ $L_1(y_1, y_2, y_3) = 5y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$,

$L_2(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$. **6.7.** Відповідь визначається неоднозначно.

а) $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \ ; \\ y_2 = \qquad x_2 \ , \end{cases}$ $L_1(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2$;

б) $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \ ; \\ y_2 = \quad - 2x_2 + x_3 \ ; \\ y_3 = \qquad x_3 \ , \end{cases}$ $L_1(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2$;

в) $\begin{cases} y_1 = 2x_1 - x_2 \qquad ; \\ y_2 = \qquad x_2 - 3x_3 \ ; \\ y_3 = \qquad x_3 \ , \end{cases}$ $L_1(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + 5y_3^2$;

г) $\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + x_3 \ ; \\ y_2 = \quad - x_2 + x_3 \ ; \\ y_3 = \qquad x_3 \ , \end{cases}$ $L_1(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - y_2^2 - 4y_3^2$;

д) $\begin{cases} y_1 = \ 0{,}5x_1 \qquad + 0{,}5x_3 \ ; \\ y_2 = \qquad - x_2 + \ x_3 \ ; \\ y_3 = -0{,}5x_1 \qquad + 0{,}5x_3 \ , \end{cases}$ $L_1(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$;

е) $\begin{cases} y_1 = \ 0{,}5x_1 + 0{,}5x_2 - 0{,}5x_3 \ ; \\ y_2 = -0{,}5x_1 + 0{,}5x_2 - 0{,}5x_3 \ ; \\ y_3 = \qquad x_3 \ , \end{cases}$ $L_1(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - y_2^2$.

6.8. $\begin{cases} x_1 = y_1 - \frac{1}{2} y_2 + \frac{5}{6} y_3 \ ; \\ x_2 = \qquad \frac{1}{2} y_2 - \frac{1}{6} y_3 \ ; \\ x_3 = \qquad \frac{1}{3} y_3 \ , \end{cases}$ $L_1(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.

6.9. а) $\begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 - 0{,}4y_3 \ ; \\ x_2 = \qquad y_2 + 0{,}2y_3 \ ; \\ x_3 = \qquad y_3 \ , \end{cases}$ $L_1(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - 5y_2^2 + 3{,}2y_3^2$;

б) $\begin{cases} x_1 = y_1 + 0{,}5y_2 & ; \\ x_2 = \phantom{y_1 + 0{,}5}y_2 & ; \\ x_3 = \phantom{y_1 + 0{,}5y_2}y_3 & , \end{cases}$ $\quad L_1(y_1, y_2, y_3) = 2y_1^2 + 0{,}5y_2^2 + 5y_3^2$;

в) $\begin{cases} x_1 = y_1 + 3y_2 + \dfrac{3}{11}y_3 \ ; \\ x_2 = y_2 + \dfrac{1}{11}y_3 \ ; \\ x_3 = \phantom{y_1 + 3y_2 + \dfrac{1}{11}}y_3 \ , \end{cases}$ $\quad L_1(y_1, y_2, y_3) = -y_1^2 + 11y_2^2 + \dfrac{10}{11}y_3^2$.

6.10. У випадках 1, 2 відповідь визначається неоднозначно.

а) 1. $\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}x_2 \ ; \\ y_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}x_2 \ , \end{cases}$ $\quad L_1(y_1, y_2) = 2y_2^2$;

2. $\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 \ ; \\ y_2 = x_2 \ , \end{cases}$ $\quad L_1(y_1, y_2) = y_1^2$;

3. Не можна застосувати метод;

б) 1. $\begin{cases} y_1 = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}x_1 + \dfrac{1}{3}x_2 \ ; \\ y_2 = \dfrac{1}{3}x_1 + \dfrac{2\sqrt{2}}{3}x_2 \ , \end{cases}$ $\quad L_1(y_1, y_2) = 4y_1^2 - 5y_2^2$;

2. $\begin{cases} y_1 = x_1 \ ; \\ y_2 = \sqrt{2}x_1 + 2x_2 \ , \end{cases}$ $\quad L_1(y_1, y_2) = 5y_1^2 - y_2^2$;

3. $\begin{cases} x_1 = y_1 + \dfrac{2\sqrt{2}}{3}y_2 \ ; \\ x_2 = \phantom{y_1 + \dfrac{2\sqrt{2}}{3}} y_2 \ , \end{cases}$ $\quad L_1(y_1, y_2) = 3y_1^2 - \dfrac{20}{3}y_2^2$;

в) 1. $\begin{cases} y_1 = x_1 \ ; \\ y_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x_2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}x_3 \ ; \\ y_3 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}x_2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}x_3 \ , \end{cases}$ $\quad L_1(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + 3y_3^2$;

2. $\begin{cases} y_1 = x_1 \ ; \\ y_2 = x_2 + \dfrac{1}{2}x_3 \ ; \\ y_3 = \phantom{x_2 + \dfrac{1}{2}} x_3 \ , \end{cases}$ $\quad L_1(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + 2y_2^2 + \dfrac{3}{2}y_3^2$;

3. $\begin{cases} x_1 = y_1 \ ; \\ x_2 = y_2 - \dfrac{1}{2}y_3 \ ; \\ x_3 = \phantom{y_2 - \dfrac{1}{2}} y_3 \ , \end{cases}$ $\quad L_1(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + 2y_2^2 + \dfrac{3}{2}y_3^2$.

6.11. Додатно визначена. **6.12.** Не є знаковизначеною. **6.13.** Не є знаковизначеною. **6.14.** Додатно визначена. **6.15.** Від'ємно визначена. **6.16.** Не є знаковизначеною. **6.17.** $\forall\ \lambda > 0$. **6.18.** Ні при якому значенні λ. **6.19.** $\lambda > 4/3$. **6.20.** $\lambda < -4/3$. **6.21.** Еліпс $\dfrac{x'^2}{2} + \dfrac{y'^2}{1} = 1$, $O'\left(-\dfrac{4}{5}, \dfrac{2}{5}\right)$, $\vec{e}_1 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$, $\vec{e}_2 = \left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$. **6.22.** Парабола $y'^2 = 4\sqrt{2}x'$, $O'(2, 1)$, $\vec{e}_1 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\vec{e}_2 = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. **6.23.** Гіпербола $\dfrac{x'^2}{4} - \dfrac{y'^2}{9} = 1$, $O'(1, 1)$, $\vec{e}_1 = \left(\dfrac{3}{\sqrt{13}}, \dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)$, $\vec{e}_2 = \left(-\dfrac{2}{\sqrt{13}}, \dfrac{3}{\sqrt{13}}\right)$. **6.24.** Паралельні прямі $x' = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, $O'\left(-\dfrac{3}{5}, -\dfrac{3}{10}\right)$, $\vec{e}_1 = \left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\vec{e}_2 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$, або, у старих змінних,

$2x-y+1=0$, $2x-y-4=0$. **6.25.** Еліпс $\frac{x'^2}{35/6}+\frac{y'^2}{35/36}=1$, $O'\left(\frac{7}{6}, \frac{1}{3}\right)$,

$\vec{e}_1=\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\vec{e}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. **6.26.** Парабола $y'^2=\frac{1}{\sqrt{5}}x'$, $O'(3, 2)$,

$\vec{e}_1=\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\vec{e}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. **6.27.** Еліпсоїд $\frac{x'^2}{2}+\frac{y'^2}{1}+\frac{z'^2}{2/3}=1$,

$O'(1, 2, -1)$, $\vec{e}_1=\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\vec{e}_2=\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $\vec{e}_3=\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

6.28. Гіперболічний параболоїд $\frac{x'^2}{2}-\frac{y'^2}{1}=-2z'$, $O'(1, 2, 3)$,

$\vec{e}_1=\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\vec{e}_2=\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\vec{e}_3=\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

6.29. Двопорожнинний гіперболоїд $\frac{x'^2}{4/5}+\frac{y'^2}{4/15}-\frac{z'^2}{4/25}=-1$, $O'\left(0, 1, -\frac{2}{5}\right)$,

$\vec{e}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $\vec{e}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $\vec{e}_3=(0, 0, 1)$.

6.30. Еліптичний параболоїд $\frac{x'^2}{5\sqrt{2}/4}+\frac{y'^2}{\sqrt{2}/2}=2z'$, $O'\left(-\frac{1}{40}, -\frac{19}{40}, \frac{1}{2}\right)$,

$\vec{e}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$, $\vec{e}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\vec{e}_3=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

6.31. Параболічний циліндр $y'^2=\frac{4}{3}x'$, $O'(2, 1, -1)$, $\vec{e}_1=\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$,

$\vec{e}_2=\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $\vec{e}_3=\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$. **6.32.** Еліптичний циліндр

$\frac{x'^2}{2}+\frac{y'^2}{1}=1$, $O'(0, 1, 0)$, $\vec{e}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{3}\right)$, $\vec{e}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$,

$\vec{e}_3=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

6.33. Однопорожнинний гіперболоїд $\frac{x'^2}{1/3}+\frac{y'^2}{1/6}-\frac{z'^2}{1/2}=1$, $O'\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$,

$\vec{e}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\vec{e}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\vec{e}_3=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

6.34. Гіперболічний циліндр $\frac{x'^2}{1/3}-\frac{y'^2}{1/3}=1$, $O'\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, -\frac{5}{6}\right)$,

$\vec{e}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\vec{e}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\vec{e}_3=\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

Глава 7

7.1. а) $0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$; б) $2, 0, 6, 0, 10, \ldots$; в) $-8, 11, \frac{14}{3}, \frac{17}{5}, \frac{20}{7}, \ldots$.

7.2. а) $x_n=\frac{(-1)^n}{n+1}$; б) $x_n=1+(-1)^n$; в) $x_n=\frac{2n}{2n-1}$. **7.4.** $\frac{1}{3}$. **7.5.** $-\frac{5}{9}$.

7.6. 0. **7.7.** $-\frac{1}{2}$. **7.8.** ∞. **7.9.** 0. **7.10.** 3. **7.11.** 0. **7.12.** 1. **7.13.** 0. **7.14.** 4. **7.15.** 0.

7.16. 0. **7.17.** 1. **7.18.** $\frac{4}{3}$. **7.19.** $\frac{1}{2}$. **7.20.** $-\frac{1}{2}$. **7.21.** -1. **7.22.** а) 1; б) 0. **7.23.** 0.

7.24. 1. **7.25.** $\frac{a+b}{2}$. **7.26.** $\frac{1}{2}$. **7.27.** $\frac{3}{2}$. **7.28.** 0. **7.29.** 0. **7.30.** 0.

7.31. а) $[-2,0)\cup(0,2]$; б) $[0,4]$; в) $x\neq\frac{\pi(2n+1)}{4}$, $n\in\mathbf{Z}$. **7.32.** а) $[1,+\infty)$;

б) $(-\infty,3]$; в) $[-2,4]$. **7.33.** а) $y=\frac{1-x}{3}$; б) $y=\pm\sqrt{x-1}$; в) $y=\frac{x-1}{x}$;

г) $y=1\pm\sqrt{x+1}$; д) $y=\lg\frac{x}{10}$; е) $y=-2+10^{x-1}$; є) $y=2^{1/x}$;

ж) $y=\frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{2}$. **7.34.** а) Непарна; б) ні парна, ні непарна; в) парна.

7.37. а) $\frac{2\pi}{5}$; б) π; в) π. **7.45.** -2. **7.46.** 2. **7.47.** ∞. **7.48.** 0. **7.49.** -2.

7.50. ∞. **7.51.** 0. **7.52.** $-\frac{2}{5}$. **7.53.** ∞. **7.54.** $\frac{1}{2}$. **7.55.** $\frac{m}{n}$. **7.56.** $3x^2$. **7.57.** 0.

7.58. ∞. **7.59.** 4. **7.60.** $\frac{1}{4}$. **7.61.** $-\frac{1}{3}$. **7.62.** $\frac{1}{3}$. **7.63.** $\frac{2}{3}$. **7.64.** $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

7.65. 12. **7.66.** $\frac{3}{2}$. **7.67.** $\frac{m}{n}$. **7.68.** $\frac{4}{3}$. **7.69.** 0. **7.70.** ∞. **7.71.** $\frac{1}{2}$. **7.72.** 0.

7.73. 100. **7.74.** -1. **7.75.** 1. **7.76.** ∞. **7.77.** -1. **7.78.** ∞. **7.79.** 0. **7.80.** $\frac{1}{4}$.

7.81. 0. **7.82.** 0. **7.83.** $-\frac{5}{2}$. **7.84.** $\frac{1}{2}$, якщо $x \to +\infty$; $-\infty$, якщо $x \to -\infty$.

7.85. $\pm\frac{5}{2}$. **7.86.** 1. **7.87.** 3. **7.88.** k. **7.89.** $\frac{2}{5}$. **7.90.** $\frac{2}{3}$. **7.91.** $\frac{1}{3}$. **7.92.** $\frac{1}{2}$.

7.93. $\frac{3}{4}$. **7.94.** ∞. **7.95.** -1. **7.96.** $\frac{1}{2}$. **7.97.** ∞. **7.98.** 0. **7.99.** $\frac{1}{2}$. **7.100.** ∞.

7.101. 1. **7.102.** $\frac{\pi}{2}$. **7.103.** $\frac{2}{\pi}$. **7.104.** $-\frac{a}{\pi}$. **7.105.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **7.106.** 2. **7.107.** а) e^{mk}; б) $\frac{1}{e}$. **7.108.** а) e^6; б) $e^{-2/3}$. **7.109.** а) 0, якщо $x \to +\infty$; ∞, якщо $x \to -\infty$; б) ∞, якщо $x \to +\infty$; 0, якщо $x \to -\infty$. **7.110.** ∞, якщо $x \to +\infty$; 0, якщо $x \to -\infty$; б) e^2. **7.111.** а) 1; б) $\sqrt{e}$. **7.112.** а) k; б) $\frac{1}{a}$. **7.113.** a. **7.114.** а) $\frac{1}{e}$; б) $\ln a$.

7.115. а) $\frac{2}{3}$; б) e. **7.116.** а) $\frac{3}{2}$; б) 2. **7.117.** а) 1; б) $-\frac{1}{2}$. **7.118.** а) e; б) $\frac{1}{e}$.

7.119. а) 3; б) $-\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{2}$ (додати та відняти одиницю в чисельнику); г) $-\frac{1}{4}$ (додати та відняти двійку в чисельнику). **7.120.** а) 0, якщо $x \to +\infty$; $-\infty$, якщо $x \to -\infty$; б) 0. **7.121.** а) 1, якщо $x \to +\infty$; 0, якщо $x \to -\infty$; б) 1, якщо $x \to +\infty$; -1, якщо $x \to -\infty$. **7.122.** а) $\frac{\sqrt{2}}{8}$; б) 1; в) 0; г) 0;

д) $\frac{1}{324}$; е) 3. **7.123.** а) $-\frac{1}{3}$; б) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$; в) 1; г) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **7.124.** а) 0; б) $-\frac{10}{3}$; в) $-\frac{\cos 2}{\cos^4 1}$; г) -24. **7.125.** а) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ (покласти $\arccos x = y$); б) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ (покласти $\arccos(1-x) = y$). **7.126.** а) $\frac{3}{2}$; б) 2; в) 0; г) $\frac{\ln 3}{\ln 2}$. **7.127.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; в) 1. **7.128.** а) e^{-2}; б) 1; в) e; г) e^{ab}. **7.129.** а) $-\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{2}$ (скористатись формулою $\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a = \operatorname{arctg}\frac{b-a}{1+ab}$).

7.132. а) $\alpha(x) = o(\beta(x))$; б) $\alpha(x) = O(\beta(x))$; в) $\alpha(x) \sim \beta(x)$. **7.134.** а) 2; б) 1; в) $\frac{1}{2}$; г) 10; д) 2; е) $\frac{1}{2}$; є) $\frac{3}{2}$. **7.136.** а) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ – точки розриву другого роду; б) $x = \frac{5}{3}$ – точка розриву першого роду (стрибок); в) $x = 0$ – точка розриву першого роду; г) $x_1 = 2$, $x_2 = -2$ – точки розриву другого роду; д) $x = 2$ – точка розриву першого роду; е) $x = -2$ – точка розриву другого роду, $x = 2$ – точка усувного розриву; є) $x = 0$ – точка розриву першого роду (стрибок); ж) $x = -1$ – точка усувного розриву, $x = 1$ – точка розриву першого роду (стрибок); з) $x = 1$ – точка розриву першого роду; і) $x = \frac{\pi}{4}$ – точка розриву першого роду. **7.137.** а) $a = 1$; б) $A = 3$; в) $b = \frac{\pi a}{2}$; г) $A = -1$, $B = 1$; д) $a = 2$, $b = -1$; е) $a = 1$, $b = -1$.

7.138. а) $f(0) = n$; б) $f(0) = \frac{1}{2}$; в) $f(0) = 2$; г) $f(0) = 2$; д) $f(0) = 0$; е) $f(0) = 1$. **7.139.** $\frac{2}{3}$. **7.140.** Усувний розрив; розрив другого роду.

7.141. $x = 0$ – точка розриву першого роду.

7.142. Три точки розриву: $x = 0$ – точка усувного розриву, $x = \pm 1$ – точки розриву другого роду. **7.143.** Ні, бо $f(0+0) = \frac{\pi}{2}$, $f(0-0) = -\frac{\pi}{2}$.

7.145. Рівномірно неперервна. **7.146.** Не є рівномірно неперервною.
7.147. Рівномірно неперервна. **7.148.** Не є рівномірно неперервною.

Глава 8

8.1. $6x-5$. **8.2.** $-2+\frac{8}{3}x^3$. **8.3.** $-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}+\frac{3}{x^4}$. **8.4.** $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}$.

8.5. $\frac{1}{x}\left(-\frac{3}{\sqrt[4]{x^3}}+\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}\right)$. **8.6.** $4x^3-3x^2-8x+9$.

8.7. $7x^6-10x^4+8x^3-12x^2+4x+3$. **8.8.** $-\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

8.9. $2x(3x^4+8x^2-41)$. **8.10.** $\frac{2}{(x+1)^2}$. **8.11.** $\frac{1-4x^2-x^4}{(x^3-x)^2}$.

8.12. $\frac{2}{\sqrt{x}\cdot(2-\sqrt{x})^2}$. **8.13.** $\frac{-3(x^2+1)}{(x^3+3x-1)^2}$. **8.14.** $\frac{bc-ad}{(c+dx)^2}$. **8.15.** $f(1)=1$; $f'(1)=2$; $f(4)=8$; $f'(4)=2{,}5$. **8.16.** $f(-1)=-5$; $f'(-1)=-8$; $f'(2)=\frac{19}{16}$. **8.17.** $f'(0)=11$; $f'(1)=2$; $f'(2)=-1$. **8.18.** $f'(0)=-0{,}25$; $f'(-1)=0{,}5$. **8.19.** а) $24x(1+4x^2)^2$; б) $-20(1-x)^{19}$.

8.20. а) $6(x^3-x)^5(3x^2-1)$; б) $\frac{5(1+x^2)^4(x^2+2x-1)}{(1+x)^6}$. **8.21.** а) $\frac{-4(1-2\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}$; б) $-\frac{2x}{3\cdot\sqrt[3]{(1+x^2)^4}}$. **8.22.** $\frac{x(x^2+2a^2)}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$. **8.23.** а) $3\cos 3x$; б) $9\cos(3x+5)$.

8.24. а) $-4\sin\frac{2x}{3}$; б) $-\sin 2x$. **8.25.** а) $-12\cos^2 4x\cdot\sin 4x$; б) $\frac{3}{2}\sin 2x(2-\sin x)$. **8.26.** а) $-\sin x^3\cdot 3x^2$; б) $2\sin x(x\sin x\cdot\cos x^2+\cos x\cdot\sin x^2)$. **8.27.** а) $\frac{x\cdot\cos\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$; б) $4(1+\sin^2 x)^3\cdot\sin 2x$. **8.28.** $\frac{1}{2}\sin x$. **8.29.** а) $\arcsin x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. **8.30.** а) $-\frac{x+\arccos x\cdot\sqrt{1-x^2}}{x^2\cdot\sqrt{1-x^2}}$; б) $\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$. **8.31.** а) $\frac{2x}{1+x^4}$; б) $-\frac{2}{x^2\cdot\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}$. **8.32.** $-\frac{2\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{1+x^2}$. **8.33.** а) $2x\log_3 x+\frac{x}{\ln 3}$; б) $\frac{2\ln x}{x}$.

8.34. а) $-\frac{1}{x\ln^2 x}$; б) $\frac{2x-4}{x^2-4x}$. **8.35.** а) $\frac{2x}{(x^2-1)\ln 3}$; б) $\frac{2}{\sin 2x}$.

8.36. $4\ln^3\sin x\cdot\operatorname{ctg} x$. **8.37.** а) $10^x(1+x\ln 10)$; б) $e^x(1+x)$.

8.38. а) $e^x(\cos x-\sin x)$; б) $3x^2-3^x\ln 3$. **8.39.** а) $2\cdot 10^{2x-3}\ln 10$; б) $a^{\sin^3 x}\ln a\cdot 3\sin^2 x\cdot\cos x$. **8.40.** $-12\cdot 10^{1-\sin^4 3x}\ln 10\cdot\sin^3 3x\cdot\cos 3x$.

8.41. а) $3\operatorname{sh}^2 x\cdot\operatorname{ch} x$; б) $\operatorname{th} x$. **8.42.** а) $-\frac{2x}{\operatorname{ch}^2(1-x^2)}$; б) $2\operatorname{sh} 2x$.

8.43. а) $\frac{\operatorname{sh} x}{2\sqrt{\operatorname{ch} x}}$; б) $e^{\operatorname{ch}^2 x}\operatorname{sh} 2x$. **8.44.** $x\operatorname{ch} x$. **8.45.** а) $x^{x^2+1}(2\ln x+1)$; б) $(\sin x)^{\cos x}\left(\frac{\cos^2 x}{\sin x}-\sin x\cdot\ln\sin x\right)$. **8.46.** а) $(\ln x)^x\left(\frac{1}{\ln x}+\ln\ln x\right)$; б) $x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$. **8.47.** а) $(x^2+1)^{\sin x}\left(\frac{2x\sin x}{x^2+1}+\cos x\cdot\ln(x^2+1)\right)$; б) $x^2e^{x^2}\sin 2x(3+2x^2+2x\operatorname{ctg}2x)$. **8.48.** а) $-\frac{2(x-2)(x^2+11x+1)}{3(x-5)^4\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2}}$; б) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\,[(\arcsin x)^2-1]}\cdot\sqrt{\frac{1-\arcsin x}{1+\arcsin x}}$. **8.49.** а) $\frac{(1+\sqrt[3]{x})^2}{\sqrt[3]{x^2}}$; б) $\frac{x^4(7x^6-40)}{\sqrt[3]{(x^6-8)^2}}$.

8.50. а) $-\frac{1}{1+x^2}$; б) $\frac{2x-3}{1+(x^2-3x+2)^2}$. **8.51.** а) $\frac{1}{\cos^2\frac{x}{5}}$; б) $-\frac{4}{\operatorname{tg}2x\sin^2 2x}$.

8.52. а) $\dfrac{1+\sin x}{(x-\cos x)\ln 10}$; б) $\dfrac{3}{2}\sin 2x(\cos x-2)$.

8.53. а) $\dfrac{5(x-1)}{x\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^9$; б) $\dfrac{x(8+9\sqrt{x})}{4\sqrt{1+\sqrt{x}}}$.

8.54. а) $2\sin\dfrac{x}{2}\cos 2x+\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}\sin 2x$; б) $e^{\cos x}(\cos x-\sin^2 x)$.

8.55. а) $e^{-x^2}\left(\dfrac{1}{x}-2x\ln x\right)$; б) $2x^2e^{2x+3}$.

8.56. а) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$; б) $\dfrac{\cos 2x}{x}-2\sin 2x\ln x$.

8.57. а) $\dfrac{2\sin 2x}{\cos^2 2x}$; б) $-\dfrac{2(x\cos x+\sin x)}{x^2\sin^2 x}$.

8.58. а) $-\dfrac{2\sin^3 x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$; б) $\sin^5 3x\cos^3 3x$.

8.59. а) $\dfrac{2x-\cos x}{(x^2-\sin x)\ln 3}$; б) $10^{\sqrt{x}}\left(1+\dfrac{\sqrt{x}}{2}\ln 10\right)$.

8.60. а) $3x^2\operatorname{arctg} x^3+\dfrac{3x^5}{1+x^6}$; б) $\dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

8.61. а) $\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}\,(x+\sqrt{1-x^2})}$; б) $\arcsin(\ln x)+\dfrac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

8.62. а) $\dfrac{\operatorname{ctg} x\ln\cos x+\operatorname{tg} x\ln\sin x}{\ln^2\cos x}$; б) $\dfrac{4}{(1-4x)^2}\left(\sqrt{\dfrac{1-4x}{1+4x}}+\arcsin 4x\right)$.

8.63. а) $-\dfrac{e^{\frac{1}{\ln x}}}{x\ln^2 x}$; б) $10^{x\operatorname{tg} x}\ln 10\left(\operatorname{tg} x+\dfrac{x}{\cos^2 x}\right)$.

8.64. а) $2^{\frac{x}{\ln x}}\ln 2\dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}$; б) $\dfrac{x^2}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$.

8.65. а) $e^x\sin x\cos^3 x(1+\operatorname{ctg} x-3\operatorname{tg} x)$; б) $\dfrac{(1+2x^2)\sin x+x(1+x^2)\cos x}{\sqrt{1+x^2}}$.

8.66. а) $(\operatorname{tg} 2x)^{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}\cdot\left(\dfrac{4\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}{\sin 4x}-\dfrac{\ln\operatorname{tg} 2x}{2\sin^2\frac{x}{2}}\right)$; б) $\dfrac{(x^2-32x-73)(3-x)^3}{2(x+1)^6\sqrt{x+2}}$.

8.67. а) $\dfrac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$; б) $\dfrac{\sin(x-\cos x)\cdot(1+\sin x)}{\cos^2(x-\cos x)}$. **8.68.** $\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin^2 x}$.

8.69. $(\arcsin x)^2$. **8.70.** $\dfrac{x^5+1}{x^4(x^2+1)}$. **8.71.** $\dfrac{x}{\sqrt{2+4x-x^2}}$.

8.72. $\dfrac{e^x\operatorname{arctg} x}{\ln^5 x}\left[1+x+\dfrac{x}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}-\dfrac{5}{\ln x}\right]$. **8.73.** $-\dfrac{b^2x}{a^2y}$. **8.74.** $-\sqrt{\dfrac{y}{x}}$.

8.75. $\dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}$. **8.76.** $\dfrac{2a}{3(1-y^2)}$. **8.77.** $\dfrac{y}{y-x}$. **8.78.** $-\dfrac{y}{x}$. **8.79.** $2^{x-y}\dfrac{2^y-1}{1-2^x}$.

8.80. $y'=\dfrac{-\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}$. **8.81.** $\dfrac{x+y}{x-y}$. **8.82.** $\dfrac{e^y}{2-y}$.

8.83. $3(1+x-x^2)(1-2x)\,dx$. **8.84.** $\dfrac{2\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}dx$. **8.85.** $-2^{-\frac{1}{\cos x}}\ln 2\cdot\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}dx$.

8.86. $\dfrac{(x^2-1)\sin x+2x\cos x}{(1-x^2)^2}dx$. **8.87.** $\left(3^{-\frac{1}{x^2}}\ln 3\cdot\dfrac{2}{x^3}+9x^2-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$.

8.88. а) 0,05; б) 0,805; в) 0,2. **8.89.** а) 0,795; б) 0,770. **8.90.** а) 2,25; 4,13; б) 2,16; 4,13; в) 2,03. **8.91.** а) 0,515; б) 0,485; в) 0,965. **8.92.** а) 2,09; б) 1,1; в) 0,9. **8.93.** $\dfrac{3}{2}t^2$. **8.94.** $\dfrac{3t^2-1}{2t}$. **8.95.** -1. **8.96.** $-\dfrac{b}{a}\operatorname{ctg}\varphi$. **8.97.** $-\dfrac{b}{a}\operatorname{tg}\varphi$.

8.98. $\operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2}$. **8.99.** $\dfrac{t}{2}$. **8.100.** $-2e^{3t}$. **8.101.** $\dfrac{2}{3\cdot\sqrt[6]{t}}$. **8.102.** $\dfrac{1-\operatorname{tg} t}{1+\operatorname{tg} t}$.

8.103. $\operatorname{tg} t$. **8.104.** 2. **8.105.** $6(5x^4+6x^2+1)$. **8.106.** $-2\cos 2x$.

8.107. $\dfrac{2-6x^4}{(1+x^4)^2}$. **8.108.** $2e^{x^2}(3x+2x^3)$. **8.109.** $\dfrac{6x(2x^3-1)}{(x^3+1)^3}$.

8.110. $\frac{2x}{1+x^2}+2\operatorname{arctg}x$. **8.111.** $-\frac{a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$.

8.112. $-\frac{\arcsin x + x\cdot\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$. **8.113.** $-\frac{1}{2}$. **8.114.** 360. **8.115.** $\frac{4}{e}$.

8.116. $y'(0)=3$, $y''(0)=12$, $y'''(0)=9$. **8.117.** 2. **8.118.** 6. **8.119.** $a^n e^{nx}$.

8.120. $(-1)^n e^{-x}$. **8.121.** $e^x(x+n)$. **8.122.** $\frac{(-1)^n a^n n!}{(ax+b)^{n+1}}$.

8.123. $\frac{(-1)^{n-1}a^n(n-1)!}{(ax+b)^n}$. **8.124.** $(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n\ln a}$.

8.125. $(x^2-379)\sin x-40x\cos x$. **8.126.** $e^x(x^2+39x+360)$.

8.127. $4\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)e^{-x}$. **8.128.** $\frac{8!}{\ln 2\cdot x^9}$. **8.129.** $x\operatorname{sh}x+100\operatorname{ch}x$.

8.130. $-\frac{p^2}{y^3}$. **8.131.** $-\frac{b^4}{a^2y^3}$. **8.132.** $-\frac{3r^2x}{y^5}$. **8.133.** $-\frac{2(3y^4+8y^2+5)}{y^8}$.

8.134. $\frac{(3-s)e^{2s}}{(2-s)^3}$. **8.135.** $-\frac{2a^3xy}{(y^2-ax)^3}$. **8.136.** $-\frac{y[(x-1)^2+(y-1)^2]}{x^2(y-1)^3}$.

8.137. $9t^3$. **8.138.** $-\frac{b}{a^2\sin^3 t}$. **8.139.** $-\frac{3b\cos t}{a^3\sin^5 t}$. **8.140.** $-\frac{1}{a(1-\cos\varphi)^2}$.

8.141. $-6t^{3t}(1+3t+t^2)$. **8.142.** $4t^2$. **8.143.** $\frac{\cos^2 t-4\sin^2 t}{9a^2\cos^7 t\cdot\sin^3 t}$.

8.144. $-\frac{2}{9x\cdot\sqrt[3]{x}}dx^2$. **8.145.** $m(m-1)(m-2)x^{m-3}dx^3$.

8.146. $4(x+1)(5x^2-2x-1)dx^2$. **8.147.** $4^{-x^2}2\ln 4(2x^2\ln 4-1)dx^2$.

8.148. $dy=\ln x\,dx$, $d^2y=\frac{1}{x}dx^2$, $d^3y=-\frac{1}{x^2}dx^3$.

8.149. $-e^{-x}(x^2-6x+6)dx^3$. **8.150.** $\frac{384}{(2-x)^5}dx^4$. **8.151.** 1) 0; 2) 6; 3) –4;

4) $k_1=2$, $k_2=4$. **8.152.** $(1,1)$; $(-1,-1)$. **8.153.** 1) (0, 0); 2) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$.

8.154. 1) (2,4); 2) $\left(-\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right)$; 3) $(-1,1)$, $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{16}\right)$. **8.155.** $(0,0)$; $(1,1)$; $(2,0)$.

8.156. $(0,1)$. **8.157.** $(2,4)$. **8.158.** $y=12x-16$; $x+12y-98=0$; $s_t=\frac{2}{3}$;

$s_n=96$. **8.159.** $y+4x+4=0$; $8y-2x+15=0$; $s_t=\frac{1}{2}$; $s_n=8$.

8.160. $7x+y-3=0$; $x-7y+71=0$. **8.161.** $y-5=0$; $x+2=0$.

8.162. $x-4y+4=0$; $4x+y-18=0$. **8.163.** $y-2x=0$; $x+2y=0$.

8.164. $x-y-1=0$; $x+y-1=0$. **8.165.** $7x-10y+6=0$; $10x+7y-34=0$.

8.166. $y=0$; $(\pi+4)x+(\pi-4)y-\pi^2\frac{\sqrt{2}}{4}=0$. **8.167.** $5x+6y-13=0$;

$6x-5y+21=0$. **8.168.** $x+y-2=0$. **8.171.** $\alpha_1=\operatorname{arctg}\frac{1}{7}$; $\alpha_2=\operatorname{arctg}\frac{1}{13}$.

8.172. $\alpha_1=\frac{\pi}{2}$; $\alpha_2=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$. **8.173.** $\operatorname{arctg}3$. **8.174.** 45°. **8.175.** $\operatorname{arctg}\frac{8}{15}$.

8.176. $\operatorname{arctg}3$. **8.177.** 90°. **8.178.** 2 м/с; 2 м/с; 6 м/с.

8.179. $v=5$; 4,997; 4,7 м/с; $a=0$; –0,006; – 0,06 м/с^2. **8.180.** $a=-\frac{\pi^2}{18}$ см/с^2.

8.181. а) $t_1=0$, $t_2=8$; б) $t_1=0$, $t_2=4$, $t_3=8$; в) $t\in(0,4)\cup(8,+\infty)$;

г) $t_1=\frac{4}{3}(3+\sqrt{3})$, $t_2=\frac{4}{3}(3-\sqrt{3})$. **8.182.** 1,76 м/с. **8.183.** $x_t'=\sqrt[3]{a}$.

8.188. Ні, бо $f'(2)$ не існує. **8.189.** Ні, бо $x=\frac{\pi}{2}$ – точка розриву функції.

8.190. Ні, бо $x=0$ – точка розриву функції. **8.191.** $c=0$. **8.192.** $c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

8.193. $(2,4)$. **8.194.** $c_1=\frac{1}{2}$, $c_2=\frac{5}{3}$. **8.195.** а) $c=\frac{14}{9}$; б) $c=\frac{\pi}{4}$.

8.196. $\frac{2}{3\sqrt[6]{a}}$. **8.197.** 0. **8.198.** 1. **8.199.** $\frac{\alpha}{\beta}$. **8.200.** $\frac{1}{3}$. **8.201.** $\frac{m}{n}a^{m-n}$.

8.202. 2. **8.203.** $\frac{3}{5}$. **8.204.** $\frac{2}{3}$. **8.205.** $\frac{1}{2}$. **8.206.** $\frac{2}{3}$. **8.207.** $\ln\frac{a}{b}$. **8.208.** 5.

8.209. $+\infty$. **8.210.** $\frac{1}{2}$. **8.211.** 0. **8.212.** $-\infty$. **8.213.** $\cos 3$. **8.214.** 0. **8.215.** 1.

8.216. 1. **8.217.** 0. **8.218.** a. **8.219.** ∞. **8.220.** 0. **8.221.** 2. **8.222.** -1. **8.223.** 0.

8.224. $\frac{1}{2}$. **8.225.** 0. **8.226.** -1. **8.227.** $\frac{2}{3}$. **8.228.** а) e^{-6}; б) e^2. **8.229.** а) $e^{\frac{2}{\pi}}$; б) 1. **8.230.** а) $\frac{1}{\sqrt[6]{e}}$; б) $\frac{1}{e}$. **8.231.** а) 1; б) 1. **8.232.** а) e; б) 1. **8.233.** а) 2; б) 1.

8.234. а) 2; б) 1; в) $\frac{1}{128}$; г) $\frac{a}{\sqrt{b}}$. **8.235.** а) 2; б) 1; в) 16; г) 2.

8.236. а) $\frac{4a^2}{\pi}$; б) 0. **8.237.** а) -2; б) ∞. **8.238.** а) $\frac{1}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$.

8.239. а) $e^{-\frac{2}{\pi}}$; б) 1. **8.240.** а) 0; б) 1.

8.241. $P(x)=(x-4)^4+11(x-4)^3+37(x-4)^2+21(x-4)-56$.

8.242. $P(x)=(x+1)^3-5(x+1)+8$. **8.243.** $P(-1)=143$, $P'(0)=-60$, $P''(0)=26$. **8.244.** а) $1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$;

б) $1+2x+x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{6}x^4-\frac{1}{15}x^5+o(x^5)$; в) $1-\frac{1}{2}x+\frac{7}{8}x^2+\frac{7}{16}x^3+o(x^3)$;

г) $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{x^k}{(k-1)!}+o(x^n)$. **8.245.** а) $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)(x+1)^k+o((x+1)^n)$;

б) $2+\frac{x-4}{4}-\frac{(x-4)^2}{64}+o((x-4)^2)$;

в) $(x-1)+\frac{5}{2!}(x-1)^2+\frac{11}{3!}(x-1)^3+\frac{6}{4!}(x-1)^4+o((x-1)^4)$;

г) $1-\frac{\pi^2}{8}(x-1)^2+\frac{\pi^4}{384}(x-1)^4+o((x-1)^4)$. **8.246.** а) $x+o(x^3)$;

б) $x+\frac{x^3}{6}+o(x^4)$; в) $(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+o((x-1)^2)$. **8.247.** а) 0,842; б) 1,648; в) 0,049; г) 2,012. **8.248.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{2}$; в) 1; г) $-\frac{1}{12}$; д) -2; е) $\frac{1}{2}$.

8.249. $y_{\max}=y(1)=\frac{1}{2}$, $y_{\min}=y(-1)=-\frac{1}{2}$; точки перегину $P_1\left(-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $P_2(0,0)$, $P_3\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$; асимптота $y=0$. **8.250.** $y_{\min}=y(0)=1$; точок перегину немає; асимптоти $x=\pm1$, $y=0$. **8.251.** Екстремумів немає; точка перегину $P(0,0)$; асимптоти $x=\pm1$, $y=0$. **8.252.** $y_{\max}=y(0)=0$; точок перегину немає; асимптоти $x=\pm1$, $y=1$. **8.253.** $y_{\min}=y(0)=-1$; точки перегину $\left(\pm1,-\frac{64}{125}\right)$, $\left(\pm\sqrt{5},0\right)$. **8.254.** $y_{\min}=y(3)=\frac{27}{8}$; точка перегину $(0,0)$; асимптоти $x=1$, $y=\frac{x}{2}+1$. **8.255.** $y_{\max}=y(-3)=-4{,}5$; $y_{\min}=y(3)=4{,}5$; точка перегину $(0,0)$; асимптоти $x=\pm\sqrt{3}$, $y=x$.

8.256. $y_{\max}=y(1)=\frac{1}{e}$; точка перегину $\left(2,\frac{2}{e^2}\right)$; асимптота $y=0$.

8.257. $y_{\max}=y(1)=e$; точки перегину $\left(\frac{2\pm\sqrt{2}}{2},\sqrt{e}\right)$; асимптота $y=0$.

8.258. $y_{\min}=y(1)=e$; точок перегину немає; асимптоти $y=x+1$, $x=0$ (права асимптота). **8.259.** Точка перегину $(1,e^2)$; асимптоти $y=2x+3$, $x=0$ (права асимптота). **8.260.** $y_{\max}=y\left(\frac{1}{e}\right)=-e$; асимптоти $x=1$, $x=0$ (права асимптота), $y=0$ (права асимптота).

8.261. $y_{\min}=y(0)=0$; точок перегину немає; асимптота $x=-1$.

8.262. $y_{\min}=y(0)=0$; точки перегину $(\pm1,\ln 2)$. **8.263.** $y_{\min}=y(1)=-1$; точки перегину $(0,0)$, $(2,0)$. **8.264.** Точки перегину $(0,1)$, $(1,0)$; асимптота $y=-x$. **8.265.** Точки перегину $(0,0)$, $\left(\pm1,\pm\sqrt[3]{2}\right)$; асимптота $y=x$.

8.266. Точка перегину $(0,0)$; асимптоти $y=-1$ (ліва), $y=1$ (права).

8.267. Визначена при $x \ge -1$, двозначна; екстремумів немає; графік симетричний відносно осі Ox; точки перегину $(0,1)$, $(0,-1)$; асимптот немає.

8.268. Визначена при $x \ge 0$, двозначна; графік симетричний відносно осі Ox; $|y|_{\max} = \left|y\left(\frac{1}{3}\right)\right| = \frac{2\sqrt{3}}{9}$; точок перегину немає; асимптот немає.

8.269. Визначена при $x<0$ та при $x \ge \sqrt[3]{2}$, двозначна; графік симетричний відносно осі Ox; $|y|_{\max} = |y(-1)| = 1$; точок перегину немає; асимптоти $x=0$, $y = \pm\frac{x\sqrt{3}}{3}$. **8.270.** $x_{\min} = -1$ при $t=1$ $(y(1)=3)$, $y_{\min} = -1$ при $t=-1$ $(x(-1)=3)$; парабола з вершиною у початку координат, вісь якої – пряма $y=x$ $(x>0,\ y>0)$. **8.271.** $x_{\min} = y_{\min} = 1$ при $t=0$ (точка звороту), $y=2x$ – асимптота при $t \to +\infty$.

8.272. $\left(-1-3\pi, -1+\frac{3\pi}{2}\right)$ – максимум, $\left(1-3\pi, 1-\frac{3\pi}{2}\right)$ – мінімум, точка перегину $(-3\pi, 0)$; асимптоти $y=x$, $y=x+6\pi$. **8.273.** Асимптота $x+y+1=0$; $(0,0)$ – точка самоперетину, дотичними в цій точці є осі координат; точок перегину немає; у першому квадранті – замкнена петля.

8.274. а) Замкнена трипелюсткова троянда;

$D(\rho) = \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$; екстремуми при $\varphi = \frac{\pi}{6}$, $\varphi = \frac{5\pi}{6}$, $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ (достатньо дослідити лінію при $0 \le \varphi < \pi$); б) графік отримується з графіка $\rho = a\sin 3\varphi$ за допомогою повороту на кут $\frac{\pi}{6}$. **8.275.** а) Екстремуми при $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$, $\varphi = \frac{5\pi}{4}$, $\varphi = \frac{7\pi}{4}$ (достатньо дослідити функцію при $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$); б) графік отримується з графіка $\rho = 3\sin 2\varphi$ за допомогою повороту на кут $\frac{\pi}{4}$. **8.276.** $D(\rho) = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$; екстремуми при $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$ (достатньо дослідити лінію при $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$).

8.277. Кардіоїда, полюс – точка звороту; $\rho_{\max} = \rho(0) = 2a$, $\rho_{\min} = \rho(\pi) = 0$.

8.278. $D(\rho) = (0, +\infty)$; лінія спірально завивається навколо полюса, асимптотично до нього наближаючись; точка перегину $\left(\sqrt{2\pi}, \frac{1}{2}\right)$; горизонтальна асимптота – полярна вісь $(\varphi = 0)$. **8.279.** Лемніската Бернуллі (див.№ 8.276).

8.280. Чотирипелюсткова троянда (див.№ 8.275а)). **8.281.** $M=13$, $m=4$.

8.282. $M=10$, $m=6$. **8.283.** $M=\frac{3}{5}$, $m=-1$.

8.284. $M=1$, $m=\frac{3}{5}$. **8.285.** $M=\frac{\pi}{2}$, $m=-\frac{\pi}{2}$. **8.286.** $M=\frac{\pi}{4}$, $m=0$.

8.287. 4 та 4. **8.288.** 1. **8.289.** 6 та 6. **8.290.** $\sqrt[3]{4V}$. **8.291.** πa^3. **8.292.** $\frac{4}{27}\pi r^2 h$.

8.293. $\frac{8}{3}\pi r^3$. **8.294.** $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}e^3$. **8.295.** $2r^2$. **8.296.** $N(1,1)$. **8.297.** $x = R\sqrt{2}$; $y = \frac{R}{\sqrt{2}}$. **8.298.** Розділити відрізок навпіл.

Предметний вказівник

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Апатенок Р.Ф., Маркина А.М., Попова Н.В., Хейнман В.Б.* Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – Мн.: Выш. шк., 1986. – 272с.

2. *Апатенок Р.Ф., Маркина А.М., Хейнман В.Б.* Сборник задач по линейной алгебре и аналитической геометрии. – Мн.: Выш. шк., 1990. – 286с.

3. *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1985. – 446с.

4. *Блох Э.Л., Лошинский Л.И., Турин В.Я.* Основы линейной алгебры и некоторые ее приложения. – М.: Высш. шк., 1971. – 256с.

5. *Борисенко О.А., Ушакова Л.М.* Аналітична геометрія. – Х.: Основа, 1993. – 192с.

6. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1980. – 432с.

7. *Гельфанд И.М.* Лекции по линейной алгебре. – М.: Наука, 1971. – 220с.

8. *Головина Л.И.* Линейная алгебра и некоторые ее приложения. – М.: Наука, 1985. – 407с.

9. *Гурский Е.И.* Основы линейной алгебры и аналитической геометрии. – Мн.: Выш. шк., 1982. – 272с.

10. *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.I. – М.: Высш. шк., 1986. – 304с.

11. *Дубовик В.П., Юрик І.І.* Вища математика. – К.: Вища шк., 1993. – 648с.

12. *Задачи* и упражнения по математическому анализу для втузов. /Под ред. Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1970. – 472с.

13. *Ильин В.А., Ким Г.Д.* Линейная алгебра и аналитическая геометрия. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998. – 320с.

14. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Линейная алгебра. – М.: Наука, 1984. – 302с.

15. *Крутицкая Н.Ч., Шишкин А.А.* Линейная алгебра в вопросах и задачах. – М.: Высшая школа, 1985. – 120с.

16. *Кручкович Г.И., Мордасова Г.М., Сулейманова Х.Р. и др.* Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики. – М.: Высш. шк., 1970. – 511с.

17. *Кузнецов Л.А.* Сборник заданий по высшей математике. – М.: Высш. шк., 1983. – 175с.

18. *Кузнецов А.В., Кузнецова Д.С., Шилкина Е.И. и др.* Сборник задач и упражнений по высшей математике: Общий курс. – Мн.: Выш. шк., 1994. – 284с.

19. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.1. – М.: Наука, 1985. – 551с.

20. *Проскуряков И.В.* Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Наука, 1975. – 319с.

21. *Сборник* задач по математике для втузов. Ч.1. Линейная алгебра и основы математического анализа /Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1986. – 464с.

22. *Сборник* индивидуальных заданий по высшей математике. Ч.1. /Под ред. А.П. Рябушко. – Мн.: Выш. шк, 1990. – 270с.

23. *Тевяшев А.Д., Литвин О.Г.* Алгебра і геометрія: Лінійна алгебра. Аналітична геометрія. – Х.: ХТУРЕ, 2000. – 388с.

24. *Тевяшев А.Д., Литвин О.Г.* Вища математика. Загальний курс: Збірник задач та вправ. – Х.: Рубікон, 1999. –320с.

25. *Фихтенгольц Г.М.* Основы математического анализа. Т.1. – М.: Наука, 1985. – 440с.

Навчальне видання

ТЕВЯШЕВ Андрій Дмитрович
ЛИТВИН Олександра Григорівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА У ПРИКЛАДАХ ТА ЗАДАЧАХ

Частина 1.

Лінійна алгебра і аналітична геометрія.

Диференціальне числення функцій однієї змінної

Продюсер видавничого проекту С.М. Смоленський
Коректор

Підп. до друку 00.00.00. Формат 60×84/16. Папір офсетний.
Друк офсетний. Умов. друк. арк. 00,0. Тираж 1000 прим.
Замовлення №

Віддруковано у