А.Д. Тевяшев, О.Г. Литвин,
Г.М. Кривошеєва, Л.В. Обухова, О.Г. Середа,
Н.О. Головко

ВИЩА МАТЕМАТИКА
У ПРИКЛАДАХ ТА ЗАДАЧАХ

Частина 3.
Диференціальні рівняння. Ряди.
Функції комплексної змінної.
Операційне числення

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів
вищих навчальних закладів

Київ
Кондор
2005

УДК 517.91 + 517.52 + 517.53 + 517.44

Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М. та ін.

Вища математика у прикладах та задачах. Ч.3. Диференціальні рівняння. Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення. 2-е вид. доп. і доопр. – К.: Кондор, 2005. – 608с.

Гриф надано Міністерством освіти і науки України. Лист № 14/18.2-1268 від 10.09.2001 р.

ISBN

Навчальний посібник є третьою частиною збірника “Вища математика у прикладах та задачах”, який складається з чотирьох частин.

Посібник відповідає програмі курсу “Вища математика” з розділів “Диференціальні рівняння”, “Ряди”, “Функції комплексної змінної” та “Операційне числення”. Структура посібника така, що сприяє розвитку і активізації самостійної роботи студентів. У кожному параграфі містяться короткі теоретичні відомості, питання для самоперевірки, велика кількість задач з розв’язаннями та призначених для практичних занять. Наведено також індивідуальні розрахункові завдання із зразками їх виконання. Довідковий матеріал з вказаних розділів та з елементарної математики складає окрему главу.

На відміну від традиційних, цей посібник можна використовувати як довідник, розв’язник та задачник із зазначених розділів курсу «Вища математика».

Для студентів та викладачів вищих навчальних закладів.

Іл.: 46. Бібл.: 18 назв.

Р е ц е н з е н т и : Л.В. Курпа, д-р техн. наук, проф. (НТУ ХПІ);
О.А. Молчанов, д-р техн. наук, проф. (НТУ КПІ).

ISBN

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Навчальний посібник призначено для студентів вищих навчальних закладів денної та заочної форм навчання. Він входить до збірника "Вища математика у прикладах та задачах", що складається з чотирьох частин:

Частина I. Алгебра і геометрія. Диференціальне числення функцій однієї змінної.

Частина II. Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних.

Частина III. Диференціальні рівняння. Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення.

Частина IV. Аудиторні контрольні роботи. Індивідуальні завдання.

Вказаний збірник відповідає програмі курсу "Вища математика", а розподіл його за частинами – розподілу викладання курсу за семестрами згідно з учбовим планом.

Даний посібник складається з шести глав, кожна з яких розбивається на параграфи. Матеріал кожного параграфа перших чотирьох глав розбивається на чотири пункти.

У п. I – "Короткі теоретичні відомості" – наводяться основні теоретичні відомості і формули, необхідні для розв'язання задач.

У п. II – "Контрольні питання та завдання" – містяться питання з теорії та прості завдання, що добре ілюструють як вузлові моменти, так і тонкощі теоретичних положень. Враховуючи, що основна робота над теорією ведеться студентами за підручником та конспектами лекцій, цей пункт включає питання для перевірки готовності студента до практичного заняття.

У п. III – "Приклади розв'язання задач" – наводяться докладні розв'язання типових задач з розглянутої теми. Велика увага приділяється не тільки розгляданню "технічних прийомів", але й дослідженню умов застосовності тієї чи іншої теореми або

формули. Кількість розібраних прикладів змінюється в залежності від обсягу та важливості теми. Початок і кінець розв'язання задач позначають відповідно знаками ► і ◄ .

У п. IV – "Задачі для практичних занять" – міститься досить велика кількість різних за змістом задач, що призначені для практичних занять – як аудиторних, так і домашніх. Наприкінці посібника наведено відповіді до цих задач. Нумерація задач проводиться у межах глави, тобто номер кожної задачі складається з номера глави та порядкового номера задачі у цій главі.

Зауважимо, що пункти I – IV кожного параграфа взаємопов'язані однаковою послідовністю викладення навчального матеріалу, тобто прослідковується лінія: теоретичний матеріал, *відповідні* контрольні питання, *відповідні* приклади з розв'язаннями, *відповідні* задачі для практичних занять. Це підкреслюється, по можливості, виділенням блоків у зазначених пунктах з однією назвою.

Враховуючи, що кожний параграф містить досить великий блок питань, така структура полегшує відшукання потрібних теоретичних відомостей або прикладів з розв'язками при самостійному розв'язанні практичних задач. При наявності великої кількості прикладів з розв'язаннями у п.III наводиться розподіл цих прикладів за їх тематикою.

Глава 5 містить чотири параграфи, в яких наведено чотири індивідуальних розрахункових завдання, які відповідають розділам програми, викладеної в главах 1 – 4. Кожне індивідуальне завдання складається з певної кількості задач, представлених у 31 варіанті, тобто різні для усіх студентів групи. Задачі супроводжуються посиланнями на аналогічні приклади з розв'язаннями, що наведені у відповідних главах у п. III кожного параграфа. Посилання містить номер глави, номер параграфа та номери прикладів. Зауважимо **надзвичайну важливість** цих посилань, бо вони є **путівником** для відшукання **зразка виконання** даної задачі, а отже, **зразка виконання** індивідуального розрахункового завдання.

Глава 6 складається з восьми параграфів, які містять довідковий матеріал з усіх розділів вищої математики, представлених у навчальному посібнику, а також основні формули диференціального та інтегрального числення функцій однієї змінної та основні формули елементарної математики.

Для зручності користування навчальним посібником у змісті до кожного параграфа у відповідних пунктах наведено номери прикладів задач з розв'язаннями та номери задач для практичних занять; введені також основні позначення та предметний вказівник.

У даному посібнику наведено словник ключових слів, що містить найбільш важливі терміни з вищої математики, які представлені українською, російською та англійською мовами.

З огляду на характеристику змісту цього посібника можна констатувати, що він може бути використаний як довідник, розв'язник і в той же час як задачник, що містить задачі для практичних занять та індивідуальні розрахункові завдання із зразками їх виконання. Це дуже зручно для студентів і надає їм широкі можливості для активної самостійної роботи – як аудиторної, так і домашньої.

При написанні навчального посібника автори використали багаторічний досвід викладання курсу "Вища математика" для технічних університетів.

У другому виданні, яке незначно відрізняється від першого, виправлено помічені друкарські помилки, уточнені формулювання та відповіді низки задач, дещо розширено обсяг довідкового матеріалу.

Автори щиро дякують студентам, аспірантам та викладачам, які користувались навчальним посібником і допомогли у виявленні недоліків, що були виправлені у другому виданні.

Автори висловлюють вдячність співробітникам кафедри прикладної математики ХНУРЕ Акимовій Ю.Г. та Сергієнко Т.Є. за добросовісне виконання роботи по комп'ютерному набору та верстці навчального посібника.

Автори сподіваються, що даний посібник допоможе студентам оволодіти методикою розв'язання практичних задач з математики, активізує їх самостійну роботу та сприятиме підвищенню фундаментальної підготовки з розглянутих розділів вищої математики.

Автори з подякою сприймуть всі критичні зауваження, пропозиції та побажання, спрямовані на поліпшення змісту навчального посібника. Їх можна надсилати за адресою:
61166, Харків, пр. Леніна, 14, Харківський національний університет радіоелектроніки, кафедра Прикладної математики, тел. (0572) 7-021-436. E-mail: tevjashev@kture.kharkov.ua.

ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

N, Z, Q, R, C – множини натуральних, цілих, раціональних, дійсних, комплексних чисел відповідно.

$\mathbf{R}^n$ – арифметичний дійсний n-вимірний простір.

$k=\overline{1,n}$ – індекс k приймає всі натуральні значення від 1 до n.

z – комплексне число.

$\bar{z}$ – комплексне число, спряжене комплексному числу z.

i – уявна одиниця.

$\operatorname{Re} z$ – дійсна частина комплексного числа z.

$\operatorname{Im} z$ – уявна частина комплексного числа z.

$\operatorname{Arg} z$ – аргумент комплексного числа z.

$\arg z$ – головне значення аргументу комплексного числа z.

$|z|$ – модуль комплексного числа z.

$\operatorname{Ln} z$ – логарифмічна функція.

$\ln z$ – головне значення $\operatorname{Ln} z$.

$\operatorname{Re} f(z)$ – дійсна частина функції комплексної змінної.

$\operatorname{Im} f(z)$ – уявна частина функції комплексної змінної.

$f'(z)$ – похідна функції $f(z)$.

$\int\limits_C f(z)\,dz$ – інтеграл від функції $f(z)$ вздовж контура C.

$\oint\limits_C f(z)\,dz$ – інтеграл від функції $f(z)$ вздовж замкненого контура C.

$\operatorname{res} f(z_0)$, $\operatorname{res}[f(z);z_0]$, $\operatorname*{res}\limits_{z=z_0} f(z)$ – лишок функції $f(z)$ в особливій точці z_0.

$f(t) \risingdotseq F(p)$ – функція $F(p)$ є зображенням функції $f(t)$.

$\eta(t)$ – одинична функція Хевісайда.

$f_1(t) * f_2(t)$ – згортка функцій $f_1(t)$ та $f_2(t)$.

ГЛАВА 1. **ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ**

§1. Диференціальні рівняння першого порядку

I. Короткі теоретичні відомості

Основні поняття. *Диференціальним рівнянням першого порядку* називається рівняння вигляду

$$F(x,\ y(x),\ y'(x)) = 0\,, \qquad (1.1)$$

де F – задана функція своїх аргументів, x – незалежна змінна, $y(x)$, $y'(x)$ – невідома (шукана) функція та її похідна.

Диференціальне рівняння (1.1), нерозв'язане відносно похідної $y'(x)$, називають *неявним диференціальним рівнянням*.

Якщо рівняння (1.1) можна розв'язати відносно $y'(x)$, то воно записується у вигляді

$$y' = f(x,y) \qquad (1.2)$$

і називається *диференціальним рівнянням першого порядку*, розв'язаним відносно похідної.

Розв'язком диференціального рівняння на деякому інтервалі (a,b) називається диференційовна на цьому інтервалі функція $y=\varphi(x)$, яка при підстановці у це рівняння замість невідомої функції перетворює його у тотожність.

Загальним розв'язком диференціального рівняння (1.2) в області D називається така функція $y=\varphi(x,C)$, що:

а) вона є розв'язком рівняння для всіх значень сталої C з деякої множини;

б) для будь-якої початкової умови $y(x_0)=y_0$, такої, що точка $(x_0,y_0)\in D$, існує єдине значення $C=C_0$, при якому розв'язок $y=\varphi(x,C_0)$ задовольняє цю початкову умову.

Розв'язок $y=\varphi(x,C_0)$, отриманий із загального $y=\varphi(x,C)$ при $C=C_0$, називається *частинним розв'язком* диференціального рівняння (1.2).

Якщо загальний розв'язок диференціального рівняння (1.2) знайдено у неявному вигляді, тобто у вигляді рівняння

$$\Phi(x,y,C)=0\,,$$

то такий розв'язок називають *загальним інтегралом* цього рівняння.

Рівність

$$\Phi(x,y,C_0)=0$$

називають *частинним інтегралом* диференціального рівняння.

Задача знаходження розв'язку рівняння

$$y' = f(x, y),$$

яке задовольняє початкову умову

$$y(x_0) = y_0,$$

називається *задачею Коші*.

З погляду геометрії загальний розв'язок $y = \varphi(x, C)$ визначає на площині множину *інтегральних кривих*, які залежать від параметра C. Розв'язати задачу Коші означає виділити з множини інтегральних кривих таку, яка проходить через задану точку (x_0, y_0).

Рівняння (1.2) має розв'язок, якщо воно задовольняє умови *теореми Коші* про існування і єдиність розв'язку.

Теорема Коші. Нехай функція $f(x, y)$ і її частинна похідна $f'_y(x, y)$ визначені і неперервні у відкритій області D площини xOy і точка $(x_0, y_0) \in D$. Тоді існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ рівняння $y' = f(x, y)$, який задовольняє умову

$$y(x_0) = y_0.$$

Точки площини, в яких не виконуються умови теореми Коші, називаються *особливими*. Розв'язок диференціального рівняння, в кожній точці якого порушується умова єдиності, називається *особливим розв'язком*.

Процес знаходження розв'язків диференціальних рівнянь називається *інтегруванням диференціальних рівнянь*.

Різні типи диференціальних рівнянь першого порядку та методи їх інтегрування

Диференціальні рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними. Рівняння вигляду

$$f_1(x)\,dx = f_2(y)\,dy \tag{1.3}$$

називається диференціальним рівнянням *з відокремленими змінними*.

Інтегруючи ліву та праву частини цього рівняння, отримаємо його загальний інтеграл

$$\int f_1(x)\,dx = \int f_2(y)\,dy + C,$$

де C – довільна стала.

Рівняння вигляду

$$f_1(x)\, g_1(y)\,dx = f_2(x)\, g_2(y)\,dy \tag{1.4}$$

називається диференціальним рівнянням *з відокремлюваними змінними*.

Поділивши обидві частини цього рівняння на функцію $g_1(y) \cdot f_2(x) \neq 0$, зводимо його до рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy.$$

Далі, інтегруючи обидві частини рівняння, отримаємо його загальний інтеграл

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy + C.$$

Зауважимо, що ділення на $g_1(y) \cdot f_2(x)$ може звести до втрати розв'язків диференціального рівняння, що є розв'язками рівнянь

$$g_1(y) = 0, \quad f_2(x) = 0.$$

Диференціальні рівняння, звідні до рівнянь з відокремлюваними змінними. Рівняння вигляду

$$y' = f(ax + by + c), \tag{1.5}$$

де a, b, c – задані числа, заміною змінних

$$z = ax + by + c \tag{1.6}$$

перетворюється у рівняння *з відокремлюваними змінними*. Дійсно, якщо перейдемо до змінних x та z, матимемо

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}, \quad \frac{dz}{dx} = a + b\,f(z)$$

або

$$\frac{dz}{a + b\,f(z)} = dx.$$

Отримали рівняння з відокремленими змінними. Інтегруючи, маємо

$$x = \int \frac{dz}{a + b\,f(z)} + C.$$

Диференціальні рівняння, однорідні відносно змінних

Функція $f(x, y)$ називається *однорідною функцією n-го виміру відносно змінних* x та y, якщо для будь-якого $\lambda \neq 0$ справедлива тотожність

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y).$$

Диференціальне рівняння вигляду

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{1.7}$$

називається *однорідним відносно змінних* x та y, якщо функції $M(x, y)$ та $N(x, y)$ є однорідними функціями однакового виміру.

Останнє рівняння простим перетворенням зводиться до вигляду

$$y' = f(x, y)\,, \tag{1.8}$$

де функція $f(x, y)$ є однорідною функцією нульового виміру, тобто для будь-якого $\lambda \neq 0$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 f(x, y) = f(x, y)\,.$$

Отже, рівняння, однорідне відносно змінних, має вигляд (1.7) або (1.8) при виконанні вказаних відповідних умов.

Враховуючи, що в рівнянні (1.8) права частина задовольняє умову $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$, $\forall\lambda,\ \lambda \neq 0$, покладемо $\lambda = \dfrac{1}{x}$. Тоді отримаємо

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

і рівняння (1.8) прийме вигляд

$$y' = f\left(1, \frac{y}{x}\right). \tag{1.9}$$

Введемо нову шукану функцію $u(x) = \dfrac{y}{x}$, звідки $y = u(x)\cdot x$.

Підстановкою

$$y = u(x)\cdot x \tag{1.10}$$

рівняння (1.9) зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними. Дійсно, поклавши в рівнянні (1.9)

$$y = u\cdot x, \quad y' = u'\cdot x + u\,,$$

маємо

$$x\frac{du}{dx} + u = f(1, u)\,.$$

Відокремивши змінні, отримаємо

$$\frac{du}{f(1, u) - u} = \frac{dx}{x}\,.$$

Інтегруючи, маємо

$$\int \frac{du}{f(1, u) - u} = \ln|x| + \ln|C|\,,$$

$$x = C\,e^{\int \frac{du}{f(1, u) - u}}\,.$$

Враховуючи, що $u = \dfrac{y}{x}$, отримаємо загальний інтеграл рівняння (1.8).

Диференціальні рівняння, звідні до однорідних рівнянь відносно змінних. Рівняння вигляду

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \tag{1.11}$$

де a_i, b_i, c_i, $i = 1, 2$ – задані числа, c_1, c_2 – одночасно не дорівнюють нулю, *зводиться до однорідного рівняння відносно змінних* заміною

$$x = x_1 + h, \quad y = y_1 + k\,, \tag{1.12}$$

якщо $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$.

Числа h і k знаходяться із системи

$$\begin{cases} a_1h + b_1k + c_1 = 0, \\ a_2h + b_2k + c_2 = 0. \end{cases}$$

У випадку $\Delta = 0$ рівняння (1.11) зводиться заміною

$$z = a_1x + b_1y \tag{1.13}$$

до рівняння *з відокремлюваними змінними*.

Лінійні диференціальні рівняння. Диференціальне рівняння першого порядку називається *лінійним*, якщо воно містить y та y' у першому степені, тобто має вигляд

$$y' + P(x)\,y = f(x)\,, \tag{1.14}$$

де $P(x)$ і $f(x)$ – задані і неперервні на деякому проміжку функції.

Якщо $f(x) \equiv 0$, то рівняння (1.14) називається *однорідним*, у протилежному випадку – *неоднорідним*.

У лінійному однорідному диференціальному рівнянні

$$y' + P(x)\,y = 0\,, \tag{1.15}$$

змінні відокремлюються і розв'язання його виглядає так:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = 0, \quad \frac{dy}{y} = -P(x)\,dx\,.$$

Інтегруючи, маємо

$$\ln|y| = -\int P(x)\,dx + \ln|C|\,,$$

$$y = Ce^{-\int P(x)\,dx}\,. \tag{1.16}$$

Для інтегрування неоднорідного лінійного рівняння (1.14)

$$y' + P(x)\,y = f(x)$$

можуть бути застосовані такі три методи.

1. *Метод підстановки* (метод Бернуллі).

Метод Бернуллі полягає в тому, що розв'язок цього рівняння шукають у вигляді добутку двох функцій (*підстановка Бернуллі*)

$$y = u(x)\cdot v(x)\,, \tag{1.17}$$

де одну з цих невідомих функцій можна взяти довільною (тотожно не рівною нулю), а інша визначиться з умови задовільняння рівнянню (1.14).

Знаходячи похідну

$$y' = u'v + uv'$$

і підставляючи значення y та y' у рівняння (1.14), дістанемо

$$u'v + u[v' + P(x)v] = f(x)\,. \tag{1.18}$$

Користуючись довільністю у виборі функції $v(x)$, доберемо її так, щоб вираз у квадратних дужках дорівнював нулю, в результаті чого рівняння (1.18) спроститься. Отже, маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} v' + P(x)v = 0, \\ u'v = f(x). \end{cases} \tag{1.19}$$

Відокремлюючи в першому рівнянні системи змінні, знайдемо його загальний розв'язок:

$$\frac{dv}{dx} = -P(x)v\,; \qquad \frac{dv}{v} = -P(x)dx\,;$$

$$\ln|v| = -\int P(x)dx + \ln|C|\,;$$

$$v = Ce^{-\int P(x)dx}\,. \tag{1.20}$$

Приймемо за функцію v частинний розв'язок рівняння (1.19), поклавши у загальному розв'язку (1.20) $C = 1$, тобто

$$v = e^{-\int P(x)dx}\,. \tag{1.21}$$

Далі розв'язуємо друге рівняння системи, де функція v визначається формулою (1.21). Розв'язавши це рівняння, знайдемо функцію $u(x)$. Маємо:

$$\frac{du}{dx}\,e^{-\int P(x)dx} = f(x)\,; \qquad du = f(x)\,e^{\int P(x)dx}\,dx\,;$$

$$u = \int f(x)\,e^{\int P(x)dx}\,dx + C\,. \tag{1.22}$$

Підставляючи функції (1.21) і (1.22) у формулу (1.17), знаходимо загальний розв'язок рівняння (1.14)

$$y = uv = e^{-\int P(x)dx}\left(\int f(x)\,e^{\int P(x)dx}\,dx + C\right). \tag{1.23}$$

2. *Метод варіації довільної сталої* (метод Лагранжа).

Врахуємо, що для лінійного неоднорідного диференціального рівняння

$$y' + P(x)\,y = f(x) \tag{1.14}$$

відповідне однорідне рівняння має вигляд

$$y' + P(x)\,y = 0 \tag{1.15}$$

і його загальний розв'язок визначається формулою

$$y = C\,e^{-\int P(x)dx}\,. \tag{1.16}$$

Згідно з методом варіації довільної сталої розв'язок рівняння (1.14) шукатимемо у вигляді

$$y = C(x)\,e^{-\int P(x)dx}\,. \tag{1.24}$$

Цей вигляд отримується з формули (1.16), якщо в ній замінити сталу C на функцію $C(x)$.

Підставляючи в рівняння (1.14) функцію y у вигляді (1.24) та її похідну

$$y' = C'(x)e^{-\int P(x)dx} - C(x)e^{-\int P(x)dx}P(x)\,,$$

отримуємо для визначення невідомої функції $C(x)$ диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними

$$C'(x) = f(x)\;e^{\int P(x)dx}\,.$$

Загальний розв'язок цього рівняння

$$C(x) = \int f(x)\;e^{\int P(x)dx}dx + C\,, \tag{1.25}$$

де C – довільна стала.

Підставляючи (1.25) у формулу (1.24), знаходимо загальний розв'язок рівняння (1.14)

$$y = \left(\int f(x)\;e^{\int P(x)dx}dx + C\right)e^{-\int P(x)dx}\,. \tag{1.26}$$

3. *Метод інтегрувального множника* (метод Ейлера).

Відповідно до цього методу, неоднорідне диференціальне рівняння

$$y' + P(x)\,y = f(x) \tag{1.14}$$

множиться зліва та справа на інтегрувальний множник

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}\,. \tag{1.27}$$

У результаті зліва отримуємо похідну деякої функції, інтегрування якої зводить до цієї функції.

Дійсно,

$$y'\cdot e^{\int P(x)dx} + P(x)\,y\cdot e^{\int P(x)dx} = f(x)e^{\int P(x)dx}\,,$$

$$\left[y \cdot e^{\int P(x)\,dx} \right]' = f(x) e^{\int P(x)\,dx} .$$

Інтегруючи, маємо:

$$y\, e^{\int P(x)\,dx} = \int f(x) e^{\int P(x)\,dx}\, dx + C .$$

Остаточно

$$y = e^{-\int P(x)\,dx} \left(\int f(x) e^{\int P(x)\,dx}\, dx + C \right). \qquad (1.28)$$

Диференціальні рівняння, звідні до лінійних
Рівняння Бернуллі

Рівнянням Бернуллі називається рівняння вигляду

$$y' + P(x)\, y = y^{\alpha} f(x), \quad \alpha \in \mathbf{R}, \qquad (1.29)$$

де $P(x),\ f(x)$ – задані і неперервні на деякому проміжку функції.

При $\alpha = 0$ це рівняння лінійне, а при $\alpha = 1$ – з відокремлюваними змінними. Якщо $\alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1$, то заміна

$$z = y^{1-\alpha} \qquad (1.30)$$

зводить знову *до лінійного рівняння* відносно функції $z(x)$.

На практиці розв’язок рівняння Бернуллі зручніше шукати методом Бернуллі у вигляді

$$y = uv, \qquad (1.31)$$

не зводячи його попередньо до лінійного рівняння. Зазначимо, що при $\alpha > 0$, крім розв’язку $y = uv \neq 0$, рівняння Бернуллі має розв’язок $y \equiv 0$.

Рівняння Ріккаті

Рівнянням Ріккаті називається рівняння вигляду

$$y' + P(x)\, y + Q(x) y^2 = f(x), \qquad (1.32)$$

де $P(x),\ Q(x),\ f(x)$ – задані і неперервні на деякому проміжку функції.

Якщо $P,\ Q,\ f$ – сталі числа, то це рівняння інтегрується відокремленням змінних:

$$y' = f - P\,y - Q\,y^2,$$

$$\int \frac{dy}{f - P\,y - Q\,y^2} = x + C .$$

Коли $Q(x) = 0$, рівняння (1.32) стає лінійним, а у випадку $f(x) = 0$ – рівнянням Бернуллі. У загальному випадку рівняння (1.32) не інтегрується в квадратурах.

Якщо відомий частинний розв’язок $y_1 = y_1(x)$ рівняння Ріккаті, то заміною $y = y_1 + z$ рівняння Ріккаті зводиться до рівняння Бернуллі.

Диференціальні рівняння у повних диференціалах

Диференціальне рівняння першого порядку вигляду

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0 \qquad (1.33)$$

називається *рівнянням у повних диференціалах*, якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$, тобто

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = du(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy, \qquad (1.34)$$

а отже,

$$P(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}. \qquad (1.35)$$

Для того, щоб рівняння (1.33) було рівнянням у повних диференціалах, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad (1.36)$$

Отже, якщо рівняння (1.33) є рівнянням у повних диференціалах, то воно може бути записане у вигляді

$$du(x, y) = 0 . \qquad (1.37)$$

Загальний інтеграл цього рівняння

$$u(x, y) = C, \qquad (1.38)$$

де C – довільна стала.

Таким чином, задача інтегрування рівняння (1.33) зводиться до відшукання функції $u(x, y)$, такої, що для неї ліва частина рівняння є повним диференціалом. Відшукання такої функції можна проводити двома способами.

Спосіб 1. Оскільки має місце співвідношення (1.34), матимемо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \qquad (1.39)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y). \qquad (1.40)$$

Інтегруючи (1.39) по x, отримаємо функцію $u(x, y)$ з точністю до довільної сталої $\varphi(y)$, яка залежить від y:

$$u(x, y) = \int P(x, y)\, dx + \varphi(y) .$$

Для визначення функції $\varphi(y)$ продиференціюємо отриману функцію $u(x, y)$ по y і, враховуючи (1.40), матимемо:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\int P(x, y)\, dx \right] + \varphi'(y) = Q(x, y) .$$

З цього рівняння визначаємо $\varphi'(y)$ і, інтегруючи, знаходимо $\varphi(y)$, а отже і $u(x, y)$.

Спосіб 2. Скористаємось криволінійним інтегралом другого роду для визначення функції $u(x, y)$, для якої підінтегральний вираз є її повним диференціалом. У цьому випадку криволінійний інтеграл не залежить від шляху інтегрування. Взявши криволінійний інтеграл від функції

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

по будь-якому шляху від фіксованої точки (x_0, y_0) до точки із змінними координатами (x, y), отримаємо шукану функцію $u(x, y)$:

$$u(x, y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy\,. \qquad (1.41)$$

Обчислення криволінійного інтеграла другого роду, як відомо, зводиться до обчислення визначеного інтеграла. При цьому за шлях інтегрування зручніше вибрати ламану, складену з двох відрізків, паралельних осям координат (рис. 1.1, рис. 1.2).

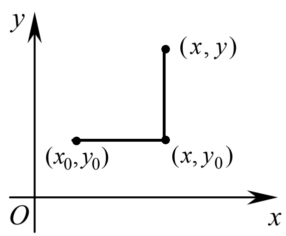


Рис.1.1

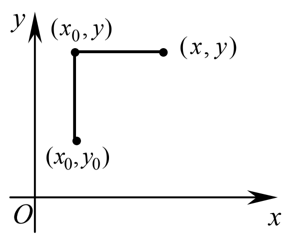


Рис.1.2

У такому випадку, згідно з шляхом інтегрування, представленим на рис.1.1,

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)\,dy\,, \qquad (1.42)$$

або, згідно з шляхом інтегрування, представленим на рис.1.2,

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy + \int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx\,. \qquad (1.43)$$

Отже, функція $u(x, y)$ обчислюється за формулою (1.41) з урахуванням формули (1.42) або (1.43).

Диференціальні рівняння, звідні до рівнянь у повних диференціалах. Метод інтегрувального множника

За певних умов множенням довільного рівняння

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0 \qquad (1.44)$$

на деякий множник $\mu(x, y)$ можна звести його до рівняння у повних диференціалах. Такий множник називається *інтегрувальним множником*. Загального методу знаходження функції $\mu(x, y)$ немає, але в деяких окремих випадках цей пошук можна здійснити. Розглянемо методи знаходження інтегрувального множника $\mu(x, y)$.

Якщо $\mu(x, y)$ – інтегрувальний множник, то рівняння

$$\mu P(x, y)\,dx + \mu Q(x, y)\,dy = 0$$

є рівнянням у повних диференціалах. Тоді повинна виконуватися умова

$$\frac{\partial (P\mu)}{\partial y} = \frac{\partial (Q\mu)}{\partial x}\,,$$

тобто

$$\mu \frac{\partial P}{\partial y} + P \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial Q}{\partial x} + Q \frac{\partial \mu}{\partial x}\,,$$

звідки

$$P \frac{\partial \mu}{\partial y} - Q \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

або

$$P \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} - Q \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,. \qquad (1.45)$$

Для знаходження $\mu(x, y)$ треба знайти який-небудь частинний розв'язок рівняння (1.45) з частинними похідними відносно невідомої функції $\mu(x, y)$.

Рівняння (1.45) спрощується, якщо інтегрувальний множник залежить від однієї змінної, наприклад, від x, тобто $\mu = \mu(x)$. Тоді в рівнянні (1.45)

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = 0$$

і маємо

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right), \qquad (1.46)$$

з якого інтегруванням визначається спочатку $\ln \mu$, а потім і μ. Рівняння (1.46) має зміст лише у випадку, коли його права частина $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right)$ залежить лише від x.

Отже, якщо

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=F(x)\,, \tag{1.47}$$

то $\mu=\mu(x)$ і його знаходять з рівняння (1.46).

Аналогічно, якщо вираз

$$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=F_1(y)\,, \tag{1.48}$$

то $\mu=\mu(y)$ і його знаходять з рівняння

$$\frac{d\ln\mu}{dy}=\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right). \tag{1.49}$$

Диференціальні рівняння, нерозв'язні відносно похідної

Нехай диференціальне рівняння, нерозв'язне відносно похідної

$$F(x,y,y')=0\,, \tag{1.50}$$

розв'язне або відносно шуканої функції

$$y=f(x,y')\,, \tag{1.51}$$

або відносно аргументу

$$x=f(y,y')\,. \tag{1.52}$$

Тоді воно інтегрується введенням параметра $p=y'$. Рівняння (1.51), (1.52) переходять в алгебраїчні рівняння, диференціюючи які відповідно по x або по y, отримуємо системи рівнянь:

$$\begin{cases} y=f(x,p), \\ p=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial p}\cdot\dfrac{dp}{dx} \end{cases} \tag{1.53}$$

або

$$\begin{cases} x=f(y,p), \\ \dfrac{1}{p}=\dfrac{\partial f}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial p}\cdot\dfrac{dp}{dy}\,. \end{cases} \tag{1.54}$$

З цих систем знаходяться відповідно загальні розв'язки рівнянь (1.51) або (1.52) в явному або параметричному вигляді.

Рівняння Лагранжа і Клеро

Рівняння вигляду

$$y=x\varphi(y')+\psi(y')\,, \tag{1.55}$$

де $\varphi,\ \psi$ – відомі функції, називається *рівнянням Лагранжа*.

Воно є частинним випадком рівняння (1.51).

Якщо $\varphi(y')\equiv y'$, то рівняння (1.55) набирає вигляду

$$y=x\,y'+\psi(y') \tag{1.56}$$

і називається *рівнянням Клеро.*

Розв'язання рівняння Лагранжа

Введемо параметр $p=y'$, тоді рівняння Лагранжа

$$y=x\varphi(y')+\psi(y')$$

записується у вигляді

$$y=x\varphi(p)+\psi(p)\,. \tag{1.57}$$

Диференціюючи (1.57) по x, дістанемо

$$p=\varphi(p)+(x\varphi'(p)+\psi'(p))\frac{dp}{dx}$$

або

$$p-\varphi(p)=(x\varphi'(p)+\psi'(p))\frac{dp}{dx}\,, \tag{1.58}$$

отже,

$$(p-\varphi(p))\frac{dx}{dp}=x\varphi'(p)+\psi'(p)\,. \tag{1.59}$$

Рівняння (1.59) є лінійним відносно невідомої функції $x=x(p)$. Розв'язавши його, знаходимо загальний розв'язок $x=x(p,C)$.

Треба мати на увазі, що при діленні рівняння (1.58) на $\dfrac{dp}{dx}$ могли загубитися розв'язки, для яких $\dfrac{dp}{dx}=0$, тобто p – const. Вважаючи p сталою, очевидно, що рівняння (1.58) задовольняється лише тоді, коли p є коренем рівняння

$$p-\varphi(p)=0$$

і якщо це рівняння має дійсні корені $p=p_i\ \ (i=\overline{1,n})$, то знайдені вище розв'язки рівняння Лагранжа треба доповнити розв'язками

$$y=x\varphi(p_i)+\psi(p_i)\quad (i=\overline{1,n})\,.$$

Якщо ці розв'язки не утворюються з загального ні за яких значень довільної сталої, то вони є особливими розв'язками.

Розв'язання рівняння Клеро

Введемо параметр $p=y'$. Тоді рівняння Клеро

$$y=x\,y'+\psi(y')$$

запишемо у вигляді

$$y=xp+\psi(p)\,. \tag{1.60}$$

Диференціюючи ліву та праву частини по x, отримаємо

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx}$$

або

$$(x + \psi'(p))\frac{dp}{dx} = 0 .$$

Якщо $\frac{dp}{dx} = 0$, то $p = C$ і із (1.60) маємо загальний розв'язок рівняння Клеро:

$$y = Cx + \psi(C) . \qquad (1.61)$$

Якщо $x + \psi'(p) = 0$, то дістанемо частинний розв'язок у параметричній формі:

$$x = -\psi'(p), \quad y = -\psi'(p)p + \psi(p) . \qquad (1.62)$$

Цей розв'язок є особливим. Розв'язок (1.62) – однопараметрична сім'я інтегральних прямих. Інтегральна крива, яка визначається рівнянням (1.61), є обвідною сім'ї інтегральних прямих (1.62). Дійсно, обвідна деякої сім'ї $\Phi(x, y, C) = 0$ визначається рівняннями

$$\Phi(x, y, C) = 0 \quad \text{і} \quad \frac{\partial\Phi}{\partial C} = 0 .$$

Зауважимо, що існує практичне правило отримання розв'язку рівняння Клеро: замінюючи в рівнянні Клеро символ y' символом C, отримуємо його загальний розв'язок. Диференціюючи цей розв'язок по C і виключаючи C з системи двох рівнянь (загального розв'язку і результату диференціювання), отримуємо особливий розв'язок.

Геометричні та фізичні задачі, що зводяться до розв'язання диференціальних рівнянь першого порядку

1. У задачах геометрії, в яких треба знайти рівняння кривої по заданій властивості її дотичної, нормалі або площі криволінійної трапеції, *використовується геометричне тлумачення похідної* (кутовий коефіцієнт дотичної) та *інтеграла зі змінною верхнею межею* (площа криволінійної трапеції з рухомою обмежуючою ординатою).

2. Використовуються такі *загальні формули* для визначення відповідно: довжин відрізків дотичної t, нормалі n, піддотичної s_t і піднормалі s_n (рис.1.3).

$$t = \left| \frac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2} \right|, \qquad n = \left| y\sqrt{1 + y'^2} \right|,$$

$$s_t = \left| \frac{y}{y'} \right|, \qquad s_n = | yy' | .$$

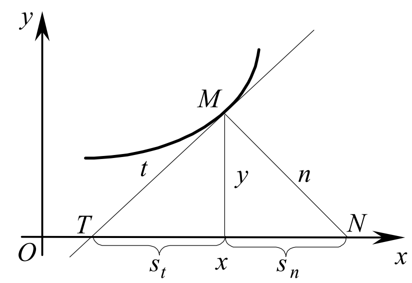


Рис.1.3

3. Використовується поняття ортогональної траєкторії.

Ортогональними траєкторіями для однопараметричної сім'ї S_1 ліній $y = \Phi(x, a)$ називається інша сім'я S_2 ліній, які перетинають лінії першої сім'ї під прямим кутом.

4. При складанні диференціального рівняння першого порядку в фізичних задачах часто застосовується *метод диференціалів*, за яким наближені співвідношення між малими приростами величин замінюються співвідношеннями між їх диференціалами.

Іншим методом складання диференціальних рівняння є *використання фізичного змісту похідної* як швидкості протікання процесу.

II. Контрольні питання та завдання

1. Яке рівняння називається диференціальним рівнянням першого порядку?

2. Дайте означення загального і частинного розв'язків диференціального рівняння першого порядку.

3. Сформулюйте теорему Коші про існування та єдиність розв'язку диференціального рівняння першого порядку.

4. Наведіть загальний вигляд диференціального рівняння з відокремлюваними змінними.

5. Яке диференціальне рівняння називається однорідним відносно змінних?

6. Які диференціальні рівняння зводяться до однорідних відносно змінних?

7. Наведіть загальний вигляд лінійного диференціального рівняння першого порядку.

8. Які методи розв'язання лінійного диференціального рівняння першого порядку існують?

9. Запишіть рівняння Бернуллі і наведіть заміну змінних для його розв'язання.

10. Сформулюйте необхідну і достатню умови для того, щоб рівняння

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

було рівнянням у повних диференціалах.

11. Які способи розв'язання рівняння у повних диференціалах існують?

12. Що таке інтегрувальний множник?

13. Запишіть рівняння Лагранжа і Клеро.

14. За яких умов з'являються особливі розв'язки рівняння Лагранжа?

III. Приклади розв'язання задач

У цьому пункті розглянуто 26 прикладів розв'язання задач, які за своєю тематикою розподілились так:

1. Основні поняття: *приклади 1, 2*.

2. Диференціальні рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними та звідні до них: *приклади 3 – 6, 8б)*.

3. Диференціальні рівняння, однорідні відносно змінних, та звідні до них: *приклади 7, 8а)*.

4. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку: *приклади 9, 10*.

5. Диференціальні рівняння Бернуллі: *приклад 11*.

6. Диференціальні рівняння Ріккаті: *приклад 12*.

7. Диференціальні рівняння у повних диференціалах та звідні до них: *приклади 13, 14*.

8. Диференціальні рівняння, нерозв'язні відносно похідної: *приклад 15*.

9. Диференціальні рівняння Лагранжа: *приклад 16*.

10. Диференціальні рівняння Клеро: *приклад 17*.

11. Задачі геометрії: *приклади 18 – 21*.

12. Задачі фізики: *приклади 22 – 26*.

Основні поняття

Приклад 1. Перевірити, що задані функції є розв'язками заданих диференціальних рівнянь:

а) $y = \dfrac{\sin x}{x}$; $\quad xy' + y = \cos x$;

б) $y = Cx^3$, $C \in \mathbf{R}$; $\quad xy' - 3y = 0$;

в) $y = y(x)$ задана неявно рівнянням

$F(x,y) = \ln\dfrac{y}{x} + xy + C = 0$, $C \in \mathbf{R}$; $\quad (x + x^2 y)\,y' = y - xy^2$.

► а) $y = \dfrac{\sin x}{x}$; $\quad xy' + y = \cos x$.

Знаходимо y':

$$y' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}.$$

Підставимо в ліву частину диференціального рівняння вирази для y та y':

$$xy' + y = x\,\frac{x\cos x - \sin x}{x^2} + \frac{\sin x}{x} = \cos x - \frac{\sin x}{x} + \frac{\sin x}{x} = \cos x.$$

Останнє означає, що функція $y = \dfrac{\sin x}{x}$ є розв'язком заданого рівняння.

б) $y = Cx^3$, $C \in \mathbf{R}$; $\quad xy' - 3y = 0$.

Знаходимо y':

$$y' = C \cdot 3x^2.$$

Підставимо в ліву частину диференціального рівняння вирази для y та y':

$$xy' - 3y = x \cdot 3Cx^2 - 3Cx^3 = 0.$$

Останнє означає, що функція $y = Cx^3$ є розв'язком заданого рівняння.

в) $F(x,y) = \ln\frac{y}{x} + xy + C = 0$; $(x + x^2 y)\, y' = y - xy^2$.

Знаходимо y':

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y},$$

де $F'_x = \frac{x}{y}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) + y = -\frac{1}{x} + y = \frac{xy-1}{x}$,

$F'_y = \frac{x}{y}\cdot\frac{1}{x} + x = \frac{1}{y} + x = \frac{xy+1}{y}$.

Підставивши, отримуємо вираз для y':

$$y' = -\frac{(xy-1)\,y}{x\,(xy+1)} = \frac{(1-xy)\,y}{(xy+1)\,x} = \frac{y-xy^2}{x+x^2 y}.$$

Звідси $(x + x^2 y)\, y' = y - xy^2$.

Це означає, що функція $y = y(x)$, задана неявно вказаним рівнянням, задовольняє заданому диференціальному рівнянню.

Аналогічний результат отримаємо, якщо продиференціювати обидві частини рівняння $F(x,y) = \ln\frac{y}{x} + xy + C = 0$, що задає функцію $y = y(x)$, по змінній x:

$$\frac{x}{y}\cdot\frac{y'x-y}{x^2} + y + xy' = 0.$$

Після перетворень отримаємо задане диференціальне рівняння. ◄

Приклад 2. Знайти диференціальне рівняння сім'ї кіл

$$x^2 + y^2 = 2ax.$$

► Продиференціюємо обидві частини рівняння по x:

$$2x + 2yy' = 2a.$$

Виключимо параметр a з системи рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2ax, \\ x + yy' = a. \end{cases}$$

Маємо $x^2 + y^2 = 2(x + yy')x$.

Звідки $y^2 - x^2 = 2xyy'$.

Це є шукане диференціальне рівняння сім'ї кіл. ◄

Диференціальні рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними та звідні до них

Приклад 3. Розв'язати рівняння

$$x(1+y^2)\,dx - y(1+x^2)\,dy = 0.$$

► Це рівняння *з відокремлюваними змінними*. Поділивши обидві його частини на $(1+x^2)(1+y^2) \neq 0$, дістанемо рівняння *з відокремленими змінними*:

$$\frac{y\,dy}{1+y^2} = \frac{x\,dx}{1+x^2}.$$

Далі проінтегруємо обидві частини рівняння. Для спрощення подальшого потенціювання сталу C після інтегрування краще записати як $\frac{1}{2}\ln|C|$, отже,

$$\int\frac{y\,dy}{1+y^2} = \int\frac{x\,dx}{1+x^2},$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{d(1+y^2)}{1+y^2} = \frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{1+x^2},$$

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\ln|C|, \quad C \neq 0.$$

Потенціюючи, дістанемо загальний інтеграл заданого рівняння:

$$\frac{1+y^2}{1+x^2} = C, \quad C \neq 0.$$

При діленні обох частин диференціального рівняння на вираз $(1+x^2)(1+y^2)$ розв'язки не втрачені, бо $1+x^2 \neq 0,\ 1+y^2 \neq 0$. ◄

Приклад 4. Розв'язати рівняння

$$(xy^2 + y^2)\,dx + (x^2 - x^2 y)\,dy = 0.$$

► Перетворимо ліву частину рівняння:

$$y^2(x+1)\,dx + x^2(1-y)\,dy = 0.$$

Поділимо обидві частини рівняння на $x^2 y^2 \neq 0$:

$$\frac{x+1}{x^2}dx + \frac{1-y}{y^2}dy = 0.$$

Отримали рівняння *з відокремленими змінними*, отже,

$$\int \frac{x+1}{x^2}dx = \int \frac{y-1}{y^2}dy\,,$$

$$\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx = \int\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y^2}\right)dy\,,$$

$$\ln|x| - \frac{1}{x} = \ln|y| + \frac{1}{y} + C\,.$$

Отже, загальний інтеграл має вигляд:

$$\ln\left|\frac{x}{y}\right| - \frac{x+y}{xy} = C\,.$$

Перевіримо, чи не втрачені розв'язки диференціального рівняння при діленні заданого рівняння на $x^2y^2 \neq 0$. Розв'язуємо рівняння $x^2y^2 = 0$. Воно має розв'язки $x = 0$ і $y = 0$, які є розв'язками загального диференціального рівняння. Загальний інтеграл не містить цих розв'язків ні при якому чисельному значенні C, тому $x = 0$ і $y = 0$ є особливими розв'язками і їх слід виписувати додатково до загального інтеграла.

Отже, розв'язком заданого рівняння є:

$$\ln\left|\frac{x}{y}\right| - \frac{x+y}{xy} = C, \quad x = 0, \quad y = 0\,. ◄$$

Приклад 5. Розв'язати рівняння

$$y' = \cos(y-x)\,.$$

► Задане рівняння зводиться до рівняння *з відокремленими змінними*. Покладемо

$$z = y - x\,.$$

Тоді

$$z' = y' - 1\,,$$

звідки перетворене рівняння набуде вигляду

$$z' + 1 = \cos z\,.$$

Відокремлюючи змінні, дістанемо

$$\frac{dz}{\cos z - 1} = dx\,.$$

Інтегруємо:

$$\int \frac{dz}{\cos z - 1} = \int dx\,, \qquad x = -\int \frac{dz}{2\sin^2\frac{z}{2}}\,,$$

$$x = \operatorname{ctg}\frac{z}{2} + C\,.$$

Повертаючись до старої змінної, маємо загальний інтеграл:

$$\operatorname{ctg}\frac{y-x}{2} - x + C = 0\,.$$

Відокремлюючи змінні, припускали, що $\cos z - 1 \neq 0$. Якщо $\cos z - 1 = 0$, то $y - x = 2k\pi,\ k = 0, \pm 1, \ldots$ Ні при якому значенні сталої C ці розв'язки не утворюються із загального інтеграла, вони є особливими. ◄

Приклад 6. Знайти частинний розв'язок рівняння

$$(1+x^2)\,dy + y\,dx = 0\,,$$

який задовольняє початкову умову $y(0) = 1$.

► Відокремимо змінні та проінтегруємо дане рівняння.

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{1+x^2}\,,$$

$$\int\frac{dy}{y} = -\int\frac{dx}{1+x^2}\,,$$

$$\ln|y| = -\operatorname{arctg} x + C\,.$$

Загальний інтеграл запишемо у вигляді:

$$\ln|y| + \operatorname{arctg} x = C\,.$$

Використовуючи початкову умову, знайдемо сталу C:

$$\ln 1 + \operatorname{arctg} 0 = C \ \Rightarrow\ C = 0\,.$$

Знайдену сталу $C = 0$ підставимо в загальний інтеграл і отримуємо шуканий частинний розв'язок у вигляді:

$$\ln|y| + \operatorname{arctg} x = 0$$

або

$$y = e^{-\operatorname{arctg} x}\,. ◄$$

Диференціальні рівняння, однорідні відносно змінних, та звідні до них

Приклад 7. Розв'язати рівняння

$$y' = \frac{x^2+y^2}{2x^2}\,.$$

► Права частина цього рівняння є однорідною функцією нульового виміру, тому що

$$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{(\lambda x)^2+(\lambda y)^2}{2(\lambda x)^2}=\frac{x^2+y^2}{2x^2}=\lambda^0 f(x,y)\,.$$

Отже, задане *рівняння є однорідним відносно змінних*. Застосуємо підстановку

$$y=ux\,.$$

Тоді

$$y'=u'x+u\,.$$

Підставивши y та y' в задане рівняння, отримаємо рівняння з відокремленими змінними, звідки дістанемо загальний інтеграл. Процес розв'язання виглядає так:

$$xu'+u=\frac{x^2+u^2x^2}{2x^2},\qquad xu'=\frac{1+u^2}{2}-u,\qquad xu'=\frac{(u-1)^2}{2},$$

$$x\frac{du}{dx}=\frac{(u-1)^2}{2},\qquad \frac{dx}{x}=\frac{2\,du}{(u-1)^2},\qquad \int\frac{dx}{x}=\int\frac{2\,du}{(u-1)^2},$$

$$\ln|x|+\ln|C|=-\frac{2}{u-1},$$

$$\ln|Cx|=-\frac{2}{\frac{y}{x}-1},\qquad \ln|Cx|=\frac{2x}{x-y}\,.$$

Остаточно загальний інтеграл має вигляд

$$C\,x=e^{\frac{2x}{x-y}}\,.$$

При відокремленні змінних ми поділили на $x\neq 0$ і на $(u-1)^2\neq 0$. Точки, в яких $x=0$, не входять в область визначення правої частини заданого рівняння, тому $x=0$ не є розв'язком рівняння.

При $u-1=0$, маємо $y=x$.

Функція $y=x$ перетворює задане рівняння в тотожність і є його особливим розв'язком, який слід вказувати додатково до знайденого інтеграла. ◄

Приклад 8. Розв'язати рівняння:

а) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-y+1}{x+y-3}$; б) $(x+y+2)\,dx+(2x+2y-1)\,dy=0$.

► а) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-y+1}{x+y-3}$.

Задане рівняння є рівнянням вигляду:

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right).$$

Воно зводиться *до однорідного відносно змінних*, бо

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2\neq 0\,.$$

Покладемо

$$x=x_1+h,\quad y=y_1+k\,.$$

Тоді

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy_1}{dx_1}\,.$$

Запишемо задане рівняння у нових координатах:

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{x_1-y_1+h-k+1}{x_1+y_1+h+k-3}\,.$$

Для знаходження h і k складемо систему:

$$\begin{cases}h-k+1=0,\\ h+k-3=0,\end{cases}$$

звідки, розв'язавши систему, отримаємо $h=1,\ k=2$.

Тоді

$$x=x_1+1,\qquad y=y_1+2\,.$$

Отже, маємо однорідне рівняння відносно змінних x_1 та y_1:

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{x_1-y_1}{x_1+y_1}\,.$$

Підстановкою

$$y_1=ux_1,\quad y_1'=u'x_1+u$$

однорідне рівняння зводиться до рівняння *з відокремленими змінними*:

$$u+x_1\frac{du}{dx_1}=\frac{1-u}{1+u},\qquad \frac{(1+u)\,du}{1-2u-u^2}=\frac{dx_1}{x_1},$$

$$\int\frac{(1+u)\,du}{1-2u-u^2}=\int\frac{dx_1}{x_1},\qquad -\frac{1}{2}\int\frac{d(1-2u-u^2)}{1-2u-u^2}=\int\frac{dx_1}{x_1},$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|1-2u-u^2\right|=\ln|x_1|-\frac{1}{2}\ln C_1,\qquad (1-2u-u^2)\,x_1^2=C_1\,.$$

Врахуємо, що $u = \dfrac{y_1}{x_1}$, тоді

$$\left(1 - 2\frac{y_1}{x_1} - \frac{y_1^2}{x_1^2}\right)x_1^2 = C_1$$

або

$$x_1^2 - 2x_1y_1 - y_1^2 = C_1 .$$

Враховуючи, що $x_1 = x - 1, \quad y_1 = y - 2$, отримаємо загальний інтеграл у вигляді:

$$x^2 - 2xy - y^2 + 2x + 6y = C .$$

б) $(x + y + 2)\,dx + (2x + 2y - 1)\,dy = 0$.

Запишемо задане рівняння у вигляді

$$y' = -\frac{x + y + 2}{2x + 2y - 1} \quad \text{або} \quad y' = \frac{x + y + 2}{-2x - 2y + 1} .$$

Воно є рівнянням вигляду:

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

і зводиться до рівняння *з відокремлюваними змінними*, бо

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 0 .$$

Покладемо $z = x + y$.

Тоді $y = z - x, \quad y' = z' - 1$.

Підставимо вирази для y і y' в задане рівняння $y' = \dfrac{x + y + 2}{-2x - 2y + 1}$.

Маємо

$$z' - 1 = \frac{z + 2}{-2z + 1} .$$

Звідки отримуємо рівняння з відокремлюваними змінними

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z + 2}{-2z + 1} + 1 ,$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-z + 3}{-2z + 1} \quad \text{або} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z - 3}{2z - 1} .$$

Відокремлюючи змінні та інтегруючи, маємо

$$\frac{2z - 1}{z - 3}dz = dx , \qquad \int \frac{2z - 1}{z - 3}dz = x + C ,$$

$$2\int \frac{z}{z - 3}dz - \int \frac{dz}{z - 3} = x + C ,$$

$$2z + 6\ln|z - 3| - \ln|z - 3| = x + C ,$$

$$2z + 5\ln|z - 3| = x + C .$$

Повертаючись до старих змінних, тобто враховуючи, що $z = x + y$, отримуємо загальний інтеграл у вигляді

$$x + 2y + 6\ln|x + y - 3| = C . \blacktriangleleft$$

Лінійні диференціальні рівняння та звідні до них

Приклад 9. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y' + \frac{2y}{x} = x^3 .$$

► Це *лінійне диференціальне рівняння першого порядку* вигляду

$$y' + P(x)\,y = f(x) ,$$

де $P(x) = \dfrac{2}{x}, \quad f(x) = x^3$.

Розв'язання цього рівняння виконаємо трьома способами.

Спосіб 1. Метод Бернуллі.

Загальний розв'язок диференціального рівняння шукаємо у вигляді

$$y = uv ,$$

де $u = u(x), \quad v = v(x)$.

Підставимо

$$y = uv, \quad y' = u'v + uv'$$

у задане диференціальне рівняння.

Маємо:

$$u'v + uv' + \frac{2uv}{x} = x^3 ,$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{2v}{x}\right) = x^3 .$$

Доберемо функцію $v(x)$ так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю, внаслідок чого останнє рівняння спроститься.

Отримаємо

$$\begin{cases} v' + \dfrac{2v}{x} = 0, \\ u'v = x^3. \end{cases}$$

Інтегруючи перше з цих рівнянь, дістанемо

$$\frac{dv}{dx} + \frac{2v}{x} = 0, \qquad \int \frac{dv}{v} = -2\int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|v| = -2\ln|x|, \qquad v = \frac{1}{x^2}.$$

Підставивши $v = \dfrac{1}{x^2}$ у друге рівняння системи, дістанемо

$$u' \frac{1}{x^2} = x^3, \qquad \frac{du}{dx} = x^5,$$

$$du = x^5 dx, \qquad u = \frac{x^6}{6} + C.$$

Тоді загальний розв'язок диференціального рівняння приймає вигляд:

$$y = uv = \left(\frac{x^6}{6} + C\right)\frac{1}{x^2} = \frac{x^4}{6} + \frac{C}{x^2}.$$

Спосіб 2. Метод Лагранжа (метод варіації довільної сталої).

Запишемо однорідне диференціальне рівняння

$$y' + \frac{2y}{x} = 0,$$

яке відповідає заданому диференціальному рівнянню

$$y' + \frac{2y}{x} = x^3,$$

та знайдемо його загальний розв'язок.

Маємо:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = 0, \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{x},$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{2\,dx}{x}, \qquad \int \frac{dy}{y} = -2\int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|y| = -2\ln|x| + \ln|C|,$$

$$y = \frac{C}{x^2}.$$

Вважаючи C функцією від x, загальний розв'язок вихідного диференціального рівняння шукаємо у вигляді:

$$y = \frac{C(x)}{x^2}.$$

Знаходимо y':

$$y' = C'(x)\,\frac{1}{x^2} + C(x)\left(-\frac{2}{x^3}\right).$$

Підставимо y і y' у вихідне рівняння:

$$\frac{C'(x)}{x^2} - \frac{2\,C(x)}{x^3} + \frac{2\,C(x)}{x^3} = x^3,$$

$$C'(x) = x^5.$$

Інтегруючи, маємо

$$C(x) = \int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C_1.$$

Отже, загальний розв'язок вихідного диференціального рівняння:

$$y = \frac{C(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^6}{6} + C_1\right) = \frac{x^4}{6} + \frac{C_1}{x^2}.$$

Спосіб 3. Метод Ейлера (метод інтегрувального множника).

Згідно з цим методом виберемо інтегрувальний множник $\mu(x)$ у вигляді

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln|x|} = x^2.$$

Помножимо обидві частини заданого рівняння на інтегрувальний множник $\mu = x^2$:

$$y' \cdot x^2 + \frac{2y}{x} \cdot x^2 = x^5,$$

$$y' x^2 + 2yx = x^5.$$

Звідки маємо зліва похідну функції yx^2:

$$(yx^2)' = x^5.$$

Інтегруючи, маємо:

$$yx^2 = \frac{x^6}{6} + C, \qquad y = \frac{x^4}{6} + \frac{C}{x^2}. \blacktriangleleft$$

Приклад 10. Розв'язати рівняння

$$(2xy + y^3)\,dy - dx = 0\,.$$

► Запишемо задане рівняння у вигляді:

$$y' = \frac{1}{2xy + y^3}\,.$$

Воно є нелінійним рівнянням відносно функції $y = y(x)$. Але якщо змінити ролі шуканої функції та аргументу, то рівняння стає *лінійним відносно функції* $x = x(y)$ *та її похідної*:

$$x' = 2xy + y^3$$

або

$$x' - 2xy = y^3\,.$$

Розв'яжемо це рівняння методом Бернуллі:

$$x = uv, \quad x' = u'v + uv'\,.$$

Тут $u = u(y),\ v = v(y)$.
Тоді

$$u'v + uv' - 2y \cdot uv = y^3\,,$$

$$u'v + u(v' - 2yv) = y^3\,.$$

Маємо

$$\begin{cases} v' - 2yv = 0, \\ u'v = y^3. \end{cases}$$

Розв'язуємо перше рівняння системи:

$$\frac{dv}{v} = 2y\,dy\,,$$

$$\ln|v| = y^2 + \ln|C|\,,$$

$$v = e^{y^2}\,.$$

Підставляємо отриманий розв'язок у друге рівняння системи:

$$\frac{du}{dy}\, e^{y^2} = y^3\,,$$

$$du = y^3 e^{-y^2} dy\,,$$

$$u = \int y^3 e^{-y^2} dy = \frac{1}{2}\int y^2 e^{-y^2}\, dy^2 = -\frac{1}{2} e^{-y^2} (1 + y^2) + C\,.$$

Останній результат отримано інтегруванням частинами.

Отже, маємо

$$x = uv = \left(-\frac{1}{2} e^{-y^2} (1 + y^2) + C\right)\cdot e^{y^2}$$

або

$$x = Ce^{y^2} - \frac{1}{2}(1 + y^2)\,. ◄$$

Приклад 11. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} + \frac{x^2}{2y}\,.$$

► Перепишемо задане рівняння у вигляді:

$$y' - \frac{y}{2x} = \frac{x^2}{2y}\,.$$

Це *рівняння Бернуллі*, яке має вигляд:

$$y' + P(x)\,y = f(x)\cdot y^{\alpha}\,,$$

де $P(x) = -\frac{1}{2}x,\quad f(x) = \frac{x^2}{2},\ \ \alpha = -1$.

Перетворимо задане рівняння до вигляду

$$2y\,y' - \frac{y^2}{x} = x^2\,.$$

Розв'язання цього рівняння виконаємо двома способами.

Спосіб 1. Застосуємо підстановку

$$z = y^{1-\alpha} = y^2, \quad z' = 2y\,y'\,.$$

Тоді отримуємо рівняння, яке є лінійним рівнянням першого порядку

$$z' - \frac{z}{x} = x^2\,.$$

Розв'яжемо його методом Бернуллі:

$$z = uv, \quad z' = u'v + uv'\,.$$

Після підстановки маємо

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = x^2\,,$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{v}{x}\right) = x^2\,,$$

$$\begin{cases} v' - \dfrac{v}{x} = 0, \\ u'v = x^2. \end{cases}$$

З першого рівняння системи маємо:

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}, \quad \ln|v| = \ln|x|, \quad v = x.$$

З другого рівняння системи:

$$\frac{du}{dx} \cdot x = x^2, \quad du = x\,dx, \quad u = \frac{x^2}{2} + C.$$

Тоді

$$z = uv = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)x = \frac{x^3}{2} + Cx.$$

Врахуємо, що $z = y^2$.

Тоді загальний інтеграл диференціального рівняння:

$$y^2 = \frac{x^3}{2} + Cx.$$

Спосіб 2. Застосовуємо безпосередньо до заданого диференціального рівняння, записаного у вигляді

$$2y\,y' - \frac{y^2}{x} = x^2,$$

підстановку: $y = uv$.

Враховуючи, що $y' = u'v + uv'$, отримуємо

$$2uv\,(u'v + uv') - \frac{(uv)^2}{x} = x^2,$$

$$2uu'v^2 + 2u^2vv' - \frac{u^2v^2}{x} = x^2,$$

$$2uu'v^2 + u^2v\left(2v' - \frac{v}{x}\right) = x^2.$$

Звідси

$$\begin{cases} 2v' - \dfrac{v}{x} = 0, \\ 2uu'v^2 = x^2. \end{cases}$$

Перше рівняння системи дає розв'язок:

$$\frac{2\,dv}{dx} = \frac{v}{x}, \quad \frac{dv}{v} = \frac{dx}{2x}, \quad v = \sqrt{x}.$$

Друге рівняння системи прийме вигляд:

$$2u\,\frac{du}{dx}\,x = x^2, \quad 2u\,du = x\,dx,$$

$$u^2 = \frac{x^2}{2} + C, \quad u = \sqrt{\frac{x^2}{2} + C}.$$

Отже,

$$y = uv = \sqrt{\frac{x^2}{2} + C} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{\frac{x^3}{2} + Cx}$$

або

$$y^2 = \frac{x^3}{2} + Cx. \blacktriangleleft$$

Приклад 12. Розв'язати задане рівняння Ріккаті, враховуючи відомий частинний розв'язок $y_1(x)$ заданого рівняння:

а) $y' = y^2 - \dfrac{2}{x^2}$, $y_1(x) = \dfrac{1}{x}$;

б) $y' + 2y(y - x) = 1$, $y_1(x) = x$.

► а) задане рівняння $y' = y^2 - \dfrac{2}{x^2}$ є *рівнянням Ріккаті*

$$y' + P(x)\,y + Q(x)y^2 = f(x),$$

де $P(x) = 0$, $Q(x) = 1$, $f(x) = -\dfrac{2}{x^2}$.

Оскільки $y_1(x) = \dfrac{1}{x}$ є частинним розв'язком цього рівняння (перевірте!), то заміна

$$y = y_1 + z = \frac{1}{x} + z$$

зводить його до рівняння Бернуллі.

Підставимо $y = \dfrac{1}{x} + z$, $y' = -\dfrac{1}{x^2} + z'$ у задане рівняння:

$$-\frac{1}{x^2} + z' = \left(\frac{1}{x} + z\right)^2 - \frac{2}{x^2},$$

$$-\frac{1}{x^2} + z' = \frac{1}{x^2} + 2\frac{z}{x} + z^2 - \frac{2}{x^2},$$

$$z' - 2\frac{z}{x} = z^2 .$$

Розв'язуємо це рівняння за допомогою підстановки Бернуллі

$$z = uv, \quad z' = u'v + uv' :$$

$$u'v + uv' - 2\frac{uv}{x} = u^2v^2 ,$$

$$u'v + u\left(v' - 2\frac{v}{x}\right) = u^2v^2 ,$$

$$\begin{cases} v' - 2\dfrac{v}{x} = 0, \\ u'v = u^2v^2 ; \end{cases} \qquad \begin{cases} v' = 2\dfrac{v}{x}, \\ u' = u^2v. \end{cases}$$

З першого рівняння системи:

$$\frac{dv}{v} = 2\frac{dx}{x}; \quad \ln|v| = 2\ln|x|; \quad v = x^2 .$$

З другого рівняння системи:

$$\frac{du}{dx} = u^2v; \quad \frac{du}{dx} = u^2x^2; \quad \frac{du}{u^2} = x^2dx;$$

$$-u^{-1} + C_1 = \frac{x^3}{3}; \quad u = -\frac{1}{\frac{x^3}{3} - C_1} = \frac{3}{3C_1 - x^3} = \frac{3}{C - x^3}$$

(тут перепозначили $3C_1 = C$).

Отже,

$$z = uv = \left(\frac{3}{C - x^3}\right)x^2 = \frac{3x^2}{C - x^3} .$$

Тоді

$$y = y_1 + z = \frac{1}{x} + \frac{3x^2}{C - x^3}$$

є загальним розв'язком заданого рівняння Ріккаті.

б) задане рівняння $y' + 2y(y - x) = 1$ є *рівнянням Ріккаті*

$$y' + P(x)y + Q(x)y^2 = f(x) ,$$

де $P(x) = -2x, \; Q(x) = 2, \; f(x) = 1$.

Оскільки $y_1(x) = x$ є частинним розв'язком цього рівняння (перевірте!), то заміна

$$y = y_1 + z = x + z$$

зводить його до рівняння Бернуллі:

$$1 + z' + 2(x + z)(x + z - x) = 1 ,$$

$$z' + 2zx = -2z^2 .$$

Розв'язуємо це рівняння за допомогою підстановки Бернуллі

$$z = uv, \quad z' = u'v + uv' :$$

$$u'v + uv' + 2uvx = -2u^2v^2 ,$$

$$u'v + u(v' + 2vx) = -2u^2v^2 ,$$

$$\begin{cases} v' + 2vx = 0, \\ u'v = -2u^2v^2, \end{cases} \qquad \begin{cases} v' = -2vx, \\ u' = -2u^2v. \end{cases}$$

З першого рівняння системи:

$$\frac{dv}{dx} = -2vx, \quad \frac{dv}{v} = -2x\,dx, \quad \ln|v| = -x^2, \quad v = e^{-x^2} .$$

З другого рівняння системи:

$$\frac{du}{dx} = -2u^2e^{-x^2}, \quad -\frac{du}{u^2} = 2e^{-x^2}dx, \quad u = \left(2\int e^{-x^2}dx + C\right)^{-1} .$$

Отже,

$$z = uv = e^{-x^2}\left(2\int e^{-x^2}dx + C\right)^{-1} .$$

Тоді загальним розв'язком заданого рівняння є:

$$y = x + z = x + e^{-x^2}\left(2\int e^{-x^2}dx + C\right)^{-1} .$$

Зауважимо, що загальний розв'язок рівняння представлено у квадратурах, бо $\int e^{-x^2}dx$ не виражається в елементарних функціях. ◄

Диференціальні рівняння у повних диференціалах та звідні до них

Приклад 13. Розв'язати рівняння

$$(x + y + 1)\,dx + (x - y^2 + 3)\,dy = 0 .$$

► Задане рівняння є *рівнянням у повних диференціалах* вигляду

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0 ,$$

де $P(x, y) = x + y + 1, \quad Q(x, y) = x - y^2 + 3$;

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 , \text{ отже, } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} .$$

Тому ліва частина заданого рівняння є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$:

$$(x+y+1)\,dx+(x-y^2+3)\,dy=du(x,\ y).$$

Тоді рівняння зводиться до вигляду

$$du(x,y)=0,$$

де $u(x,y)$ – деяка функція, яку треба визначити.

Загальним розв'язком цього рівняння є

$$u(x,y)=C.$$

Для відшукання функції $u(x,y)$ використовується два способи.

Спосіб 1. Оскільки

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy,$$

з заданого рівняння маємо:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=x+y+1,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=x-y^2+3.$$

Інтегруємо перше з цих рівнянь по x:

$$u(x,y)=\int(x+y+1)\,dx=\frac{x^2}{2}+yx+x+\varphi(y).$$

Далі диференціюємо отриману функцію по y і прирівнюємо заданому виразу для $\frac{\partial u}{\partial y}$:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x+\varphi'(y)=x-y^2+3.$$

Звідси

$$\varphi'(y)=-y^2+3,$$

$$\varphi(y)=-\frac{y^3}{3}+3y+C.$$

Отже,

$$u(x,y)=\frac{x^2}{2}+yx+x-\frac{y^3}{3}+3y+C.$$

Загальний інтеграл заданого диференціального рівняння

$$\frac{x^2}{2}+yx+x-\frac{y^3}{3}+3y=C.$$

Спосіб 2. Для визначення $u(x,y)$ застосуємо криволінійний інтеграл другого роду

$$u(x,y)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}(x+y+1)\,dx+(x-y^2+3)\,dy.$$

За початкову точку (x_0,y_0) виберемо, наприклад, початок координат. Шляхом інтегрування – ламану, зображену на рис.1.4.

Тоді, переходячи до визначеного інтеграла, маємо:

$$u(x,y)=\int\limits_0^x(x+1)\,dx+\int\limits_0^y(x-y^2+3)\,dy=\frac{x^2}{2}+x+xy-\frac{y^3}{3}+3y+C.$$

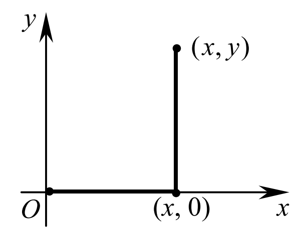


Рис.1.4

Загальний інтеграл має вигляд

$$\frac{x^2}{2}+yx+x-\frac{y^3}{3}+3y=C. \blacktriangleleft$$

Приклад 14. Розв'язати рівняння

$$(x^2y^2-1)\,dx+2x^3y\,dy=0.$$

► Перевіримо, чи є дане рівняння *рівнянням у повних диференціалах*:

$$P(x,y)=x^2y^2-1,\quad \frac{\partial P}{\partial y}=2x^2y,$$

$$Q(x,y)=2x^3y,\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=6x^2y.$$

Оскільки

$$\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x},$$

то задане рівняння не є рівнянням у повних диференціалах.

Проте права частина формули (1.47) має вигляд

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\frac{-4x^2y}{2x^3y}=-\frac{2}{x},$$

тобто залежить від x, тому рівняння має інтегрувальний множник μ, який залежить лише від x: $\mu=\mu(x)$.

Складаємо рівняння (1.46) і розв'язуємо його:

$$\frac{d\ln\mu}{dx}=-\frac{2}{x}; \qquad \ln\mu=-2\ln|x|+\ln|C|;$$

$$\mu=\frac{C}{x^2}, \quad C\neq 0.$$

Нехай $C=1$, тоді $\mu=\dfrac{1}{x^2}$.

Помножимо обидві частини заданого рівняння на $\mu=\dfrac{1}{x^2}$. Дістанемо рівняння у повних диференціалах:

$$\left(y^2-\frac{1}{x^2}\right)dx+2xy\,dy=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(2xy)=2y.$$

Розв'яжемо це рівняння, застосувавши криволінійний інтеграл з початковою точкою $(1,\,0)$ (рис.1.5).

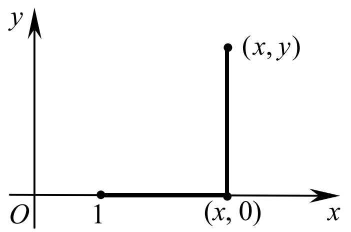


Рис.1.5

Маємо:

$$u(x,y)=\int\limits_{(1,\,0)}^{(x,y)}\left(y^2-\frac{1}{x^2}\right)dx+2xy\,dy.$$

Переходячи до визначеного інтеграла, отримаємо

$$u(x,y)=-\int\limits_1^x\frac{1}{x^2}\,dx+2\int\limits_0^y xy\,dy=\frac{1}{x}-1+xy^2+C_1.$$

Загальний розв'язок має вигляд

$$xy^2+\frac{1}{x}=C.\ ◀$$

Диференціальні рівняння, нерозв'язні відносно похідної

Приклад 15. Розв'язати рівняння, нерозв'язні відносно похідної

а) $y=y'^2+xy'-x$; б) $x=y'^2+\dfrac{y}{y'}$.

▶ а) задане рівняння

$$y=y'^2+xy'-x$$

є рівнянням вигляду

$$y=f(x,y'),$$

де $f(x,y')=y'^2+xy'-x$.

Введемо параметр $p=y'$. Тоді, підставляючи в задане рівняння, маємо

$$y=p^2+x(p-1).$$

Диференціюємо цю рівність по x:

$$p=2p\frac{dp}{dx}+p-1+x\frac{dp}{dx},$$

$$\frac{dp}{dx}(2p+x)=1, \qquad \frac{dp}{dx}=\frac{1}{2p+x},$$

$$\frac{dx}{dp}=x+2p, \qquad \frac{dx}{dp}-x=2p.$$

Це рівняння *лінійне відносно* x *та* x'.

Розв'язавши це рівняння, маємо його загальний розв'язок (перевірте!):

$$x=Ce^p-2(p+1).$$

Враховуючи, що $y=p^2+x(p-1)$, маємо

$$y=p^2+(Ce^p-2(p+1))(p-1)=Ce^p(p-1)-p^2+2.$$

Отже, загальний розв'язок вихідного рівняння записується в параметричній формі:

$$x=Ce^p-2(p+1), \quad y=Ce^p(p-1)-p^2+2.$$

б) задане рівняння

$$x=y'^2+\frac{y}{y'}$$

є рівнянням вигляду

$$x = f(y, y'),$$

де $f(y, y') = y'^2 + \frac{y}{y'}$.

Введемо параметр $p = y'$. Тоді, підставляючи в задане рівняння, маємо

$$x = p^2 + \frac{y}{p}.$$

Диференціюємо цю рівність по y та врахуємо, що $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$:

$$\frac{1}{p} = 2p\frac{dp}{dy} + \frac{p - y\frac{dp}{dy}}{p^2}$$

або

$$\frac{1}{p} = 2p\frac{dp}{dy} + \frac{1}{p} - \frac{y}{p^2}\frac{dp}{dy}.$$

Звідки

$$\frac{dp}{dy}\left(2p - \frac{y}{p^2}\right) = 0.$$

Маємо

$$\frac{dp}{dy} = 0; \quad 2p - \frac{y}{p^2} = 0$$

$$p_1 = C; \quad p_2 = \sqrt[3]{\frac{y}{2}}.$$

Враховуючи, що $x = p^2 + \frac{y}{p}$, маємо $y = xp - p^3$. Підставимо замість p їх значення. Тоді отримаємо:

при $p_1 = C$ загальний розв'язок $y = xC - C^3$;

при $p_2 = \sqrt[3]{\frac{y}{2}}$ маємо:

$$y = x\sqrt[3]{\frac{y}{2}} - \frac{y}{2}, \qquad 3\frac{y}{2} = x\sqrt[3]{\frac{y}{2}}, 3^3\frac{y^3}{2^3} = x^3\frac{y}{2},$$

$$y^2 = \frac{2^2}{3^3}x^3, \quad y = \frac{2}{3\sqrt{3}}x^{\frac{3}{2}}.$$

Розв'язок $y = \frac{2}{3\sqrt{3}}x^{\frac{3}{2}}$ є особливим.

Отже, розв'язками вихідного рівняння є

$$y = xC - C^3, \quad y = \frac{2}{3\sqrt{3}}x^{\frac{3}{2}}. ◄$$

Приклад 16. Розв'язати рівняння

$$y = 2xy' - y'^3.$$

► Задане рівняння є *рівнянням Лагранжа*:

$$y = x\varphi(y') + \psi(y').$$

Введемо параметр $p = y'$, тоді

$$y = 2xp - p^3.$$

Диференціюючи, отримуємо

$$p = 2p + 2x\frac{dp}{dx} - 3p^2\frac{dp}{dx}$$

або

$$\frac{dp}{dx}(-2x + 3p^2) = p$$

і після ділення на $\frac{dp}{dx}$ дістанемо рівняння

$$p\frac{dx}{dp} = -2x + 3p^2.$$

Інтегруючи це лінійне рівняння (див. приклад 9), маємо:

$$x = \frac{C}{p^2} + \frac{3}{4}p^2$$

(перевірте!).

Отже, інтегральні криві визначаються рівняннями

$$y = 2xp - p^3, \quad x = \frac{C}{p^2} + \frac{3}{4}p^2.$$

При діленні на $\frac{dp}{dx}$ губимо розв'язок $p = 0$ рівняння

$$\frac{dp}{dx}(-2x+3p^2)=p,$$

якому згідно з рівнянням

$$y=2xp-p^3$$

відповідає розв'язок $y=0$ вихідного рівняння. ◄

Приклад 17. Знайти розв'язок рівняння

$$y=xy'-y'^2.$$

► Задане рівняння є *рівнянням Клеро*:

$$y=xy'+\psi(y').$$

Скористаємось вказаним у теорії практичним правилом. Загальний розв'язок цього рівняння, згідно з формулою (1.61)

$$y=Cx+\psi(C),$$

має вигляд

$$y=Cx-C^2.$$

Особливий розв'язок заданого рівняння дістанемо, виключаючи далі параметр C з системи рівнянь:

$$\begin{cases} y=xC-C^2, \\ 0=x-2C \end{cases}$$

(друге рівняння системи отримано диференціюванням обох частин першого рівняння системи по x).

Звідки отримаємо $y=\dfrac{x^2}{4}$ – особливий розв'язок.

Це рівняння обвідної сім'ї прямих $y=Cx-C^2$ (рис.1.6).

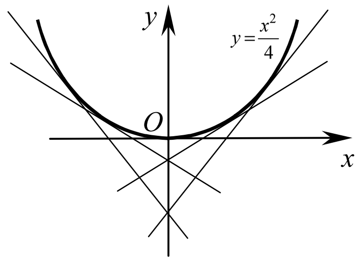


Рис.1.6 ◄

Задачі геометрії

Приклад 18. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $(1,1)$, якщо для кожного відрізка $[1,x]$ площа криволінійної трапеції, яка обмежена відповідною дугою цієї кривої, вдвічі більше добутку координат точки $M(x,y)$ кривої $(x>0,\ y>0)$.

► Згідно з умовою задачі маємо

$$\int_1^x y(t)\,dt=2x\,y(x).$$

Диференціюючи цю рівність по x, отримуємо диференціальне рівняння

$$y=2(y+xy')$$

або

$$y'=-\frac{y}{2x}.$$

Проінтегруємо це рівняння та врахуємо початкову умову $y(1)=1$:

$$\int\frac{dy}{y}=-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x},$$

$$\ln|y|=-\frac{1}{2}\ln|x|+\ln C,$$

$$y=\frac{C}{\sqrt{x}},\qquad y(1)=C=1.$$

Отже, маємо рівняння шуканої кривої:

$$y=\frac{1}{\sqrt{x}}.$$ ◄

Приклад 19. Знайти всі лінії, у яких піддотична пропорційна абсцисі точки дотику (коефіцієнт пропорційності дорівнює k).

► Нехай $y=f(x)$ – рівняння однієї з шуканих кривих. За умовою задачі запишемо, що піддотична s_t та абсциса x пов'язані так:

$$s_t=kx.$$

Використаємо формулу для довжини дотичної

$$s_t=\left|\frac{y}{y'}\right|$$

і отримуємо відразу диференціальне рівняння

$$kx = \left|\frac{y}{y'}\right| \quad \text{або} \quad y' = \frac{y}{kx}.$$

Інтегруючи, маємо сім'ю шуканих кривих:

$$y^k = Cx. \blacktriangleleft$$

Приклад 20. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $(1,0)$, якщо відомо, що трикутник, утворений віссю Oy, дотичною до кривої в довільній її точці і радіусом-вектором точки дотику, рівнобедрений, причому основою його є відрізок дотичної від точки дотику до осі Oy.

► Нехай $y = f(x)$ – шукана крива. Проведемо дотичну MA в довільній точці $M(x,y)$ кривої до перетину з віссю Oy (рис.1.7).

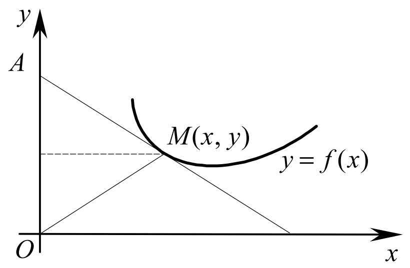


Рис.1.7

За умовою $OM = OA,\ OM = \sqrt{x^2+y^2}$, отже, $A\left(0, \sqrt{x^2+y^2}\right)$.

Записуємо рівняння дотичної до кривої в точці $M(x,y)$:

$$Y - y = y'(X - x),$$

і врахуємо, що точка $A\left(0, \sqrt{x^2+y^2}\right)$ належить дотичній, тобто в рівнянні дотичної покладемо $X = 0,\ Y = \sqrt{x^2+y^2}$.

Дістанемо рівняння

$$\sqrt{x^2+y^2} - y = -y'x$$

або

$$y' = \frac{y - \sqrt{x^2+y^2}}{x}.$$

Це *рівняння, однорідне відносно змінних*. Поклавши $y = ux$, $y' = u'x + u$, дістанемо загальний інтеграл:

$$u'x + u = u - \sqrt{1+u^2}, \qquad \frac{du}{dx}x = -\sqrt{1+u^2},$$

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = -\frac{dx}{x}, \qquad \ln\left|u + \sqrt{1+u^2}\right| = -\ln|x| + \ln|C|,$$

$$u + \sqrt{1+u^2} = \frac{C}{x}, \qquad y + \sqrt{x^2+y^2} = C.$$

Використавши початкову умову $y(1) = 0$, знайдемо $C = 1$.

Отже, рівняння шуканої кривої має вигляд

$$y + \sqrt{x^2+y^2} = 1. \blacktriangleleft$$

Приклад 21. Знайти ортогональні траєкторії сім'ї кубічних парабол $y = ax^3$.

► Знайдемо диференціальне рівняння даної сім'ї, виключаючи параметр a із системи рівнянь

$$\begin{cases} y = ax^3, \\ y' = 3ax^2. \end{cases}$$

Отримуємо

$$y' = \frac{3y}{x}.$$

Використовуючи означення сім'ї ортогональних траєкторій, запишемо їх диференціальне рівняння:

$$y' = -\frac{x}{3y}.$$

Загальний інтеграл цього рівняння

$$x^2 + 3y^2 = C^2$$

є рівнянням сім'ї ортогональних траєкторій (еліпсів).◄

Задачі фізики

Приклад 22. Нехай $u = xy$ – потенціал швидкостей плоскопаралельної течії рідини. Знайти рівняння лінії течії рідини.

► Відомо, що лінії течії є ортогональними траєкторіями сім'ї еквіпотенціальних ліній (тобто ліній рівного потенціалу) $xy = C$. Знаходимо кутовий коефіцієнт дотичної до еквіпотенціальних ліній:

$$xy' + y = 0, \quad y' = -\frac{y}{x}.$$

Отже, диференціальне рівняння ліній течії рідини має вигляд:

$$y' = \frac{x}{y} \quad \text{або} \quad y\,dy = x\,dx.$$

Інтегруючи, отримуємо

$$x^2 - y^2 = C.$$

Це є рівняння сім'ї гіпербол. ◄

Приклад 23. Циліндричний резервуар, у дні якого є отвір, заповнено рідиною. Знайти час t_0, за який рідина витече з резервуару, якщо висота стовпа рідини дорівнює H , радіус циліндра r , площа отвору S .

► Скористаємось законом Торичеллі, згідно з яким для малих отворів швидкість витікання рідини знаходять за формулою $v = \sqrt{2gh}$, де h – висота стовпа рідини над отвором, g – прискорення сили тяжіння.

Нехай у момент часу t висота рідини дорівнювала h і за час dt зменшилась на dh . Вважаючи, що протягом часу dt швидкість витікання була сталою і дорівнювала $\sqrt{2gh}$, знайдемо об'єм dV рідини, яка витекла за час dt (рис.1.8):

$$dV = Sv\,dt = S\sqrt{2gh}\,dt.$$

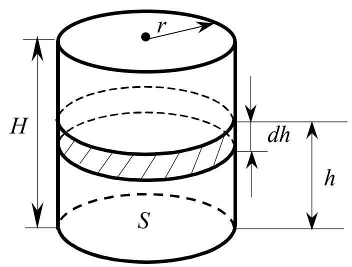


Рис.1.8

З іншого боку, рівень рідини понизився на dh , тому

$$dV = -\pi r^2\,dh.$$

Прирівнюючи елементарні об'єми, дістанемо диференціальне рівняння

$$S\sqrt{2gh}\,dt = -\pi r^2 dh,$$

звідки

$$dt = -\frac{\pi r^2}{S\sqrt{2g}}\frac{dh}{\sqrt{h}}.$$

Інтегруючи, маємо

$$t = -\frac{2\pi r^2}{S\sqrt{2g}}\sqrt{h} + C.$$

З умови $h(0) = H$ знаходимо сталу $C = \frac{2\pi r^2}{S\sqrt{2g}}\sqrt{H}$, тому

$$t = \frac{2\pi r^2}{S\sqrt{2g}}(\sqrt{H} - \sqrt{h}).$$

Поклавши $h = 0$, знайдемо час, за який витече вся рідина:

$$t = \frac{2\pi r^2}{S\sqrt{2g}}\sqrt{H} = \frac{\pi r^2}{S}\sqrt{\frac{2H}{g}}. ◄$$

Приклад 24. Відомо, що нагріте до температури T_0 тіло помістили в середовище, температура якого стала і дорівнює T_1 $(T_0 > T_1)$. Знайти залежність температури тіла від часу.

► Згідно із законом Ньютона, швидкість охолодження тіла пропорційна різниці між температурою тіла і температурою навколишнього середовища.

Нехай в момент часу t температура T тіла дорівнює $T(t)$. За умовою

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_1), \quad k > 0; \quad T(0) = T_0$$

(знак мінус вказує на зменшення температури).

Відокремлюючи змінні та інтегруючи, маємо

$$T = T_1 + Ce^{-kt},$$

$$T = T_1 + (T_0 - T_1)e^{-kt}. ◄$$

Приклад 25. Експериментально встановлено, що швидкість радіоактивного розпаду речовини пропорційна її кількості в даний момент часу. Вказати закон зміни маси речовини від часу, якщо при $t = 0$ маса речовини дорівнювала m_0 .

► Нехай $m = m(t)$ – маса речовини в момент часу t. За умовою

$$\frac{dm}{dt} = -k\,m, \;\; k > 0; \;\; m(0) = m_0 \;\; ,$$

де k – коефіцієнт пропорційності. Знак мінус береться тому, що маса речовини зменшується. Розв'язуючи отримане рівняння, дістаємо

$$m = m_0\, e^{-kt} \,. \blacktriangleleft$$

Приклад 26. Знайти залежність сили струму I від часу t в контурі, який має електрорушійну силу E, опір R та індуктивність L, де $E,\ R,\ L$ – сталі.

► Згідно з законом Ома, маємо

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E\,.$$

Розв'язуючи це *лінійне рівняння* заміною $I = uv$, дістанемо загальний розв'язок

$$I(t) = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R}\,,$$

де C – довільна стала, яку знайдемо при $t = 0$:

$$I(0) = 0, \;\; C = -\frac{E}{R}\,.$$

Отже,

$$I(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right). \blacktriangleleft$$

IV. Задачі для практичних занять

Основні поняття

1.1. Перевірити, чи є функція $y = y(x)$ розв'язком заданого диференціального рівняння:

а) $y = 5x^2, \quad xy' = 2y$;

б) $y = 3 + 4\operatorname{tg} x, \;\; y' = y\operatorname{ctg} x + 2\operatorname{ctg} x$;

в) $y = e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}, \quad y'\sin x = y\ln y$;

г) $y = e^{-x^2}, \quad y' = xe^{x^2}(1 + y^2)$.

1.2. Перевірити, чи є функція $y = y(x, C)$, де C – довільна стала, розв'язком заданого диференціального рівняння:

а) $y = (C\,e^{2x} + e^x)^{-1}, \quad y' + 2y = y^2 e^x$;

б) $y = x(C - \ln|x|), \quad (x - y)\,dx + x\,dy = 0$;

в) $y = x\left(\int_0^1 \frac{1}{x} e^x dx + C\right), \; xy' - y = xe^x$;

г) $y = C\,x + \frac{1}{C}, \quad xy' - y + \frac{1}{y} = 0$.

1.3. Показати, що функція $y = y(x, C)$, задана неявно, є інтегралом диференціального рівняння (C – довільна стала):

а) $x^2 + y^4 = Cy^2, \;\; xy\,dx = (x^2 - y^4)\,dy$;

б) $e^{x/y} = Cy, \;\; xyy' - y^2 = x^2 y'$;

в) $x^3 + \sin^2 x + y^2 - C = 0, \;\; 2yy' + 3x^2 + \sin 2x = 0$;

г) $2x + y - 1 = Ce^{2y-x}, (2x + y + 1)\,dx - (4x + 2y - 3)\,dy = 0$.

1.4. У заданій сім'ї кривих виділити рівняння кривої, яка задовольняє наведену початкову умову:

а) $y(1 - Cx) = 1, \quad y(1) = 0{,}5$;

б) $y = 2 + C\cos x, \;\; y(0) = -1$.

1.5. Скласти диференціальне рівняння сім'ї кривих:

а) парабол $y = x^2 + 2ax$;

б) гіпербол $y = \frac{a}{x}$;

в) ланцюгових ліній $y = a\operatorname{ch} x$;

г) гіпербол $x^2 - y^2 = 2ax$.

1.6. Скласти диференціальне рівняння прямих, що проходять через задану точку $M(a, b)$.

1.7. Скласти диференціальне рівняння парабол, вершини яких проходять через точку $M(-1,3)$ і мають за вісь симетрії пряму $x=-1$.

1.8. Методом ізоклін побудувати наближено сім'ю інтегральних кривих заданих диференціальних рівнянь:

а) $y'=x+y$; б) $y'=1+y$;

в) $y'=-\dfrac{y}{x}$; г) $y'=y-x^2$.

Диференціальні рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними та звідні до них

У задачах 1.9 – 1.19 розв'язати задані диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.

1.9. $(xy^2+x)\,dx+(y-x^2y)\,dy=0$.

1.10. $xyy'=1-x^2$. **1.11.** $yy'=\dfrac{1-2x}{y}$.

1.12. $y'\operatorname{tg}x-y=a$. **1.13.** $xy'+y=y^2$.

1.14. $y'+\sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}}=0$.

1.15. $\sqrt{1-y^2}\,dx+y\sqrt{1-x^2}\,dy=0$.

1.16. $y'=10^{x+y}$.

1.17. $y\,e^{2x}dx-(1+e^{2x})\,dy=0$.

1.18. $(1+y)(e^x dx-e^{2y}dy)-(1+y^2)\,dy=0$.

1.19. $dy-2\sqrt{y}\ln x\,dx=0$.

У задачах 1.20 – 1.23 заміною шуканої функції звести дані диференціальні рівняння до рівнянь з відокремлюваними змінними та розв'язати їх.

1.20. $y'=\cos(x+y)$. **1.21.** $y'=\sin(y-x-1)$.

1.22. $y'=(4x+y+1)^2$. **1.23.** $y'=3x-2y+5$.

У задачах 1.24 – 1.29 знайти частинні розв'язки диференціальних рівнянь, які задовольняють задані початкові умови.

1.24. $y'\sin x=y\ln y$; $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=e$.

1.25. $y'=\dfrac{1+y^2}{1+x^2}$; $y(0)=1$.

1.26. $\sin y\cos x\,dy=\cos y\sin x\,dx$; $y(0)=\dfrac{\pi}{4}$.

1.27. $y-xy'=b(1+x^2y')$; $y(1)=1$.

1.28. $(xy^2+x)\,dy+(x^2y-y)\,dx=0$; $y(1)=1$.

1.29. $y'\operatorname{tg}x=y$; $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$.

Розв'язати задані геометричні та фізичні задачі, що зводяться до диференціальних рівнянь з відокремлюваними змінними.

1.30. Знайти лінію, яка проходить через точку $K(2;3)$, і таку, що відрізок будь-якої її дотичної, який міститься між осями координат, ділиться точкою дотику навпіл.

1.31. Знайти всі лінії, для яких відрізок дотичної між точкою дотику і віссю абсцис ділиться пополам у точці перетину з віссю ординат.

1.32. Знайти лінію, яка проходить через точку $K(2;0)$ і таку, що відрізок дотичної між точкою дотику і віссю ординат має сталу довжину $l=2$.

1.33. Знайти криві, для яких відрізок, що його відтинає дотична на осі Ox, пропорційний квадрату абсциси точки дотику (k – коефіцієнт пропорційності).

1.34. Знайти рівняння кривих, у яких довжина відрізка нормалі (відрізок її від точки кривої до осі абсцис) стала величина, яка дорівнює a.

1.35. Знайти лінію, що проходить через точку $K(a,1)$ і має сталу піддотичну, довжина якої дорівнює a.

1.36. Знайти лінію $y = f(x)$ $(f(x) \geq 0,\ f(0) = 0)$, яка обмежує криволінійну трапецію з основою $[0, x]$, площа якої пропорційна $(n+1)$-ому степеню $f(x)$. Відомо, що $f(1) = 1$.

1.37. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, якщо для кожного відрізка $[1, x]$ площа криволінійної трапеції, яка обмежена відповідною дугою цієї кривої, дорівнює відношенню абсциси x кінцевої точки до ординати.

1.38. Матеріальна точка маси $m = 1$ г рухається прямолінійно під дією сили F, прямо пропорційної часу t, що відраховується від моменту $t = 0$, і обернено пропорційної швидкості v руху точки. В момент t=10 с швидкість v=0,5 м/с, а сила $F = 4 \cdot 10^{-5}$ Н. Яка буде швидкість через хвилину після початку руху?

1.39. Моторний човен рухається в стоячій воді із швидкістю $v_0 = 20$ км/год. Через 40 с після того, як двигун виключають, швидкість човна зменшується до $v_1 = 8$ км/год. Опір води пропорційний швидкості руху човна. Визначити швидкість човна v через 2 хвилини після зупинки двигуна.

1.40. У дні циліндричної посудини з поперечним перерізом S см^2 і вертикальною віссю є малий круглий отвір площею q см^2, який закритий діафрагмою. У посудину налита рідина до висоти h. В момент $t = 0$ діафрагма починає відкриватися, причому площа отвору пропорційна часу і повністю отвір відкривається за T с. Якою буде висота H рідини в посудині через T с з початку експерименту?

Диференціальні рівняння, однорідні відносно змінних, та звідні до них

У задачах 1.41 – 1.52 розв'язати задані диференціальні рівняння, однорідні відносно змінних.

1.41. $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - 2$.

1.42. $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$.

1.43. $xdy - ydx = ydy$.

1.44. $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$.

1.45. $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$.

1.46. $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$.

1.47. $xy' = y \ln \dfrac{y}{x}$.

1.48. $(3y^2 + 3xy + x^2)\,dx = (x^2 + 2xy)\,dy$.

1.49. $y' = \dfrac{y}{x} + \sin \dfrac{y}{x}$.

1.50. $xdy - y \cos \ln \dfrac{y}{x} dx = 0$.

1.51. $xy' = y + x \operatorname{tg} \dfrac{y}{x}$.

1.52. $y' = \dfrac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$.

У задачах 1.53 – 1.56 заміною шуканої функції звести задані диференціальні рівняння до рівнянь, однорідних відносно змінних або до рівнянь з відокремлюваними змінними та розв'язати їх.

1.53. $y' = \dfrac{-x + 2y - 5}{2x - y + 4}$.

1.54. $y' = \dfrac{2x - y + 1}{x - 2y + 1}$.

1.55. $(x + y + 1)\,dx = (2x + 2y - 1)\,dy$.

1.56. $y' = \dfrac{2(y+2)^2}{(x + y - 1)^2}$.

У задачах 1.57 – 1.62 знайти частинні розв'язки однорідних відносно змінних диференціальних рівнянь, які задовольняють задані початкові умови.

1.57. $(xy' - y) \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} = x$; $y(1) = 0$.

1.58. $(y^2 - 3x^2)\,dy + 2xy\,dx = 0$; $y(0) = 1$.

1.59. $y' = \dfrac{y^2 - 2xy - x^2}{y^2 + 2xy - x^2}$; $y(1) = -1$.

1.60. $y\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\dfrac{dy}{dx} - y = 0$; $y(0) = \sqrt{5}$.

1.61. $(\sqrt{xy} - x)\,dy + y\,dx = 0$; $y(1) = 1$.

1.62. $(y + \sqrt{x^2 + y^2})\,dx - x\,dy = 0$; $y(1) = 0$.

Розв'язати задані геометричні задачі, що зводяться до диференціальних рівнянь, однорідних відносно змінних.

1.63. Знайти лінію, у якої квадрат довжини відрізка, що відтинається будь-якою дотичною від осі ординат, дорівнює добутку координат точки дотику.

1.64. Знайти лінію, у якої початкова ордината (ордината при $x = 0$) будь-якої дотичної дорівнює відповідній піднормалі.

1.65. Знайти лінію, у якої довжина полярного радіуса будь-якої її точки M дорівнює відстані між точкою перетину з віссю Oy дотичної, проведеної в точці M, і початком координат.

1.66. Знайти криву, якщо в кожній її точці довжина відрізка дотичної від точки дотику до осі Ox дорівнює довжині відрізка, який відтинає дотична на осі Ox.

1.67. Знайти криву, дотична до якої в довільній точці відтинає на осі ординат відрізок, рівний абсцисі точки дотику.

1.68. Знайти криву, для якої добуток абсциси будь-якої точки, що належить кривій, на відрізок, що відтинається нормаллю на осі Ox, дорівнює подвоєному квадрату відстані цієї точки від початку координат.

Лінійні диференціальні рівняння та звідні до них

У задачах 1.69 – 1.81 розв'язати задані лінійні диференціальні рівняння першого порядку.

1.69. $y' + 2y = 4x$. **1.70.** $y' + 2y = e^{3x}$.

1.71. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$. **1.72.** $y' + \dfrac{1-2x}{x^2}y = 1$.

1.73. $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$.

1.74. $y' + y = \cos x$.

1.75. $2y\,dx + (y^2 - 6x)\,dy = 0$.

1.76. $y' = \dfrac{1}{2x - y^2}$. **1.77.** $y' = \dfrac{y}{2y\ln y + y - x}$.

1.78. $y' = \dfrac{3y}{x} + x$. **1.79.** $y' = \dfrac{2y}{x+1} + e^x(x+1)^2$.

1.80. $xy' = y + x^2\cos x$. **1.81.** $(x + 2y^3)y' = y$.

У задачах 1.82 – 1.87 знайти частинні розв'язки лінійних диференціальних рівнянь першого порядку, які задовольняють задані початкові умови.

1.82. $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \dfrac{1}{\cos x}$; $y(0) = 0$.

1.83. $xy' + y - e^x = 0$; $y(a) = b$.

1.84. $xy' - \dfrac{y}{x+1} = x$; $y(1) = 0$.

1.85. $t(1 + t^2)\,dx = (x + xt^2 - t^2)\,dt$; $x(1) = -\dfrac{\pi}{4}$.

1.86. $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \dfrac{1}{\cos x}$; $y(0) = 0$.

1.87. $y' = 2y + e^x - x$; $y(0) = \dfrac{1}{4}$.

У задачах 1.88 – 1.93 розв'язати задані диференціальні рівняння Бернуллі.

1.88. $y' + 2xy = 2x^3y^3$. **1.89.** $y' + \dfrac{y}{x+1} + y^2 = 0$.

1.90. $x\,dx = \left(\dfrac{x^2}{y} - y^3\right)dy$. **1.91.** $xy' + y = y^2\ln x$.

1.92. $y' - y\,\mathrm{tg}x + y^2\cos x = 0$. **1.93.** $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0$.

У задачах 1.94 – 1.96 знайти частинні розв'язки рівнянь Бернуллі першого порядку, які задовольняють задані початкові умови.

1.94. $3\,dy = -(1+3y^2)\,y\sin x\,dx$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

1.95. $y\,dx + \left(x - \frac{1}{2}x^3 y\right)dy = 0$; $y\left(\frac{1}{2}\right)=1$.

1.96. $y' - y\,\mathrm{tg}\,x + y^2\cos x = 0$; $y(0)=1$.

1.97. Розв'язати задане рівняння Ріккаті при заданому частинному розв'язку $y_1(x)$ цього рівняння:

а) $(1+x^2)\,y' + 2\frac{1-x^2}{x}y + 3 = y^2$, $y_1(x) = \frac{1}{x}$;

б) $y' + xy^2 + \frac{y}{x} = x^3 + 2$, $y_1(x) = x$;

в) $x^3 y' - y^2 - x^2 y = -x^2$, $y_1(x) = x$;

г) $y' - y^2 - \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2}$, $y_1(x) = -\frac{1}{x}$;

д) $xy' - 3y + y^2 = 4x^2 - 4x$, $y_1(x) = 2x$;

е) $(x - x^4)\,y' - x^2 - y + 2xy^2 = 0$, $y_1(x) = x^2$.

Розв'язати задані геометричні та фізичні задачі, що зводяться до лінійних диференціальних рівнянь першого порядку та до рівнянь Бернуллі.

1.98. Знайти лінію, у якої початкова ордината (ордината при $x=0$) будь-якої дотичної на дві одиниці масштабу менше абсциси точки дотику.

1.99. Знайти криві, для яких площа трикутника, утвореного віссю Ox, дотичною і радіусом-вектором точки дотику, є величиною сталою і дорівнює a^2.

1.100. Площа трапеції, утвореної дотичною до деякої кривої, осями координат та ординатою точки дотику, є сталою величиною та дорівнює a^2. Знайти цю криву.

1.101. Знайти криву, кожна дотична до якої перетинає пряму $y=1$ у точці з абсцисою, що дорівнює подвоєній абсцисі точки дотику.

1.102. Знайти криву, дотична до якої в точці $M(x,y)$ проходить через точку $N(x^2, y^2)$.

1.103. На тіло маси m, яке рухається прямолінійно, діє сила, пропорційна часу, що проходить від моменту, коли швидкість дорівнювала нулю, та сила опору, яка пропорційна швидкості. Знайти залежність швидкості від часу, якщо коефіцієнти пропорційності відповідно дорівнюють k_1 та k_2.

1.104. На тіло маси m, яке рухається прямолінійно, діє сила, пропорційна кубу часу, що проходить від моменту, коли швидкість дорівнювала v_0, та сила опору, яка пропорційна добутку швидкості та часу. Знайти залежність швидкості від часу, якщо коефіцієнти пропорційності відповідно дорівнюють k_1 та k_2.

1.105. Сила струму I в електричному колі з опором R і коефіцієнтом самоіндукції L задовольняє рівнянню $L\frac{dI}{dt} + RI = E$, де E – електрорушійна сила. Знайти залежність сили струму $I(t)$ від часу, якщо $E = E_0\sin\omega t$ і $I(0)=0$.

1.106. Початкова температура тіла Θ_0 дорівнює температурі навколишнього середовища. Тіло дістає теплоту від нагрівача зі швидкістю $c\varphi(t)$, де c – стала теплоємкість тіла і віддає теплоту навколишньому середовищу зі швидкістю охолодження, яка пропорційна різниці між температурами тіла і середовища. Знайти залежність температури тіла від часу, який відраховується з моменту початку досліду.

Диференціальні рівняння у повних диференціалах та звідні до них

У задачах 1.107 – 1.114 розв'язати задані диференціальні рівняння, попередньо впевнившись, що вони є рівняннями у повних диференціалах.

1.107. $(2x^3 - xy^2)\,dx + (2y^3 - x^2y)\,dy = 0$.

1.108. $\dfrac{x\,dy}{x^2+y^2} = \left(\dfrac{y}{x^2+y^2} - 1\right)dx$.

1.109. $e^y dx + (xe^y - 2y)\,dy = 0$.

1.110. $yx^{y-1}dx + x^y \ln x\,dy = 0$.

1.111. $\dfrac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{y\,dx - x\,dy}{x^2}$.

1.112. $\dfrac{y + \sin x \cos^2(xy)}{\cos^2(xy)}dx + \dfrac{x}{\cos^2(xy)}dy + \sin y\,dy = 0$.

1.113. $(1 + x\sqrt{x^2+y^2})\,dx + (-1 + \sqrt{x^2+y^2})\,y\,dy = 0$.

1.114. $\dfrac{2x\,dx}{y^3} + \dfrac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$.

У задачах 1.115 – 1.121 знайти розв'язки заданих диференціальних рівнянь, використовуючи інтегрувальний множник.

1.115. $(x^2 + y)\,dx - x\,dy = 0$.

1.116. $y(1 + xy)\,dx - x\,dy = 0$.

1.117. $(x^2 + y^2 + 2x)\,dx + 2y\,dy = 0$.

1.118. $\dfrac{y}{x}dx + (y^3 - \ln x)\,dy = 0$.

1.119. $(x\cos y - y\sin y)\,dy + (x\sin y + y\cos y)\,dx = 0$.

1.120. $(x + y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$.

1.121. $y(1 + xy)\,dx - x\,dy = 0$.

1.122. Впевнитись, що інтегрувальним множником лінійного рівняння $y' + P(x)\,y = f(x)$ є функція $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$.

1.123. Знайти інтегрувальний множник рівняння Бернуллі $y' + P(x)\,y = y^n f(x)$.

Диференціальні рівняння, нерозв'язні відносно похідної

У задачах 1.124 – 1.130 розв'язати задані диференціальні рівняння, нерозв'язні відносно похідної.

1.124. $y = y'^2 + 4y'^3$.

1.125. $y = (y' - 1)\,e^{y'}$.

1.126. $y = \dfrac{y'^2}{2} + 2xy' + x^2$.

1.127. $x = y'^3 - y' + 2$.

1.128. $x = y'\cos y'$.

1.129. $x = 2y' - \ln y'$.

1.130. $x = \dfrac{y}{y'} + \dfrac{1}{y'^2}$.

У задачах 1.131 – 1.141 знайти загальні та особливі розв'язки заданих рівнянь Лагранжа та Клеро.

1.131. $y = xy' + y'^2$.

1.132. $y = xy' - 3y'^3$.

1.133. $y = xy' + \dfrac{1}{y'}$.

1.134. $y = xy' + \sqrt{1 + y'^2}$.

1.135. $xy' - y = \ln y'$.

1.136. $y = y'^2(x + 1)$.

1.137. $2yy' = x(y'^2 + 4)$.

1.138. $y = yy'^2 + 2xy'$.

1.139. $y = x(1 + y') + y'^2$.

1.140. $y' = \ln(xy' - y)$.

1.141. $y = y'(x + 1) + y'^2$.

Розв'язати задані геометричні задачі, що зводяться до диференціальних рівнянь, нерозв'язних відносно похідної.

1.142. Знайти лінію, дотичні до якої відтинають на осях координат відрізки, сума яких дорівнює $2a$.

1.143. Знайти лінію, для якої добуток відстаней довільної дотичної до двох заданих точок є величина стала.

1.144. Знайти лінію, якщо відрізок довільної її дотичної, яка лежить між осями координат, має сталу довжину a.

1.145. Площа трикутника, утвореного дотичною до шуканої лінії і осями координат, є величина стала і дорівнює a^2. Знайти цю лінію.

Ортогональні траєкторії

У задачах 1.146 – 1.149 знайти траєкторії, ортогональні заданим сім'ям кривих (a – параметр).

1.146. Параболам

а) $y = ax^2$; б) $y^2 = 4(x-a)$.

1.147. Колам $x^2 + y^2 = 2ax$.

1.148. Гіперболам $x^2 - 2y^2 = a^2$.

1.149. Кривим

а) $ay^2 = x^3$; б) $y = ae^{2x}$.

Різні типи диференціальних рівнянь першого порядку

У задачах 1.150 – 1.159 визначити типи заданих диференціальних рівнянь і вказати у загальному вигляді підстановки або методи їх розв'язання.

1.150. $y' - \dfrac{y}{x\ln x} = x\ln x$.

1.151. $6xdx - 6ydy = 2x^2ydy - 3xy^2dx$.

1.152. $y' - \dfrac{2xy}{1+x^2} = \dfrac{4\sqrt{y}}{\sqrt{1+x^2}}\operatorname{arctg} x$.

1.153. $y\,dx + (2x - y^2)\,dy = 0$.

1.154. $\left(\dfrac{x}{y} - x + y^2\right)dx + \left(2xy + y - \dfrac{x^2}{2y^2}\right)dy = 0$.

1.155. $y\,dx + (x - 2\sqrt{xy}\,)\,dy = 0$.

1.156. $(x^2 + y^2 + 1)\,dy + xy\,dx = 0$.

1.157. $y' = \sin(y - x)$.

1.158. $x' - 2xy = 3y^2 - 2y^4$.

1.159. $x' + \dfrac{2x}{y} = \dfrac{2\sqrt{x}}{\cos^2 y}$.

У задачах 1.160 – 1.186 знайти загальні розв'язки заданих диференціальних рівнянь.

1.160. $y' = \dfrac{x+y-2}{y-x-4}$. **1.161.** $y' = \dfrac{y^2 + xy - x^2}{y^2}$.

1.162. $y' = \dfrac{a^2}{(x+y)^2}$. **1.163.** $y'(y^2 - x) = y$.

1.164. $\dfrac{2x\,dx}{y^3} + \dfrac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$.

1.165. $(2y + xy^3)\,dx + (x + x^2y^2)\,dy = 0$.

1.166. $\left(2xy + x^2y + \dfrac{y^3}{3}\right)dx + (x^2 + y^2)\,dy = 0$.

1.167. $y' = \dfrac{(1+y)^2}{x(y+1) - x^2}$.

1.168. $x\,dy + y\,dx + y^2(x\,dy - y\,dx) = 0$.

1.169. $\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{y^2}{(x-y)^2}\right)dx + \left(\dfrac{x^2}{(x-y)^2} - \dfrac{1}{y}\right)dy = 0$.

1.170. $y' = x\sqrt{y} + \dfrac{xy}{x^2 - 1}$.

1.171. $y\sin x + y'\cos x = 1$.

1.172. $y' - y + y^2\cos x = 0$.

1.173. $y' = \dfrac{\cos x \sin y + \operatorname{tg}^2 x}{\sin x \cos y}$.

1.174. $xy'\cos\dfrac{y}{x} = y\cos\dfrac{y}{x} - x$.

1.175. $\left(x\cos\frac{y}{x}+y\sin\frac{y}{x}\right)y\,dx+\left(x\cos\frac{y}{x}-y\sin\frac{y}{x}\right)x\,dy=0$.

1.176. $y'=\frac{x}{\cos y}-\mathrm{tg}y$.

1.177. $y-y'\cos x=y^2\cos x(1-\sin x)$.

1.178. $2yy'=e^{\frac{x^2+y^2}{x}}+\frac{x^2+y^2}{x}-2x$.

1.179. $\left(1+e^{x/y}\right)dx+e^{x/y}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$.

1.180. $(x^2-1)^{\frac{3}{2}}dy+(x^3+3xy\sqrt{x^2-1})\,dx=0$.

1.181. $\mathrm{tg}\,x\frac{dy}{dx}-y=a$.

1.182. $xyy'^2-(x^2+y^2)\,y'+xy=0$.

1.183. $(3x^2+2xy-y^2)\,dx+(x^2-2xy-3y^2)\,dy=0$.

1.184. $xy'=x^2e^{-y}+2$.

1.185. $(2xe^y+y^4)\,y'=ye^y$.

1.186. $y=y'^2+2xy'+\frac{x^2}{2}$.

Розв'язати задані геометричні та фізичні задачі.

1.187. Знайти лінію, у якої довжина нормалі пропорційна квадрату ординати. Коефіцієнт пропорційності дорівнює k.

1.188. Знайти лінію, у якої будь-яка дотична перетинається з віссю ординат у точці, однаково віддаленій від точки дотику і від початку координат.

1.189. Знайти рівняння лінії, яка перетинає вісь абсцис у точці $x=1$ і такої, що має властивість: довжина піднормалі в кожній точці лінії дорівнює середньому арифметичному координат цієї точки.

1.190. Знайти лінію, у якої площа трапеції, утвореної осями координат, ординатою довільної точки і дотичної в цій точці, дорівнює половині квадрата абсциси.

1.191. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $(\sqrt{2},0)$, якщо сума довжини її дотичної та піддотичної дорівнює добутку координат точки дотику.

1.192. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $(1,2)$, якщо її піддотична вдвічі більше абсциси точки дотику.

1.193. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $\left(\frac{1}{2},-1\right)$, якщо довжина відрізка півосі абсцис, що відтинається її дотичною, дорівнює квадрату абсциси точки дотику.

1.194. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $(1,0)$, якщо довжина відрізка осі абсцис, що відтинається її нормаллю, на дві одиниці більше абсциси точки дотику.

1.195. Знайти лінію, у якої піднормаль в будь-якій точці так відноситься до суми абсциси та ординати, як ордината цієї точки до її абсциси.

1.196. За який час температура тіла, яке нагріте до 100^0 C, зменшиться до 25^0 C, якщо температура приміщення дорівнює 20^0 C і за перші 10 хвилин тіло охолодилося до 60^0 C?

1.197. Швидкість розпаду радія пропорційна його кількості. Протягом року із кожного грама радія розпадається 0,44 мг. Через скільки років розпадеться половина наявної кількості радія?

1.198. Човен уповільнює свій рух під дією опору води, який пропорційний швидкості човна. Початкова швидкість човна 1,5 м/с, швидкість її через 4с 1 м/с. Коли швидкість зменшиться до 1 м/с? Який шлях пройде човен до зупинки?

1.199. Пуля, яка рухається зі швидкістю $v_0=400$ м/с, пробиває стіну товщиною $h=20$ см і вилітає, маючи швидкість 100 м/с. Покладаючи силу опору стіни пропорційною квадрату швидкості руху пулі, знайти час проходження пулі крізь стіну.

§2. Диференціальні рівняння вищих порядків

I. Короткі теоретичні відомості

Основні поняття. *Диференціальним рівнянням* n *- го порядку* називається рівняння вигляду

$$F(x,\ y,\ y',\dots y^{n})=0 \tag{1.63}$$

або

$$y^{(n)}=f(x,\ y,\ y',\dots y^{(n-1)})\,. \tag{1.64}$$

Задачею Коші для диференціального рівняння (1.64) називається задача відшукання його розв'язку $y=y(x)$, що задовольняє задані початкові умови

$$y(x_0)=y_0\,,\ y'(x_0)=y_0'\,,\ \dots\,,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}\,. \tag{1.65}$$

Загальним розв'язком диференціального рівняння (1.63) або (1.64) називається така функція $y=\varphi(x,C_1,\dots C_n)$, яка при будь-яких припустимих значеннях параметрів $C_1,\dots C_n$ є розв'язком цього диференціального рівняння і для будь-якої задачі Коші з умовами (1.65) знайдуться сталі $C_1=C_1^0,\dots,C_n=C_n^0$, які визначаються з системи рівнянь

$$\begin{cases} y_0=\varphi(x_0,C_1,\dots,C_n), \\ y_0'=\varphi'(x_0,C_1,\dots,C_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_0^{(n-1)}=\varphi^{(n-1)}(x_0,C_1,\dots,C_n), \end{cases}$$

такі, що функція $y=\varphi(x,C_1^0,\dots,C_n^0)$ задовольняє ці початкові умови.

Загальним інтегралом диференціального рівняння називається рівняння

$$\Phi(x,y,C_1,\dots,C_n)=0\,, \tag{1.66}$$

яке визначає загальний розв'язок як неявну функцію.

Частинний розв'язок або *частинний інтеграл* отримується із загального при заданих числових значеннях сталих $C_1,\dots,C_n$.

Теорема існування і єдиності розв'язку задачі Коші. Якщо диференціальне рівняння (1.64) таке, що функція $f(x,\ y,\ y',\dots y^{(n-1)})$ в деякій області D зміни своїх аргументів неперервна і має неперервні частинні похідні $\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial y'},\dots,\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$, то для будь-якої точки $(x_0,y_0,y_0',\dots,y_0^{(n-1)})\in D$ існує єдиний розв'язок цього диференціального рівняння, який задовольняє початкові умови (1.65).

Диференціальні рівняння вищих порядків, які допускають зниження порядку

1. Рівняння вигляду

$$y^{(n)}=f(x)\,, \tag{1.67}$$

де $f(x)$ – задана неперервна функція.

Загальний розв'язок цього рівняння отримується n - кратним послідовним інтегруванням.

$$y^{(n-1)}=\int f(x)\,dx+C_1\,,$$

$$y^{(n-2)}=\int\left(\int f(x)\,dx\right)dx+C_1x+C_2\,,$$

$$y^{(n-3)}=\int\left(\int\left(\int f(x)\,dx\right)dx\right)dx+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3\,,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y=\int\left(\dots\int\left(\int\left(\int f(x)\,dx\right)dx\right)dx\dots\right)dx+\frac{C_1}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{C_2}{(n-2)!}x^{n-2}+\dots+C_n\,.$$

2. Рівняння вигляду

$$F(x,y^{(n)})=0\,. \tag{1.68}$$

Якщо це рівняння можна розв'язати відносно $y^{(n)}$, то маємо вже розглянутий випадок рівняння (1.67).

Припустимо, що рівняння (1.68) можна розв'язати відносно x:

$$x=f(y^{(n)})\,. \tag{1.69}$$

Тоді підстановка

$$y^{(n)}=t$$

знову зводить його до рівняння (1.67).

Дійсно, рівняння (1.69) набуде вигляду

$$x=f(t)\,,$$

звідки

$$dx=f'(t)\,dt\,.$$

Підставимо $y^{(n)}$ і dx у тотожність

$$d(y^{(n-1)})=y^{(n)}dx\,,$$

тоді маємо

$$d(y^{(n-1)})=t\,f'(t)\,dt\,,$$

$$y^{(n-1)}=\int t\,f'(t)\,dt+C_1\,. \tag{1.70}$$

Інтегруючи послідовно рівняння (1.70) і враховуючи щоразу, що $dx=f'(t)\,dt$, дістанемо розв'язок рівняння (1.69) у параметричній формі.

3. Рівняння вигляду

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0\,, \tag{1.71}$$

тобто рівняння *не містить шуканої функції та її похідних до* $(k-1)$ *- го порядку включно*.

У цьому випадку порядок рівняння знижується до $(n-k)$ заміною змінних

$$y^{(k)} = p(x)\,. \tag{1.72}$$

Після заміни рівняння (1.71) набуде вигляду

$$F(x, p, p', \dots, p^{(n-k)}) = 0\,.$$

Із цього рівняння визначається функція $p = f(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k})$, а функцію $y(x)$ знаходимо із рівняння

$$y^{(k)} = f(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k})$$

k - кратним інтегруванням.

4. Рівняння вигляду

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0\,, \tag{1.73}$$

тобто рівняння *не містить явно незалежної змінної* x.

Підстановкою

$$y' = p(y) \tag{1.74}$$

порядок рівняння знижується на одиницю.

Дійсно, врахуємо, що

$$\frac{dy}{dx} = p\,,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\,\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}\,p\,, \tag{1.75}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dy}\,p\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{dp}{dy}\,p\right)\frac{dy}{dx} = \frac{d^2p}{dy^2}\,p^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 p$$

і так далі.

Підставивши ці вирази замість $y', y'', \dots, y^{(n)}$ у задане рівняння, отримаємо диференціальне рівняння $(n-1)$ - го порядку.

5. Рівняння вигляду

$$F(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0\,, \tag{1.76}$$

ліва *частина якого є повною похідною по* x *від деякої функції* $\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$.

Тоді рівняння (1.76) можна записати у вигляді

$$\frac{d}{dx}\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = 0\,. \tag{1.77}$$

Інтегруючи по x, отримуємо рівняння

$$\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = C\,,$$

порядок якого на одиницю нижче порядку вихідного рівняння (1.76).

6. Рівняння вигляду

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0\,, \tag{1.78}$$

де *ліва частина є однорідною функцією* n *- го виміру відносно* $y, y', \dots, y^{(n)}$, тобто

$$F(x, ty, ty', \dots, ty^{(n)}) \equiv t^n F(x, y, y', \dots, y^{(n)}),\quad t \neq 0\,.$$

Кажуть, що рівняння (1.78) *однорідне* відносно функції $y(x)$ та її похідних.

Порядок рівняння можна знизити, застосувавши заміну

$$y = e^{\int z\,dx} \tag{1.79}$$

або

$$y' = zy\,,$$

де $z(x)$ – нова шукана функція.

Дійсно, диференціюючи, отримуємо

$$y' = e^{\int z\,dx}\cdot z\,,$$

$$y'' = e^{\int z\,dx}(z^2 + z')\,,$$

$$y''' = e^{\int z\,dx}(z^3 + 3zz' + z'')\,,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$y^{(n)} = e^{\int z\,dx}\,\Phi(z, z', \dots, z^{(n-1)})\,.$$

Підставляючи ці вирази у рівняння (1.78) і враховуючи, що в силу однорідності множник $e^{\int z\,dx}$ можна винести за знак функції F, отримуємо

$$e^{n\int z\,dx} f(x, z, z', \dots, z^{(n-1)}) = 0\,.$$

Скоротивши на $e^{n\int z\,dx}$, маємо

$$f(x, z, z', \dots, z^{(n-1)}) = 0\,,$$

тобто отримали диференціальне рівняння $(n-1)$ - го порядку.

Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків. Загальна теорія

Лінійні однорідні диференціальні рівняння. Рівняння вигляду

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0 \qquad (1.80)$$

називається *лінійним однорідним диференціальним рівнянням* n *- го порядку*.

Більш загальний вигляд цього рівняння

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0,$$

де $a_0(x)\neq 0$, зводиться до вигляду (1.80) діленням обох частин рівняння на $a_0(x)\neq 0$.

Якщо відомий який-небудь частинний розв'язок $y_1(x)$ рівняння (1.80), то підстановка $y(x)=y_1(x)z(x)$ призводить це рівняння до лінійного рівняння відносно функції $z(x)$, яке не містить явно цю функцію. Тому, покладаючи

$$z'(x)=u(x),$$

отримаємо лінійне однорідне рівняння $(n-1)$- го порядку відносно функції $u(x)$.

Визначником Вронського (вронскіаном) системи функцій $y_1(x)$, $y_2(x),\ldots,y_n(x)$ називається визначник

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Якщо система функцій $y_1(x),y_2(x),\ldots,y_n(x)$ *лінійно залежна* на інтервалі (a,b), то $W(x)=0$ для всіх $x\in(a,b)$. Якщо ж хоча б в одній точці $x_0\in(a,b)$ маємо $W(x_0)\neq 0$, то система функцій $y_1(x),y_2(x),\ldots,y_n(x)$ *лінійно незалежна* на (a,b).

Фундаментальною системою розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння (1.80) називається будь-яка система з n лінійно незалежних розв'язків $y_1(x),y_2(x),\ldots,y_n(x)$ цього рівняння.

Загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння (1.80) представляється у вигляді

$$y=\sum_{i=1}^{n}C_i y_i, \qquad (1.81)$$

де $y_1(x),y_2(x),\ldots,y_n(x)$ – фундаментальна система розв'язків цього рівняння, C_i, $i=\overline{1,n}$ – довільні сталі.

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння. Рівняння вигляду

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x), \qquad (1.82)$$

в якому $f(x)\neq 0$, називається *лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням* n *- го порядку*.

Більш загальний вигляд цього рівняння

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x),$$

де $a_0(x)\neq 0$, $f(x)\neq 0$, зводиться до вигляду (1.82) діленням обох частин рівняння на $a_0(x)\neq 0$.

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння (1.82) визначається формулою

$$y(x)=y_0(x)+\tilde{y}(x), \qquad (1.83)$$

де $y_0(x)$ – загальний розв'язок відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння (1.80), а $\tilde{y}(x)$ – деякий частинний розв'язок неоднорідного рівняння (1.82).

Для знаходження частинного розв'язку $\tilde{y}(x)$ рівняння (1.82) може бути використано метод варіації довільних сталих.

Метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа)

Нехай функція

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n \qquad (1.84)$$

є загальним розв'язком відповідного неоднорідному рівнянню (1.82) однорідного рівняння (1.80).

Згідно з методом варіації довільних сталих частинний розв'язок $\tilde{y}(x)$ неоднорідного рівняння (1.82) знаходимо у такому ж вигляді (1.84), вважаючи, що $C_1,C_2,\ldots,C_n$ – функції від x, тобто покладемо

$$\tilde{y}=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2+\ldots+C_n(x)y_n, \qquad (1.85)$$

де $C_1(x),C_2(x),\ldots,C_n(x)$ – невідомі функції.

Складемо систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \ldots + C_n'(x)y_n = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \ldots + C_n'(x)y_n' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)} + C_2'(x)y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases} \qquad (1.86)$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо похідні $C_i'(x),\ i=\overline{1,n}$, а потім інтегруванням – і самі функції $C_i(x),\ i=\overline{1,n}$.

Якщо взяти всі сталі інтегрування рівними нулю і підставити функції $C_i(x)$ у рівність (1.85), то матимемо частинний розв'язок неоднорідного рівняння (1.82). Якщо у рівність (1.85) підставити функції $C_i(x)+\overline{C}_i$, де $\overline{C}_i$ – довільні сталі, то відразу дістанемо загальний розв'язок.

Зауважимо, що коли порядок диференціального рівняння $n=2$, система (1.86) для визначення $C_1'(x), C_2'(x)$ набуває вигляду:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x). \end{cases} \tag{1.87}$$

Принцип суперпозиції розв'язків. Якщо функції $\widetilde{y}_i(x)$ – частинні розв'язки рівнянь

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f_i(x),\ \ i=\overline{1,k},$$

то функція

$$\widetilde{y}(x) = \sum_{i=1}^{k} \widetilde{y}_i(x)$$

є частинним розв'язком рівняння

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = \sum_{i=1}^{k} f_i(x).$$

Лінійні однорідні диференціальні рівняння n **- го порядку зі сталими коефіцієнтами.** *Лінійне однорідне диференціальне рівняння* n *- го порядку зі сталими коефіцієнтами* має вигляд

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = 0, \tag{1.88}$$

де $a_i,\ i=\overline{1,n}$ – дійсні числа.

Метод побудови фундаментальної системи розв'язків цього рівняння (*метод Ейлера*) полягає в тому, що частинні розв'язки рівняння (1.88) шукають у вигляді

$$y = e^{kx}, \tag{1.89}$$

де k – стала, дійсна чи комплексна, що підлягає визначенню.

Підстановка функції (1.89) та її похідних у диференціальне рівняння (1.88) призводить до рівняння

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1}k + a_n = 0, \tag{1.90}$$

яке називається *характеристичним* для рівняння (1.88).

Рівняння (1.90) отримується з (1.88) формально заміною похідних $y^{(i)}$ степенями k^i, $i=\overline{0,n}$ $(y^{(0)}=y)$.

Кожному дійсному кореню k рівняння (1.90) кратності r відповідає r лінійно незалежних розв'язків рівняння (1.88)

$$e^{kx},\ xe^{kx}, \ldots, x^{r-1}e^{kx}. \tag{1.91}$$

Кожній парі комплексно-спряжених коренів $\alpha \pm i\beta$ кратності s відповідає s пар лінійно незалежних розв'язків

$$\begin{gathered} e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, x^{s-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, \\ e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, x^{s-1}e^{\alpha x}\sin\beta x. \end{gathered} \tag{1.92}$$

Нехай характеристичне рівняння (1.90) має p дійсних коренів $k_1, k_2, \ldots, k_p$ кратностей $r_1, r_2, \ldots, r_p$ і q пар комплексно-спряжених коренів $\alpha_1 \pm i\beta_1, \alpha_2 \pm i\beta_2, \ldots, \alpha_q \pm i\beta_q$ кратностей $s_1, s_2, \ldots, s_q$ ($r_1 + r_2 + \ldots + r_p + 2s_1 + 2s_2 + \ldots + 2s_q = n$). Їм відповідає n лінійно незалежних розв'язків, що утворюють фундаментальну систему розв'язків.

Загальний розв'язок рівняння (1.88) запишеться у вигляді

$$y(x) = P_1(x)e^{k_1 x} + \ldots + P_p(x)e^{k_p x} + (Q_1(x)\cos\beta_1 x + R_1(x)\sin\beta_1(x))e^{\alpha_1 x} + \\ + \ldots + (Q_q(x)\cos\beta_q x + R_q(x)\sin\beta_q(x))e^{\alpha_q x}, \tag{1.93}$$

де $P_\nu(x)$ – довільний многочлен степеня $r_\nu - 1,\ \nu=\overline{1,p}$, а $Q_\mu(x)$ і $R_\mu(x)$ – довільні многочлени степеня $s_\mu - 1,\ \mu=\overline{1,q}$.

Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. При $n=2$ маємо лінійне однорідне диференціальне рівняння *другого порядку* зі сталими коефіцієнтами

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{1.94}$$

де $p,\ q$ – задані числа.

Характеристичне рівняння для нього

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{1.95}$$

Корені характеристичного рівняння можуть бути такі:

1) дійсні та різні: $k_1 \neq k_2$,
2) дійсні та рівні, тобто кратні: $k_1 = k_2 = k$,
3) комплексно-спряжені: $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$.

Згідно з загальною теорією їм відповідають такі фундаментальні системи розв'язків y_1, y_2 та загальні розв'язки рівняння (1.94):

1) $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$; $\quad y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$;

2) $y_1 = e^{kx}$, $y_2 = x e^{kx}$; $\quad y = (C_1 + C_2 x) e^{kx}$;

3) $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$; $\quad y = (C_1\cos\beta x + C_2 \sin\beta x) e^{\alpha x}$.

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння n - го порядку зі сталими коефіцієнтами. *Лінійне неоднорідне диференціальне рівняння n - го порядку зі сталими коефіцієнтами* має вигляд

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \tag{1.96}$$

де a_i, $i = \overline{1,n}$ – задані дійсні числа, $f(x) \neq 0$ – задана функція.

Відповідне йому лінійне однорідне диференціальне рівняння

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0. \tag{1.97}$$

Загальний розв'язок рівняння (1.96) визначається формулою

$$y(x) = y_0(x) + \widetilde{y}(x), \tag{1.98}$$

де $y_0(x)$ – загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння (1.97), а $\widetilde{y}(x)$ – деякий частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (1.96).

Загальний розв'язок диференціального рівняння (1.97) визначається формулою

$$y_0(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i, \tag{1.99}$$

де y_i, $i = \overline{1,n}$ – фундаментальна система розв'язків, C_i, $i = \overline{1,n}$ – довільні сталі.

Для відшукання $\widetilde{y}(x)$ – частинного розв'язку неоднорідного рівняння (1.96) в загальному випадку можна скористатись *методом Лагранжа варіації довільних сталих*.

У деяких випадках, коли функція $f(x)$ має спеціальний вигляд, використовують *метод підбору вигляду частинного розв'язку* за виглядом цієї функції – правої частини рівняння (1.96). При цьому для визначення самого частинного розв'язку використовують *метод невизначених коефіцієнтів*.

Розглянемо ці випадки спеціальних виглядів функції $f(x)$ – правої частини рівняння (1.96).

1. Права частина диференціального рівняння (1.96) така:

$$f(x) = Q_s(x) e^{\alpha x} = (A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \ldots + A_s) e^{\alpha x}. \tag{1.100}$$

Якщо α не є коренем характеристичного рівняння відповідного однорідного рівняння, то частинний розв'язок $\widetilde{y}$ шукаємо у вигляді:

$$\widetilde{y} = P_s(x) e^{\alpha x} = (B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \ldots + B_s) e^{\alpha x}. \tag{1.101}$$

Тут $P_s(x)$ – многочлен степеня s з невизначеними коефіцієнтами $B_0, B_1, \ldots, B_s$.

Якщо α є коренем характеристичного рівняння кратності r, то частинний розв'язок $\widetilde{y}$ шукаємо у вигляді:

$$\widetilde{y} = x^r P_s(x) e^{\alpha x} = x^r (B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \ldots + B_s) e^{\alpha x}. \tag{1.102}$$

Невідомі числа $B_0, B_1, \ldots, B_s$ відшукують методом невизначених коефіцієнтів, тобто підставивши $\widetilde{y}$ та $\widetilde{y}', \ldots, \widetilde{y}^{(n)}$ у диференціальне рівняння (1.96), прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x. Розв'язки отриманої системи рівнянь – числа $B_0, B_1, \ldots, B_s$.

2. Права частина диференціального рівняння (1.96) така:

$$f(x) = e^{\alpha x}[Q_{s_1}(x)\cos\beta x + P_{s_2}(x)\sin\beta x], \tag{1.103}$$

де $Q_{s_1}(x), P_{s_2}(x)$ – многочлени степенів s_1, s_2 відповідно з заданими коефіцієнтами, $\max(s_1, s_2) = s$.

Якщо $\alpha \pm i\beta$ не співпадає ні з одним з коренів характеристичного рівняння, то $\widetilde{y}$ шукаємо у вигляді:

$$\widetilde{y} = e^{\alpha x}[u_s(x)\cos\beta x + v_s(x)\sin\beta x], \tag{1.104}$$

де $u_s(x), v_s(x)$ – многочлени степеня s з невизначеними коефіцієнтами.

Якщо $\alpha \pm i\beta$ співпадає з деяким коренем характеристичного рівняння кратності r, то $\widetilde{y}$ шукаємо у вигляді:

$$\widetilde{y} = x^r e^{\alpha x}[u_s(x)\cos\beta x + v_s(x)\sin\beta x], \tag{1.105}$$

де $u_s(x), v_s(x)$ – многочлени степеня s з невизначеними коефіцієнтами.

Зауважимо, що вигляд розв'язку (1.104) або (1.105) зберігається і у випадку, коли у формулі (1.103) відсутній доданок, що містить $\cos\beta x$ або $\sin\beta x$.

Якщо функція $f(x)$ не підпадає під вигляд наведених функцій, то, якщо це можливо, перетворюють $f(x)$ таким чином, щоб вона представлялась у вигляді суми доданків, кожний з яких представляє один з вказаних виглядів. Далі використовується *принцип суперпозиції розв'язків*.

У більш складних випадках використовують *метод варіації* довільних сталих.

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. При $n = 2$ маємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння *другого порядку* зі сталими коефіцієнтами

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

де p, q – задані числа, $f(x) \neq 0$ – задана функція.

Аналогічно попередньому розглядаються два спеціальні вигляди функції $f(x)$.

I. $f(x) = Q_s(x)e^{\alpha x} = (A_0x^s + A_1x^{s-1} + \ldots + A_s)e^{\alpha x}$,

де $Q_s(x)$ – многочлен степеня s з заданими коефіцієнтами.

Якщо

1) α не є коренем характеристичного рівняння відповідного однорідного рівняння, то частинний розв'язок $\widetilde{y}$ шукаємо у вигляді:

$$\widetilde{y} = P_s(x)e^{\alpha x} = (B_0x^s + B_1x^{s-1} + \ldots + B_s)e^{\alpha x},$$

де $P_s(x)$ – многочлен степеня s з невизначеними коефіцієнтами;

2) α – однократний (простий) корінь характеристичного рівняння, то частинний розв'язок $\widetilde{y}$ шукаємо у вигляді:

$$\widetilde{y} = xP_s(x)e^{\alpha x} = x(B_0x^s + B_1x^{s-1} + \ldots + B_s)e^{\alpha x},$$

де $P_s(x)$ – многочлен степеня s з невизначеними коефіцієнтами;

3) α – двократний корінь характеристичного рівняння, то частинний розв'язок $\widetilde{y}$ шукаємо у вигляді:

$$\widetilde{y} = x^2P_s(x)e^{\alpha x} = x^2(B_0x^s + B_1x^{s-1} + \ldots + B_s)e^{\alpha x},$$

де $P_s(x)$ – многочлен степеня s з невизначеними коефіцієнтами.

II. $f(x) = e^{\alpha x}[Q_{s_1}(x)\cos\beta x + P_{s_2}(x)\sin\beta x]$,

де $Q_{s_1}(x), P_{s_2}(x)$ – многочлени степенів s_1, s_2 відповідно з заданими коефіцієнтами, $\max(s_1, s_2) = s$.

Якщо

1) $\alpha \pm i\beta$ не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок $\widetilde{y}$ шукаємо у вигляді:

$$\widetilde{y} = e^{\alpha x}[u_s(x)\cos\beta x + v_s(x)\sin\beta x],$$

де $u_s(x), v_s(x)$ – многочлени степеня s з невизначеними коефіцієнтами;

2) $\alpha \pm i\beta$ є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок $\widetilde{y}$ шукаємо у вигляді:

$$\widetilde{y} = xe^{\alpha x}[u_s(x)\cos\beta x + v_s(x)\sin\beta x],$$

де $u_s(x), v_s(x)$ – многочлени степеня s з невизначеними коефіцієнтами.

Рівняння Ейлера. Рівняння вигляду

$$x^n y^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}xy' + a_ny = f(x), \quad x \neq 0, \qquad (1.106)$$

де a_i, $i = \overline{1,n}$ – сталі, називається *рівнянням Ейлера*.

Це рівняння є частинним випадком лінійного диференціального рівняння із змінними коефіцієнтами. Воно зводиться до лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами введенням підстановки

$$\begin{aligned} x &= e^t, \text{ якщо } x > 0, \\ x &= e^{-t}, \text{ якщо } x < 0. \end{aligned} \qquad (1.107)$$

Більш *загальний вигляд рівняння Ейлера*:

$$(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(ax+b)y' + a_ny = f(x), \quad (1.108)$$

де a, b, a_i, $i = \overline{1,n}$ – сталі.

Це рівняння зводиться до лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами підстановкою

$$\begin{aligned} ax + b &= e^t, \text{ якщо } ax + b > 0, \\ ax + b &= e^{-t}, \text{ якщо } ax + b < 0. \end{aligned} \qquad (1.109)$$

Однорідне рівняння Ейлера має вигляд

$$x^n y^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}xy' + a_ny = 0. \qquad (1.110)$$

Це рівняння зводиться до лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами підстановкою (1.107), або підстановкою

$$y = x^k, \quad x > 0. \qquad (1.111)$$

Підставляючи $y, y', \ldots, y^{(n)}$ в однорідне рівняння (1.110), знаходимо характеристичне рівняння для визначення показника степеня k в підстановці (1.111). При цьому, якщо k – *дійсний корінь* характеристичного рівняння кратності r, то йому відповідає r лінійно незалежних розв'язків

$$x^k, x^k\ln x, x^k(\ln x)^2, \ldots, x^k(\ln x)^{r-1}. \qquad (1.112)$$

Якщо $\alpha \pm i\beta$ – пара комплексно-спряжених коренів кратності s, то їм відповідає s пар лінійно незалежних розв'язків

$$\begin{aligned} &x^\alpha\cos(\beta\ln x), x^\alpha\ln x\cos(\beta\ln x), \ldots, x^\alpha(\ln x)^{s-1}\cos(\beta\ln x), \\ &x^\alpha\sin(\beta\ln x), x^\alpha\ln x\sin(\beta\ln x), \ldots, x^\alpha(\ln x)^{s-1}\sin(\beta\ln x). \end{aligned} \qquad (1.113)$$

II. Контрольні питання та завдання

1. Дайте означення диференціального рівняння n-го порядку.

2. Що називається загальним і частинним розв'язками диференціального рівняння n-го порядку?

3. Наведіть типи диференціальних рівнянь вищих порядків, які допускають зниження порядку.

4. Яке диференціальне рівняння n-го порядку називається лінійним однорідним; неоднорідним? Запишіть їх у загальному вигляді.

5. Яка система розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння називається фундаментальною?

6. Як записується загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння n-го порядку?

7. Який вигляд має загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння n-го порядку?

8. У чому полягає метод варіації довільних сталих?

9. У чому полягає принцип суперпозиції розв'язків для лінійного неоднорідного диференціального рівняння n-го порядку?

10. У чому полягає метод Ейлера знаходження фундаментальної системи розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами?

11. Яке рівняння називається характеристичним? Як його знаходять?

12. Який вигляд має загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами, якщо корені характеристичного рівняння:

а) дійсні і різні; б) рівні; в) комплексні?

13. У чому полягає метод підбору частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами з правою частиною спеціального вигляду?

14. Які спеціальні вигляди правої частини лінійного неоднорідного диференціального рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами розглядаються при застосуванні методу підбору вигляду частинного розв'язку?

15. Запишіть частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння n-го порядку для випадків, коли права частина $f(x)$ має вигляд:

а) $f(x) = Ae^{\alpha x}$; б) $f(x) = A\sin\beta x + B\cos\beta x$;

в) $f(x) = P_s(x)e^{\alpha x}$.

16. Запишіть рівняння Ейлера (неоднорідне та однорідне). Якою заміною рівняння Ейлера перетворюється у рівняння зі сталими коефіцієнтами?

III. Приклади розв'язання задач

У цьому пункті розглянуто 28 прикладів розв'язання задач, які за своєю тематикою розподілились так:

1. Основні поняття: *приклади 1, 2.*

2. Диференціальні рівняння вищих порядків, які допускають зниження порядку: *приклади 3 – 9*.

3. Лінійні диференціальні рівняння із змінними коефіцієнтами: *приклади 10, 11*.

4. Лінійні однорідні диференціальні рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами: *приклади 12 – 14*.

5. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами: *приклади 15 – 23*.

6. Метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа): *приклади 22 ,23*.

7. Диференціальні рівняння Ейлера: *приклади 24 – 26*.

8. Задачі фізики: *приклади 27, 28*.

Основні поняття

Приклад 1. Показати, що функція $y = C_1 e^{C_2 x}$, $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$ є розв'язком диференціального рівняння $yy'' = y'^2$.

► Враховуючи, що $y = C_1 e^{C_2 x}$, знаходимо

$$y' = C_1 C_2 e^{C_2 x}; \quad y'' = C_1 C_2^2 e^{C_2 x}.$$

Підставивши y, y', y'' в задане рівняння, отримаємо тотожність

$$C_1 e^{C_2 x} \cdot C_1 C_2^2 e^{C_2 x} \equiv (C_1 C_2 e^{C_2 x})^2.$$

Отже, функція $y = C_1 e^{C_2 x}$ є розв'язком заданого рівняння. ◄

Приклад 2. Знайти область існування та єдиності розв'язку диференціального рівняння $y'' = \dfrac{y\sqrt{y'}}{x}$.

► Задане рівняння має вигляд

$$y'' = f(x, y, y'),$$

де $f(x, y, y') = \dfrac{y\sqrt{y'}}{x}$.

Функція $f(x, y, y') = \dfrac{y\sqrt{y'}}{x}$ і її частинна похідна $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\sqrt{y'}}{x}$ неперервні при $x \neq 0,\ y' \geq 0$; частинна похідна $\dfrac{\partial f}{\partial y'} = \dfrac{y}{2x\sqrt{y'}}$ неперервна при $x \neq 0,\ y' > 0$.

Отже, задане рівняння має єдиний розв'язок при $x \neq 0,\ y' > 0$. ◄

Диференціальні рівняння вищих порядків, які допускають зниження порядку

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y^{(4)} = \cos 2x.$$

► Це рівняння вигляду $y^{(n)} = f(x)$, де $n = 4,\ f(x) = \cos 2x$.
Послідовно інтегруючи задане рівняння, отримуємо

$$y''' = \int \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C_1,$$

$$y'' = \int \left(\frac{1}{2}\sin 2x + C_1\right) dx = -\frac{1}{4}\cos 2x + C_1 x + C_2,$$

$$y' = \int \left(-\frac{1}{4}\cos 2x + C_1 x + C_2\right) dx = -\frac{1}{8}\sin 2x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3,$$

$$y = \int \left(-\frac{1}{8}\sin 2x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3\right) dx = \frac{1}{16}\cos 2x + \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3 x + C_4. \ ◄$$

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

та його частинний розв'язок, який задовольняє початкові умови $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\ln 2}{2},\quad y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$.

► Маємо *задачу Коші* для диференціального рівняння другого порядку $y'' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ вигляду $y^{(n)} = f(x)$, де $n = 2,\ f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Розв'язуємо задане рівняння послідовним інтегруванням його лівої та правої частин.

Інтегруючи перший раз, маємо

$$y' = \operatorname{tg} x + C_1.$$

Повторне інтегрування дає загальний розв'язок

$$y = -\ln|\cos x| + C_1 x + C_2.$$

Знайдемо C_1, C_2, скориставшись початковими умовами. Послідовно покладемо у виразах, що визначають y' та y значення $x = \dfrac{\pi}{4}$. Врахуємо, що $\ln\cos\dfrac{\pi}{4} = \ln\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{2}\ln 2 - \ln 2 = -\dfrac{\ln 2}{2}$. Тоді маємо:

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + C_1, \quad 1 = 1 + C_1 \ \Rightarrow\ C_1 = 0.$$

З виразу для y отримаємо:

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\ln\cos\frac{\pi}{4} + C_2, \quad C_2 = y\left(\frac{\pi}{4}\right) + \ln\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln 2}{2} = 0.$$

Отже, частинний розв'язок заданого рівняння, що задовольняє задані початкові умови, має вигляд:

$$y = -\ln|\cos x|. \ ◄$$

Приклад 5. Розв'язати рівняння

$$(y'')^3 + 3y'' - x = 0.$$

► Це рівняння вигляду

$$F(x, y^{(n)}) = 0 .$$

Представимо рівняння у вигляді: $x = (y'')^3 + 3y''$.

Поклавши $t = y''$, маємо

$$x = t^3 + 3t, \ dx = (3t^2 + 3)\,dt .$$

Інтегруємо рівняння $y'' = t$, для якого $y = y(x)$:

$$y' = \int t\,dx = \int t(3t^2 + 3)\,dt = \frac{3}{4}t^4 + \frac{3}{2}t^2 + C_1 ,$$

$$dy = \left(\frac{3}{4}t^4 + \frac{3}{2}t^2 + C_1\right)dx = \left(\frac{3}{4}t^4 + \frac{3}{2}t^2 + C_1\right)(3t^2 + 3)\,dt =$$

$$= 3\left(\frac{3}{4}t^6 + \frac{9}{4}t^4 + \left(C_1 + \frac{3}{2}\right)t^2 + C_1\right)dt .$$

Інтегруючи, маємо

$$y = \frac{9}{28}t^7 + \frac{27}{20}t^5 + \left(C_1 + \frac{3}{2}\right)t^3 + 3C_1 t + C_2 .$$

Отже, загальний розв'язок заданого рівняння у параметричній формі має вигляд:

$$x = t^3 + 3t , \quad y = \frac{9}{28}t^7 + \frac{27}{20}t^5 + \left(C_1 + \frac{3}{2}\right)t^3 + 3C_1 t + C_2 . \blacktriangleleft$$

Приклад 6. а) знайти загальний розв'язок рівняння

$$y^{(5)} - \frac{1}{x}y^{(4)} = 0 ;$$

б) знайти розв'язок задачі Коші для диференціального рівняння $x^4 y''' + 2x^3 y'' = 1$, який задовольняє початкові умови: $y(1) = \frac{1}{2}, \ y'(1) = \frac{1}{2}, \ y''(1) = -1$.

► а) $y^{(5)} - \frac{1}{x}y^{(4)} = 0$.

Маємо рівняння, *яке допускає зниження порядку*, вигляду

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0 ,$$

що *не містить функції* y *та її похідних до 3-го порядку включно*.

Отже, поклавши

$$y^{(4)} = \frac{d^4 y}{dx^4} = p(x) ,$$

маємо

$$\frac{dp}{dx} - \frac{1}{x}p = 0 .$$

Відокремивши змінні і проінтегрувавши, дістанемо:

$$\ln|p| = \ln|x| + \ln|C| , \quad p = Cx .$$

Враховуючи підстановку, дістанемо рівняння

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = Cx ,$$

проінтегрувавши яке, отримуємо загальний розв'язок

$$y = C_1 x^5 + C_2 x^3 + C_3 x^2 + C_4 x + C_5 .$$

б) $x^4 y''' + 2x^3 y'' = 1, \ y(1) = \frac{1}{2}, \ y'(1) = \frac{1}{2}, \ y''(1) = -1$.

Дане рівняння не містить y і y'. Покладемо $y'' = p$, $p = p(x)$, тоді $y''' = \frac{dp}{dx}$ і рівняння приймає вигляд

$$x^4 \frac{dp}{dx} + 2x^3 p = 1 \quad \text{або} \quad \frac{dp}{dx} + \frac{2}{x}p = \frac{1}{x^4} .$$

Це лінійне рівняння першого порядку. Розв'язуючи його відомими методами, отримаємо загальний розв'язок:

$$p = -\frac{1}{x^3} + \frac{C_1}{x^2} .$$

З врахуванням того, що $p = y''$, маємо диференціальне рівняння другого порядку

$$y'' = -\frac{1}{x^3} + \frac{C_1}{x^2} .$$

Перш ніж його розв'язати, знаходимо значення довільної сталої C_1, скориставшись початковою умовою $y''(1) = -1$, підставивши $x = 1$, $y''(1) = -1$:

$$-1 = -\frac{1}{1} + \frac{C_1}{1} \ \Rightarrow \ C_1 = 0 .$$

Отже,

$$y'' = -\frac{1}{x^3}.$$

Звідки

$$y' = \frac{1}{2x^2} + C_2.$$

Скористаємось початкою умовою $y'(1) = \frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2\cdot 1} + C_2 \;\Rightarrow\; C_2 = 0.$$

Отже, $y' = \frac{1}{2x^2}$. Інтегруючи ще раз, отримаємо:

$$y = -\frac{1}{2x} + C_3.$$

З умови $y(1) = \frac{1}{2}$ маємо

$$\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + C_3 \;\Rightarrow\; C_3 = 1.$$

Отже, шуканий розв'язок такий

$$y = -\frac{1}{2x} + 1.$$

Зауважимо, що *істотним* є той факт, що довільні сталі C_1, C_2 знаходились безпосередньо після того, як отримувалось відповідне диференціальне рівняння, що спрощувало вигляд і інтегрування цього рівняння. ◄

Приклад 7. а) розв'язати рівняння $yy'' - (y')^2 = 0$;
б) знайти розв'язок задачі Коші для диференціального рівняння $y''y^3 + 1 = 0$ з початковими умовами $y(1) = -1$, $y'(1) = -1$.

► Розглядаємо задані рівняння як рівняння вигляду

$$F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

що *не містить явно незалежної змінної* x.

Застосуємо підстановку:

$$y' = p(y), \text{ тобто } \frac{dy}{dx} = p(y).$$

Тоді за формулою для похідної складної функції маємо:

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d(p(y))}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot p.$$

а) $yy'' - (y')^2 = 0$.

Спосіб 1. Підставимо вирази для похідних першого порядку у задане диференціальне рівняння і отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$yp\frac{dp}{dy} - p^2 = 0, \quad \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}, \quad \ln|p| = \ln|y| + \ln|C_1|,$$

$$p = C_1 y \quad \text{або} \quad \frac{dy}{dx} = C_1 y.$$

Знову відокремивши змінні в останньому рівнянні і проінтегрувавши, отримуємо розв'язок заданого рівняння

$$\ln|y| = C_1 x + \ln|C_2|$$

або

$$y = C_2 e^{C_1 x}.$$

Спосіб 2. Розглядаємо задане рівняння

$$yy'' - (y')^2 = 0,$$

як рівняння, ліву частину якого можна перетворити у похідну від функції $\frac{y'}{y}$. Для цього обидві частини рівняння помножимо на множник $\mu = \frac{1}{y^2}$. Маємо

$$\frac{yy'' - (y')^2}{y^2} = 0 \quad \text{або} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{y}\right) = 0.$$

Звідки

$$\frac{y'}{y} = C_1 \quad \text{або} \quad \frac{d}{dx}\ln|y| = C_1.$$

Проінтегрувавши обидві частини рівняння, отримуємо розв'язок заданого рівняння

$$\ln|y| = C_1 x + \ln|C_2|$$

або

$$y = C_2 e^{C_1 x}.$$

б) $y''y^3+1=0$, $y(1)=-1$, $y'(1)=-1$.

Підставимо вираз для другої похідної $y''=\dfrac{dp}{dy}p$ в задане рівняння і отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dp}{dy}py^3+1=0, \qquad \frac{dp}{dy}py^3=-1.$$

Відокремлюємо змінні та інтегруємо:

$$p\,dp=-\frac{1}{y^3}dy, \qquad \int p\,dp=-\int\frac{dy}{y^3},$$

$$\frac{p^2}{2}=\frac{1}{2y^2}+\frac{C_1}{2}, \qquad p^2=\frac{1}{y^2}+C_1,$$

де $p=y'$.

Отже,

$$y'^2=\frac{1}{y^2}+C_1, \qquad y'=\pm\sqrt{\frac{1}{y^2}+C_1}\,.$$

Покладаємо

$$y'=-\sqrt{\frac{1}{y^2}+C_1}\,.$$

Вибрали знак мінус перед коренем, враховуючи початкову умову $y'(1)=-1<0$. Перш ніж розв'язувати отримане рівняння, знаходимо сталу C_1, використовуючи обидві початкові умови $y(1)=-1$, $y'(1)=-1$. Маємо:

$$y'(1)=-\sqrt{\frac{1}{y^2(1)}+C_1}, \qquad -1=-\sqrt{1+C_1}\,,$$

$$1=1+C_1, \qquad C_1=0.$$

Тоді

$$y'=-\sqrt{\frac{1}{y^2}}, \qquad y'=-\frac{1}{|y|} \quad \text{або} \quad y'=\frac{1}{y},$$

бо в силу першої початкової умови $y<0$, отже $|y|=-y$.

Далі в рівнянні

$$y'=\frac{1}{y}$$

відокремлюємо змінні та інтегруємо

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y}; \qquad y\,dy=dx; \qquad x=\frac{y^2}{2}+C_2.$$

Врахуємо початкову умову $y(1)=-1$. Тоді

$$1=\frac{1}{2}+C_2; \qquad C_2=\frac{1}{2}.$$

Отже,

$$x=\frac{y^2}{2}+\frac{1}{2}; \qquad 2x=y^2+1; \qquad y^2=2x-1.$$

Розв'язок задачі Коші

$$y=-\sqrt{2x-1}\,.$$

Знак мінус вибрано з урахуванням початкової умови $y(1)=-1<0$.

Зауважимо, що істотним при розв'язанні був той факт, що довільна стала C_1 вибиралась безпосередньо після отримання відповідного диференціального рівняння, що спростило його розв'язання. ◄

Приклад 8. Розв'язати рівняння

$$yy''-(y')^2=6xy^2.$$

► Задане *рівняння однорідне відносно функції та її похідних*, бо функція

$$F(x,y,y',y'')=yy''-(y')^2-6xy^2$$

є однорідною функцією 2-го виміру відносно y,y',y'', тобто

$$F(x,ty,ty',ty'')=ty\cdot ty''-(ty')^2-6xt^2y^2=t^2(yy''-(y')^2-6xy^2)=$$
$$=t^2F(x,y,y',y'').$$

Тому застосуємо заміну

$$y=e^{\int z\,dx},$$

тоді

$$y'=z\,e^{\int z\,dx}, \quad y''=e^{\int z\,dx}(z^2+z').$$

Підставимо ці вирази у задане рівняння і отримаємо

$$e^{\int z\,dx}e^{\int z\,dx}(z^2+z')-(e^{\int z\,dx}\cdot z)^2=6x(e^{\int z\,dx})^2$$

або, після перетворень,

$$z'=6x.$$

Звідки, інтегруючи, маємо

$$z = 3x^2 + C_1 .$$

Отже,

$$y = e^{\int (3x^2 + C_1)\,dx}$$

або

$$y = C_2 e^{x^3 + C_1 x} . ◄$$

Приклад 9. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''(1 + 2\ln y') = 1 .$$

► Для заданого рівняння відшукати розв'язок у явному або неявному вигляді досить важко (перевірте!), але можна отримати розв'язок у параметричній формі.

Покладемо

$$y' = p(x) , \quad y'' = \frac{dp}{dx} .$$

Тоді отримаємо

$$\frac{dp}{dx}(1 + 2\ln p) = 1$$

або

$$dx = (1 + 2\ln p)\,dp .$$

Звідки

$$x = -p + 2p\ln p + C_1 .$$

Враховуючи, що $dy = p\,dx$, маємо

$$dy = p(1 + 2\ln p)\,dp ,$$

$$y = p^2 \ln p + C_2 .$$

Отже, отримали загальний розв'язок у параметричному вигляді

$$x = p(-1 + 2\ln p) + C_1 , \quad y = p^2 \ln p + C_2 . ◄$$

Лінійні диференціальні рівняння із змінними коефіцієнтами

Приклад 10. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = 0 ,$$

попередньо впевнившись, що функція $y_1(x) = x$ є його частинним розв'язком.

► Задане рівняння є *лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку із змінними коефіцієнтами*.

Переконаємось, що $y_1(x) = x$ – частинний розв'язок заданого рівняння. Знаходимо $y_1'(x) = 1,\ y_1''(x) = 0$. Підставивши $y(x),\ y_1'(x),\ y_1''(x)$ у диференціальне рівняння, отримаємо тотожність, тобто функція $y_1(x) = x$ є частинним розв'язком даного рівняння.

Виконуємо підстановку $y = y_1(x) \cdot z(x)$, тобто покладемо

$$y = x \cdot z ,$$

$$y' = xz' + z, \quad y'' = xz'' + 2z' .$$

Підставивши ці вирази в задане диференціальне рівняння, отримаємо

$$(x^2 + 1)(xz'' + 2z') - 2x(xz' + z) + 2xz = 0$$

або, після перетворень

$$x(x^2 + 1)z'' + 2z' = 0 .$$

Тепер, поклавши

$$z' = u, \quad z'' = u' ,$$

приходимо до рівняння першого порядку відносно функції $u = u(x)$

$$x(x^2 + 1)u' + 2u = 0 .$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними. Його загальний розв'язок має вигляд

$$u = C_1 \frac{x^2 + 1}{x^2}$$

(перевірте!).

Звідси, враховуючи, що $u = z'$, отримуємо рівняння першого порядку відносно z

$$z' = C_1 \frac{x^2 + 1}{x^2}, \quad dz = C_1\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)dx .$$

Інтегруючи останнє рівняння, знаходимо

$$z = C_1\left(x - \frac{1}{x}\right) + C_2 .$$

Оскільки $y = xz$, тобто $z = \frac{y}{x}$, отримуємо загальний розв'язок вихідного рівняння

$$y = C_1(x^2 - 1) + C_2 x . ◄$$

Приклад 11. Розв'язати задане диференціальне рівняння

$$xy'' + y' = x^2 ,$$

використовуючи метод варіації довільних сталих.

► Задане рівняння є *лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку із змінними коефіцієнтами*.

Розв'язуємо відповідне заданому рівнянню однорідне рівняння
$$xy'' + y' = 0 .$$

Використовуючи методи зниження порядку, отримаємо його загальний розв'язок
$$y = C_1 \ln x + C_2$$
(перевірте!).

Загальний розв'язок вихідного рівняння, згідно з методом варіації довільних сталих, шукаємо у вигляді
$$y = C_1(x)\ln x + C_2(x) .$$

Задане рівняння представляємо у вигляді
$$y'' + \frac{y'}{x} = x .$$

Далі складаємо систему для визначення $C_1'(x)$, $C_2'(x)$:
$$\begin{cases} C_1'(x)\ln x + C_2'(x)\cdot 1 = 0, \\ C_1'(x)\dfrac{1}{x} + C_2'(x)\cdot 0 = x. \end{cases}$$

Звідси
$$\begin{cases} C_1'(x) = x^2, \\ C_2'(x) = -x^2 \ln x. \end{cases}$$

Далі, інтегруючи, знаходимо
$$C_1(x) = \frac{x^3}{3} + C_1, \quad C_2(x) = -\frac{x^3}{3}\ln x + \frac{x^3}{9} + C_2 .$$

Отже, загальний розв'язок вихідного рівняння має вигляд
$$y = \left(\frac{x^3}{3} + C_1\right)\ln x - \frac{x^3}{3}\ln x + \frac{x^3}{9} + C_2$$
або, після перетворень
$$y = \frac{x^3}{9} + C_1 \ln x + C_2 . ◄$$

Лінійні однорідні диференціальні рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами

Приклад 12. Знайти загальні розв'язки рівнянь другого порядку:

а) $y'' - 5y' + 6y = 0$; б) $y'' + 4y' + 13y = 0$.

► Задані рівняння є *лінійними однорідними диференціальними рівняннями другого порядку зі сталими коефіцієнтами*.

а) для диференціального рівняння
$$y'' - 5y' + 6y = 0$$
складаємо характеристичне рівняння
$$k^2 - 5k + 6 = 0 ,$$
корені якого $k_1 = 2,\ k_2 = 3$ – дійсні і різні.

Отже, фундаментальною системою розв'язків є $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{3x}$, а загальний розв'язок записується так:
$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} ;$$

б) для диференціального рівняння
$$y'' + 4y' + 13y = 0$$
складаємо характеристичне рівняння
$$k^2 + 4k + 13 = 0 ,$$
корені якого $k_{1,2} = -2 \pm 3i$ – комплексні (пара комплексно-спряжених коренів).

Отже, фундаментальна система розв'язків: $y_1 = e^{-2x}\cos 3x$, $y_2 = e^{-2x}\sin 3x$, а загальний розв'язок представляється у вигляді:
$$y = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) . ◄$$

Приклад 13. Розв'язати рівняння
$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0 .$$

► Задане рівняння є *лінійним однорідним диференціальним рівнянням третього порядку зі сталими коефіцієнтами*.

Характеристичне рівняння для заданого диференціального рівняння
$$k^3 - 3k^2 + 3k - 1 = 0$$
або
$$(k-1)^3 = 0$$
має трикратний корінь $k_{1,2,3} = 1$.

Отже, фундаментальна система розв'язків: $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$, $y_3 = x^2 e^x$, а загальний розв'язок має вигляд:
$$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)e^x . ◄$$

Приклад 14. Знайти загальні розв'язки заданих рівнянь:

а) $y^{IV} - 2y'' = 0$; б) $y^{IV} + 2y'' + y = 0$.

► Задані рівняння є *лінійними однорідними диференціальними рівняннями четвертого порядку зі сталими коефіцієнтами*.

а) для диференціального рівняння

$$y^{IV} - 2y'' = 0$$

складаємо характеристичне рівняння

$$k^4 - 2k^2 = 0,$$

$$k^2(k^2 - 2) = 0,$$

корені якого $k_{1,2} = 0,\ k_{3,4} = \pm\sqrt{2}$.

Отже, фундаментальна система розв'язків: $y_1 = e^{0\cdot x} = 1,\ y_2 = x,$ $y_3 = e^{x\sqrt{2}},\ y_4 = e^{-x\sqrt{2}}$, а загальний розв'язок представляється так:

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{x\sqrt{2}} + C_4 e^{-x\sqrt{2}};$$

б) для диференціального рівняння

$$y^{IV} + 2y'' + y = 0$$

складаємо характеристичне рівняння

$$k^4 + 2k^2 + 1 = 0,$$

$$(k^2 + 1)^2 = 0,$$

Це рівняння має двократні комплексно-спряжені корені $k_{1,2} = \pm i$.

Врахуємо, що показник кратності $r = 2$ і те, що, виходячи з загального вигляду комплексно-спряжених коренів $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ (у нашому випадку $\alpha = 0,\ \beta = 1$), отримаємо фундаментальну систему розв'язків: $y_1 = \cos x$, $y_2 = x\cos x,\ y_3 = \sin x,\ y_4 = x\sin x$, а загальний розв'язок набуде вигляду:

$$y = (C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\sin x. \blacktriangleleft$$

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами

Приклад 15. Знайти загальні розв'язки заданих рівнянь:
а) $2y'' - y' - y = 4xe^{2x}$; б) $y'' - 2y' + 2y = x^2$.

► Маємо *лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами з правими частинами спеціального вигляду*.

а) для диференціального рівняння

$$2y'' - y' - y = 4xe^{2x}$$

відповідне йому однорідне рівняння

$$2y'' - y' - y = 0.$$

Складаємо характеристичне рівняння

$$2k^2 - k - 1 = 0,$$

корені якого $k_1 = 1,\ k_2 = -\frac{1}{2}$.

Загальний розв'язок однорідного рівняння:

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{x}{2}}.$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо методом підбору за виглядом правої частини $f(x)$, тобто у вигляді

$$\tilde{y} = e^{2x}(Ax + B),$$

бо права частина заданого рівняння $f(x) = 4xe^{2x}$ співпадає з загальним виглядом правої частини $f(x) = Q_s(x)e^{\alpha x}$ при $s = 1,\ \alpha = 2$, причому $\alpha = 2$ не є коренем характеристичного рівняння.

Знаходимо $\tilde{y}',\ \tilde{y}''$ та, підставляючи $\tilde{y},\ \tilde{y}',\ \tilde{y}''$ у задане диференціальне рівняння, отримаємо тотожність. Тут і далі для зручності обчислень виписуватимемо вирази для $\tilde{y},\ \tilde{y}',\ \tilde{y}'',\ldots$ в окремі рядки і зліва за вертикальною рискою розміщувати коефіцієнти, що стоять перед ними в рівнянні. Множимо ці вирази на коефіцієнти, додаємо, зводимо подібні члени і маємо тотожність, яка записується нижче горизонтальної риски. Отже, маємо

$$\begin{array}{r|l} -1 & \tilde{y} = e^{2x}(Ax + B) \\ -1 & \tilde{y}' = 2e^{2x}(Ax + B) + e^{2x}\cdot A = e^{2x}(2Ax + 2B + A) \\ 2 & \tilde{y}'' = 2e^{2x}(2Ax + 2B + A) + e^{2x}\cdot 2A = e^{2x}(4Ax + 4B + 4A) \end{array}$$

$$\overline{2\tilde{y}'' - \tilde{y}' - \tilde{y} = e^{2x}(5Ax + 5B + 7A) = 4xe^{2x}}$$

Скоротивши на e^{2x} та прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x, маємо

$$\begin{array}{r|l} x^1 & 5A = 4 \\ x^0 & 5B + 7A = 0 \end{array}$$

Звідки $A = \frac{4}{5},\ B = -\frac{28}{25}$.

Таким чином, частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння має вигляд

$$\tilde{y} = e^{2x}\left(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25}\right).$$

Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння:

$$y = y_0 + \tilde{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{x}{2}} + e^{2x}\left(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25}\right).$$

б) для диференціального рівняння

$$y'' - 2y' + 2y = x^2$$

відповідне йому однорідне рівняння

$$y'' - 2y' + 2y = 0 .$$

Складаємо характеристичне рівняння

$$k^2 - 2k + 2 = 0 ,$$

корені якого $k_{1,2} = 1 \pm i$.

Загальний розв'язок однорідного рівняння:

$$y_0 = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x) .$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$\tilde{y} = Ax^2 + Bx + C ,$$

бо права частина заданого рівняння $f(x) = x^2$ співпадає з загальним виглядом правої частини $f(x) = Q_s(x)e^{\alpha x}$ при $s = 2, \alpha = 0$, причому $\alpha = 0$ не є коренем характеристичного рівняння.

Знаходимо $\tilde{y}', \tilde{y}''$ та підставимо $\tilde{y}, \tilde{y}', \tilde{y}''$ у задане диференціальне рівняння

$$\begin{array}{r|l} 2 & \tilde{y} = Ax^2 + Bx + C \\ -2 & \tilde{y}' = 2Ax + B \\ 1 & \tilde{y}'' = 2A \end{array}$$

$$\tilde{y}'' - 2\tilde{y}' + 2\tilde{y} = 2Ax^2 + x(2B - 4A) + (2C - 2B + 2A) = x^2$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x :

$$\begin{array}{r|l} x^2 & 2A = 1 \\ x^1 & 2B - 4A = 0 \\ x^0 & 2C - 2B + 2A = 0 \end{array}$$

Звідки $A = \frac{1}{2},\ B = 1,\ C = \frac{1}{2}$.

Таким чином, частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння має вигляд

$$\tilde{y} = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x+1)^2 .$$

Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння:

$$y = y_0 + \tilde{y} = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \frac{1}{2}(x+1)^2 . \blacktriangleleft$$

Приклад 16. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 2y' + y = xe^x .$$

► Маємо *лінійне неоднорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами з правою частиною спеціального вигляду*.

Відповідне йому однорідне рівняння

$$y'' - 2y' + y = 0 .$$

Складаємо характеристичне рівняння

$$k^2 - 2k + 1 = 0 ,$$

корені якого $k_1 = k_2 = 1$.

Загальний розв'язок однорідного рівняння:

$$y_0 = (C_1 + C_2 x)e^x .$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$\tilde{y} = x^2 e^x (Ax + B) ,$$

бо права частина заданого рівняння $f(x) = xe^x$ співпадає з загальним виглядом правої частини $f(x) = Q_s(x)e^{\alpha x}$ при $s = 1, \alpha = 1$, причому число $\alpha = 1$ співпадає з коренем характеристичного рівняння кратності $r = 2$. Останнє обумовлює присутність множника x^2 .

Знаходимо $\tilde{y}', \tilde{y}''$ та підставимо $\tilde{y}, \tilde{y}', \tilde{y}''$ у задане диференціальне рівняння

$$\begin{array}{r|l} 1 & \tilde{y} = e^x (Ax^3 + Bx^2) \\ -2 & \tilde{y}' = e^x (3Ax^2 + 2Bx) + e^x (Ax^3 + Bx^2) \\ 1 & \tilde{y}'' = e^x (Ax^3 + x^2(3A+B) + 2Bx) + e^x (3Ax^2 + 2x(3A+B) + 2B) \end{array}$$

$$\tilde{y}'' - 2\tilde{y}' + \tilde{y} = e^x [x^3(A - 2A + A) + x^2(3A + B + 3A - 6A - 2B + B) +$$
$$+ x(2B + 6A + 2B - 4B) + 2B] = xe^x .$$

Скоротивши на e^x , після перетворень маємо

$$x \cdot 6A + 2B = x .$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x , маємо

$$\begin{array}{r|l} x^1 & 6A = 1 \\ x^0 & 2B = 0 \end{array}$$

Звідки $A = \frac{1}{6},\ B = 0$.

Таким чином, частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння має вигляд

$$\tilde{y} = \frac{1}{6}x^3 e^x .$$

Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння:

$$y = y_0 + \tilde{y} = (C_1 + C_2 x)e^x + \frac{1}{6}x^3 e^x . \blacktriangleleft$$

Приклад 17. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + 4y' + 4y = \cos 2x .$$

► Маємо *лінійне неоднорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами з правою частиною спеціального вигляду*.

Відповідне йому однорідне рівняння

$$y'' + 4y' + 4y = 0 .$$

Складаємо характеристичне рівняння

$$k^2 + 4k + 4 = 0$$

або

$$(k+2)^2 = 0 .$$

Корені характеристичного рівняння $k_1 = k_2 = -2$, тобто $k = -2$ – корінь кратності $r = 2$.

Загальний розв'язок однорідного рівняння:

$$y_0 = (C_1 + C_2 x)e^{-2x} .$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$\tilde{y} = A\cos 2x + B\sin 2x ,$$

бо права частина заданого рівняння $f(x) = \cos 2x$ співпадає з загальним виглядом правої частини $f(x) = e^{\alpha x}[P_{s_1}(x)\cos\beta x + Q_{s_2}(x)\sin\beta x]$, $\max(s_1, s_2) = s$ при $s = 0, \alpha = 0, \beta = 2$, причому число $\alpha \pm i\beta = \pm 2i$ не є коренем характеристичного рівняння.

Знаходимо $\tilde{y}', \tilde{y}''$ та підставимо $\tilde{y}, \tilde{y}', \tilde{y}''$ у задане диференціальне рівняння

$$\begin{array}{r|l} 4 & \tilde{y} = A\cos 2x + B\sin 2x \\ 4 & \tilde{y}' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x \\ 1 & \tilde{y}'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x \end{array}$$

$$\tilde{y}'' + 4\tilde{y}' + 4\tilde{y} = \cos 2x(-4A + 8B + 4A) + \sin 2x(-4B - 8A + 4B) = \cos 2x$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\cos 2x$ та $\sin 2x$, маємо

$$\begin{array}{r|l} \cos 2x & 8B = 1 \\ \sin 2x & -8A = 0 \end{array}$$

Звідки $A = 0$, $B = \frac{1}{8}$.

Таким чином, частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння має вигляд

$$\tilde{y} = \frac{1}{8}\sin 2x .$$

Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння:

$$y = y_0 + \tilde{y} = (C_1 + C_2 x)e^{-2x} + \frac{1}{8}\sin 2x . \blacktriangleleft$$

Приклад 18. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + y = x\sin x .$$

► Маємо *лінійне неоднорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами з правою частиною спеціального вигляду*.

Відповідне йому однорідне рівняння

$$y'' + y = 0 .$$

Складаємо характеристичне рівняння

$$k^2 + 1 = 0 ,$$

корені якого $k_{1,2} = \pm i$.

Загальний розв'язок однорідного рівняння:

$$y_0 = C_1\cos x + C_2\sin x .$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$\tilde{y} = x[(Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x] ,$$

бо права частина заданого рівняння $f(x) = x\sin x$ співпадає з загальним виглядом правої частини $f(x) = e^{\alpha x}[P_{s_1}(x)\cos\beta x + Q_{s_2}(x)\sin\beta x]$, $\max(s_1, s_2) = s$ при $s = 1, \alpha = 0, \beta = 1$, причому число $\alpha \pm i\beta = \pm i$ є коренем характеристичного рівняння (це обумовлює появу у вигляді частинного розв'язку множника x).

Знаходимо $\tilde{y}', \tilde{y}''$ та підставимо $\tilde{y}, \tilde{y}''$ у задане диференціальне рівняння

$$\begin{array}{r|l} 1 & \tilde{y} = (Ax^2 + Bx)\cos x + (Cx^2 + Dx)\sin x \\ 0 & \tilde{y}' = (2Ax + B)\cos x - (Ax^2 + Bx)\sin x + (2Cx + D)\sin x + (Cx^2 + Dx)\cos x \\ 1 & \tilde{y}'' = (2A + 2Cx + D)\cos x + (2Ax + B + Cx^2 + Dx)(-\sin x) + \\ & \quad + (-2Ax - B + 2C)\sin x + (-Ax^2 - Bx + 2Cx + D)\cos x \end{array}$$

$$\tilde{y}'' + \tilde{y} = (Ax^2 + Bx + 2A + 2Cx + D - Ax^2 - Bx + 2Cx + D)\cos x +$$

$$+ (Cx^2 + Dx - 2Ax - B - Cx^2 - Dx - 2Ax - B + 2C)\sin x = x\sin x .$$

Після перетворень маємо

$$(4Cx + 2A + 2D)\cos x + (-4Ax - 2B + 2C)\sin x = x\sin x ,$$

$$4Cx\cos x + 2(A + D)\cos x - 4Ax\sin x + 2(C - B)\sin x = x\sin x .$$

Далі прирівнюємо коефіцієнти при $x\cos x$, $\cos x$, $x\sin x$ та $\sin x$

$$\begin{array}{r|l} x\cos x & 4C = 0 \\ \cos x & 2(A + D) = 0 \\ x\sin x & -4A = 1 \\ \sin x & 2(C - B) = 0 \end{array}$$

Звідки $A = -\dfrac{1}{4},\ B = 0,\ C = 0,\ D = \dfrac{1}{4}$.

Таким чином, частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння має вигляд

$$\tilde{y} = -\frac{x^2}{4}\cos x + \frac{x}{4}\sin x .$$

Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння:

$$y = y_0 + \tilde{y} = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{x^2}{4}\cos x + \frac{x}{4}\sin x . \blacktriangleleft$$

Приклад 19. Знайти розв'язок рівняння

$$y'' + 6y' + 10y = 80e^x\cos x ,$$

який задовольняє початкові умови

$$y(0) = 4,\ \ y'(0) = 10 .$$

► Маємо *лінійне неоднорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами з правою частиною спеціального вигляду*.

Відповідне йому однорідне рівняння

$$y'' + 6y' + 10y = 0 .$$

Складаємо характеристичне рівняння

$$k^2 + 6k + 10 = 0 ,$$

корені якого $k_{1,2} = -3 \pm i$.

Загальний розв'язок однорідного рівняння:

$$y_0 = e^{-3x}(C_1\cos x + C_2\sin x) .$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$\tilde{y} = e^x(A\cos x + B\sin x) ,$$

бо права частина заданого рівняння $f(x) = 80e^x\cos x$ є частинним випадком вигляду $f(x) = e^{\alpha x}[P_{s_1}(x)\cos\beta x + Q_{s_2}(x)\sin\beta x]$, $\max(s_1, s_2) = s$ при $s = 0,\ \alpha = 1,\ \beta = 1$, причому число $\alpha \pm i\beta = 1 \pm i$ не є коренем характеристичного рівняння.

Знаходимо $\tilde{y}', \tilde{y}''$ та підставимо $\tilde{y}, \tilde{y}', \tilde{y}''$ у задане диференціальне рівняння

$$\begin{array}{r|l} 10 & \tilde{y} = e^x(A\cos x + B\sin x) \\ 6 & \tilde{y}' = e^x(A\cos x + B\sin x - A\sin x + B\cos x) \\ 1 & \tilde{y}'' = e^x(-2A\sin x + 2B\cos x) \end{array}$$

$$\tilde{y}'' + 6\tilde{y}' + 10\tilde{y} = e^x[(16A + 8B)\cos x + (16B - 8A)\sin x] = 80e^x\cos x$$

Далі прирівнюємо коефіцієнти при $e^x\cos x$, $e^x\sin x$

$$\begin{array}{r|l} e^x\cos x & 16A + 8B = 80 \\ e^x\sin x & 16B - 8A = 0 \end{array}$$

Звідки $A = 4$, $B = 2$.

Таким чином, частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння має вигляд

$$\tilde{y} = e^x(4\cos x + 2\sin x) .$$

Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння:

$$y = y_0 + \tilde{y} = e^{-3x}(C_1\cos x + C_2\sin x) + 2e^x(2\cos x + \sin x) .$$

Використовуючи початкові умови $y(0) = 4,\ y'(0) = 10$, знайдемо сталі C_1, C_2. При цьому перш за все знайдемо y':

$$y' = e^{-3x}(-3C_1\cos x - 3C_2\sin x - C_1\sin x + C_2\cos x) + 2e^x(3\cos x - \sin x) .$$

Далі отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + 4 = 4 \\ y'(0) = -3C_1 + C_2 + 6 = 10 \end{cases}$$

Звідки $C_1 = 0,\ C_2 = 4$.

Отже, розв'язок вихідного диференціального рівняння, що задовольняє задані початкові умови, має вигляд:

$$y = 4e^{-3x}\sin x + 2e^{x}(2\cos x + \sin x) . ◄$$

Приклад 20. Знайти розв'язок рівняння

$$y''' - 2y'' + y' = 4(\sin x + \cos x),$$

який задовольняє початкові умови

$$y(0) = 2,\ \ y'(0) = 2,\ \ y''(0) = -1 .$$

► Маємо *лінійне неоднорідне диференціальне рівняння третього порядку зі сталими коефіцієнтами з правою частиною спеціального вигляду*.

Відповідне йому однорідне рівняння

$$y''' - 2y'' + y' = 0 .$$

Складаємо характеристичне рівняння

$$k^3 - 2k^2 + k = 0,$$

корені якого $k_1 = 0,\ k_{2,3} = 1$.

Загальний розв'язок однорідного рівняння:

$$y_0 = C_1 + (C_2 + C_3 x)e^{x} .$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$\tilde{y} = A\cos x + B\sin x,$$

бо права частина заданого рівняння $f(x) = 4(\sin x + \cos x)$ співпадає з загальним виглядом правої частини $f(x) = e^{\alpha x}[P_{s_1}(x)\cos\beta x + Q_{s_2}(x)\sin\beta x]$, $\max(s_1, s_2) = s$ при $s = 0,\ \alpha = 0,\ \beta = 1$, причому число $\alpha \pm i\beta = \pm i$ не є коренем характеристичного рівняння.

Далі, знайшовши $\tilde{y}', \tilde{y}'', \tilde{y}'''$, підставимо в задане диференціальне рівняння і, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів (див. попередні приклади), знайдемо коефіцієнти: $A = B = 2$.

Таким чином, частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння має вигляд

$$\tilde{y} = 2\cos x + 2\sin x .$$

Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння:

$$y = y_0 + \tilde{y} = C_1 + (C_2 + C_3 x)e^{x} + 2\cos x + 2\sin x .$$

Продиференціювавши його двічі, знайдемо

$$y' = (C_2 + C_3(1 + x))e^{x} + 2(-\sin x + \cos x),$$

$$y'' = (C_2 + C_3(2 + x))e^{x} - 2(\cos x + \sin x) .$$

Скориставшись початковими умовами $y(0) = 2, y'(0) = 2, y''(0) = -1$, дістанемо систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + 2 = 2, \\ C_2 + C_3 + 2 = 2, \\ C_2 + 2C_3 - 2 = -1, \end{cases}$$

звідки $C_1 = 1, C_2 = -1, C_3 = 1$.

Отже, шуканий розв'язок має вигляд:

$$y = 1 + (x - 1)e^{x} + 2\cos x + 2\sin x . ◄$$

Приклад 21. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + y = xe^{x} + 2e^{-x} .$$

► Маємо *лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, права частина якого представляється сумою двох функцій спеціального вигляду.*

Відповідне однорідне рівняння

$$y'' + y = 0 .$$

Складаємо характеристичне рівняння

$$k^2 + 1 = 0,$$

корені якого $k_{1,2} = \pm i$.

Загальний розв'язок однорідного рівняння:

$$y_0 = C_1\cos x + C_2\sin x .$$

Використовуючи *принцип суперпозиції розв'язків*, частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 = (Ax + B)e^{x} + Ce^{-x},$$

бо для $\tilde{y}_1$ маємо: $f_1(x) = xe^{x}$, $s = 1,\ \alpha = 1$, число α не є коренем характеристичного рівняння; для $\tilde{y}_2$ маємо: $f_2(x) = 2e^{-x}$, $s = 0,\ \alpha = -1$, число α не є коренем характеристичного рівняння.

Знаходимо $\tilde{y}', \tilde{y}''$ та підставимо $\tilde{y}, \tilde{y}''$ у задане диференціальне рівняння

$$\begin{array}{r|l} 1 & \tilde{y} = (Ax + B)e^{x} + Ce^{-x} \\ 0 & \tilde{y}' = (Ax + B + A)e^{x} - Ce^{-x} \\ 1 & \tilde{y}'' = (Ax + B + A + A)e^{x} + Ce^{-x} \end{array}$$

$$\tilde{y}'' + \tilde{y} = e^{x}(2Ax + 2B + 2A) + 2Ce^{-x} = xe^{x} + 2e^{-x}$$

Після перетворень маємо

$$2Axe^x+2(A+B)e^x+2Ce^{-x}=xe^x+2e^{-x}.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при xe^x, e^x, e^{-x}, отримаємо:

$$\begin{array}{r|l} xe^x & 2A=1 \\ e^x & 2(A+B)=0 \\ e^{-x} & 2C=2 \end{array}$$

Звідки $A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{1}{2}$, $C=1$.

Таким чином, частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння має вигляд

$$\tilde{y}=\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)e^x+e^{-x}.$$

Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння:

$$y=y_0+\tilde{y}=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}(x-1)e^x+e^{-x}. \blacktriangleleft$$

Метод варіації довільних сталих

Приклад 22. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''+4y=\frac{1}{\cos 2x}.$$

► Маємо *лінійне неоднорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами,* де права частина має вигляд, відмінний від розглянутих вище спеціальних виглядів. Тому для знаходження частинного розв'язку рівняння скористаємось *методом варіації довільних сталих* (*методом Лагранжа*).

Складаємо характеристичне рівняння

$$k^2+4=0.$$

корені якого $k_{1,2}=\pm 2i$.

Загальний розв'язок однорідного рівняння:

$$y_0=C_1\sin 2x+C_2\cos 2x.$$

Частинний розв'язок $\tilde{y}$ запишемо за тією ж формулою, вважаючи C_1, C_2 функціями від x:

$$\tilde{y}=C_1(x)\sin 2x+C_2(x)\cos 2x.$$

Для знаходження $C_1(x), C_2(x)$ складемо систему вигляду (1.87):

$$\begin{cases} C_1'\sin 2x+C_2'\cos 2x=0, \\ 2C_1'\cos 2x-2C_2'\sin 2x=\dfrac{1}{\cos 2x}. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему відносно C_1', C_2', знайдемо

$$C_1'(x)=\frac{1}{2},\ \ C_2'(x)=-\frac{1}{2}\operatorname{tg}2x.$$

Інтегруючи, дістанемо:

$$C_1(x)=\frac{1}{2}\int dx=\frac{x}{2},\qquad C_2(x)=-\frac{1}{2}\int \operatorname{tg}2x\,dx=\frac{1}{4}\ln|\cos 2x|$$

(при інтегруванні довільні сталі поклали рівними нулю).

Таким чином, частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння має вигляд

$$\tilde{y}=\frac{x}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x\ \ln|\cos 2x|.$$

Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння:

$$y=y_0+\tilde{y}=C_1\sin 2x+C_2\cos 2x+\frac{x}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x\ln|\cos 2x|.$$

Таким самим буде результат, якщо під час інтегрування $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$ ввести довільні сталі $\overline{C}_1$, $\overline{C}_2$:

$$C_1(x)=\frac{x}{2}+\overline{C}_1,\qquad C_2(x)=\frac{1}{4}\ln|\cos 2x|+\overline{C}_2;$$

$$y=\left(\frac{x}{2}+\overline{C}_1\right)\sin 2x+\left(\frac{1}{4}\ln|\cos 2x|+\overline{C}_2\right)\cos 2x=\frac{x}{2}\sin 2x+$$

$$+\frac{1}{4}\cos 2x\ln|\cos 2x|+\overline{C}_1\sin 2x+\overline{C}_2\cos 2x. \blacktriangleleft$$

Приклад 23. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'''-2y''-y'+2y=\frac{e^{2x}}{e^x+1}.$$

► Маємо *лінійне неоднорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами,* де права частина має вигляд, відмінний від розглянутих вище спеціальних виглядів. Тому для знаходження частинного розв'язку рівняння скористаємось *методом варіації довільних сталих* (*методом Лагранжа*).

Складаємо характеристичне рівняння

$$k^3-2k^2-k+2=0.$$

корені якого $k_1=1$, $k_2=-1$, $k_3=2$.

Загальний розв'язок однорідного рівняння:

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}.$$

Частинний розв'язок $\widetilde{y}$ запишемо за тією ж формулою, вважаючи $C_i = C_i(x),\ i = \overline{1,3}$:

$$\widetilde{y} = C_1(x) e^x + C_2(x) e^{-x} + C_3(x) e^{2x}.$$

Система для відшукання $C_1'(x),\ C_2'(x),\ C_3'(x)$ в нашому випадку має вигляд:

$$\begin{cases} C_1' e^x + C_2' e^{-x} + C_3' e^{2x} = 0, \\ C_1' e^x - C_2' e^{-x} + 2C_3' e^{2x} = 0, \\ C_1' e^x + C_2' e^{-x} + 4C_3' e^{2x} = \dfrac{e^{2x}}{e^x+1}. \end{cases}$$

За формулами Крамера (визначник $\Delta = -6e^{2x} \neq 0$) знайдемо:

$$C_1'(x) = -\frac{1}{2}\,\frac{e^x}{e^x+1},\quad C_2'(x) = \frac{1}{6}\,\frac{e^{3x}}{e^x+1},\quad C_3'(x) = \frac{1}{3}\,\frac{1}{e^x+1}.$$

Інтегруючи, отримуємо:

$$C_1(x) = -\frac{1}{2}\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{d(e^x+1)}{e^x+1} = -\frac{1}{2}\ln\,(e^x+1),$$

$$C_2(x) = \frac{1}{6}\int \frac{e^{3x}}{e^x+1}\,dx = \frac{1}{6}\int \frac{e^{2x}\ d(e^x)}{e^x+1} = \frac{1}{6}\int\left(e^x - 1 + \frac{1}{e^x+1}\right) d(e^x) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{e^{2x}}{2} - e^x + \ln(e^x+1)\right),$$

$$C_3(x) = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{e^x+1} = \frac{1}{3}\int \frac{e^x + 1 - e^x}{e^x+1}\,dx = \frac{1}{3}\int\left(1 - \frac{e^x}{e^x+1}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left(x - \int \frac{d(e^x+1)}{e^x+1}\right) = \frac{1}{3}(x - \ln(e^x+1))$$

(при інтегруванні довільні сталі поклали рівними нулю).

Таким чином, частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння має вигляд

$$\widetilde{y} = -\frac{1}{2}e^x \ln(e^x+1) + \frac{1}{6}e^{-x}\left(\frac{e^{2x}}{2} - e^x + \ln(e^x+1)\right) + \frac{1}{3}e^{2x}(x - \ln(e^x+1)) =$$

$$= \frac{1}{12}e^x - \frac{1}{6} + \frac{1}{3}xe^{2x} + \left(\frac{1}{6}e^{-x} - \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{3}e^{2x}\right)\ln(e^x+1).$$

Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння:

$$y = y_0 + \widetilde{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x} + \frac{1}{12}(4xe^{2x} + e^x - 2) +$$

$$+ \frac{1}{6}(e^{-x} - 3e^x - 2e^{2x})\ln(e^x+1). ◄$$

Диференціальні рівняння Ейлера

Приклад 24. Знайти загальний розв'язок рівняння Ейлера

$$x^2 y'' + 3xy' + y = 0.$$

► Виконаємо заміну

$$x = e^t,\ x > 0.$$

Тоді

$$y_x' = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{y_t'}{e^t} = e^{-t} y_t',$$

$$y_{xx}'' = \frac{(y_x')_t'}{x_t'} = \frac{-e^{-t}y_t' + e^{-t}y_{tt}''}{e^t} = e^{-2t}(y_{tt}'' - y_t').$$

Підставимо x, y_x', y_{xx}'' в задане диференціальне рівняння

$$e^{2t}e^{-2t}(y_{tt}'' - y_t') + 3e^t e^{-t} y_t' + y = 0.$$

Звідки

$$y_{tt}'' + 2y_t' + y = 0.$$

Отримали лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами. Складаємо характеристичне рівняння:

$$k^2 + 2k + 1 = 0$$

або

$$(k+1)^2 = 0,$$

яке має двократний корінь $k_{1,2} = -1$.

Загальний розв'язок однорідного рівняння:

$$y = (C_1 + C_2 t)e^{-t}.$$

Повертаємось до змінної x: $x = e^t,\quad t = \ln x,\quad e^{-t} = \dfrac{1}{x}$.

Отже, загальний розв'язок рівняння Ейлера:

$$y = \frac{C_1}{x} + C_2\frac{\ln x}{x}.$$

Якщо врахувати випадок $x<0$, то загальний розв'язок можна записати у вигляді, що охоплює обидва випадки
$$y=\frac{C_1}{x}+C_2\frac{\ln|x|}{x}\,.\ ◄$$

Приклад 25. Знайти загальний розв'язок рівняння Ейлера
$$x^2y''-3xy'+4y=0\,.$$

► Покладемо
$$y=x^k,\ x>0\,.$$

Знайдемо
$$y'=kx^{k-1},\ y''=k(k-1)x^{k-2}$$
та підставимо в задане диференціальне рівняння:
$$x^2k(k-1)x^{k-2}-3x\,kx^{k-1}+4x^k=0$$
або
$$x^k(k^2-4k+4)=0\,.$$

Скоротивши на x^k, отримуємо характеристичне рівняння
$$k^2-4k+4=0$$
або
$$(k-2)^2=0\,,$$
корені якого $k_{1,2}=2$.

Тобто корінь характеристичного рівняння кратності 2, йому відповідає два лінійно незалежних розв'язки
$$y_1=x^2,\quad y_2=x^2\ln x\,.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння Ейлера:
$$y=C_1y_1+C_2y_2=x^2(C_1+C_2\ln x)\,.$$

Якщо врахувати випадок $x<0$, то загальний розв'язок запишеться у вигляді:
$$y=x^2(C_1+C_2\ln|x|)\,.\ ◄$$

Приклад 26. Знайти загальний розв'язок неоднорідного рівняння Ейлера
$$x^2y''-3xy'+5y=3x^2\,.$$

► Вважаємо $x>0$. Скористаємось підстановкою
$$x=e^t\,.$$

Тоді
$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=e^{-t}y'_t,\quad y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=e^{-2t}(y''_{tt}-y'_t)\,.$$

Підставивши в задане диференціальне рівняння, отримаємо
$$e^{2t}e^{-2t}(y''_{tt}-y'_t)-3e^te^{-t}y'_t+5y=3e^{2t}\,,$$
$$y''_{tt}-4y'_t+5y=3e^{2t}\,.$$

Цьому рівнянню відповідає однорідне диференціальне рівняння
$$y''_{tt}-4y'_t+5y=0\,,$$
загальний розв'язок якого
$$y_0=e^{2t}(C_1\cos t+C_2\sin t)\,.$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді:
$$\tilde{y}=Ae^{2t}\,.$$

Тоді
$$\tilde{y}'=2Ae^{2t},\quad \tilde{y}''=4Ae^{2t}\,.$$

Підставивши $\tilde{y},\tilde{y}',\tilde{y}''$ в неоднорідне рівняння, отримуємо: $A=3$.

Отже, частинний розв'язок неоднорідного рівняння
$$\tilde{y}=3e^{2t}\,.$$

Таким чином, загальний розв'язок рівняння Ейлера має вигляд:
$$y=y_0+\tilde{y}=e^{2t}(C_1\cos t+C_2\sin t+3)\,.$$

Повертаючись до початкової незалежної змінної x:
$$x=e^t,\quad t=\ln x\,,$$
отримуємо остаточно
$$y=x^2(C_1\cos\ln x+C_2\sin\ln x+3)\,.$$

Якщо врахувати випадок $x<0$, то загальний розв'язок можна записати у вигляді, що охоплює обидва випадки
$$y=x^2(C_1\cos\ln|x|+C_2\sin\ln|x|+3)\,.\ ◄$$

Задачі фізики

Приклад 27. Тіло масою m падає вертикально з деякої висоти без початкової швидкості. При падінні тіло зазнає опору повітря, пропорційного квадрату швидкості тіла. Знайти закон руху тіла.

► Нехай $s = s(t)$ – шлях, пройдений тілом за час t від початку руху, тоді $\frac{ds}{dt} = v$, $\frac{d^2 s}{dt^2} = w$ – швидкість і прискорення руху відповідно.

На тіло діють сили: $P = mg$ – вага тіла (у напрямі руху) і $F = kv^2 = k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ – опір повітря (проти напряму руху), де k – коефіцієнт пропорційності.

За другим законом Ньютона маємо:

$$mw = P - F$$

або

$$m\frac{d^2 s}{dt^2} = mg - k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2.$$

Маємо диференціальне рівняння другого порядку, яке не містить явно невідомої функції $s(t)$. Згідно з умовою задачі дістанемо такі початкові умови:

$$s(0) = 0, \quad \frac{ds(0)}{dt} = v(0) = 0.$$

Покладемо $\frac{ds}{dt} = v$, тоді $\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$ і дістанемо рівняння

$$m\frac{dv}{dt} = mg - k v^2$$

або

$$\frac{m}{k}\frac{dv}{dt} = a^2 - v^2,$$

де $a^2 = \frac{mg}{k}$.

Відокремлюючи змінні та інтегруючи, знаходимо

$$\frac{dv}{a^2 - v^2} = \frac{k}{m}dt, \qquad \frac{1}{2a}\ln\frac{a+v}{a-v} = \frac{k}{m}t + C_1.$$

Оскільки $v(0) = 0$, то $C_1 = 0$, тоді

$$\ln\frac{a+v}{a-v} = \frac{2akt}{m},$$

звідки

$$v = a\frac{e^{\frac{akt}{m}} - e^{-\frac{akt}{m}}}{e^{\frac{akt}{m}} + e^{-\frac{akt}{m}}} = a\,\mathrm{th}\frac{akt}{m} = a\,\mathrm{th}\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t.$$

Таким чином, для визначення функції $s(t)$ маємо рівняння:

$$\frac{ds}{dt} = a\,\mathrm{th}\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t.$$

Інтегруючи, знаходимо

$$s = \frac{m}{k}\ln\mathrm{ch}\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t + C_2.$$

Оскільки $s(0) = 0$, то $C_2 = 0$, тоді шуканий закон руху має вигляд

$$s = \frac{m}{k}\ln\mathrm{ch}\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t. \blacktriangleleft$$

Приклад 28. Два однакових вантажі підвішені до кінця пружини. Знайти рівняння руху, яке здійснюватиме один з цих вантажів, якщо інший відірветься.

► Нехай збільшення довжини пружини під дією одного вантажу у стані спокою дорівнює a і маса вантажу m. Позначимо через x координату вантажу, яка відраховується по вертикалі від положення рівноваги при наявності одного вантажу. Тоді

$$m\frac{d^2 x}{dt^2} = mg - k(x + a),$$

де $k = \frac{mg}{a}$, отже,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{g}{a}x.$$

Загальний розв'язок цього рівняння:

$$x = C_1\cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t + C_2\sin\sqrt{\frac{g}{a}}\,t.$$

Початкові умови дають

$$x = a, \quad \frac{dx}{dt} = 0 \quad \text{при } t = 0,$$

звідки $C_1 = a$, $C_2 = 0$, отже

$$x = a\cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t. \blacktriangleleft$$

IV. Задачі для практичних занять

Основні поняття

1.200. Знайти область існування та єдиності розв'язку диференціального рівняння:

а) $y'' = x + \sqrt{x^2 - y'}$, б) $y'' = y' \ln y'$.

1.201. Показати, що задана функція при будь-яких значеннях $C_1, C_2, C_3 \in \mathbf{R}$ є розв'язком даного диференціального рівняння:

а) $y = x^2 \ln x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3, \quad xy''' = 2$;

б) $e^y \sin^2(C_1 x + C_2) = 2C_1^2, \quad y'' = e^y$;

в) $C_1 y = \sin(C_1 x + C_2), \quad yy'' + 1 = y'^2$.

1.202. Показати, що задана функція є розв'язком вказаного диференціального рівняння:

а) $y = \frac{1}{2}(x^2 + 1), \quad 1 + y'^2 = 2yy''$;

б) $y = e^x, \quad y^2 + y'^2 = 2yy''$.

1.203. Скласти диференціальні рівняння заданих сімей кривих шляхом виключення параметрів:

а) прямих на площині, не паралельних осі Oy;

б) синусоїд $y = A\sin(x + \alpha)$, де A та α – параметри;

в) парабол з віссю, паралельною осі Oy.

Диференціальні рівняння вищих порядків, які допускають зниження порядку

У задачах 1.204 – 1.235 розв'язати вказані диференціальні рівняння, використовуючи методи зниження порядку.

1.204. $y'' = x + \sin x$. **1.205.** $y'' = \operatorname{arctg} x$.

1.206. $y'' = \ln x$. **1.207.** $y''' = \frac{1}{x}$.

1.208. $y''' = \cos 2x$. **1.209.** $xy''' = 2x + 3$.

1.210. $y^{IV} = \frac{8}{(x-3)^5}$. **1.211.** $y'' = \frac{1}{1+x^2}$.

1.212. $xy'' = y'$. **1.213.** $y'' = y' + x$.

1.214. $y'' = \frac{y'}{x} + x$.

1.215. $(1 + x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$.

1.216. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$. **1.217.** $(y'')^2 = y'$.

1.218. $2xy'y'' = (y')^2 + 1$. **1.219.** $y'' - 2\operatorname{ctg} x \cdot y' = \sin^3 x$.

1.220. $1 + (y')^2 = 2yy''$. **1.221.** $(y')^2 + 2yy'' = 0$.

1.222. $y'' + \frac{2}{1-y}(y')^2 = 0$. **1.223.** $yy'' + (y')^2 = 1$.

1.224. $yy'' = (y')^2$. **1.225.** $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2$.

1.226. $y(1 - \ln y)y'' + (1 + \ln y)(y')^2 = 0$.

1.227. $y'' \cos y + (y')^2 \sin y = y'$.

1.228. $yy'' - (y')^2 = y^2 y'$. **1.229.** $xy'' - 4(y'')^2 - y' = 0$.

1.230. $xy'' - y' = e^x x^2$. **1.231.** $x^3 y'' + x^2 y' - 1 = 0$.

1.232. $y''' = 2(y'' - 1)\operatorname{ctg} x$. **1.233.** $x^2 y''' = (y'')^2$.

1.234. $\frac{(y'')^2 - y'y'''}{(y')^2} = \frac{1}{x^2}$.

1.235. $xy'(yy'' - y'^2) - yy'^2 = x^4 y^3$.

У задачах 1.236 – 1.245 знайти частинні розв'язки вказаних диференціальних рівнянь при заданих початкових умовах.

1.236. $y''(x^2 + 1) = 2xy'$; $y(0) = 1, \ y'(0) = 3$.

1.237. $xy'' + x(y')^2 - y' = 0$; $y(2) = 2, \ y'(2) = 1$.

1.238. $y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x^2}{y'}$; $y(2) = 0,\ y'(2) = 4$.

1.239. $2y'' = 3y^2$; $y(-2) = 1,\ y'(-2) = -1$.

1.240. $yy'' = (y')^2 - (y')^3$; $y(1) = 1,\ y'(1) = -1$.

1.241. $y^3 y'' = -1$; $y(1) = 1,\ y'(1) = 0$.

1.242. $y^4 - y^3 y'' = 1$; $y(0) = \sqrt{2},\ y'(0) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

1.243. $y'' = e^{2y}$; $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

1.244. $2(y')^2 = y''(y-1)$; $y(1) = 2,\ y'(1) = -1$.

1.245. $y'' = xy' + y + 1$; $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

1.246. Знайти інтегральну криву диференціального рівняння $yy'y'' = y'^3 + y''^2$, для якої дотичною на початку координат є пряма $x + y = 0$.

1.247. Знайти інтегральну криву диференціального рівняння $yy'' + y'^2 - 1 = 0$, яка проходить через точку $M_0(0,1)$ і дотичною до якої в цій точці є пряма $x + y = 1$.

Лінійні диференціальні рівняння із змінними коефіцієнтами

1.248. Знайти загальний розв'язок заданого лінійного однорідного диференціального рівняння, якщо відомий його частинний розв'язок $y_1(x)$:

а) $(1-x^2)y'' - xy' + 9y = 0$, $y_1(x) = 4x^3 - 3x$;

б) $y'' - \operatorname{tg} x \cdot y' + 2y = 0$, $y_1(x) = \sin x$;

в) $xy'' + 2y' + xy = 0$, $y_1(x) = \dfrac{\sin x}{x}$;

г) $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$, $y_1(x) = x$.

1.249. Лінійне однорідне диференціальне рівняння

$$(2x - x^2)y'' + (x^2 - 2)y' + 2(1-x)y = 0$$

має частинний розв'язок $y_1(x) = e^x$. Знайти розв'язок рівняння, який задовольняє початкові умови $y(1) = 0,\ y'(1) = 1$.

1.250. Використовуючи метод варіації довільних сталих, знайти загальні розв'язки вказаних лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь:

а) $x^2 y'' - xy' = 3x^3$;

б) $x^2 y'' - xy' + y = 4x^3$;

в) $y'' - \dfrac{x}{x-1} y' + \dfrac{1}{x-1} y = x - 1$;

г) $(3x + 2x^2)y'' - 6(1+x)y' + 6y = 6$.

1.251. Лінійне неоднорідне диференціальне рівняння

$$(1+x^2)y'' + 2xy' - 2y = 4x^2 + 2$$

має частинний розв'язок $y_1(x) = x^2$. Знайти розв'язок рівняння, який задовольняє початкові умови $y(-1) = 0, y'(-1) = 0$.

Лінійні однорідні диференціальні рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами

У задачах 1.252 – 1.265 знайти загальні розв'язки вказаних диференціальних рівнянь.

1.252. $y'' + y' - 2y = 0$. **1.253.** $y'' - 9y = 0$.

1.254. $y'' - 4y' = 0$. **1.255.** $y'' - 2y' - y = 0$.

1.256. $3y'' - 2y' - 8y = 0$. **1.257.** $y'' + y = 0$.

1.258. $y'' + 6y' + 13y = 0$. **1.259.** $4y'' - 8y' + 5y = 0$.

1.260. $y'' - 2y' + y = 0$. **1.261.** $4\dfrac{d^2x}{dt^2} - 20\dfrac{dx}{dt} + 25x = 0$.

1.262. $y^{IV} + 4y'' + 3y = 0$. **1.263.** $y^{V} + 8y''' + 16y' = 0$.

1.264. $y^{V} - 6y^{IV} + 9y''' = 0$. **1.265.** $y^{VI} + 2y^{V} + y^{IV} = 0$.

У задачах 1.266 – 1.270 знайти розв'язки даних диференціальних рівнянь, які задовольняють вказані початкові умови.

1.266. $y'' - 4y' + 3y = 0$; $y(0) = 6,\ y'(0) = 10$.

1.267. $y''+4y'+29y=0$; $y(0)=0,\ y'(0)=15$.

1.268. $4y''+4y'+y=0$; $y(0)=2,\ y'(0)=0$.

1.269. $y''-2y'+y=0$; $y(2)=1,\ y'(2)=-2$.

1.270. $y'''-y'=0$; $y(0)=3,\ y'(0)=-1,\ y''(0)=1$.

1.271. Знайти інтегральну криву рівняння $y''+9y=0$, яка проходить через точку $M(\pi,-1)$ і дотичною до якої в цій точці є пряма $y+1=x-\pi$.

1.272. Знайти інтегральну криву рівняння $y''-y=0$, дотична до якої в точці $O(0,0)$ є прямою з рівнянням $y=x$.

1.273. Знайти інтегральну криву диференціального рівняння $y''-4y'+3y=0$, яка проходить через точку $M(0,2)$ і дотичною до якої в цій точці є пряма $2x-2y+4=0$.

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами

У задачах 1.274 – 1.282 для кожного з заданих лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь вказати вигляд частинного розв'язку з невизначеними коефіцієнтами (числових значень коефіцієнтів не знаходити).

1.274. $y''-8y'+16y=(1-x)e^{4x}$.

1.275. $y''-4y'=xe^{4x}$.

1.276. $y''-7y'=(x-1)^2$.

1.277. $y''+2y'+5y=e^x((x+1)\cos 2x+3\sin 2x)$.

1.278. $y''-4y'+13y=e^{2x}(x^2\cos 3x-x\sin 3x)$.

1.279. $y''+9y=\cos 2x$.

1.280. $y''+2y'+2y=e^x\sin x$.

1.281. $y''-2y'+5y=xe^x\cos 2x-x^2e^x\sin 2x$.

1.282. $y^{IV}+4y''+4y=x\sin 2x$.

У задачах 1.283 – 1.296 знайти загальні розв'язки заданих лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь.

1.283. $2y''+y'-y=2e^x$.

1.284. $y''+y=e^x$.

1.285. $y''-7y'+6y=\sin x$.

1.286. $y''+2y'+5y=-\dfrac{17}{2}\cos 2x$.

1.287. $y''-6y'+9y=2x^2-x+3$.

1.288. $y''-2y'+2y=2x$.

1.289. $y''+4y'-5y=1$.

1.290. $y''-3y'+2y=f(x)$, якщо:

1) $f(x)=10e^{-x}$; 2) $f(x)=3e^{2x}$;

3) $f(x)=2\sin x$; 4) $f(x)=2x^3-30$;

5) $f(x)=2e^x\cos\dfrac{x}{2}$; 6) $f(x)=e^x(3-4x)$;

7) $f(x)=x-e^{-2x}+1$; 8) $f(x)=3x+5\sin 2x$;

9) $f(x)=2e^x-e^{-2x}$; 10) $f(x)=\operatorname{sh} x$.

1.291. $2y''+5y'=f(x)$, якщо:

1) $f(x)=29x\sin x$; 2) $f(x)=100xe^{-x}\cos x$;

3) $f(x)=\cos^2 x$.

1.292. $y''+y=\cos x$.

1.293. $y''+y'-6y=xe^{2x}$.

1.294. $y''-2y'+5y=e^x\cos 2x$.

1.295. а) $y'''-3y''+3y'-y=e^x$;

б) $y'''-3y'+2y=e^{-x}(4x^2+4x-10)$.

1.296. а) $y^{IV}+y''=x^2+x$;

б) $y^{IV}+8y''+16y=\cos x$.

У задачах 1.297 – 1.302 визначити вигляд частинного розв'язку заданих лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь, використовуючи принцип суперпозиції розв'язків (числових значень коефіцієнтів не знаходити).

1.297. $y''-y'-2y=e^x+e^{-2x}$.

1.298. $y''+4y'=x+e^{-4x}$.

1.299. $y''-y=x+\sin x$.

1.300. $y''-2y'+2y=(1+\sin x)e^x$.

1.301. $y'''-y''=1+e^x$.

1.302. $y'''+4y'=e^{2x}+\sin 2x$.

1.303. $y''-4y'=2\cos^2 4x$.

У задачах 1.304 – 1.309 розв'язати задані лінійні неоднорідні диференціальні рівняння, використовуючи принцип суперпозиції розв'язків.

1.304. $y''-y'-2y=4x-2e^x$.

1.305. $y''-3y'=18x-10\cos x$.

1.306. $y''-2y'+y=2+e^x\sin x$.

1.307. $2y''-3y'-2y=5e^x\operatorname{ch}x$.

1.308. $y''+y'=\cos^2 x+e^x+x^2$.

1.309. $y''-4y'+4y=f(x)$, якщо

1) $f(x)=\sin x\cos 2x$; 2) $f(x)=8(x^2+e^{2x}+\sin 2x)$;

3) $f(x)=\operatorname{sh}2x$; 4) $f(x)=e^x-\operatorname{sh}(x-1)$.

1.310. $y'''+y''=6x+e^{-x}$.

У задачах 1.311 – 1.316 розв'язати задані лінійні неоднорідні диференціальні рівняння, застосувавши метод варіації довільних сталих.

1.311. $y''+y=\operatorname{tg}x$. **1.312.** $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x}$.

1.313. $y''+y=\dfrac{1}{\cos x}$. **1.314.** $y''-y=\operatorname{th}x$.

1.315. $y''-y'=\dfrac{1}{e^x+1}$. **1.316.** $y''+y=\dfrac{1}{\cos^3 x}$.

У задачах 1.317 – 1.321 знайти частинні розв'язки даних диференціальних рівнянь, які задовольняють вказані початкові умови.

1.317. $4y''+16y'+15y=4e^{-\frac{3}{2}x}$; $y(0)=3,\ y'(0)=-5{,}5$.

1.318. $y''-2y'+10y=10x^2+18x+6$; $y(0)=1, y'(0)=3{,}2$.

1.319. $y''-y'=2(1-x)$; $y(0)=1,\ y'(0)=1$.

1.320. $y''-2y'=e^x(x^2+x-3)$; $y(0)=2,\ y'(0)=1$.

1.321. $y''+y=-\sin 2x$; $y(\pi)=1,\ y'(\pi)=1$.

Диференціальні рівняння Ейлера

У задачах 1.322 – 1.327 знайти загальні розв'язки вказаних диференціальних рівнянь Ейлера.

1.322. а) $x^2y''-9xy'+21y=0$; б) $x^2y''+xy'+y=0$;

в) $x^2y'''-3xy''+3y'=0$; г) $x^2y'''-2y'=0$;

д) $(2x+1)^2y''-2(2x+1)y'+4y=0$.

1.323. $x^2y''+xy'+y=x$.

1.324. $y''-\dfrac{y'}{x}+\dfrac{y}{x^2}=\dfrac{2}{x}$.

1.325. $x^2y''-2xy'+2y=2x^3-x$.

1.326. $x^2y''-6y=12\ln x$.

1.327. $x^2y''+xy'+4y=10x$.

1.328. Знайти рівняння руху точки $s=s(t)$, якщо прискорення в залежності від часу задається формулою $a=1{,}2t$ і якщо відстань $s=0$ при $t=0$, відстань $s=20$ при $t=5$.

1.329. Тіло масою m ковзає по горизонтальній площині під дією поштовху, який дає початкову швидкість v_0. На тіло діє сила тертя, яка дорівнює $-km$. Знайти відстань, яку зможе пройти тіло.

1.330. Матеріальна точка масою $m = 1$ рухається прямолінійно, наближаючись до центра, який відштовхує її з силою, рівною $k^2 x$ (x – відстань точки від центра). При $t = 0$ $x = a$, $\frac{dx}{dt} = ka$. Знайти закон руху точки.

§3. Системи диференціальних рівнянь

І. Короткі теоретичні відомості

Основні поняття. Система k диференціальних рівнянь, яка зв'язує незалежну змінну x і k функцій $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_k(x)$, розв'язана відносно старших похідних цих функцій

$$y_1^{(p_1)}(x),\ y_2^{(p_2)}(x), \ldots,\ y_k^{(p_k)}(x),$$

називається *канонічною системою диференціальних рівнянь порядку* n, $n = p_1 + p_2 + \ldots + p_k$. Така система має вигляд

$$\begin{cases} y_1^{(p_1)}(x) = f_1(x, y_1, \ldots, y_1^{(p_1-1)}, \ldots, y_k, \ldots, y_k^{(p_k-1)}), \\ y_2^{(p_2)}(x) = f_2(x, y_1, \ldots, y_1^{(p_1-1)}, \ldots, y_k, \ldots, y_k^{(p_k-1)}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_k^{(p_k)}(x) = f_k(x, y_1, \ldots, y_1^{(p_1-1)}, \ldots, y_k, \ldots, y_k^{(p_k-1)}). \end{cases} \tag{1.114}$$

Нехай $k = n$ і $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1$, тобто система рівнянь складається з n диференціальних рівнянь першого порядку.

Система вигляду

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\ y_2'(x) = f_2(x, y_1, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n'(x) = f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{cases} \tag{1.115}$$

називається *нормальною системою*. Число n називається її *порядком*.

Розв'язком системи (1.115) на інтервалі $a < x < b$ називається сукупність функцій

$$y_1(x) = \varphi_1(x),\ y_2(x) = \varphi_2(x), \ldots,\ y_n(x) = \varphi_n(x),$$

неперервно диференційовних на (a, b) і таких, що перетворюють рівняння системи (1.115) в тотожності відносно $x \in (a, b)$.

Задача Коші для нормальної системи (1.115) ставиться так:

знайти розв'язок системи (1.115), який задовольняє початкові умови

$$y_1(x_0) = y_1^0,\ y_2(x_0) = y_2^0, \ldots,\ y_n(x_0) = y_n^0, \tag{1.116}$$

де $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$ – задані числа.

Для нормальної системи (1.115) справджується *теорема Коші про існування та єдиність розв'язку*: якщо в деякій області D функції $f_1, f_2, \ldots, f_n$, що є правими частинами системи (1.115), неперервні разом з частинними похідними $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$, $i, j = \overline{1, n}$, то для будь-якої точки $M_0(x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0) \in D$ існує єдиний розв'язок $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, який задовольняє початкові умови (1.116)

$$y_1(x_0) = y_1^0,\ y_2(x_0) = y_2^0, \ldots,\ y_n(x_0) = y_n^0.$$

Загальним розв'язком системи (1.115) називається сукупність функцій

$$y_i = y_i(x, C_1, \ldots, C_n),\ i = \overline{1, n}, \tag{1.117}$$

що залежать від n довільних сталих, які при будь-яких припустимих значеннях $C_1, \ldots, C_n$ перетворюють рівняння системи (1.115) в тотожності і для будь-яких початкових умов (1.116) існують такі числа $C_i = C_i^0$, що функції $y_i = y_i(x, C_1^0, \ldots, C_n^0)$, $i = \overline{1, n}$, задовольняють ці умови.

Розв'язки, які отримуються з загального розв'язку при конкретних значеннях $C_1, \ldots, C_n$, називаються *частинними розв'язками*.

Диференціальне рівняння n-го порядку

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{1.118}$$

можна звести до нормальної системи (1.115). І навпаки, система (1.115) в багатьох випадках зводиться до одного диференціального рівняння n-го порядку.

На цьому основано *метод виключення* для розв'язання нормальної системи диференціальних рівнянь (1.115), згідно з яким ця система зводиться до одного диференціального рівняння n-го порядку вигляду (1.118), яке розв'язується розглянутими раніше в § 2 цієї глави методами.

Фізичний зміст нормальної системи. Нехай незалежна змінна t – це час, а система, наприклад, двох диференціальних рівнянь має вигляд

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(t, x, y), \\ \frac{dy}{dt} = f_2(t, x, y). \end{cases} \tag{1.119}$$

Розв'язком $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ цієї системи є деяка крива (інтегральна крива) в площині xOy з фіксованою декартовою прямокутною системою координат. Площина xOy називається *фазовою площиною*, а крива $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ – *фазовою траєкторією* системи (1.119). Сама система (1.119) називається *динамічною системою*. Якщо в праві частини рівнянь системи (1.119) час t не входить явним чином, то така динамічна система називається *автономною (стаціонарною)*.

Динамічна система визначає поле швидкостей точки, що рухається, в будь-який момент часу t. Розв'язок $x=x(t)$, $y=y(t)$ динамічної системи – це рівняння руху точки, які визначають положення точки, що рухається, в будь-який момент часу t.

Початкові умови задають положення точки в початковий момент:

$$x(t_0)=x_0,\ \ y(t_0)=y_0.$$

Рівняння руху визначають також і траєкторію руху, будучи рівняннями цієї кривої в параметричній формі.

Лінійні системи диференціальних рівнянь. Загальна теорія

Система диференціальних рівнянь називається *лінійною*, якщо вона лінійна відносно всіх невідомих функцій та їх похідних.

Лінійні однорідні системи диференціальних рівнянь

Нормальна лінійна однорідна система n-го порядку має вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=a_{11}(t)x_1+a_{12}(t)x_2+\ldots+a_{1n}(t)x_n, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=a_{21}(t)x_1+a_{22}(t)x_2+\ldots+a_{2n}(t)x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt}=a_{n1}(t)x_1+a_{n2}(t)x_2+\ldots+a_{nn}(t)x_n \end{cases} \tag{1.120}$$

або в матричній формі

$$\frac{dX}{dt}=A(t)X(t), \tag{1.121}$$

де

$$A(t)=\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \ldots & a_{2n}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{pmatrix},\quad X(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix},\quad \frac{dX}{dt}=\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}.$$

В області неперервності коефіцієнтів $a_{ij}(t)$, $i,j=\overline{1,n}$, система (1.120) задовольняє умови теореми існування і єдиності розв'язку задачі Коші.

Фундаментальною системою розв'язків системи (1.120) називається сукупність n лінійно незалежних розв'язків цієї системи

$$X_k(t)=(x_1^{(k)}(t), x_2^{(k)}(t), \ldots, x_n^{(k)}(t))^T,\ \ k=\overline{1,n}. \tag{1.122}$$

Структура загального розв'язку однорідної системи диференціальних рівнянь. Загальний розв'язок однорідної системи диференціальних рівнянь (1.120) представляється у вигляді

$$X(t)=\sum_{k=1}^{n} C_k X_k(t), \tag{1.123}$$

де $X_k(t)$, $k=\overline{1,n}$ – фундаментальна система розв'язків цієї системи, $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – довільні сталі.

Лінійні неоднорідні системи диференціальних рівнянь

Нормальна лінійна неоднорідна система n-го порядку має вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=a_{11}(t)x_1+a_{12}(t)x_2+\ldots+a_{1n}(t)x_n+f_1(t), \\ \dfrac{dx_2}{dt}=a_{21}(t)x_1+a_{22}(t)x_2+\ldots+a_{2n}(t)x_n+f_2(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt}=a_{n1}(t)x_1+a_{n2}(t)x_2+\ldots+a_{nn}(t)x_n+f_n(t), \end{cases} \tag{1.124}$$

де хоча б одна з функцій $f_k(t)$ тотожно не дорівнює нулю.

У матричній формі ця система має вигляд

$$\frac{dX}{dt}=A(t)X(t)+F(t), \tag{1.125}$$

де $F(t)=(f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t))^T$. (1.126)

Відповідна однорідна система рівнянь для системи (1.124) має вигляд

$$\frac{dX}{dt}=A(t)X(t). \tag{1.127}$$

Структура загального розв'язку неоднорідної системи диференціальних рівнянь. Загальний розв'язок неоднорідної системи диференціальних рівнянь (1.124) представляється у вигляді

$$X(t)=X_0(t)+\widetilde{X}(t), \tag{1.128}$$

де $X_0(t)$ – загальний розв'язок відповідної однорідної системи, $\widetilde{X}(t)$ – деякий частинний розв'язок заданої неоднорідної системи (1.124).

Методи розв'язання лінійних однорідних систем диференціальних рівнянь

1. Метод виключення, оснований на зведенні системи до одного однорідного диференціального рівняння n-го порядку.

2. Метод Ейлера, призначений для систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами (наводиться нижче).

Методи розв'язання лінійних неоднорідних систем диференціальних рівнянь

1. Метод виключення, оснований на зведенні системи до одного неоднорідного диференціального рівняння n-го порядку.

2. Метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа).

3. Метод підбору вигляду частинного розв'язку за спеціальним виглядом правої частини, призначений для систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами (наводиться нижче). При цьому загальний розв'язок знаходиться за формулою (1.128).

Розглянемо детально *метод варіації довільних сталих*.

Нехай задана лінійна неоднорідна система диференціальних рівнянь

$$\frac{d\mathrm{X}}{dt} = \mathrm{A}(t)\,\mathrm{X}(t) + \mathrm{F}(t)\,.$$

Відповідна їй однорідна система

$$\frac{d\mathrm{X}}{dt} = \mathrm{A}(t)\,\mathrm{X}(t)\,.$$

Нехай відома фундаментальна система розв'язків однорідної системи: $\mathrm{X}_k(t),\ \ k = \overline{1, n}$. Загальний розв'язок однорідної системи представляється у вигляді

$$\mathrm{X}(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k\,\mathrm{X}_k(t)\,,$$

де $C_k,\ k = \overline{1, n}$ – довільні сталі.

Загальний розв'язок неоднорідної системи шукаємо у вигляді

$$\mathrm{X}(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k(t)\,\mathrm{X}_k(t)\,, \tag{1.129}$$

де функції $C_k(t),\ k = \overline{1, n}$, визначаються з умови того, щоб $\mathrm{X}(t)$ було розв'язком системи (1.125).

Підставляємо (1.129) в неоднорідну систему (1.125) і, враховуючи при цьому рівності

$$\frac{d\mathrm{X}_k}{dt} - \mathrm{A}(t)\,\mathrm{X}_k(t) = 0, \quad k = \overline{1, n}\,,$$

приходимо до системи алгебраїчних рівнянь відносно $\dfrac{dC_k(t)}{dt}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{dC_k(t)}{dt}\,\mathrm{X}_k(t) = \mathrm{F}(t)\,. \tag{1.130}$$

З цієї системи знаходимо $\dfrac{dC_k(t)}{dt} = \varphi_k(t)$ та, інтегруючи, отримуємо функції $C_k(t),\ k = \overline{1, n}$, з точністю до довільних сталих. Підставляючи їх у (1.129), маємо шуканий загальний розв'язок неоднорідної системи (1.125).

Лінійні однорідні системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Лінійна однорідна система диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами має вигляд

$$\frac{d\mathrm{X}}{dt} = \mathrm{A}\,\mathrm{X}(t)\,, \tag{1.131}$$

де

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \frac{d\mathrm{X}}{dt} = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}.$$

Тут A – матриця коефіцієнтів a_{ij} системи, де a_{ij} – сталі, $i, j = \overline{1, n}$.

Розглянемо *метод Ейлера* для розв'язання такої системи. У цьому методі для відшукання фундаментальної системи розв'язків використовуються методи лінійної алгебри.

Суть методу Ейлера така.

Складаємо *характеристичне рівняння*

$$\det(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{E}) = 0\,. \tag{1.132}$$

Далі знаходимо його корені $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – власні значення матриці A і для кожного кореня $\lambda_k,\ k = \overline{1, n}$ (з урахуванням його кратності), визначається відповідний йому частинний розв'язок $\mathrm{X}^{(\lambda_k)}(t)$.

Загальний розв'язок системи (1.131) має вигляд

$$\mathrm{X}(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k\,\mathrm{X}^{(\lambda_k)}(t)\,, \tag{1.133}$$

де $\mathrm{X}^{(\lambda_k)}(t)$ – лінійно незалежні розв'язки системи.

При цьому можливі такі випадки:

а) λ – *дійсний корінь кратності 1*. Тоді

$$\mathrm{X}^{(\lambda)}(t) = \mathrm{Y}^{(\lambda)} e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} y_1^{(\lambda)} \\ y_2^{(\lambda)} \\ \vdots \\ y_n^{(\lambda)} \end{pmatrix} e^{\lambda t}, \tag{1.134}$$

де $\mathrm{Y}^{(\lambda)}$ – власний вектор матриці A, який відповідає власному значенню λ, тобто

$$\mathrm{A}\,\mathrm{Y}^{(\lambda)} = \lambda \mathrm{Y}^{(\lambda)}, \quad \mathrm{Y}^{(\lambda)} \neq 0;$$

б) λ – *комплексний корінь кратності 1*. Тоді коренем характеристичного рівняння (1.132) є також спряжене з λ число $\overline{\lambda}$. Замість комплексних частинних розв'язків $\mathrm{X}^{(\lambda)}(t)$ та $\mathrm{X}^{(\overline{\lambda})}(t)$ треба взяти дійсні частинні розв'язки

$$\begin{aligned} \mathrm{X}_1^{(\lambda)}(t) &= \operatorname{Re} \mathrm{X}^{(\lambda)}(t), \\ \mathrm{X}_2^{(\lambda)}(t) &= \operatorname{Im} \mathrm{X}^{(\lambda)}(t); \end{aligned} \tag{1.135}$$

в) λ – *корінь кратності* $r \geq 2$. Відповідний цьому кореню розв'язок системи (1.131) відшукується у вигляді вектора

$$\mathrm{X}^{(\lambda)}(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)} + \alpha_1^{(2)} t + \ldots + \alpha_1^{(r)} t^{r-1} \\ \alpha_2^{(1)} + \alpha_2^{(2)} t + \ldots + \alpha_2^{(r)} t^{r-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n^{(1)} + \alpha_n^{(2)} t + \ldots + \alpha_n^{(r)} t^{r-1} \end{pmatrix} e^{\lambda t}. \tag{1.136}$$

Коефіцієнти $\alpha_i^{(j)}$, $i, j = \overline{1, n}$, визначаються із системи лінійних рівнянь, яка отримується прирівнянням коефіцієнтів при однакових степенях t внаслідок підстановки вектора (1.136) в початкову систему (1.131) (метод невизначених коефіцієнтів).

Лінійні неоднорідні системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Лінійна неоднорідна система диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами має вигляд

$$\frac{d\mathrm{X}}{dt} = \mathrm{A}\,\mathrm{X}(t) + \mathrm{F}(t), \tag{1.137}$$

де A – матриця коефіцієнтів a_{ij} системи, де a_{ij} – сталі, $i, j = \overline{1, n}$, $\mathrm{F}(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t))^T$, $f_i(t)$, $i = \overline{1, n}$ – задані функції.

Загальний розв'язок такої системи представляється у вигляді

$$\mathrm{X}(t) = \mathrm{X}_0(t) + \widetilde{\mathrm{X}}(t), \tag{1.138}$$

де $\mathrm{X}_0(t)$ – загальний розв'язок відповідної однорідної системи

$$\frac{d\mathrm{X}}{dt} = \mathrm{A}\,\mathrm{X}(t), \tag{1.139}$$

$\widetilde{\mathrm{X}}(t)$ – деякий частинний розв'язок неоднорідної системи (1.137).

Для відшукання загального розв'язку відповідної однорідної системи використовуються відомі методи: метод виключення або метод Ейлера.

Для відшукання частинного розв'язку неоднорідної системи може бути використаний метод підбору вигляду частинного розв'язку за спеціальним виглядом правої частини (метод невизначених коефіцієнтів).

Цей метод застосовується, коли функції $f_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, які стоять в правій частині системи, мають спеціальний вигляд: многочлени $P_k(t)$, показникові функції $e^{\alpha t}$, синуси і косинуси $\sin\beta t$, $\cos\beta t$ та добутки цих функцій. Тобто, якщо функції $f_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, мають вигляд добутків

$$(P(t)\cos\beta t + Q(t)\sin\beta t)\,e^{\alpha t}, \tag{1.140}$$

де $P(t), Q(t)$ – многочлени, то частинний розв'язок $\widetilde{\mathrm{X}}(t)$ можна знайти методом невизначених коефіцієнтів, записавши $\widetilde{\mathrm{X}}(t)$ у вигляді, аналогічному (1.140) з урахуванням співпадіння або не співпадіння чисел $\alpha \pm i\beta$ з коренями характеристичного рівняння.

Маємо підхід аналогічний тому, що має місце при розгляданні неоднорідних диференціальних рівнянь n - го порядку зі сталими коефіцієнтами. При цьому можливе застосування принципу суперпозиції.

У більш складних випадках, коли не вдається звести праву частину до вказаного спеціального вигляду, використовується метод варіації довільних сталих.

II. Контрольні питання та завдання

1. Яка система диференціальних рівнянь називається канонічною?
2. Яка система диференціальних рівнянь називається нормальною?
3. Як ставиться задача Коші для нормальної системи диференціальних рівнянь?
4. Що називається загальним розв'язком нормальної системи диференціальних рівнянь?

5. Наведіть фізичний зміст нормальної системи диференціальних рівнянь.

6. Запишіть лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь.

7. Дайте означення фундаментальної системи розв'язків однорідної системи диференціальних рівнянь.

8. Яка структура загального розв'язку лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь?

9. Запишіть лінійну неоднорідну систему диференціальних рівнянь.

10. Яка структура загального розв'язку лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь?

11. Наведіть методи інтегрування лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь.

12. Наведіть методи інтегрування лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь.

13. У чому полягає метод виключення для однорідних систем; для неоднорідних систем?

14. У чому полягає метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа) для неоднорідної системи?

15. Запишіть у матричному вигляді однорідну систему диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

16. Яке рівняння називається характеристичним? Запишіть його.

17. Викладіть суть методу Ейлера розв'язання лінійних однорідних систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

18. Який частинний розв'язок системи відповідає простому кореню характеристичного рівняння; кратному кореню кратності $r \ge 2$; комплексно-спряженому кореню?

19. Запишіть у матричному вигляді неоднорідну систему диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

20. У чому полягає метод підбору вигляду частинного розв'язку лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь за спеціальним виглядом правої частини? Які спеціальні вигляди правої частини при цьому використовуються?

III. Приклади розв'язання задач

У цьому пункті розглянуто 17 прикладів розв'язання задач, які за своєю тематикою розподілились так:

1. Основні поняття: *приклади 1 – 8.*

2. Лінійні системи диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами: *приклади 9 – 11*.

3. Лінійні однорідні системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами: *приклади 12 – 15*.

4. Лінійні неоднорідні системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами: *приклади 16 – 18*.

Основні поняття

Приклад 1. Звести канонічну систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} y_1'' = 2y_1 - 3y_2, \\ y_2'' = y_1 - 2y_2 \end{cases}$$

до нормального вигляду.

► Покладемо $y_1' = y_3, \quad y_2' = y_4$.

Тоді задану систему можна записати у вигляді

$$\begin{cases} y_1' = y_3, \\ y_2' = y_4, \\ y_3' = 2y_1 - 3y_2, \\ y_4' = y_1 - 2y_2, \end{cases}$$

яка і є нормальною системою четвертого порядку. ◄

Приклад 2. Звести до нормальної системи задане диференціальне рівняння

$$y''(x) + k^2 y(x) = 0 .$$

► Покладемо $y' = z$, тоді $y'' = z'$ і рівняння зводиться до нормальної системи рівнянь

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = -k^2 y. \end{cases}$$ ◄

Приклад 3. Показати, що система функцій $x_1 = -\dfrac{1}{t^2}$, $x_2 = -t\ln t$, визначених на інтервалі $0 < t < +\infty$, є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2tx_1^2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{x_2}{t} - 1. \end{cases}$$

► Підставляючи задані функції $x_1 = -\dfrac{1}{t^2}$, $x_2 = -t\ln t$ та їх похідні $\dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{2}{t^3}$, $\dfrac{dx_2}{dt} = -\ln t - 1$ в рівняння системи, отримуємо тотожності:

$$\frac{2}{t^3} = \frac{2t}{t^4} \equiv \frac{2}{t^3}; \quad -\ln t - 1 \equiv -\ln t - 1, \quad 0 < t < +\infty .$$

Отже, задана система функцій є розв'язком системи. ◄

Приклад 4. Показати, що система функцій

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x},$$

$$z(x) = 2C_1 e^{-x} - 2C_2 e^{3x}$$

є загальним розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y - z, \\ \dfrac{dz}{dx} = -4y + z. \end{cases}$$

► У даному прикладі за область D можна прийняти область $-\infty < x, y, z < +\infty$. Підставляючи функції $y(x)$, $z(x)$ та їх похідні $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dz}{dx}$ в систему диференціальних рівнянь, отримуємо тотожності, справедливі при будь-яких значеннях C_1, C_2 (перевірте!).

Для будь-яких значень $x_0, y_0, z_0 \in D$ виконуються умови теореми Коші. Підставивши ці значення в систему розв'язків, отримаємо систему для визначення сталих C_1, C_2:

$$y_0 = C_1 e^{-x_0} + C_2 e^{3x_0},$$

$$z_0 = 2C_1 e^{-x_0} - 2C_2 e^{3x_0}.$$

Визначник цієї системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{-x_0} & e^{3x_0} \\ 2e^{-x_0} & -2e^{3x_0} \end{vmatrix} = 2e^{2x_0} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4e^{2x_0} \neq 0 \qquad \forall x_0 .$$

Отже, для будь-яких y_0, z_0 числа C_1, C_2 визначаються однозначно, тобто з системи заданих функцій можна отримати будь-який розв'язок задачі Коші для системи диференціальних рівнянь. ◄

Приклад 5. Розв'язати задану систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = y, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = x. \end{cases}$$

► Задана система складається з двох рівнянь другого порядку, де невідомими є функції $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Розв'язуємо систему *методом виключення*. Диференціюючи двічі перше рівняння, отримуємо рівняння

$$\frac{d^4x}{dt^4} = \frac{d^2y}{dt^2} .$$

Враховуючи це рівняння та друге рівняння системи, матимемо

$$\frac{d^4x}{dt^4} = x .$$

Інтегруючи останнє рівняння, яке є лінійним однорідним рівнянням зі сталими коефіцієнтами, дістанемо

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t .$$

Далі, диференціюючи двічі та підставляючи в перше рівняння системи, знаходимо

$$y = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - C_3 \cos t - C_4 \sin t .$$ ◄

Приклад 6. Знайти загальний розв’язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -z, \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z^2}{y} \end{cases}$$

і частинний розв’язок, який задовольняє початкові умови

$$y(1) = 1, \quad z(1) = -\frac{1}{2}.$$

► Задана система є нормальною системою диференціальних рівнянь, що складається з диференціальних рівнянь першого порядку, які не є лінійними. Розв’язуємо її *методом виключення*.

Перше рівняння системи продиференціюємо по x:

$$y'' = -z'.$$

Оскільки з другого рівняння системи $z' = \dfrac{z^2}{y}$, то $y'' = -\dfrac{z^2}{y}$, але з першого рівняння $z^2 = (y')^2$, тому система двох рівнянь першого порядку звелась до одного рівняння другого порядку

$$y'' = -\frac{(y')^2}{y}$$

або

$$y''y + (y')^2 = 0.$$

Ліва частина цього рівняння є $(yy')'$, тому

$$yy' = \frac{1}{2}C_1,$$

звідки

$$y\,dy = \frac{1}{2}C_1\,dx, \quad \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}C_1 x + \frac{1}{2}C_2,$$

тобто

$$y = \pm\sqrt{C_1 x + C_2}.$$

З першого рівняння системи $z = -y'$, тобто

$$z = \mp\frac{C_1}{2\sqrt{C_1 x + C_2}}.$$

Система функцій

$$y = \pm\sqrt{C_1 x + C_2},$$
$$z = \mp\frac{C_1}{2\sqrt{C_1 x + C_2}}$$

утворює загальний розв’язок заданої системи.

Знайдемо частинний розв’язок, використовуючи початкові умови $y(1) = 1,\ z(1) = -\dfrac{1}{2}$ та записавши загальний розв’язок у вигляді:

$$y = \sqrt{C_1 x + C_2},\ z = -\frac{C_1}{2\sqrt{C_1 x + C_2}}$$

(тут взято знак “плюс” перед коренем у виразі для y, бо саме так можна задовольнити умову $y(1) = 1$, у виразі для z взято відповідно перший знак – “мінус”). Тоді

$$1 = \sqrt{C_1 + C_2}, \quad -\frac{1}{2} = -\frac{C_1}{2\sqrt{C_1 + C_2}}.$$

Звідси $C_1 = 1,\ C_2 = 0$.

Отже, пара функцій $y = \sqrt{x},\ \ z = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ – частинний розв’язок заданої системи. ◄

Приклад 7. Показати, що систему рівнянь

$$\begin{cases} y' = xy, \\ z' + y' = z + xy \end{cases}$$

не можна звести до одного рівняння.

► Підставивши $y' = xy$ у друге рівняння системи, отримуємо систему двох рівнянь, не зв’язаних між собою

$$\begin{cases} y' = xy, \\ z' = z. \end{cases}$$

Розв’язуючи кожне рівняння окремо, знаходимо

$$y = C_1 e^{x^2/2}, \quad z = C_2 e^x. ◄$$

Приклад 8. Знайти фазову траєкторію автономної динамічної системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x^2}{y}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x, \end{cases}$$

яка проходить через точку $M_0(2,3)$.

► Розв'язання задачі зводиться до знаходження загального розв'язку заданої системи диференціальних рівнянь. Виключаючи з цього розв'язку час t, отримуємо рівняння фазових траєкторій, з сукупності яких виділимо ту, що проходить через точку $M_0(2,3)$.

Загальний розв'язок знайдемо *методом виключення*. Запишемо друге рівняння системи у вигляді

$$x = y'.$$

Продиференціюємо це рівняння по t

$$x' = y''$$

та підставимо x і x' у перше рівняння системи. Отримаємо

$$y'' = \frac{(y')^2}{y}$$

або

$$y''y - (y')^2 = 0,$$

тобто маємо одне рівняння другого порядку з однією невідомою функцією y.

Поділимо ліву та праву частини останнього рівняння на y^2:

$$\frac{y''y - (y')^2}{y^2} = 0.$$

Тоді це рівняння запишеться так:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y'}{y}\right) = 0.$$

Звідси

$$\frac{y'}{y} = C_1$$

або

$$\frac{dy}{y} = C_1 dt.$$

Звідки, інтегруючи, отримуємо

$$\ln|y| = C_1 t + \ln|C_2|$$

або

$$y = C_2 e^{C_1 t}.$$

Тоді

$$y' = C_1 C_2 e^{C_1 t}.$$

Підставивши цей вираз у друге рівняння системи, отримуємо

$$x = C_1 C_2 e^{C_1 t}.$$

Отже, загальний розв'язок системи:

$$x = C_1 C_2 e^{C_1 t}, \quad y = C_2 e^{C_1 t}.$$

Виключимо з загального розв'язку час t. Отримуємо

$$x = C_1 y,$$

тобто фазовими траєкторіями системи є прямі.

Виділимо пряму, яка проходить через точку $M_0(2,3)$:

$$2 = C_1 \cdot 3, \quad C_1 = \frac{2}{3}.$$

Отже, фазова траєкторія, що проходить через точку $M_0(2,3)$, має рівняння

$$y = \frac{3}{2}x. \blacktriangleleft$$

Лінійні системи диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами

Приклад 9. Розв'язати задану систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{x}{t} + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{2x}{t^2} + \dfrac{y}{t}. \end{cases}$$

► Маємо *лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами*. Розв'язуємо її *методом виключення*.

З першого рівняння системи знаходимо

$$y = x' + \frac{x}{t}.$$

Звідки

$$y' = x'' + \frac{1}{t}x' - \frac{x}{t^2}.$$

Підставляємо y та y' у друге рівняння системи

$$x'' + \frac{1}{t}x' - \frac{x}{t^2} = -\frac{2x}{t^2} + \frac{1}{t}\left(x' + \frac{x}{t}\right).$$

Звідки

$$x'' = 0.$$

Інтегруючи це рівняння, отримуємо

$$x' = C_1,$$

$$x = C_1 t + C_2.$$

Далі, враховуючи, що $y = x' + \frac{x}{t}$, отримуємо

$$y = C_1 + \frac{C_1 t + C_2}{t} = 2C_1 + \frac{C_2}{t}.$$

Загальний розв'язок системи

$$x = C_1 t + C_2,$$

$$y = C_1 + \frac{C_1 t + C_2}{t} = 2C_1 + \frac{C_2}{t}, \quad t \neq 0. \blacktriangleleft$$

Приклад 10. Знайти розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{2x}{t^2}, \end{cases}$$

який задовольняє початкові умови

$$x(-1) = 1, \quad y(-1) = -2.$$

► Маємо *лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами*. Розв'язуємо її *методом виключення*.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} = \frac{2}{t^2}x$$

або

$$t^2\frac{d^2x}{dt^2} - 2x = 0.$$

Отримали *однорідне рівняння Ейлера*, розв'язок якого шукаємо у вигляді $x = t^k$.

Підставляючи $x = t^k$ та $x'' = k(k-1)t^{k-2}$ в рівняння та скорочуючи на t^k, отримуємо характеристичне рівняння

$$k(k-1) - 2 = 0$$

або

$$k^2 - k - 2 = 0,$$

корені якого $k_1 = 2,\ k_2 = -1$.

Загальний розв'язок рівняння Ейлера

$$x = C_1 t^2 + \frac{C_2}{t}.$$

Звідси

$$x' = 2C_1 t - \frac{C_2}{t^2}.$$

Підставляючи це в перше рівняння, маємо

$$y = 2C_1 t - \frac{C_2}{t^2}.$$

Отже, загальний розв'язок заданої системи

$$x = C_1 t^2 + \frac{C_2}{t}, \quad y = 2C_1 t - \frac{C_2}{t^2}.$$

Враховуючи початкові умови, знаходимо сталі C_1, C_2:

$$\begin{cases} x(-1) = C_1 - C_2 = 1, \\ y(-1) = -2C_1 - C_2 = -2. \end{cases}$$

Звідси $C_1 = 1, C_2 = 0$.

Отже, шуканий розв'язок такий: $x = t^2,\ y = 2t$. ◄

Приклад 11. Розв'язати систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{2x}{t} + 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = \left(1 + \dfrac{2}{t}\right)x + y - 1. \end{cases}$$

► Маємо *лінійну неоднорідну систему диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами*.

Перше рівняння системи розв'язуємо незалежно від другого. Запишемо його у вигляді

$$x' + \frac{2}{t}x - 1 = 0.$$

Це лінійне диференціальне рівняння першого порядку відносно x та x', розв'язання якого можна виконати методом Бернуллі, використовуючи підстановку

$$x = u(t) \cdot v(t).$$

Після розв'язання отримаємо

$$x(t) = \frac{t}{3} + \frac{C_1}{t^2}$$

(перевірте!)

Підставляючи $x(t)$ у друге рівняння системи, отримуємо

$$y' - y = \frac{t}{3} + \frac{C_1}{t^2} + \frac{2C_1}{t^3} - \frac{1}{3}.$$

Це теж лінійне диференціальне рівняння першого порядку відносно y та y'. Розв'язавши це рівняння, отримуємо

$$y = C_2 e^t - \frac{t}{3} - \frac{C_1}{t^2}$$

(перевірте!)

Отже, загальний розв'язок системи

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{C_1}{t^2} + \dfrac{t}{3}, \\ y(t) = -\dfrac{C_1}{t^2} + C_2 e^t - \dfrac{t}{3}, \quad t \neq 0. \end{cases}$$ ◄

Лінійні однорідні системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Приклад 12. Розв'язати задану систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 3y \end{cases}$$

двома способами: 1) методом виключення; 2) методом Ейлера.

► Задана система є *лінійною однорідною системою зі сталими коефіцієнтами*, де невідомими є функції $x = x(t)$, $y = y(t)$. Система відповідає випадку, коли *корені характеристичного рівняння дійсні та різні* (див. розв'язання). Розв'язання системи виконаємо двома способами.

Спосіб 1. Метод виключення (зведення до однорідного диференціального рівняння другого порядку).

Запишемо задану систему у вигляді

$$\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 4x + 3y. \end{cases}$$

З першого рівняння системи знаходимо y:

$$y = \frac{1}{2}x' - \frac{1}{2}x.$$

Звідси

$$y' = \frac{1}{2}x'' - \frac{1}{2}x'.$$

Підставимо y та y' у друге рівняння системи:

$$\frac{1}{2}x'' - \frac{1}{2}x' = 4x + 3\left(\frac{1}{2}x' - \frac{1}{2}x\right).$$

Після перетворень отримуємо

$$x'' - 4x' - 5x = 0.$$

Це *лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами*, розв'язання якого виконується відомим методом.

Записуємо характеристичне рівняння

$$k^2 - 4k - 5 = 0.$$

Корені його $k_1 = 5$, $k_2 = -1$ – *дійсні та різні*.

Отже, загальний розв'язок отриманого рівняння є

$$x(t) = C_1 e^{5t} + C_2 e^{-t}.$$

Далі знаходимо x':

$$x' = 5C_1 e^{5t} - C_2 e^{-t}.$$

Підставимо x та x' у вираз для визначення функції y:

$$y = \frac{1}{2}\left(5C_1 e^{5t} - C_2 e^{-t}\right) - \frac{1}{2}\left(C_1 e^{5t} + C_2 e^{-t}\right) = 2C_1 e^{5t} - C_2 e^{-t}.$$

Отже, загальний розв'язок заданої системи такий:

$$x(t) = C_1 e^{5t} + C_2 e^{-t},$$

$$y(t) = 2C_1 e^{5t} - C_2 e^{-t}.$$

Спосіб 2. Метод Ейлера (за допомогою характеристичного рівняння).

Для заданої системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 3y, \end{cases}$$

матриця якої $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, складаємо характеристичне рівняння:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

або, після перетворень

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0,$$

яке має корені $\lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = -1$ – *дійсні та різні*.

Частинні лінійно незалежні розв'язки системи $X^{(\lambda_1)}(t)$ і $X^{(\lambda_2)}(t)$ запишемо у вигляді:

$$X^{(\lambda_1)}(t) = Y^{(\lambda_1)} e^{5t},\ X^{(\lambda_2)}(t) = Y^{(\lambda_2)} e^{-t},$$

де $Y^{(\lambda_1)}, Y^{(\lambda_2)}$ – власні вектори, які відповідають власним значенням λ_1 та λ_2.

Знаходимо ці власні вектори з системи рівнянь

$$\begin{cases} (1-\lambda)x + \quad 2y = 0, \\ \quad 4x + (3-\lambda)y = 0. \end{cases}$$

Підставимо послідовно λ_1 та λ_2 в записану систему:

а) $\lambda_1 = 5$.

Отримуємо однорідну систему, у якій два рівняння еквівалентні, і тому розв'язання її виконується так:

$$\begin{cases} -4x + 2y = 0, \\ 4x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad y = 2x \quad \Rightarrow \begin{cases} x = C, \\ y = 2C. \end{cases}$$

Нехай, наприклад, $C = 1$, тоді власний вектор $Y^{(\lambda_1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

б) $\lambda_2 = -1$.

Маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 0, \\ 4x - 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x = -y \quad \Rightarrow \begin{cases} x = C, \\ y = -C. \end{cases}$$

Нехай, наприклад, $C = 1$, тоді власний вектор $Y^{(\lambda_2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Отже, загальний розв'язок заданої системи має вигляд

$$X(t) = \sum_{k=1}^{2} C_k X^{(\lambda_k)}(t) = C_1 Y^{(\lambda_1)} e^{5t} + C_2 Y^{(\lambda_2)} e^{-t} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{5t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

або

$$x(t) = C_1 e^{5t} + C_2 e^{-t},$$
$$y(t) = 2C_1 e^{5t} - C_2 e^{-t}. \blacktriangleleft$$

Приклад 13. Знайти загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -2x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

двома способами: 1) методом виключення; 2) методом Ейлера.

► Задана система є *лінійною однорідною системою зі сталими коефіцієнтами*, де невідомими є функції $x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t)$. Система відповідає випадку, коли *корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені* (див. розв'язання). Розв'язання системи виконаємо двома способами.

Спосіб 1. Метод виключення (зведення до однорідного диференціального рівняння другого порядку).

Запишемо задану систему у вигляді

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2, \\ x_2' = -2x_1 + 3x_2. \end{cases}$$

З першого рівняння системи знаходимо x_2:

$$x_2 = x_1' - x_1.$$

Звідси

$$x_2' = x_1'' - x_1'.$$

Підставимо x_2 та x_2' у друге рівняння системи:

$$x_1'' - x_1' = -2x_1 + 3(x_1' - x_1).$$

Після перетворень отримуємо

$$x_1'' - 4x_1' + 5x_1 = 0.$$

Це *лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами*, розв'язання якого виконується відомим методом.

Записуємо характеристичне рівняння

$$k^2 - 4k + 5 = 0 .$$

Корені його $k_{1,2} = 2 \pm i$ – *комплексно-спряжені*.

Отже, загальний розв'язок отриманого рівняння є

$$x_1(t) = e^{2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) .$$

Далі знаходимо x_1':

$$x_1' = 2e^{2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^{2t}(-C_1 \sin t + C_2 \cos t) =$$
$$= e^{2t}[C_1(2\cos t - \sin t) + C_2(2\sin t + \cos t)] .$$

Підставимо x_1 та x_1' у вираз для визначення функції x_2:

$$x_2 = x_1' - x_1 = e^{2t}[C_1(2\cos t - \sin t) + C_2(2\sin t + \cos t)] -$$
$$- e^{2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) = e^{2t}[C_1(\cos t - \sin t) + C_2(\sin t + \cos t)] .$$

Отже, загальний розв'язок заданої системи такий:

$$x_1(t) = e^{2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) ,$$
$$x_2(t) = e^{2t}[C_1(\cos t - \sin t) + C_2(\sin t + \cos t)] .$$

Спосіб 2. Метод Ейлера (за допомогою характеристичного рівняння).

Для заданої системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -2x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

матриця якої $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, складаємо характеристичне рівняння:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) + 2 = 0$$

або

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 ,$$

яке має корені $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$ – *комплексно-спряжені*.

Для знаходження власного вектора, який відповідає кореню $\lambda = 2 + i$, отримуємо систему, у якій два рівняння еквівалентні (перевірте!)

$$\begin{cases} (-1-i)x_1 + x_2 = 0, \\ -2x_1 + (1-i)x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x_2 = (1+i)x_1 \quad \Rightarrow \begin{cases} x_1 = C, \\ x_2 = (1+i)C. \end{cases}$$

Нехай $C = 1$, тоді $x_1 = 1$, $x_2 = 1 + i$, тобто $Y^{(\lambda)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$ і

$$X^{(\lambda)}(t) = Y^{(\lambda)} e^{(2+i)t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} e^{(2+i)t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} e^{2t} e^{it} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} e^{2t}(\cos t + i\sin t) =$$
$$= \begin{pmatrix} e^{2t}\cos t + ie^{2t}\sin t \\ e^{2t}(\cos t - \sin t) + ie^{2t}(\cos t + \sin t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t}\cos t \\ e^{2t}(\cos t - \sin t) \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} e^{2t}\sin t \\ e^{2t}(\cos t + \sin t) \end{pmatrix} .$$

Звідси пара дійсних частинних розв'язків має вигляд:

$$X^{(\lambda_1)}(t) = \operatorname{Re}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} e^{(2+i)t}\right) = \begin{pmatrix} e^{2t}\cos t \\ e^{2t}(\cos t - \sin t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} e^{2t} ,$$

$$X^{(\lambda_2)}(t) = \operatorname{Im}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} e^{(2+i)t}\right) = \begin{pmatrix} e^{2t}\sin t \\ e^{2t}(\cos t + \sin t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} e^{2t} .$$

Остаточно отримуємо загальний розв'язок

$$X(t) = C_1 X^{(\lambda_1)}(t) + C_2 X^{(\lambda_2)}(t) = C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} e^{2t} =$$
$$= \begin{pmatrix} C_1 \cos t + C_2 \sin t \\ C_1(\cos t - \sin t) + C_2(\cos t + \sin t) \end{pmatrix} e^{2t}$$

або

$$x_1(t) = e^{2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) ,$$
$$x_2(t) = e^{2t}[C_1(\cos t - \sin t) + C_2(\sin t + \cos t)] . ◄$$

Приклад 14. Знайти загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_1 - x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 4x_1 + 6x_2 \end{cases}$$

двома способами: 1) методом виключення; 2) методом Ейлера.

► Задана система є *лінійною однорідною системою зі сталими коефіцієнтами*, де невідомими є функції $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$. Система відповідає випадку, коли *корені характеристичного рівняння дійсні, кратні* (див. розв'язання). Розв'язання системи виконаємо двома способами.

Спосіб 1. Метод виключення (зведення до однорідного диференціального рівняння другого порядку).

Запишемо задану систему у вигляді

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2, \\ x_2' = 4x_1 + 6x_2. \end{cases}$$

З першого рівняння системи знаходимо x_2:

$$x_2 = -x_1' + 2x_1.$$

Звідси

$$x_2' = -x_1'' + 2x_1'.$$

Підставимо x_2 та x_2' у друге рівняння системи:

$$-x_1'' + 2x_1' = 4x_1 + 6(-x_1' + 2x_1).$$

Після перетворень отримуємо

$$x_1'' - 8x_1' + 16x_1 = 0.$$

Це *лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами*, розв'язання якого виконується відомим методом.

Записуємо характеристичне рівняння

$$k^2 - 8k + 16 = 0,$$

$$(k-4)^2 = 0.$$

Корені його $k_1 = k_2 = 4$ – *дійсні, кратні, з показником кратності* $r = 2$.

Отже, загальний розв'язок отриманого рівняння є

$$x_1(t) = C_1 e^{4t} + t C_2 e^{4t}.$$

Далі знаходимо x_1':

$$x_1' = 4C_1 e^{4t} + C_2 e^{4t} + 4t C_2 e^{4t}.$$

Підставимо x_1 та x_1' у вираз для визначення функції x_2:

$$x_2 = -x_1' + 2x_1 = e^{4t}(-4C_1 - C_2 - 4t\,C_2) + 2e^{4t}(C_1 + tC_2) =$$
$$= e^{4t}[C_1(-2) + C_2(-1-2t)].$$

Отже, загальний розв'язок заданої системи такий:

$$x_1(t) = (C_1 + tC_2)e^{4t},$$

$$x_2(t) = [-2C_1 - (1+2t)C_2]e^{4t}.$$

Спосіб 2. Метод Ейлера (за допомогою характеристичного рівняння).

Для заданої системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_1 - x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 4x_1 + 6x_2 \end{cases}$$

матриця якої $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, складаємо характеристичне рівняння:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 4 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(6-\lambda) + 4 = 0$$

або

$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0,$$

$$(\lambda - 4)^2 = 0,$$

яке має корені $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 4$, тобто корінь $\lambda = 4$ – *дійсний, кратний з показником кратності* $r = 2$.

Тому шукаємо розв'язок системи у вигляді

$$X^{(\lambda)}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 t \\ \alpha_2 + \beta_2 t \end{pmatrix} e^{4t},$$

де $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ – невизначені коефіцієнти.

Тобто

$$x_1(t) = (\alpha_1 + \beta_1 t)e^{4t},$$

$$x_2(t) = (\alpha_2 + \beta_2 t)e^{4t}.$$

Звідси

$$x_1'(t) = \beta_1 e^{4t} + (\alpha_1 + \beta_1 t)\cdot 4e^{4t} = (4\alpha_1 + \beta_1 + 4\beta_1 t)e^{4t},$$

$$x_2'(t) = \beta_2 e^{4t} + (\alpha_2 + \beta_2 t)\cdot 4e^{4t} = (4\alpha_2 + \beta_2 + 4\beta_2 t)e^{4t}.$$

Підставивши $x_1(t), x_2(t), x_1'(t), x_2'(t)$ в задану систему та скорочуючи на e^{4t}, отримуємо

$$\begin{cases} 4\alpha_1 + \beta_1 + 4\beta_1 t = 2\alpha_1 + 2\beta_1 t - \alpha_2 - \beta_2 t, \\ 4\alpha_2 + \beta_2 + 4\beta_2 t = 4\alpha_1 + 4\beta_1 t + 6\alpha_2 + 6\beta_2 t. \end{cases}$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях t, отримуємо систему для визначення коефіцієнтів $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$

$$\begin{cases} 4\alpha_1+\beta_1=2\alpha_1-\alpha_2,\\ 4\beta_1 \quad =2\beta_1-\beta_2,\\ 4\alpha_2+\beta_2=4\alpha_1+6\alpha_2,\\ 4\beta_2 \quad =4\beta_1+6\beta_2, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} \beta_1 + 2\alpha_1+\alpha_2=0,\\ \beta_2-4\alpha_1-2\alpha_2=0,\\ 2\beta_1+\beta_2=0,\\ -4\beta_1-2\beta_2=0. \end{cases}$$

Треба знайти нетривіальні розв'язки цієї системи. Враховуючи, що ранг матриці цієї системи дорівнює двом (перевірте!), маємо дві вільні змінні, наприклад, α_1, β_1.

Позначимо $\alpha_1=C_1$, $\beta_1=C_2$. Маємо $\beta_2=-2C_2$, $\alpha_2=-2C_1-C_2$.

Отже, дістали загальний розв'язок системи у вигляді

$$X(t)=X^{(\lambda)}(t)=\begin{pmatrix} C_1+C_2t\\ -2C_1-C_2-2C_2t \end{pmatrix}e^{4t}=\begin{pmatrix} C_1+C_2t\\ -2C_1+C_2(-1-2t) \end{pmatrix}e^{4t}$$

або

$$x_1(t)=(C_1+C_2t)e^{4t},$$

$$x_2(t)=[-2C_1-(1+2t)C_2]e^{4t}. \blacktriangleleft$$

Приклад 15. Знайти частинний розв'язок лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=4x_1+x_2,\\ \dfrac{dx_2}{dt}=3x_1+2x_2,\\ \dfrac{dx_3}{dt}=2x_1+3x_2+4x_3, \end{cases}$$

який задовольняє початкові умови

$$x_1(0)=6,\ x_2(0)=-6,\ x_3(0)=24.$$

► Задана система є *лінійною однорідною системою зі сталими коефіцієнтами*, що складається з трьох рівнянь, де невідомими є функції $x_1=x_1(t)$, $x_2=x_2(t)$, $x_3=x_3(t)$. Скористаємось методом Ейлера для знаходження загального розв'язку системи.

Матриця системи

$$A=\begin{pmatrix} 4&1&0\\ 3&2&0\\ 2&3&4 \end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} 4-\lambda&1&0\\ 3&2-\lambda&0\\ 2&3&4-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Розкриваючи визначник, маємо

$$(4-\lambda)[(4-\lambda)(2-\lambda)-3]=0$$

або

$$(4-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+5)=0.$$

Звідси корені характеристичного рівняння $\lambda_1=1, \lambda_2=4, \lambda_3=5$.

Запишемо систему для визначення власних векторів

$$\begin{cases} (4-\lambda)x_1+x_2=0,\\ 3x_1+(2-\lambda)x_2=0,\\ 2x_1+3x_2+(4-\lambda)x_3=0. \end{cases}$$

Покладаємо послідовно $\lambda_1=1, \lambda_2=4, \lambda_3=5$ в цій системі і отримуємо власні вектори $Y^{(\lambda_1)}, Y^{(\lambda_2)}, Y^{(\lambda_3)}$:

$$Y^{(\lambda_1)}=\begin{pmatrix} 3\\ -9\\ 7 \end{pmatrix},\quad Y^{(\lambda_2)}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1 \end{pmatrix},\quad Y^{(\lambda_3)}=\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 5 \end{pmatrix}.$$

Тому фундаментальну систему запишемо у вигляді:

$$X^{(\lambda_1)}=\begin{pmatrix} 3\\ -9\\ 7 \end{pmatrix}e^{t},\quad X^{(\lambda_2)}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1 \end{pmatrix}e^{4t},\quad X^{(\lambda_3)}=\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 5 \end{pmatrix}e^{5t}.$$

Звідси маємо загальний розв'язок системи:

$$X(t)=C_1\begin{pmatrix} 3\\ -9\\ 7 \end{pmatrix}e^{t}+C_2\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1 \end{pmatrix}e^{4t}+C_3\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 5 \end{pmatrix}e^{5t}.$$

Для відшукання частинного розв'язку визначимо сталі C_1, C_2, C_3, враховуючи початкові умови:

$$X(0)=\begin{pmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\\x_3(0)\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}3\\-9\\7\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3C_1+C_3\\-9C_1+C_3\\7C_1+C_2+5C_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-6\\24\end{pmatrix}.$$

Маємо систему:

$$\begin{cases}3C_1+C_3=6,\\-9C_1+C_3=-6,\\7C_1+C_2+5C_3=24.\end{cases}$$

Розв'язавши систему, отримаємо $C_1=1, C_2=2, C_3=3$.

Остаточно шуканий частинний розв'язок такий:

$$X(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-9\\7\end{pmatrix}e^t+2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}e^{4t}+3\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}e^{5t}$$

або

$$x_1(t)=3e^t+3e^{5t},$$
$$x_2(t)=-9e^t+3e^{5t},$$
$$x_3(t)=7e^t+2e^{4t}+15e^{5t}. \blacktriangleleft$$

Лінійні неоднорідні системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Приклад 16. Знайти загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=6x_1+x_2+t,\\ \dfrac{dx_2}{dt}=5x_1+2x_2+1\end{cases}$$

трьома способами:

1) методом виключення;

2) методом варіації довільних сталих;

3) методом підбору вигляду частинного розв'язку за виглядом правої частини.

► Маємо *лінійну неоднорідну систему диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами*, де невідомими є функції $x_1=x_1(t),\ x_2=x_2(t)$. Розв'язання системи виконуємо трьома способами.

Спосіб 1. Метод виключення.

Запишемо систему у вигляді

$$\begin{cases}x_1'=6x_1+x_2+t,\\x_2'=5x_1+2x_2+1.\end{cases}$$

З першого рівняння системи знаходимо x_2:

$$x_2=x_1'-6x_1-t. \qquad (1)$$

Звідси

$$x_2'=x_1''-6x_1'-1.$$

Підставимо x_2 та x_2' у друге рівняння системи:

$$x_1''-6x_1'-1=5x_1+2(x_1'-6x_1-t)+1.$$

Після перетворень отримаємо

$$x_1''-8x_1'+7x_1=-2t+2. \qquad (2)$$

Це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Відповідне йому однорідне рівняння

$$x_1''-8x_1'+7x_1=0. \qquad (3)$$

Характеристичне рівняння

$$k^2-8k+7=0,$$

корені якого $k_1=7,\ k_2=1$ – *дійсні, різні*.

Загальний розв'язок однорідного рівняння

$$x_{1_O}=C_1e^{7t}+C_2e^t.$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння (2) шукаємо у вигляді:

$$\tilde{x}_1=At+B.$$

Звідси $\tilde{x}_1'=A,\ \tilde{x}_1''=0$.

Підставляємо це в диференціальне рівняння (2):

$$-8A+7(At+B)=-2t+2.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях t:

$$\begin{array}{l|l}t^1 & 7A=-2\\ t^0 & -8A+7B=2\end{array}$$

Звідси $A = -\frac{2}{7},\ B = -\frac{2}{49}$.

Отже,

$$\tilde{x}_1 = -\frac{2}{7}t - \frac{2}{49}.$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння (2) представляється у вигляді:

$$x_1 = x_{1_O} + \tilde{x}_1 = C_1 e^{7t} + C_2 e^t - \frac{2}{7}t - \frac{2}{49}.$$

Звідси

$$x_1' = 7C_1 e^{7t} + C_2 e^t - \frac{2}{7}.$$

Підставимо x_1 та x_1' у формулу (1):

$$x_2 = x_1' - 6x_1 - t = 7C_1 e^{7t} + C_2 e^t - \frac{2}{7} - 6\left(C_1 e^{7t} + C_2 e^t - \frac{2}{7}t - \frac{2}{49}\right) - t =$$

$$= C_1 e^{7t} - 5C_2 e^t + \frac{5}{7}t - \frac{2}{49}.$$

Отже, загальний розв'язок заданої неоднорідної системи такий:

$$x_1(t) = C_1 e^{7t} + C_2 e^t - \frac{2}{7}t - \frac{2}{49},$$

$$x_2(t) = C_1 e^{7t} - 5C_2 e^t + \frac{5}{7}t - \frac{2}{49}.$$

Спосіб 2. Метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа).

Для заданої неоднорідної системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 6x_1 + x_2 + t, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 5x_1 + 2x_2 + 1 \end{cases}$$

записуємо відповідну однорідну систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 6x_1 + x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 5x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

і знаходимо її загальний розв'язок.

З цією метою складаємо характеристичне рівняння

$$\det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{E}) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 1 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваємо визначник

$$(6-\lambda)(2-\lambda) - 5 = 0,$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0.$$

Корені характеристичного рівняння $\lambda_1 = 7,\ \lambda_2 = 1$ – *дійсні, різні*.

Система рівнянь для визначення власних векторів така:

$$\begin{cases} (6-\lambda)x_1 + x_2 = 0, \\ 5x_1 + (2-\lambda)x_2 = 0. \end{cases}$$

При $\lambda_1 = 7$ маємо

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0, \\ 5x_1 - 5x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ x_2 = C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = C, \\ x_2 = C. \end{cases}$$

Покладемо $C = 1$. Тоді власний вектор $\mathrm{Y}^{(\lambda_1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

При $\lambda_2 = 1$ маємо

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 = 0, \\ 5x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{x_2}{5}, \\ x_2 = C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{C}{5}, \\ x_2 = C. \end{cases}$$

Покладемо $C = -5$. Тоді власний вектор $\mathrm{Y}^{(\lambda_2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Отже, загальний розв'язок однорідної системи має вигляд

$$\mathrm{X}(t) = C_1 \mathrm{Y}^{(\lambda_1)} e^{\lambda_1 t} + C_2 \mathrm{Y}^{(\lambda_2)} e^{\lambda_2 t} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} e^t$$

або

$$x_1(t) = C_1 e^{7t} + C_2 e^t,$$

$$x_2(t) = C_1 e^{7t} - 5C_2 e^t.$$

Загальний розв'язок неоднорідної системи шукаємо у вигляді:

$$\mathrm{X}(t) = C_1(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t} + C_2(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} e^t.$$

Складаємо систему для визначення $C_1'(t),\ C_2'(t)$:

$$C_1'(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t} + C_2'(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

або

$$\begin{cases} C_1'(t)\,e^{7t} + C_2'(t)\,e^{t} = t, \\ C_1'(t)\,e^{7t} - 5C_2'(t)\,e^{t} = 1. \end{cases}$$

Звідси

$$6C_2'(t)\,e^{t} = t-1,$$

$$C_2'(t) = \frac{t-1}{6}\,e^{-t}.$$

Підставляючи це в перше рівняння системи, маємо

$$C_1'(t)e^{7t} + \frac{t-1}{6}e^{-t}e^{t} = t,$$

$$C_1'(t) = \frac{5t+1}{6}e^{-7t}.$$

Далі, проінтегрувавши $C_1'(t),\ C_2'(t)$, отримаємо

$$C_1(t) = \int \frac{5t+1}{6}e^{-7t}dt = -\left(\frac{5}{42}\,t + \frac{2}{49}\right)e^{-7t} + C_1,$$

$$C_2(t) = \int \frac{t-1}{6}\,e^{-t}dt = -\frac{1}{6}te^{-t} + C_2.$$

Отже, загальний розв'язок заданої неоднорідної системи такий:

$$\mathrm{X}(t) = \left(-\left(\frac{5}{42}\quad t + \frac{2}{49}\right)e^{-7t} + C_1\right)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{7t} + \left(-\frac{1}{6}t\,e^{-t} + C_2\right)\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}e^{t} = .$$

$$= C_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{7t} + C_2\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}e^{t} + \begin{pmatrix}-\frac{5}{42}t - \frac{2}{49} - \frac{1}{6}t \\ -\frac{5}{42}t - \frac{2}{49} + \frac{5}{6}t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}C_1e^{7t} + C_2e^{t} - \frac{2}{7}t - \frac{2}{49} \\ C_1e^{7t} - 5C_2e^{t} + \frac{5}{7}t - \frac{2}{49}\end{pmatrix}$$

або

$$x_1(t) = C_1e^{7t} + C_2e^{t} - \frac{2}{7}t - \frac{2}{49},$$

$$x_2(t) = C_1e^{7t} - 5C_2e^{t} + \frac{5}{7}t - \frac{2}{49}.$$

Спосіб 3. Метод підбору вигляду частинного розв'язку за виглядом правої частини (метод невизначених коефіцієнтів).

Для заданої неоднорідної системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 6x_1 + x_2 + t, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 5x_1 + 2x_2 + 1 \end{cases}$$

матриця $\mathrm{A} = \begin{pmatrix}6 & 1\\5 & 2\end{pmatrix}$, функція $\mathrm{F}(t) = \begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix}$.

Відповідна однорідна система

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 6x_1 + x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 5x_1 + 2x_2. \end{cases}$$

Знаходимо її загальний розв'язок.

Характеристичне рівняння

$$\det(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{E}) = \begin{vmatrix}6-\lambda & 1\\5 & 2-\lambda\end{vmatrix} = 0.$$

Корені характеристичного рівняння $\lambda_1 = 7,\ \lambda_2 = 1$ – *дійсні, різні*.

Власні вектори знаходяться з системи:

$$\begin{cases}(6-\lambda)\,x_1 + \qquad x_2 = 0, \\ \qquad 5x_1 + (2-\lambda)\,x_2 = 0\end{cases}$$

при $\lambda = \lambda_1 = 7$ та при $\lambda = \lambda_2 = 1$ і є такими:

$$\mathrm{Y}^{(\lambda_1)} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad \mathrm{Y}^{(\lambda_2)} = \begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$$

(див. спосіб 2).

Загальний розв'язок однорідної системи:

$$\mathrm{X}(t) = C_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{7t} + C_2\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}e^{t}.$$

Частинний розв'язок неоднорідної системи шукаємо у вигляді:

$$\widetilde{\mathrm{X}}(t) = \begin{pmatrix}At+B\\Ct+D\end{pmatrix},$$

бо $\mathrm{F}(t) = \begin{pmatrix}f_1(t)\\f_2(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix}$, тобто $f_1(t) = t$ – многочлен степеня $s_1 = 1$, $f_2(t) = 1$ – многочлен степеня $s_2 = 0$, $\max(s_1, s_2) = s = 1$, що й зумовлює вигляд $\widetilde{\mathrm{X}}(t)$; функції $f_1(t),\ f_2(t)$ не містять $e^{\alpha x}$, тобто $\alpha = 0$ і не співпадає з коренями характеристичного многочлена.

Отже,

$$\tilde{x}_1(t) = At + B,\qquad \tilde{x}_1'(t) = A,$$

$$\tilde{x}_2(t) = Ct + D,\qquad \tilde{x}_2'(t) = C.$$

Підставимо ці значення в систему

$$\begin{cases} A = 6(At+B) + Ct + D + t, \\ C = 5(At+B) + 2(Ct+D) + 1. \end{cases}$$

Далі використовуємо метод невизначених коефіцієнтів:

$$\begin{array}{c|l} t^1 & 6A + C + 1 = 0 \\ t^0 & A = 6B + D \\ t^1 & 5A + 2C = 0 \\ t^0 & C = 5B + 2D + 1 \end{array}$$

Звідки $A = -\frac{2}{5}C$;

$$6\left(-\frac{2}{5}C\right) + C = -1, \quad -\frac{7}{5}C = -1, \quad C = \frac{5}{7}.$$

Отже, $A = -\frac{2}{7}$.

Враховуючи знайдені значення A та C, маємо:

$$\begin{cases} 6B + D = -\frac{2}{7}, \\ 5B + 2D = -\frac{2}{7}. \end{cases}$$

Звідси $-7B = \frac{2}{7}, \quad B = -\frac{2}{49}$;

$$D = -\frac{2}{7} + \frac{12}{49} = -\frac{2}{49}.$$

Отже, маємо

$$A = -\frac{2}{7}, \; B = -\frac{2}{49}, \; C = \frac{5}{7}, \; D = -\frac{2}{49}.$$

Таким чином, частинний розв'язок

$$\tilde{X}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{7}t - \frac{2}{49} \\ \frac{5}{7}t - \frac{2}{49} \end{pmatrix}.$$

Отже, загальний розв'язок заданої неоднорідної системи

$$X(t) = X_0(t) + \tilde{X}(t) = C_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{7t} + C_2\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}e^{t} + \begin{pmatrix} -\frac{2}{7}t - \frac{2}{49} \\ \frac{5}{7}t - \frac{2}{49} \end{pmatrix}$$

або

$$x_1(t) = C_1e^{7t} + C_2e^{t} - \frac{2}{7}t - \frac{2}{49},$$

$$x_2(t) = C_1e^{7t} - 5C_2e^{t} + \frac{5}{7}t - \frac{2}{49}.$$

Порівняння показує, що всі три способи розв'язання привели до одного й того ж результату. ◄

Приклад 17. Розв'язати задачу Коші

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = 4y_1 - 5y_2 + 4x + 1, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = y_1 - 2y_2 + x \end{cases}$$

при $y_1(0) = 1, \; y_2(0) = 2$.

► Маємо *лінійну неоднорідну систему зі сталими коефіцієнтами*. Для розв'язання скористаємось *методом варіації довільних сталих*.

Перш за все знайдемо загальний розв'язок відповідної однорідної системи

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 - 5y_2, \\ y_2' = y_1 - 2x_2. \end{cases}$$

Корені її характеристичного рівняння $\lambda_1 = -1, \; \lambda_2 = 3$.

Власні вектори $Y^{(\lambda_1)} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \; Y^{(\lambda_2)} = \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$, а загальний розв'язок однорідної системи:

$$Y(t) = C_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{-x} + C_2\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}e^{3x}$$

або

$$y_1(x) = C_1e^{-x} + 5C_2e^{3x},$$

$$y_2(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$$

(перевірте!).

Загальний розв'язок неоднорідної системи шукаємо у вигляді:

$$y_1(x) = C_1(x)e^{-x} + 5C_2(x)e^{3x},$$

$$y_2(x) = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)e^{3x}.$$

Далі знаходимо

$$y_1' = C_1'(x)e^{-x} - C_1(x)e^{-x} + 5C_2'(x)e^{3x} + 15C_2(x)e^{3x},$$

$$y_2' = C_1'(x)e^{-x} - C_1(x)e^{-x} + C_2'(x)e^{3x} + 3C_2(x)e^{3x}.$$

Отримані функції y_1, y_2, y_1', y_2' підставимо в задану систему. Після зведення подібних членів, отримуємо систему відносно невідомих $C_1'(x)$, $C_2'(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-x} + 5C_2'(x)e^{3x} = 4x+1, \\ C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)e^{3x} = x. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, отримуємо

$$\begin{cases} C_1'(x) = \frac{1}{4}(x-1)e^{x}, \\ C_2'(x) = \frac{1}{4}(3x-1)e^{-3x}. \end{cases}$$

Зауважимо, що в попередньому прикладі вказана система була записана формально без попереднього підставляння функцій та їх похідних у систему.

Далі, проінтегрувавши відповідні рівності, знаходимо $C_1(x)$, $C_2(x)$:

$$C_1(x) = \frac{1}{4}(x-2)e^{x} + C_1, \quad C_2(x) = -\frac{1}{12}(3x+2)e^{-3x} + C_2.$$

Отже, загальний розв'язок заданої неоднорідної системи

$$y_1(x) = C_1e^{-x} + 5C_2e^{3x} + \frac{1}{4}(x-2) - \frac{5}{12}(3x+2),$$

$$y_2(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} + \frac{1}{4}(x-2) - \frac{1}{12}(3x+2).$$

Враховуючи початкові умови $y_1(0)=1$, $y_2(0)=2$, складаємо систему для визначення C_1, C_2:

$$\begin{cases} 1 = C_1 + 5C_2 - \frac{1}{2} - \frac{5}{6}, \\ 2 = C_1 + C_2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6}. \end{cases}$$

Звідси $C_1 = \frac{11}{4}$, $C_2 = -\frac{1}{12}$.

Отже, частинний розв'язок вихідної системи, що задовольняє вказані початкові умови, має вигляд:

$$y_1(x) = \frac{11}{4}e^{-x} - \frac{5}{12}e^{3x} + \frac{1}{4}(x-2) - \frac{5}{12}(3x+2),$$

$$y_2(x) = \frac{11}{4}e^{-x} - \frac{1}{12}e^{3x} + \frac{1}{4}(x-2) - \frac{1}{12}(3x+2). \blacktriangleleft$$

Приклад 18. Знайти частинний розв'язок системи

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_2 + t^2, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + e^t. \end{cases}$$

► Для цієї *лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами* маємо:

а) для першого рівняння системи функцією $f_1(t)$ є многочлен другого степеня: $f_1(t) = t^2$;

б) для другого рівняння системи $f_2(t) = e^t$.

Характеристичне рівняння

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

має корені $\lambda_{1,2} = \pm i$.

Частинний розв'язок заданої системи відшукуємо у вигляді, аналогічному функціям $f_1(t)$ і $f_2(t)$, тобто у вигляді суми многочлена другого степеня $A_it^2 + B_it + C_i$ і функції вигляду D_ie^t, де A_i, B_i, C_i, D_i, $i=1,2$ – сталі, бо число $\alpha = 1$ не є коренем характеристичного рівняння. Отже,

$$x_1 = A_1t^2 + B_1t + C_1 + D_1e^t,$$

$$x_2 = A_2t^2 + B_2t + C_2 + D_2e^t.$$

Підставивши ці функції в задану систему, отримуємо

$$\begin{cases} 2A_1t + B_1 + D_1e^t = -A_2t^2 - B_2t - C_2 - D_2e^t + t^2, \\ 2A_2t + B_2 + D_2e^t = A_1t^2 + B_1t + C_1 + D_1e^t + e^t. \end{cases},$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях t та при e^t в обох рівняннях, отримуємо:

$$\begin{array}{c|l} t^2 & 1 - A_2 = 0 \\ t^1 & 2A_1 = -B_2 \\ t^0 & B_1 = -C_2 \\ e^t & D_1 = -D_2 \end{array} \qquad \begin{array}{c|l} t^2 & A_1 = 0 \\ t^1 & 2A_2 = B_1 \\ t^0 & B_2 = C_1 \\ e^t & D_2 = D_1 + 1 \end{array}$$

Звідки

$$A_1 = B_2 = C_1 = 0, \; A_2 = 1, \; B_1 = 2, \; C_2 = -2, \; D_1 = -\frac{1}{2}, \; D_2 = \frac{1}{2}.$$

Шуканий частинний розв'язок має вигляд:

$$\begin{cases} x_1 = 2t - \dfrac{e^t}{2}, \\ x_2 = t^2 - 2 + \dfrac{e^t}{2}. \end{cases} \blacktriangleleft$$

IV. Задачі для практичних занять

Основні поняття

1.331. Перевірити, що функції $y(x)$ та $z(x)$ є розв'язками вказаних диференціальних рівнянь:

а) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{z}, \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{y}, \end{cases}$ $\quad y(x) = e^{-\frac{x}{2}}, \quad z(x) = 2e^{\frac{x}{2}}$;

б) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 1 - \dfrac{2y}{x}, \\ \dfrac{dz}{dx} = y + z + \dfrac{2y}{x} - 1, \end{cases}$ $\quad y(x) = \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{x^2}, \ z(x) = e^x - \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{x^2}$.

У задачах 1.332 – 1.335 для заданих систем знайти фазові траєкторії, що проходять через задані точки M_0.

1.332. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1 - x^2 - y^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x, \end{cases}$ $M_0(1,2)$.

1.333. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1 - x^2 - y^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2xy, \end{cases}$ $M_0(2,1)$.

1.334. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y, \end{cases}$ $M_0(1,1)$.

1.335. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - x, \\ \dfrac{dy}{dt} = y - 2x, \end{cases}$ $M_0(1,1)$.

Лінійні системи диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами

У задачах 1.336 – 1.339 розв'язати задані лінійні системи диференціальних рівнянь.

1.336. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x} + xz, \\ \dfrac{dz}{dx} = -\dfrac{2y}{x^3} + \dfrac{z}{x}. \end{cases}$

1.337. $\begin{cases} x\dfrac{dy}{dx} = -y + xz, \\ x^2\dfrac{dz}{dx} = -2y + xy. \end{cases}$

1.338. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{y}{t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{x}{t}. \end{cases}$

1.339. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{2}{t}x, \\ \dfrac{dy}{dt} = y + \dfrac{t+2}{t}x. \end{cases}$

Лінійні однорідні системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

У задачах 1.340 – 1.354 розв'язати задані лінійні однорідні системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, використовуючи: а) метод виключення, б) метод Ейлера. Там, де задані початкові умови, крім загального розв'язку, знайти відповідний частинний розв'язок.

1.340. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$

1.341. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 3y. \end{cases}$

1.342. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 5y, \end{cases}$ $x(0) = 3, \ y(0) = 1$.

1.343. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$

1.344. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - 7x, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 5y. \end{cases}$

1.345. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - 6y. \end{cases}$

1.346. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 7y, \end{cases}$

$x(0) = 1, \ \ y(0) = 0$.

1.347. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -3y - z, \\ \dfrac{dz}{dx} = y - z. \end{cases}$

1.348. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 3y. \end{cases}$

1.349. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 5y, \end{cases}$

$x(0) = 0, \ \ y(0) = 1$.

1.350. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 2, \ \ z(0) = -1$.

1.351. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 2x - y. \end{cases}$

1.352. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y - z, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x - z. \end{cases}$

1.353. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 4x - y + 4z, \end{cases}$ (корені характеристичного рівняння $\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 2, \ \lambda_3 = 5$)

1.354. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -x + 2y + 3z, \end{cases}$ (корені характеристичного рівняння $\lambda_1 = 2, \ \lambda_{2,3} = 3 \pm i$)

Лінійні неоднорідні системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

У задачах 1.355 – 1.363 розв'язати задані лінійні неоднорідні системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, використовуючи: а) метод виключення, б) метод підбору частинного розв'язку за виглядом правої частини; в) метод варіації довільних сталих.

1.355. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + e^{t} + e^{-t}. \end{cases}$

1.356. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y - 5x + e^{t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 6y + e^{-2t}. \end{cases}$

1.357. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y + t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - 4y. \end{cases}$

1.358. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + e^{t}. \end{cases}$

1.359. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - 3y + te^{2t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - y + e^{3t}. \end{cases}$

1.360. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + 2y + 4z = 1 + 4x, \\ \dfrac{dz}{dx} + y - z = \dfrac{3}{2}x^2. \end{cases}$

1.361. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + 2y + z = \sin x, \\ \dfrac{dz}{dx} - 4y - 2z = \cos x. \end{cases}$

1.362. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - 4x - y + 36t = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} + 2x - y + 2e^t = 0, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 1$.

1.363. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + 3y + 4z = 2x, \\ \dfrac{dz}{dx} - y - z = x, \end{cases}$ $y(0) = 0,\ z(0) = 0$.

У задачах 1.364 – 1.366 знайти загальні розв'язки систем диференціальних рівнянь, використовуючи метод варіації довільних сталих.

1.364. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y - \cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - y + \sin t + \cos t. \end{cases}$

1.365. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + \mathrm{tg}^2 t - 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + \mathrm{tg}\, t. \end{cases}$ **1.366.** $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + z = 1, \\ \dfrac{dz}{dx} + \dfrac{2}{x^2} y = \ln x. \end{cases}$

У задачах 1.367 – 1.373 розв'язати вказані системи диференціальних рівнянь ($y' = \dfrac{dy}{dx},\ z' = \dfrac{dz}{dx}$, якщо не вказано інше).

1.367. $\begin{cases} yzy' = x, \\ y^2 z' = x. \end{cases}$ **1.368.** $\begin{cases} xy' = y, \\ xzz' + x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$

1.369. $\begin{cases} z = y'(z - y)^2, \\ y = z'(z - y)^2. \end{cases}$ **1.370.** $\begin{cases} y' = \dfrac{x + y}{z}, \\ z' = \dfrac{x - y}{y}. \end{cases}$

1.371. $\begin{cases} y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2 - z^2}, \\ z' = \dfrac{2xz}{x^2 - y^2 - z^2}. \end{cases}$ **1.372.** $\begin{cases} \dfrac{d^2 y}{dt^2} = x, \\ \dfrac{d^2 x}{dt^2} = y. \end{cases}$

1.373. $\begin{cases} \dfrac{d^2 y}{dx^2} + 2y + 4z = e^x, \\ \dfrac{d^2 z}{dx^2} - y - 3z = -x. \end{cases}$

ГЛАВА 2. ***РЯДИ***

§1. Числові ряди

І. Короткі теоретичні відомості

Основні поняття. Нехай задано числову послідовність $\{u_n\}$.

Вираз вигляду

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \tag{2.1}$$

називається *числовим рядом*, числа u_k – *членами* цього ряду, u_n – *загальний член ряду*.

Сума n перших членів ряду називається n*-ю частинною сумою* ряду і позначається S_n.

Отже,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k .$$

Якщо існує скінченна границя S послідовності $\{S_n\}$, то кажуть, що ряд *збігається* або ряд *збіжний*, і його *сума* дорівнює S, тобто

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S .$$

У цьому випадку пишуть:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} u_k .$$

У випадку, коли $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не існує, або дорівнює нескінченності, ряд називається *розбіжним*.

Покладемо $r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$.

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$.

Величину r_n називають n*-м залишком ряду* (2.1). Часто важливим є питання оцінювання $|r_n| = |S - S_n|$. Оцінка $|r_n|$ показує з якою точністю частинна сума S_n наближує суму S ряду (2.1).

Необхідна умова збіжності ряду:

якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, то

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 . \tag{2.2}$$

Достатня умова розбіжності ряду:
якщо

$$\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0 , \tag{2.3}$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ розбігається.

Критерій Коші збіжності ряду:

для того, щоб ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ збігався, необхідно та достатньо, щоб для $\forall \varepsilon > 0$ існував такий номер N, що для всіх $n > N$ і будь-якого натурального числа p, виконувалась умова

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon .$$

Розглянемо *найбільш важливі числові ряди*.

На основі геометричної прогресії, тобто послідовності $\{u_n\}$, де $u_n = aq^{n-1}$, створимо ряд

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} . \tag{2.4}$$

Цей ряд для стислості називатимемо також *геометричною прогресією*. Використовують також назву *геометричний ряд*.

Якщо $|q| < 1$, ряд (2.4) збігається, то його сума S обчислюється за формулою:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q} .$$

Для $|q| \geq 1$ ряд (2.4) розбігається.

Гармонічний ряд. Ряд вигляду

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tag{2.5}$$

називається *гармонічним*. Цей ряд розбіжний.

Ряд вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \ p \in \mathbf{R} \tag{2.6}$$

називається *узагальненим гармонічним*. Він збіжний при $p > 1$.

Основні властивості збіжних рядів

1^0. Якщо ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ збіжний і має суму S, то збіжним є ряд $\sum_{k=1}^{\infty} C u_k$, де C – константа і $\sum_{k=1}^{\infty} C u_k = CS$.

2^0. Якщо ряди $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ та $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ збіжні і мають суми S_1 та S_2 відповідно, то збігається ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (u_k + v_k)$ і має суму $S_1 + S_2$.

3^0. Сполучна властивість збіжного ряду. У збіжному ряді можна довільно групувати члени, тобто якщо ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ є збіжним, то збіжним є ряд

$$(u_1 + u_2 + \ldots + u_{k_1}) + (u_{k_1+1} + u_{k_1+2} + \ldots + u_{k_2}) + (u_{k_2+1} + \ldots + u_{k_3}) +$$
$$+ (u_{k_3+1} + \ldots + u_{k_4}) + \ldots + (u_{k_{n-1}+1} + \ldots + u_{k_n}) + \ldots,$$

утворений довільним об'єднанням його членів із збереженням порядку їх прямування. Сума ряду при цьому не змінюється.

4^0. На збіжність ряду не впливає відкидання або приєднання скінченної кількості членів ряду.

Наслідок. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ збіжний (розбіжний) тоді і тільки тоді, коли збіжний (розбіжний) довільний його залишок.

Знакододатні ряди. Ознаки збіжності. Ряд вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \ u_n > 0$$

називається *знакододатним рядом*.

Теорема 1 (*перша ознака порівняння*). Нехай задано два ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \ u_n > 0 \qquad (2.7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n, \ v_n > 0 \qquad (2.8)$$

такі, що

$$u_n \le v_n, \forall n.$$

Тоді, якщо
1) ряд (2.8) збіжний, то ряд (2.7) збіжний,
2) ряд (2.7) розбіжний, то ряд (2.8) розбіжний.

Ознака залишається в силі, якщо нерівність $u_n \le v_n$ виконується не для всіх n, а починаючи з деякого номера $n = k$.

Теорема 2 (*гранична ознака порівняння*). Нехай для рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \ u_n > 0, \ \sum_{n=1}^{\infty} v_n, \ v_n > 0$$

існує скінченна границя

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l \ne 0,$$

(це означає, що $u_n \sim l v_n$, $n \to \infty$, зокрема, $u_n \sim v_n$, коли $l = 1$). Тоді обидва ряди збіжні або обидва ряди розбіжні.

Теорема 3 (*ознака Даламбера*). Нехай для ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \ u_n > 0$$

існує скінченна границя

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l.$$

Тоді, якщо
1) $l < 1$, ряд збіжний,
2) $l > 1$, ряд розбіжний.

При $l = 1$ потрібне додаткове дослідження, бо ознака не дає відповіді на питання ряд збіжний чи розбіжний.

Теорема 4 (*радикальна ознака Коші*). Нехай для ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \ u_n > 0$$

існує скінченна границя

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l.$$

Тоді, якщо
1) $l < 1$, ряд збіжний,
2) $l > 1$, ряд розбіжний.

При $l = 1$ потрібне додаткове дослідження.

Теорема 5 (*інтегральна ознака Коші*). Нехай для ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \ u_n > 0$$

виконується умова

$$u_1 \ge u_2 \ge u_3 \ge \ldots$$

і існує незростаюча функція $f(x)$ така, що

$$f(n) = u_n, \ \forall n.$$

Тоді невласний інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ збіжний (розбіжний) одночасно з заданим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Інтегральна ознака Коші застосовується, зокрема, до рядів вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\varphi(\ln n) .$$

Зауваження. Можливо, що умови теореми виконуються, починаючи з деякого номера $n = k$. У цьому випадку порівняння проводиться з невласним інтегралом $\int\limits_k^{+\infty} f(x)\,dx$.

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} = 1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots\ ,\ p\in \mathbf{R} ,$$

що є узагальненим гармонічним (див. також (2.6)), збігається за теоремою 5 при $p>1$, бо збіжним є $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ при $p>1$, а розбіжним при $p\le 1$. Узагальнений гармонічний ряд часто використовують при дослідженні збіжності рядів за допомогою ознак порівняння (теорема 1, теорема 2).

Знакозмінні ряди. Числовий ряд, члени якого можуть бути як додатними, так і від'ємними, називають *знакозмінним*.

Знакопочережним рядом називають ряд

$$u_1-u_2+u_3-\ldots+(-1)^{n+1}u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n\ ,\ u_n>0\ , \qquad (2.9)$$

в якому знаки членів строго чергуються. Знакопочережний ряд є частинним випадком знакозмінного ряду.

Теорема Лейбніца. Знакопочережний ряд (2.9) збігається, якщо

$$u_1>u_2>u_3>\ldots$$

та

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 .$$

Знакопочережний ряд (2.9), для якого виконуються умови теореми Лейбніца, називають *лейбніцевим* рядом.

Найпростішими прикладами лейбніцевих рядів є ряди:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots \qquad (2.10)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}+\ldots \qquad (2.11)$$

Абсолютно та умовно збіжні ряди. Розглянемо довільний знакозмінний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n\ . \qquad (2.12)$$

Утворимо ряд з абсолютних величин членів цього ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|. \qquad (2.13)$$

Ряд (2.13) знакододатний.

Теорема. Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ збіжний, то збіжний і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$.

У випадку, коли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ (2.13) збіжний, ряд (2.12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ називають *абсолютно збіжним*. Кожний абсолютно збіжний ряд є одночасно і збіжним. Проте не кожний збіжний знакозмінний ряд є абсолютно збіжним.

Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ збіжний, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ розбіжний, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ називають *умовно збіжним*. Умовно збіжними є ряди Лейбніца $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ (2.10) і $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ (2.11).

Наслідок. Абсолютна похибка від заміни суми S ряду лейбніцевого типу будь-якою частинною сумою S_n не перевищує модуля першого з відкинутих членів ряду, тобто

$$|S-S_n|\le u_{n+1}\ ,\quad |r_n|\le u_{n+1}.$$

Цим користуються при наближених обчисленнях.

Властивості абсолютно та умовно збіжних рядів

1^0. Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ є абсолютно збіжним, то абсолютно збіжним є і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}C\,u_n$, де $C=\text{const}$.

2^0. Якщо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ абсолютно збіжні, то абсолютно збіжними є ряди $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$.

3^0 (Сполучна властивість абсолютно збіжного ряду). У абсолютно збіжному ряді можна довільно групувати члени, зберігаючи порядок їх прямування, при цьому сума ряду не змінюється.

4^0. На абсолютну збіжність ряду не впливає відкидання або приєднання скінченної кількості членів.

5^0 (Переставна властивість). Якщо ряд абсолютно збіжний, то будь-який ряд, утворений за допомогою перестановки його членів, також абсолютно збіжний і має ту саму суму, що і заданий ряд.

Теорема Рімана. Якщо ряд умовно збіжний, то яке б не було наперед задане число p, можна так переставити члени цього ряду, що утворений ряд матиме сумою саме те число p.

Числові ряди з комплексними членами. Нехай маємо послідовність комплексних чисел $\{z_n\}$, $z_n = x_n + i\,y_n$. Комплексне число $c = a + i\,b$ називають *скінченною границею послідовності* $\{z_n\}$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує номер $N(\varepsilon)$ такий, що для всіх $n > N(\varepsilon)$ має місце нерівність: $|z_n - c| < \varepsilon$. Коротко це записується так:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = c.$$

Якщо границя скінченна, послідовність називають *збіжною*, в іншому разі – вона *розбіжна*.

Теорема. Для того, щоб послідовність $\{z_n\}$ мала скінченну границю $c = a + i\,b$, необхідно і достатньо, щоб послідовності $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ мали скінченні границі, які дорівнюють відповідно a і b.

Вираз вигляду

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \tag{2.14}$$

називається *числовим рядом з комплексними членами*,

$z_n = x_n + i\,y_n$ – *члени ряду*,

S_n – частинна сума ряду, $S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$.

Якщо існує скінченна границя

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

то ряд (2.14) збіжний, у противному випадку – розбіжний.

Теорема. Для того, щоб ряд (2.14) був збіжним до числа $S = X + iY$, необхідно і достатньо, щоб ряди $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ були збіжними до X та Y.

II. Контрольні питання та завдання

1. Дайте означення числового ряду, члена ряду, частинної суми і суми ряду. Визначте збіжність ряду.
2. Дайте означення n-го залишку ряду.
3. Сформулюйте необхідну умову збіжності ряду.
4. Сформулюйте достатню умову розбіжності ряду
5. Дайте означення геометричного ряду.
6. Який ряд називають гармонічним, узагальненим гармонічним?
7. Сформулюйте властивості збіжних рядів.
8. Дайте означення знакододатного ряду.
9. Сформулюйте першу ознаку порівняння збіжності ряду. Наведіть приклади.
10. Сформулюйте граничну ознаку порівняння, наведіть приклади.
11. Сформулюйте ознаку Даламбера збіжності ряду.
12. Сформулюйте радикальну ознаку Коші збіжності ряду.
13. Сформулюйте інтегральну ознаку Коші збіжності ряду.
14. Дайте означення знакозмінного та знакопочережного рядів.
15. Сформулюйте теорему Лейбніца: достатню умову збіжності знакопочережних рядів.
16. Дайте означення абсолютної та умовної збіжності знакозмінних рядів.
17. Наведіть приклади умовно збіжних рядів.
18. Дайте означення ряду з комплексними членами, наведіть ознаку його збіжності.

III. Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Знайти частинну суму S_n ряду, довести його збіжність, користуючись безпосередньо означенням збіжності ряду, знайти суму S ряду:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

► n-й член ряду $u_n=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ є правильним раціональним дробом відносно n. Розкладемо u_n на суму найпростіших дробів:

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{A}{2n-1}+\frac{B}{2n+1}.$$

Звідси, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів, або метод задання частинних значень, отримуємо $B=-\dfrac{1}{2}$, $A=\dfrac{1}{2}$.

Отже,

$$u_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right).$$

Тому

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right).$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}.$$

Отже, $\exists\lim\limits_{n\to\infty}S_n$, ряд збігається, а сума ряду $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{2}$. ◄

Приклад 2. Знайти частинну суму S_n заданого ряду, довести його збіжність, знайти суму S ряду:

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}+\ldots\operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}+\ldots.$$

► Знайдемо частинні суми ряду S_1, S_2, S_3, щоб, помітивши закономірність результатів, застосувати метод математичної індукції для отримання виразу для S_n.

$$S_1=\operatorname{arctg}\frac{1}{2};$$

$$S_2=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}=\operatorname{arctg}\ \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}\right)=$$

$$=\operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}}=\operatorname{arctg}\frac{2}{3};$$

$$S_3=S_2+\operatorname{arctg}\frac{1}{18}=\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{18}=\operatorname{arctg}\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{18}}{1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{18}}=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}.$$

Звернемося до методу математичної індукції.

Нехай $S_n=\operatorname{arctg}\dfrac{n}{n+1}$.

$$S_{n+1}=S_n+\operatorname{arctg}\frac{1}{2(n+1)^2}=\operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}+\operatorname{arctg}\frac{1}{2(n+1)^2}=$$

$$=\operatorname{arctg}\frac{\frac{n}{n+1}+\frac{1}{2(n+1)^2}}{1-\frac{n}{2(n+1)^3}}=\operatorname{arctg}\frac{(2n^2+2n+1)(n+1)}{2(n+1)^3-n}=$$

$$=\operatorname{arctg}\frac{(2n^2+2n+1)(n+1)}{(2n^2+2n+1)(n+2)}=\operatorname{arctg}\frac{n+1}{n+2}.$$

Доведено, що, за умови, що $S_n=\operatorname{arctg}\dfrac{n}{n+1}$, $S_{n+1}=\operatorname{arctg}\dfrac{n+1}{n+2}$. За принципом математичної індукції маємо

$$S_n=\operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}\quad\forall n\in\mathbf{N}.$$

Далі знаходимо

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}.$$

Отже, ряд збігається і його сума $S=\dfrac{\pi}{4}$. ◄

Приклад 3. Дослідити на збіжність заданий ряд, використовуючи достатню ознаку розбіжності:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10n+1}.$$

► Оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{10n+1}=\frac{1}{10}\neq 0,$$

то виконується достатня умова розбіжності $(\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0)$, тобто ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10n+1}$ розбігається. ◄

Приклад 4. Дослідити на збіжність задані ряди, використовуючи ознаки порівняння:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+8n+10}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^n}$; в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{6(n^4+1)}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n+1}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}$.

► а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+8n+10}$.

Порівняємо цей ряд з рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, який є узагальненим гармонічним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ при $p=2>1$ і є збіжним. Врахуємо, що

$$\frac{1}{n^2+8n+10}<\frac{1}{n^2}.$$

Тоді згідно з першою ознакою порівняння маємо, що заданий ряд збігається.

Тут можна було застосувати і граничну ознаку порівняння, скориставшись тим, що при $n\to\infty$

$$\frac{1}{n^2+8n+10}\sim\frac{1}{n^2}.$$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^n}$.

Порівняємо цей ряд з геометричним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$, який є збіжним, бо $q=\frac{1}{3}>1$. Врахуємо, що

$$\frac{1}{n\cdot 3^n}\le\frac{1}{3^n}.$$

Тоді згідно з першою ознакою порівняння, заданий ряд також збіжний.

в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$.

Порівняємо цей ряд з гармонічним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, який є розбіжним. Врахуємо, що $\ln n<n$, звідки

$$\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}.$$

Отже, за першою ознакою порівняння, заданий ряд також є розбіжним.

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{6(n^4+1)}$.

Порівняємо цей ряд з рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$, що є збіжним, бо є узагальненим гармонічним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ при $p=3>1$.

Скористаємось граничною ознакою порівняння, поклавши

$$u_n=\frac{n+5}{6(n^4+1)},\quad v_n=\frac{1}{n^3}.$$

Тоді

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+5)\cdot n^3}{6(n^4+1)\cdot 1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4}{6n^4}=\frac{1}{6}.$$

Отже, заданий ряд збіжний.

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n+1}$.

Порівняємо цей ряд з гармонічним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, який є розбіжним. Врахуємо, що при $n\to\infty$

$$\frac{1}{3n+1} \sim \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n}.$$

Маємо, що заданий ряд розбіжний за граничною ознакою порівняння.

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$.

Порівняємо цей ряд з рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$, який збігається, бо є узагальненим гармонічним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ при $p = 4 > 1$.

Врахуємо, що при $n \to \infty$

$$\frac{1}{(2n+1)^4} \sim \frac{1}{2^4} \cdot \frac{1}{n^4}.$$

Маємо, що заданий ряд збіжний за граничною ознакою порівняння.

Зауважимо, що в розглянутих прикладах виконувалась необхідна ознака збіжності, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. ◄

Приклад 5. Дослідити на збіжність задані ряди, використовуючи ознаку Даламбера:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^{2n-1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

► а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^{2n-1}}$.

Маємо, що $u_n > 0$ $u_n = \frac{n^2}{3^{2n-1}}$, $u_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{3^{2(n+1)-1}} = \frac{(n+1)^2}{3^{2n+1}}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 \cdot 3^{2n-1}}{3^{2n+1} \cdot n^2} = \left| \begin{matrix} (n+1)^2 \sim n^2 \\ n \to \infty \end{matrix} \right| = \frac{1}{9} < 1.$$

Отримали, що $l = \frac{1}{9} < 1$, отже, за ознакою Даламбера заданий ряд збігається.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

Маємо, що $u_n > 0$ $u_n = \frac{n^n}{n!}$, $u_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e > 1.$$

Отримали, що $l = e > 1$, отже, за ознакою Даламбера заданий ряд розбігається. ◄

Приклад 6. Дослідити на збіжність задані ряди, використовуючи радикальну ознаку Коші:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{1}{n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2+5}{2n^2+7} \right)^n$.

► а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{1}{n}$.

Маємо, що $u_n > 0$ $u_n = \operatorname{arctg}^n \frac{1}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n} = 0 < 1.$$

Отже, $l = 0 < 1$, за радикальною ознакою Коші заданий ряд збігається.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2+5}{2n^2+7} \right)^n$.

Маємо, що $u_n > 0$ $u_n = \left(\frac{3n^2+5}{2n^2+7} \right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+5}{2n^2+7} = \left| \begin{matrix} 3n^2+5 \sim 3n^2 \\ 2n^2+7 \sim 2n^2 \\ n \to \infty \end{matrix} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{2n^2} = \frac{3}{2} > 1.$$

Отже $l = \frac{3}{2} > 1$, за радикальною ознакою Коші заданий ряд розбігається. ◄

Приклад 7. Дослідити на збіжність задані ряди, використовуючи інтегральну ознаку Коші:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}$;

в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$; г) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{3n}{(n^2-2)\ln(2n)}$.

► а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n+1}$.

Покладемо $f(x)=\frac{1}{3x+1}$.

Для даного ряду виконуються умови інтегральної ознаки Коші:

$u_n>0$, $u_n\ge u_{n+1}$, $f(n)=u_n \quad \forall n$.

Розглядаємо невласний інтеграл:

$$\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx=\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{3x+1}=\frac{1}{3}\int\limits_1^{+\infty}\frac{d(3x+1)}{3x+1}=\frac{1}{3}\ln(3x+1)\Big|_1^{+\infty}=+\infty,$$

тобто невласний інтеграл розбіжний, отже і заданий ряд розбіжний за інтегральною ознакою Коші.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}$.

Покладемо $f(x)=\frac{1}{(2x+1)^4}$.

Для даного ряду виконуються умови інтегральної ознаки Коші:

$u_n>0$, $u_n\ge u_{n+1}$, $f(n)=u_n \quad \forall n$.

Розглядаємо невласний інтеграл:

$$\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx=\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{(2x+1)^4}=\frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty}\frac{d(2x+1)}{(2x+1)^4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+1)^{-3}}{-3}\Bigg|_1^{+\infty}=$$

$$=-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(2x+1)^3}\Bigg|_1^{+\infty}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{27}=\frac{1}{162},$$

тобто невласний інтеграл збіжний, отже і заданий ряд збіжний за інтегральною ознакою Коші.

Зауважимо, що раніше ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n+1}$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}$ були досліджені за допомогою ознак порівняння (приклад 4 д),е)).

в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$.

Покладемо $f(x)=\frac{1}{x\ln^2 x}$.

Для даного ряду виконуються умови інтегральної ознаки Коші:

$u_n>0$, $u_n\ge u_{n+1}$, $f(n)=u_n$ для $n=2,3,\ldots$.

Розглядаємо невласний інтеграл:

$$\int\limits_2^{+\infty} f(x)\,dx=\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}=\int\limits_2^{+\infty}\frac{d\ln x}{\ln^2 x}==-\frac{1}{\ln x}\Big|_2^{+\infty}=\frac{1}{\ln 2},$$

тобто невласний інтеграл збіжний, отже і заданий ряд збіжний за інтегральною ознакою Коші.

г) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{3n}{(n^2-2)\ln(2n)}$ (1).

Порівняємо ряд (1) з рядом $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{3}{n\ln n}$ (2). Врахуємо, що $\frac{3n}{(n^2-2)\ln(2n)}\sim\frac{3}{n\ln n}$ при $n\to\infty$, бо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n}{(n^2-2)\ln(2n)}}{\frac{3}{n\ln n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n\cdot n\cdot\ln n}{(n^2-2)\ln(2n)\cdot 3}=\left|\begin{matrix}n^2-2\sim n^2\\ n\to\infty\end{matrix}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(2n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln 2+\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln n\left(\frac{\ln 2}{\ln n}+1\right)}=1.$$

Ряди (1) та (2) за граничною ознакою порівняння обидва збігаються або обидва розбігаються.

Досліджуємо на збіжність ряд (2) за допомогою інтегральної ознаки збіжності. Покладаємо $f(x)=\frac{3}{x\ln x}$. Ця функція неперервна на проміжку $[2,+\infty)$ і спадає на ньому до нуля. Вона має очевидну первісну $F(x)=3\ln\ln x$.

Досліджуємо на збіжність невласний інтеграл $\int\limits_2^{+\infty} \frac{3}{x\ln x}dx$:

$$\int\limits_2^{+\infty} \frac{3}{x\ln x}dx = 3\int\limits_2^{+\infty} \frac{d\ln(x)}{\ln x} = 3\ln\ln x\Big|_2^{+\infty} = 3\left[\lim_{x\to\infty}\ln\ln x - \ln\ln 2\right] = +\infty .$$

Невласний інтеграл розбігається.

Із розбіжності невласного інтеграла випливає розбіжність ряду (2), а отже і ряду (1).

Зауважимо, що істотним при виборі ряду для порівняння було те, щоб при використанні інтегральної ознаки збіжності функція $f(x)$ мала очевидну первісну. ◀

Приклад 8. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(2n)!} = 0$, використовуючи ряд, для якого $u_n = \frac{n^n}{(2n)!}$ є загальним членом.

▶ Згідно з умовою розглядаємо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(2n)!}$.

Доведемо, що цей ряд збіжний і скористаємось необхідною ознакою збіжності: для збіжного ряду $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Для доведення збіжності ряду використаємо ознаку Даламбера.

$$u_n > 0 \quad u_n = \frac{n^n}{(2n)!}, \quad u_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(2(n+1))!} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}\cdot(2n)!}{(2n+2)!\cdot n^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n(n+1)}{(2n+1)(2n+2)} =$$

$$= \left|\begin{array}{c}(n+1)\sim n\\ (2n+1)(2n+2)\sim 4n^2\\ n\to\infty\end{array}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{e\cdot n}{4n^2} = e\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n} = 0 < 1 .$$

Отже, за ознакою Даламбера ряд збігається, і згідно з необхідною ознакою збіжності

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(2n)!} = 0,$$

що й треба було довести. ◀

Приклад 9. Дослідити на збіжність задані знакозмінні ряди та встановити характер збіжності (абсолютна, умовна):

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{5^n}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{3n+2}$.

▶ а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^3}$. Заданий ряд є знакозмінним.

Складаємо ряд з абсолютних величин членів заданого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos n|}{n^3}$.

Порівняємо цей ряд з рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$, що є узагальненим гармонічним рядом при $p = 3 > 1$ і є збіжним. Врахуємо, що

$$\frac{|\cos n|}{n^3} \le \frac{1}{n^3}.$$

Отже, ряд, складений з абсолютних величин членів заданого ряду, є збіжним згідно з першою ознакою порівняння. Звідси випливає, що заданий ряд є абсолютно збіжним.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{5^n}$. Заданий ряд є знакопочережним.

Складаємо ряд з абсолютних величин членів заданого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}$.

Дослідимо його на збіжність, використовуючи ознаку Даламбера.

$$u_n > 0 \quad u_n = \frac{n}{5^n}, \quad u_{n+1} = \frac{n+1}{5^{n+1}}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 5^n}{5^{n+1}\cdot n} = \frac{1}{5} < 1 .$$

Отже, ряд, складений з абсолютних величин членів заданого ряду, збігається. Звідси випливає, що заданий ряд є абсолютно збіжним.

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$. Заданий ряд є знакопочережним.

Складаємо ряд з абсолютних величин членів заданого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Цей ряд розбігається, бо є узагальненим гармонічним рядом при $p=\frac{1}{2}<1$.

Отже, ряд, не є абсолютно збіжним.

Заданий ряд збігається, бо задовольняє умовам теореми Лейбніца для знакопочережних рядів:

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}}<\frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0.$$

Отже, заданий ряд є умовно збіжним.

г) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{3n+2}$. Заданий ряд є знакопочережним.

Складаємо ряд з абсолютних величин членів заданого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3n+2}$.

Цей ряд є розбіжним, бо не виконується необхідна умова збіжності:

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+2}=\left|\begin{array}{c}2n+1\sim 2n\\ 3n+1\sim 3n\\ n\to\infty\end{array}\right|=\frac{2}{3}\neq 0.$$

Отже, заданий ряд не є абсолютно збіжним.

Враховуючи, що для заданого ряду також не виконується необхідна умова збіжності, робимо висновок, що заданий ряд розбіжний. ◄

Приклад 10. Дослідити на збіжність ряд з комплексними членами: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(3+i)^n}$.

► Розглянемо ряд, складений з модулів членів заданого ряду:

$$u_n=\frac{1}{n(3+i)^n}; \quad |u_n|=\frac{1}{n|3+i|^n},$$

де $|3+i|=\sqrt{10}$, тому $|u_n|=\frac{1}{n\cdot 10^{\frac{n}{2}}}$.

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 10^{\frac{n}{2}}}$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 10^{\frac{n}{2}}}$ збігається за першою ознакою порівняння, бо

$$\frac{1}{n\cdot 10^{n/2}}<\frac{1}{\left(10^{1/2}\right)^n},$$

а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(10^{1/2}\right)^n}$ є геометричним рядом при $q=\frac{1}{10^{1/2}}<1$, який збігається.

Отже, заданий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(3+i)^n}$ абсолютно збігається. ◄

Приклад 11. Дослідити на збіжність ряд з комплексними членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(2i-1)^n}{3^n}.$$

► Розглянемо ряд, складений з модулів членів заданого ряду:

$$u_n=\frac{n(2i-1)^n}{3^n}; \quad |u_n|=\frac{n|2i-1|^n}{3^n},$$

де $|2i-1|=\sqrt{5}$, тому $|u_n|=\frac{n\cdot 5^{n/2}}{3^n}$.

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 5^{\frac{n}{2}}}{3^n}$.

Звернемося до ознаки Даламбера для дослідження останнього ряду на збіжність.

Врахуємо, що $|u_{n+1}|=\frac{(n+1)\cdot 5^{\frac{n+1}{2}}}{3^{n+1}}$.

Тоді $\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 5^{\frac{n+1}{2}}\cdot 3^n}{3^{n+1}\cdot n\cdot 5^{\frac{n}{2}}}=\frac{5^{\frac{1}{2}}}{3}<1$.

Отже, збігається ряд, складений з модулів членів заданого ряду.

Звідси випливає, що заданий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(2i-1)^n}{3^n}$ збігається абсолютно. ◄

Приклад 12. Дослідити на збіжність ряд з комплексними членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}.$$

► Розглянемо ряд, складений з модулів членів заданого ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{i^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Цей ряд розбігається, бо є гармонічним. Тому заданий ряд не є абсолютно збіжним.

Дослідимо заданий ряд на збіжність.

Враховуючи, що $i^2 = -1$, представимо заданий ряд у вигляді:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n} = i - \frac{1}{2} - \frac{i}{3} + \frac{1}{4} + \frac{i}{5} - \frac{1}{6} - \frac{i}{7} + \frac{1}{8} - \ldots =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{i}{4k+1} - \frac{1}{4k+2} - \frac{i}{4k+3} + \frac{1}{4k+4}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2i}{(4k+1)(4k+3)} - \frac{2}{(4k+2)(4k+4)}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}(c_k + b_k),$$

де $c_k = \frac{2i}{(4k+1)(4k+3)}$, $b_k = \frac{-2}{(4k+2)(4k+4)}$.

$$|c_k| = \frac{2}{(4k+1)(4k+3)} \sim \frac{1}{8k^2},\ k \to \infty,$$

$$|b_k| = \frac{2}{(4k+1)(4k+3)} \sim \frac{1}{8k^2},\ k \to \infty.$$

Ряди $\sum_{k=0}^{\infty}|c_k|$, $\sum_{k=0}^{\infty}|b_k|$ збігаються за граничною ознакою порівняння (порівняно з узагальненим гармонічним рядом $\sum\frac{1}{k^2}$, $p = 2 > 1$, який збігається). Тому заданий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$ збігається.

Враховуючи, що ряд, складений з модулів членів заданого ряду, розбігається, робимо висновок, що заданий ряд умовно збіжний. ◄

IV. Задачі для практичних занять

Збіжність числового ряду

У задачах 2.1 – 2.4 для заданого ряду треба:

1) знайти частинну суму S_n; 2) довести збіжність ряду, користуючись безпосередньо означенням збіжності; 3) знайти суму S ряду.

2.1. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}$.

2.2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$.

2.3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$.

2.4. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{6^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+2^n}{10^n}$.

У задачах 2.5 – 2.10 довести розбіжність рядів, використовуючи достатню умову розбіжності ($\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$).

2.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{4n+2}$. **2.6.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n^2+1}$.

2.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi}{n}$. **2.8.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$.

2.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$. **2.10.** $\sum_{n=1}^{\infty}(n^2+2)\ln\frac{n^2+3}{n^2}$.

Ряди з додатними членами

У задачах 2.11 – 2.17 дослідити на збіжність задані ряди, використовуючи ознаки порівняння.

2.11. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

2.12. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-4n+5}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$.

2.13. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n^3-1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{4n^3}$.

2.14. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4n}$.

2.15. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\,2^{2n-1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n n}$.

2.16. а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^2}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}$.

2.17. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1})$.

У задачах 2.18 – 2.25 дослідити на збіжність задані ряди, використовуючи ознаку Даламбера.

2.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$. **2.19.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$.

2.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$. **2.21.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

2.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{1\cdot 5\cdot\ldots\cdot(4n-3)}$. **2.23.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+1)!}{8^n n^2}$.

2.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$. **2.25.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{3^n\cdot n!}$.

У задачах 2.26 – 2.33 дослідити на збіжність задані ряди, використовуючи радикальну ознаку Коші.

2.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(n+1)}$. **2.27.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

2.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$. **2.29.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.

2.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$. **2.31.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin^n\frac{1}{n}$.

2.32. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{2n+1}\right)^n$. **2.33.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+2n+1}{5n^2+2n+1}\right)^n$.

У задачах 2.34 – 2.41 дослідити на збіжність задані ряди, використовуючи інтегральну ознаку Коші.

2.34. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$. **2.35.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

2.36. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$. **2.37.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$.

2.38. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2$. **2.39.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$.

2.40. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2n+5}$. **2.41.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{(4n+5)^3}}$.

У задачах 2.42 – 2.54 дослідити на збіжність задані ряди, використовуючи відомі ознаки збіжності.

2.42. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}$. **2.43.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}}$.

2.44. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$. **2.45.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}$.

2.46. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-4)(4n-1)}$. **2.47.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$.

2.48. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{5n+3}\right)^n$. **2.49.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{100}}{2^n}$.

2.50. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2+1}{7n^2-4}$. **2.51.** $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\,(\ln\ln n)^2}$.

2.52. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\ln\ln n}$. **2.53.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$.

2.54. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$.

У задачах 2.55 – 2.58 довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, використовуючи ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

2.55. $u_n = \frac{a^n}{n!}$. **2.56.** $u_n = \frac{(2n)!}{a^{n!}}$ $(a > 1)$.

2.57. $u_n = \frac{n^n}{(n!)^2}$. **2.58.** $u_n = \frac{(n!)^n}{n^{n^2}}$.

Знакозмінні ряди

У задачах 2.59 – 2.72 дослідити, які з заданих рядів збігаються абсолютно, які збігаються умовно, які розбігаються.

2.59. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3n-1}$. **2.60.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^3}$.

2.61. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n}$. **2.62.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{5n-2}$.

2.63. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}$. **2.64.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n\sqrt{n}}$.

2.65. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$. **2.66.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{(\ln 3)^n}$.

2.67. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\ln n}{n}$. **2.68.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln(n+1)}$.

2.69. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^3}$. **2.70.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2^{n^2}}{n!}$.

2.71. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^3}{2^n}$. **2.72.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\, n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}$.

Ряди з комплексними членами

У задачах 2.73 – 2.80 дослідити на збіжність задані ряди з комплексними членами.

2.73. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!(e-i)^n}$. **2.74.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{i(2n+i)}{4n}\right)^n$.

2.75. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin in}{3^n}$. **2.76.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2+i)^n n}{2^n}$.

2.77. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n n}{2^n}$. **2.78.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3-i}{2}\right)^n$.

2.79. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2+i}{3}\right)^n$. **2.80.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{5^n}+\frac{i}{n^2+1}\right)$.

§2. Функціональні ряди. Степеневі ряди

I. Короткі теоретичні відомості

Функціональні ряди

Основні поняття. Ряд вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \tag{2.15}$$

де $u_n(x)$ – *члени* ряду є функціями від x, називається *функціональним*.

Областю збіжності функціонального ряду (2.15) називається множина значень аргументу x, для якого цей ряд збігається. Областю збіжності функціонального ряду найчастіше є який-небудь проміжок осі Ox. Позначимо область збіжності через X.

На практиці для визначення області збіжності функціонального ряду (2.15) користуються ознакою Даламбера або радикальною ознакою Коші, тобто, якщо

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = l(x)$$

або

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}=l(x),$$

то для визначення області збіжності слід розв'язати нерівність $l(x)<1$, а для визначення області розбіжності – нерівність $l(x)>1$. При цьому для дослідження поведінки ряду в точках, де $l(x)=1$ (в точках межі області), проводиться додаткове дослідження (це пов'язано з тим, що вказані ознаки збіжності при $l(x)=1$ не дають відповіді на питання збіжний ряд чи ні).

Сума n перших членів ряду (2.15) називається *n-ю частинною сумою* $S_n(x)$ ряду, тобто

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x).$$

Функція

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x),$$

де $x\in X$, називається *сумою* ряду.

Функція

$$r_n(x)=S(x)-S_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)$$

називається *n-м залишком ряду*.

Функціональний ряд (2.15) називається *рівномірно збіжним* на проміжку $[a,b]$, якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ існує такий номер $N\in\mathbf{N}$, що для всіх $n>N$ і $\forall x\in[a,b]$ виконується нерівність $|r_n(x)|<\varepsilon$.

Функціональний ряд (2.15) називається *мажоровним* на проміжку $[a,b]$, якщо існує збіжний числовий ряд з додатними членами

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n, \tag{2.16}$$

такий, що

$$|u_n(x)|<\alpha_n \tag{2.17}$$

на цьому проміжку.

Збіжний числовий ряд з додатними членами (2.16) називається *мажорантним* на проміжку $[a,b]$ по відношенню до функціонального ряду (2.15).

Теорема 1 (*ознака Вейєрштрасса*). Якщо функціональний ряд (2.15) мажоровний на проміжку $[a,b]$, то він абсолютно і рівномірно збіжний на цьому проміжку.

Теорема 2 (*критерій Коші*). Для того, щоб функціональний ряд (2.15) був рівномірно збіжним на $[a,b]$, необхідно та достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon>0$ існував такий номер N, що для всіх $n>N$ і для будь-якого натурального числа p виконувалась нерівність

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)\right|<\varepsilon.$$

Рівномірно збіжні ряди мають такі *властивості*.

1^0. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$, де функції $u_n(x)$ неперервні на відрізку $[a,b]$, рівномірно збіжний і має суму $S(x)$ на цьому відрізку, то сума ряду $S(x)$ неперервна функція на відрізку $[a,b]$.

2^0. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$, де функції $u_n(x)$ неперервні на відрізку $[a,b]$, рівномірно збіжний і має суму $S(x)$ на цьому відрізку, то

$$\int_{\alpha}^{x}S(x)\,dx=\int_{\alpha}^{x}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\alpha}^{x}u_n(x)\,dx,$$

де $(\alpha,x)\in[a,b]$.

3^0. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$, де функції $u_n(x)$ неперервні та диференційовні на відрізку $[a,b]$, збіжний на цьому відрізку і має суму $S(x)$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ рівномірно збіжний на відрізку $[a,b]$ і має суму $F(x)$, то для всіх $x\in[a,b]$

$$S'(x)=F(x),$$

тобто

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x).$$

Властивості 2^0 та 3^0 означають, що при виконанні вказаних умов функціональні ряди можна почленно інтегрувати та диференціювати.

Степеневі ряди

Основні поняття. *Степеневим рядом* називається функціональний ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \tag{2.18}$$

або

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n, \tag{2.19}$$

де a, a_0, a_1, a_2, … – дійсні числа.

Ряд (2.19) заміною $x-a=X$ зводиться до ряду (2.18).

Теорема (*Абеля*). Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ збіжний при $x=x_0 \neq 0$, то він абсолютно збіжний для всіх значень x, що задовольняють нерівність $|x|<|x_0|$; якщо цей ряд розбіжний при $x=x_1$, то він розбіжний всюди, де $|x|>|x_1|$.

Наслідком теореми Абеля є наявність існування для степеневого ряду *інтервалу збіжності*. Для ряду (2.18) інтервалом збіжності є інтервал $(-R, R)$; для ряду (2.19) інтервалом збіжності є інтервал $(a-R,\ a+R)$. Число R називається *радіусом збіжності*. Всередині інтервалу збіжності ряд абсолютно збігається, за його межами – розбігається. Питання про збіжність ряду при $x=\pm R$ (на кінцях інтервалу збіжності) розв'язується для кожного ряду окремо.

Областю збіжності степеневого ряду є інтервал збіжності, до якого приєднуються кінці інтервалу $x=\pm R$, якщо в цих точках ряд збігається.

Для визначення радіуса та інтервалу збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ складаємо ряд із модулів його членів $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$. Далі, використовуючи ознаку Даламбера або радикальну ознаку Коші, отримуємо формули для обчислення радіуса збіжності

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \tag{2.20}$$

або

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}\,. \tag{2.21}$$

Якщо $R=+\infty$, то ряд є збіжним на всій числовій осі. Якщо $R=0$, то ряд збігається лише в точці $x=0$.

Радіус збіжності для ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ визначається за тими самими формулами, що й для ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, тобто за формулами (2.20) або (2.21). Але інтервал збіжності знаходять з нерівності $|x-a|<R$, тобто інтервал збіжності $(a-R,\ a+R)$.

Зауважимо, що радіус та інтервал збіжності можна знаходити, застосовуючи безпосередньо ознаку Даламбера або радикальну ознаку Коші до ряду, складеного з модулів членів вихідного ряду. З цією метою позначаємо члени ряду (2.18): $a_n x^n = u_n(x)$. Вказані ознаки збіжності застосовуємо до ряду $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n(x)|$. Інтервал збіжності знаходимо з нерівності

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|<1 \tag{2.22}$$

або

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}<1\,. \tag{2.23}$$

Властивості степеневих рядів

1^0. Степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ абсолютно і рівномірно збіжний на будь-якому відрізку $[-\rho, \rho]$, який цілком міститься в інтервалі збіжності $(-R, R)$.

2^0. Сума степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ неперервна всередині його інтервалу збіжності.

3^0. Степеневий ряд $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ можна інтегрувати почленно в його інтервалі збіжності $(-R, R)$, причому радіус збіжності отриманого ряду дорівнює R. Зокрема, для всіх $x\in(-R, R)$ справедлива формула

$$\int_0^x S(x)\,dx=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\frac{x^{n+1}}{n+1}\,. \tag{2.24}$$

4^0. Степеневий ряд $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ можна диференціювати почленно в будь-якій точці x його інтервалу збіжності $(-R, R)$, причому радіус збіжності отриманого ряду також дорівнює R. Для всіх $x\in(-R, R)$ справедлива формула

$$S'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n x^{n-1}\,. \tag{2.25}$$

З властивостей 3^0 та 4^0 випливає, що ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ можна інтегрувати на відрізку $[0, x]$, $x\in(-R, R)$ і диференціювати в будь-якій точці $x\in(-R, R)$ скільки завгодно раз. При цьому інтервалом збіжності кожного отриманого ряду є той самий інтервал $(-R, R)$.

Ряд Тейлора

Основні поняття. *Рядом Тейлора для функції* $f(x)$ називається ряд вигляду

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k . \qquad (2.26)$$

Тут $0!=1$, $f^{(0)}(a)=f(a)$, $C_k=\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$ – *коефіцієнти Тейлора*.

При $a=0$ ряд Тейлора приймає вигляд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k . \qquad (2.27)$$

Ряд (2.27) називається *рядом Маклорена*.

Теорема. Якщо функцію $f(x)$ в інтервалі $(a-R,\ a+R)$ можна розкласти в степеневий ряд, то цей ряд єдиний і є рядом Тейлора даної функції.

Наведемо умови, за яких сума ряду (2.26) збігається до функції $f(x)$, тобто умови розкладання функції в ряд Тейлора.

Теорема. Для того, щоб ряд Тейлора (2.26) збігався до функції $f(x)$ в інтервалі $(a-R,\ a+R)$, необхідно і достатньо, щоб ця функція мала похідні всіх порядків на цьому інтервалі і залишковий член її формули Тейлора $r_n(x)$ прямував до нуля при $n\to\infty$ для всіх x з цього інтервалу.

Отже, при виконанні умов цієї теореми, маємо

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad (2.28)$$

або при $a=0$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k . \qquad (2.29)$$

Наведемо теорему, яка дає досить прості достатні умови розкладання функції в ряд Тейлора.

Теорема. Якщо функція $f(x)$ в інтервалі $(a-R,\ a+R)$ має похідні всіх порядків і існує число $M>0$ таке, що $\left|f^{(n)}(x)\right|\le M$, $x\in(a-R,\ a+R)$, $n=0,1,2,\ldots$, то функцію $f(x)$ можна розкласти в ряд Тейлора.

Формули розкладу елементарних функцій в ряд Маклорена

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad -\infty<x<+\infty,$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad -\infty<x<+\infty,$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\quad -\infty<x<+\infty,$$

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n,\quad -1<x<1,$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\quad -1<x<1,$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\quad -1<x<1,$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n,\ -1<x\le 1,$$

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad -1\le x\le 1,$$

$$\arcsin x=x+\frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots=$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad -1<x<1.$$

В останній формулі: $(2n-1)!!=1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)$, $(2n)!!=2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n$.

Розкладання функцій в степеневі ряди *в загальному випадку* базується на використанні рядів Тейлора або Маклорена.

На практиці степеневі ряди для багатьох функцій можна знайти формально, використовуючи наведені формули розкладу елементарних функцій в ряд Маклорена. Іноді корисно застосовувати почленне диференціювання або інтегрування рядів. В інтервалах збіжності ряди збігаються до відповідних функцій.

Наближені обчислення за допомогою степеневих рядів

1. *Наближене обчислення значень функції*. Нехай треба обчислити значення функції $f(x)$ при $x = x_0$. Якщо функцію $f(x)$ можна розкласти в степеневий ряд в інтервалі $(-R, R)$ і $x_0 \in (-R, R)$, то точне значення $f(x_0)$ дорівнює сумі цього ряду при $x = x_0$, а наближене – частинній сумі $S_n(x_0)$. Похибку $|f(x_0) - S_n(x_0)|$ можна знайти, оцінюючи залишок ряду $r_n(x_0)$.

Для рядів лейбніцевого типу (2.9) маємо

$$|r_n(x_0)| = |u_{n+1}(x_0) + u_{n+2}(x_0) + \ldots| < |u_{n+1}(x_0)|.$$

Для знакозмінних та знакододатних рядів величину $r_n(x_0)$, як правило, оцінюють так:

$$|r_n(x_0)| \le |u_{n+1}(x_0)| + |u_{n+2}(x_0)| + |u_{n+3}(x_0)| + \ldots < a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = S,$$

де $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ – певний знакододатний збіжний ряд, сума якого легко обчислюється (наприклад, геометрична прогресія) і для якого

$$|u_{n+1}(x_0)| \le a_1, \ |u_{n+2}(x_0)| \le a_2, \ |u_{n+3}(x_0)| \le a_3, \ \ldots .$$

2. *Наближене обчислення визначених інтегралів*. Нехай потрібно знайти інтеграл $F(x) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$, який або не виражається через елементарні функції, або складний і незручний для обчислень. Якщо функцію $f(x)$ можна розкласти в степеневий ряд, що рівномірно збігається на деякому відрізку, то для обчислення заданого інтеграла можна скористатись властивістю про почленне інтегрування цього ряду. Похибку обчислень визначають так само, як і при обчисленні значень функцій.

3. *Наближене інтегрування диференціальних рівнянь*. У випадку, коли точно проінтегрувати диференціальне рівняння за допомогою елементарних функцій не вдається, його розв'язок зручно шукати у вигляді ряду Тейлора або Маклорена.

Наприклад, при розв'язанні задачі Коші

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

використовується ряд Тейлора

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

де $y(x_0) = y$, $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$, а решта похідних $y^{(n)}(x_0)$ $(n = 2, 3, \ldots)$ знаходяться шляхом послідовного диференціювання заданого диференціального рівняння та підстановки початкових даних у вираз для цих похідних.

Рівняння та функції Бесселя

Рівняння Бесселя має вигляд

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)\,y = 0, \qquad \nu - \text{const}. \qquad (2.30)$$

Якщо ν – не ціле число, то загальний розв'язок має вигляд

$$y = C_1 I_\nu(x) + C_2 I_{-\nu}(x).$$

Якщо ν – ціле, то

$$y = C_1 I_\nu(x) + C_2 K_\nu(x),$$

де $I_\nu(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+\nu+1)}$, $I_{-\nu}(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2k-\nu}}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k-\nu+1)}$.

Функції $I_\nu(x)$ та $I_{-\nu}(x)$ називаються *функціями Бесселя першого роду порядку* ν і $-\nu$ відповідно.

$$K_\nu(x) = I_\nu(x)\ln x + x^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k .$$

Коефіцієнти b_k знаходять з умови задовільнення функції $K_\nu(x)$ диференціального рівняння (2.30).

Функція $K_\nu(x)$ з визначеними коефіцієнтами b_k називається *функцією Бесселя другого роду порядку* ν.

У зазначених формулах $\Gamma(p)$ – гамма-функція Ейлера:

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{p-1} dx \qquad (p > 0).$$

Відомо, що

$$\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p)$$

і для цілих значень $p > 0$

$$\Gamma(p+1) = p!$$

II. Контрольні питання та завдання

1. Дайте означення функціонального ряду; області його збіжності.
2. Дайте означення рівномірно збіжного функціонального ряду.
3. Який функціональний ряд називається мажоровним на проміжку?

4. Сформулюйте ознаку Вейерштрасса рівномірної збіжності функціонального ряду.

5. За яких умов функціональний ряд можна почленно диференціювати; почленно інтегрувати?

6. Дайте означення степеневого ряду.

7. Сформулюйте теорему Абеля.

8. Що є областю збіжності степеневого ряду?

9. Як знаходиться радіус збіжності степеневого ряду?

10. Сформулюйте властивості степеневого ряду.

11. Який ряд називається рядом Тейлора; рядом Маклорена?

12. Які умови розкладання функції в ряд Тейлора?

13. Наведіть формули розкладу функцій e^x, $\sin x$, $\cos x$ в ряд Маклорена.

14. Як використовуються степеневі ряди для наближених обчислень значень функцій; визначених інтегралів?

15. Як використовуються ряди Тейлора або Маклорена для наближеного розв'язання диференціальних рівнянь?

III. Приклади розв'язання задач

У цьому пункті розглянуто 14 прикладів розв'язання задач, які за своєю тематикою розподілились так:

1. Функціональні ряди: *приклади 1 – 2.*
2. Степеневі ряди: *приклади 3 – 14.*

Функціональні ряди

Приклад 1. Визначити область збіжності функціонального ряду.

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+3}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n x}{n^2}$;

в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(x^n+\frac{1}{2^n x^n}\right)$;

д) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n\cos^n x$; е) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{e^{nx}}$.

► а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+3}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$.

Знайдемо область збіжності, використавши ознаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{2n+5}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2n+3}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{n}}\right|=\left|\frac{1-x}{1+x}\right|.$$

На основі ознаки Даламбера можна стверджувати, що: ряд збігається (і притому абсолютно), якщо $\left|\frac{1-x}{1+x}\right|<1$, тобто $|1-x|<|1+x|$, звідки $x>0$.

При $\left|\frac{1-x}{1+x}\right|=1$ маємо $|1-x|=|1+x|$, звідки $x=0$.

Враховуючи, що ознака Даламбера не дає відповіді збіжний чи розбіжний ряд у цьому випадку, підставляємо $x=0$ в заданий ряд. Маємо числовий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+3}$. Використовуючи, наприклад, граничну ознаку порівняння (порівнюємо з гармонічним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, що є розбіжним), робимо висновок, що цей ряд розбіжний.

Отже, область збіжності заданого ряду: $0<x<+\infty$.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n x}{n^2}$.

За ознакою Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\ln^{n+1}x\cdot n^2}{(n+1)^2\cdot\ln^n x}\right|=|\ln x|.$$

Достатньою умовою збіжності є те, що $|\ln x|<1$, тобто ряд збігається для $\forall x\in\left(\frac{1}{e},e\right)$.

Дослідимо ряд на збіжність у точках $x_1 = \dfrac{1}{e}$ та $x_2 = e$, в яких ознака Даламбера не дає відповіді на питання збіжний чи розбіжний ряд (ці точки відповідають випадку, коли $|\ln x| = 1$).

При $x_1 = \dfrac{1}{e}$ та $x_2 = e$ маємо відповідно ряди:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad (1) \quad \text{та} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad (2).$$

Ряд (2) збігається, бо є узагальненим гармонічним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ при $p = 2 > 1$.

Ряд (1) збігається абсолютно, бо ряд, складений із абсолютних величин його членів, має вигляд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ і є збіжним за тією ж причиною.

Оскільки обидва ряди збігаються, то точки $x_1 = \dfrac{1}{e}$ та $x_2 = e$ включаються в область збіжності.

Отже, область збіжності заданого ряду: $x \in \left[\dfrac{1}{e}, e \right]$.

в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{1 + x^{2n}}$.

Враховуючи, що $u_n(x) = \dfrac{x^n}{1 + x^{2n}}$, розглянемо такі проміжки зміни аргументу x:

$|x| < 1$, $|u_n(x)| < |x^n|$, $n \to \infty$; ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |x|^n$ збігається, бо при заданому значенні x є геометричним рядом, для якого $|q| = |x| < 1$, і за ознакою порівняння заданий ряд збігається;

$|x| = 1$, $|u_n(x)| = \dfrac{1}{2}$, $\forall n$; ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2}$ – розбіжний, бо $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \dfrac{1}{2} \neq 0$;

$|x| > 1$, $|u_n(x)| = \left| \dfrac{x^n}{1 + x^{2n}} \right| \leq \dfrac{1}{|x^n|}$; ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{|x^n|}$ збігається, бо при заданому значенні x є геометричним рядом, для якого $|q| = \dfrac{1}{|x|} < 1$, і за ознакою порівняння заданий ряд збігається.

Таким чином, ряд збігається, коли $|x| \neq 1$.

Отже, область збіжності заданого ряду: $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(x^n + \dfrac{1}{2^n x^n} \right)$.

Розглянемо два ряди:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{та} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n x^n},$$

де $u_{n1}(x) = x^n$, $u_{n2}(x) = \dfrac{1}{2^n x^n}$.

За радикальною ознакою Коші:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_{n1}(x)|} = |x|, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_{n2}(x)|} = \frac{1}{2|x|}.$$

Для збіжності суми рядів необхідне одночасне виконання умов:

$$|x| < 1; \quad \frac{1}{2|x|} < 1.$$

Тобто

$$-1 < x < 1; \quad -2 < \frac{1}{x} < 2 \quad \text{або} \quad x < -\frac{1}{2},\ x > \frac{1}{2}.$$

Звідки

$$-1 < x < -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} < x < 1.$$

При $x = -1$, $x = 1$, $x = -\dfrac{1}{2}$, $x = \dfrac{1}{2}$ не виконується необхідна умова збіжності числових рядів, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$.

Отже, область збіжності заданого ряду: $\left(-1, -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$.

д) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n \cos^n x$.

Звернемося до радикальної ознаки Коші:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n |\cos x|^n} = 2|\cos x|.$$

Ряд збігається, якщо

$$2|\cos x| < 1$$

або

$$|\cos x| < \frac{1}{2},$$

тобто $x \in \left(\frac{\pi}{3}+k\pi,\ \frac{2\pi}{3}+k\pi\right),\ k \in \mathbf{Z}$.

При $x = \pm\frac{\pi}{3}+k\pi$ не виконується необхідна умова збіжності.

Отже, область збіжності заданого ряду: $x \in \left(\frac{\pi}{3}+k\pi,\ \frac{2\pi}{3}+k\pi\right),\ k \in \mathbf{Z}$.

е) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{e^{nx}}$.

Необхідна умова збіжності виконується тільки при $x > 0$.

Оскільки

$$|u_n(x)| = \left|\frac{\cos nx}{e^{nx}}\right| < \frac{1}{e^{nx}},$$

а при $x > 0$ ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{e^{nx}}$$

збігається за радикальною ознакою Коші:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{e^{nx}}} = \frac{1}{e^{x}} < 1,$$

то заданий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{e^{nx}}$$

збігається за ознакою порівняння при $x > 0$.

Отже, область збіжності заданого ряду: $0 < x < +\infty$. ◀

Приклад 2. Дослідити на рівномірну збіжність на зазначених проміжках задані функціональні ряди.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{x^{2n}+n}$, $(-\infty, +\infty)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n$, $(-1, 1)$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^n nx}{n^2}$, $(-\infty, +\infty)$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}$, $(-\infty, +\infty)$.

▶ а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{x^{2n}+n}$, $(-\infty, +\infty)$.

Скористаємось означенням рівномірно збіжного ряду, згідно з яким ряд є рівномірно збіжним, якщо $\forall\varepsilon > 0\ \ \exists N \in \mathbf{N}$, що для всіх $n > N$ і $\forall x \in [a,b]$ виконується нерівність $|r_n(x)| < \varepsilon$.

При будь-якому x заданий ряд збіжний за ознакою Лейбніца, тому його n-й залишок оцінюється за допомогою нерівності

$$|r_n(x)| < |u_{n+1}(x)| = \frac{1}{x^{2(n+1)}+n+1} < \frac{1}{n+1} \text{ для } \forall x \in (-\infty, +\infty).$$

Оскільки $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$, як тільки $n > \frac{1}{\varepsilon}-1$, візьмемо $N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}-1$. Отже, для всіх $n > N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}-1$ матимемо, що $|r_n(x)| < \varepsilon$. Це означає, що ряд збіжний на проміжку $(-\infty, +\infty)$.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n$, $(-1, 1)$.

В інтервалі $(-1, 1)$ ряд збігається, бо є геометричним рядом, для якого $|q| = |x| < 1$. Залишок ряду

$$r_n(x) = x^{n+1} + x^{n+2} + \ldots = \sum_{k=n+1}^{\infty}x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Для залишку $r_n(x)$ маємо:

$$\lim_{x\to -1+0}|r_n(x)| = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{x\to 1-0}|r_n(x)| = \infty.$$

Отже, прийнявши $\varepsilon > \frac{1}{2}$, не можна досягти виконання нерівності $|r_n(x)| < \varepsilon$ для $\forall x \in (-1, 1)$. Згідно з означенням рівномірно збіжного ряду, ряд не є рівномірно збіжним на проміжку $(-1, 1)$.

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^n nx}{n^2}$, $(-\infty, +\infty)$.

Скористаємось ознакою Вейєрштрасса, згідно з якою, якщо даний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ на проміжку має мажорантний , тобто збіжний числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ з додатними членами, такий, що $|u_n(x)| < \alpha_n$, то даний ряд рівномірно збіжний на цьому проміжку.

Врахуємо, що $|u_n(x)| = \left|\frac{\sin^n nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2} \quad \forall x \in (-\infty, +\infty)$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ – збіжний, отже, він є мажорантним для заданого ряду. Звідси заданий ряд є рівномірно збіжним на проміжку $(-\infty, +\infty)$.

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}$, $(-\infty, +\infty)$.

Скористаємось ознакою Вейєрштрасса.

Врахуємо, що $|u_n(x)| = \left|\frac{\cos nx}{n!}\right| \le \frac{1}{n!} \quad \forall x \in (-\infty, +\infty)$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ – збіжний (за ознакою Даламбера), отже, він є мажорантним для заданого ряду. Звідси заданий ряд є рівномірно збіжним на проміжку $(-\infty, +\infty)$.◄

Степеневі ряди

Приклад 3. Визначити область збіжності степеневого ряду.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^n$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}n!\,x^n$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n^n}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n}(x+2)^n$.

► а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$.

Знайдемо радіус збіжності R за формулою $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. Оскільки $a_n = \frac{1}{n^2}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$, маємо

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2} = \left|\begin{matrix} n+1\sim n \\ n\to\infty \end{matrix}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2} = 1.$$

Отже, ряд збігається абсолютно для всіх x, таких, що $|x| < 1$, тобто інтервал збіжності ряду $(-1, 1)$.

Дослідимо на збіжність даний ряд на кінцях інтервалу збіжності, тобто при $x = -1$, $x = 1$.

При $x = 1$ отримуємо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Цей ряд *збіжний*, бо є узагальненим гармонічним при $p = 2 > 1$.

При $x = -1$ отримуємо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$. Цей ряд *абсолютно збіжний*, бо ряд, складений з абсолютних величин його членів $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, збіжний.

Отже, область збіжності даного ряду така: $[-1, 1]$.

Зауважимо, що для знаходження радіуса та інтервалу збіжності можна використати безпосередньо ознаку Даламбера, тобто виходити з умови, що, коли $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| < 1$, то ряд збіжний.

У даному випадку

$$|u_n(x)| = \frac{|x|^n}{n^2}, \quad |u_{n+1}(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^2}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}\cdot n^2}{(n+1)^2\cdot|x|^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}|x| = |x|.$$

За ознакою Даламбера ряд буде збіжний, якщо $|x| < 1$. Звідси $-1 < x < 1$.

Отже, радіус збіжності $R = 1$, інтервал збіжності $(-1, 1)$.

Як показано вище, областю збіжності розглядуваного ряду є відрізок $[-1, 1]$.

б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^n$.

Для знаходження радіуса збіжності R скористаємось формулою $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. Оскільки $a_n = (-1)^{n-1}n$, $a_{n+1} = (-1)^n(n+1)$, маємо

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|(-1)^{n-1}n|}{|(-1)^n(n+1)|} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1.$$

Отже, ряд збігається абсолютно для всіх x, таких, що $|x|<1$, тобто інтервал збіжності ряду $(-1,\,1)$.

Дослідимо збіжність на кінцях інтервалу збіжності.

При $x=-1$ отримуємо числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n(-1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n-1}n=-\sum_{n=1}^{\infty}n\,.$$

Цей ряд *розбіжний*, бо $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}(-n)\neq 0$.

При $x=1$ маємо числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n$, для якого $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n-1}n$ не існує, отже, цей ряд *розбіжний*.

Отже, областю збіжності даного ряду є інтервал: $(-1,\,1)$.

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!\,x^n$.

Для знаходження радіуса збіжності R скористаємось формулою $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. Оскільки $a_n=n!$, $a_{n+1}=(n+1)!$, маємо

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0\,.$$

Рівність $R=0$ означає, що ряд збігається тільки в точці $x=0$.

Отже, область збіжності даного ряду складається з однієї точки $x=0$.

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{2^n}$.

Знайдемо радіус збіжності R за формулою $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$. Оскільки $a_n=\dfrac{1}{2^n}$, маємо

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}}}=2\,.$$

Отже, інтервал збіжності $(-2,\,2)$.

Дослідимо на збіжність даний ряд на кінцях інтервалу збіжності, тобто при $x=-2,\ x=2$.

При $x=2$ маємо числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}1$. Цей ряд *розбіжний*, бо $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=1\neq 0$.

При $x=-2$ маємо числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\,2^n}{2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$. Цей ряд *розбіжний*, бо $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ не існує.

Отже, область збіжності даного ряду співпадає з інтервалом збіжності, тобто областю збіжності є інтервал: $(-2,\,2)$.

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^n}{n^n}$.

Знайдемо радіус збіжності R за формулою $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$. Оскільки $a_n=\dfrac{(-1)^n}{n^n}$, маємо

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{n^n}\right|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}n=\infty\,.$$

Отже, інтервал збіжності $(-\infty,\ +\infty)$. Область збіжності даного ряду співпадає з інтервалом збіжності, тобто область збіжності така: $(-\infty,\ +\infty)$.

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n}(x+2)^n$.

Радіус збіжності R знаходимо за формулою $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. Оскільки $a_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n}$, $a_{n+1}=\dfrac{(-1)^n}{(n+1)2^{n+1}}$, маємо

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n}\right|}{\left|\frac{(-1)^n}{(n+1)2^{n+1}}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 2^{n+1}}{n\cdot 2^n}=\lim_{n\to\infty}2\left(1+\frac{1}{n}\right)=2\,.$$

Отже, ряд збігається абсолютно для всіх x, що задовольняють нерівність $|x+2|<2$, тобто $-2<x+2<2$.

Звідки $-4 < x < 0$ – інтервал збіжності, $R = 2$ – радіус збіжності.
Дослідимо збіжність на кінцях інтервалу збіжності.

При $x = -4$ отримуємо числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^n}(-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

який *розбігається* (гармонічний ряд).

При $x = 0$ маємо числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^n} 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

який *збігається умовно* (ряд збігається за ознакою Лейбніца, а ряд, складений з абсолютних величин його членів, розбіжний, бо є гармонічним).

Отже, область збіжності даного ряду : $(-4, 0]$.

Зауважимо, що для знаходження радіуса та інтервалу збіжності можна використати безпосередньо ознаку Даламбера, тобто виходити з умови того, що, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| < 1$, то ряд збіжний.

У даному випадку

$$|u_n(x)| = \frac{|x+2|^n}{n \cdot 2^n}, \quad |u_{n+1}(x)| = \frac{|x+2|^{n+1}}{(n+1) 2^{n+1}}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x+2|^{n+1} \cdot n \cdot 2^n}{(n+1) \cdot 2^{n+1} \cdot |x+2|^n} = \frac{|x+2|}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{|x+2|}{2}.$$

За ознакою Даламбера ряд абсолютно збіжний, якщо $\frac{|x+2|}{2} < 1$. Звідси $|x+2| < 2$, або $-2 < x+2 < 2$, або $-4 < x < 0$.

Отже, радіус збіжності $R = 2$, інтервал збіжності $(-4, 0)$. ◄

Приклад 4. Знайти суми заданих степеневих рядів, використовуючи почленне диференціювання та інтегрування.

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x| < 1$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, $|x| < 1$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$, $|x| < 1$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$.

► а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x| < 1$.

Позначимо суму заданого ряду через $S(x)$, тобто

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1.$$

Тоді

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots, \quad |x| < 1.$$

Цю суму можна розглядати як геометричну прогресію з першим членом $a = 1$ і знаменником $q = -x^2$. Оскільки $|x| < 1$, то $|q| < 1$. Знайшовши суму спадної геометричної прогресії за формулою $S = \frac{a}{1-q}$, дістанемо

$$S'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Інтегруючи цю рівність на відрізку $[0, x] \subset (-1, 1)$, маємо

$$\int_0^x S'(x)\,dx = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \right) dx = \int_0^x \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

Звідки

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \operatorname{arctg} x, \quad |x| < 1.$$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, $|x| < 1$.

Позначимо суму заданого ряду через $S(x)$, тобто

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad |x| < 1.$$

Тоді

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \ldots, \quad |x| < 1.$$

Цю суму можна розглядати як геометричну прогресію, де $a = 1$ і $q = x$, $|q| = |x| < 1$. Тоді

$$S'(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}.$$

Інтегруючи цю рівність на відрізку $[0, x] \subset (-1, 1)$, маємо

$$\int_0^x S'(x)\,dx = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \right) dx = \int_0^x \frac{1}{1-x}\,dx .$$

Звідки

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln|1-x|, \quad |x|<1 .$$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^{n-1}$, $|x|<1$.

Позначимо суму заданого ряду через $S(x)$:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,x^{n-1}, \quad |x|<1 .$$

Скористаємось рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots, \quad |x|<1 .$$

Тоді

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x|<1 .$$

Продиференціюємо отриману рівність

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} .$$

Отже,

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad |x|<1 .$$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$.

Представимо заданий ряд у вигляді:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = S_1 - S_2 .$$

Тут $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}}$, $S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

Підрахуємо ці суми.

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1 .$$

Для знаходження $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}}$ скористаємось допоміжним степеневим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,x^{n-1}}{2^{n-1}}$, таким, що при $x=1$ приймає вигляд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = S_1$. Вказаний допоміжний ряд збіжний на інтервалі $(-2,\,2)$, позначимо його суму $S(x)$:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,x^{n-1}}{2^{n-1}} , \quad x \in (-2,\,2) .$$

Проінтегруємо цей ряд почленно

$$\int_0^x S(x)\,dx = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,x^{n-1}}{2^{n-1}}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n-1}}, \quad x \in (-2,\,2) .$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n-1}} = \frac{x}{1-\frac{x}{2}} = \frac{2x}{2-x} .$$

Отже,

$$\int_0^x S(x)\,dx = \frac{2x}{2-x} .$$

Продиференціюємо ліву та праву частини по x:

$$S(x) = \frac{2(2-x) - 2x(-1)}{(2-x)^2} = \frac{4}{(2-x)^2} .$$

Тоді $S(1) = 4$, але $S(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = S_1$.

Отже, $S_1 = 4$.

Остаточно маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} = S_1 - S_2 = 4 - 1 = 3 . \blacktriangleleft$$

Приклад 5. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x) = \sin^2 x$ та знайти область, в якій ряд збігається до цієї функції.

► *Спосіб 1.*

$f(x) = \sin^2 x$.

Ряд Маклорена для функції $f(x)$ має вигляд

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,x^k = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Знаходимо похідні $f^{(k)}(x)$ та їх значення при $x=0$.

$f(x)=\sin^2 x$, $\quad f(0)=0$;

$f'(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x$, $\quad f'(0)=0$;

$f''(x)=2\cos 2x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$, $\quad f''(0)=2$;

$f'''(x)=-2^2\sin 2x=2^2\sin\left(2x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$, $\quad f'''(0)=0$;

$f^{(4)}(x)=-2^3\cos 2x=2^3\sin\left(2x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right)$, $f^{(4)}(0)=-2^3$;

$f^{(5)}(x)=2^4\sin 2x=2^4\sin\left(2x+4\cdot\frac{\pi}{2}\right)$, $\quad f^{(5)}(0)=0$;

$f^{(6)}(x)=2^5\cos 2x=2^5\sin\left(2x+5\cdot\frac{\pi}{2}\right)$, $\quad f^{(6)}(0)=2^5$;

. . . .

$f^{(n)}(x)=2^{n-1}\sin\left(2x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right)$.

Отже,

$$\sin^2 x=\frac{2}{2!}x^2-\frac{2^3}{4!}x^4+\frac{2^5}{6!}x^6-\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n},\quad -\infty<x<+\infty.$$

Область збіжності отриманого ряду $-\infty<x<+\infty$, бо за формулою для обчислення радіуса збіжності, маємо

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n-1}(2n+2)!}{(2n)!2^{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)}{2^2}=+\infty.$$

Спосіб 2.

$f(x)=\sin^2 x$.

Представимо $f(x)$ у вигляді:

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$$

і скористаємось формулою

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\qquad -\infty<x<+\infty.$$

Тоді

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}}{(2n)!}x^{2n}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n},\quad -\infty<x<+\infty. ◀$$

Приклад 6. Розкласти задані функції в ряд Маклорена.

а) $f(x)=\dfrac{3}{(1-x)(1+2x)}$; б) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$.

▶ а) $f(x)=\dfrac{3}{(1-x)(1+2x)}$.

Розкладемо цю функцію на суму найпростіших дробів:

$$\frac{3}{(1-x)(1+2x)}=\frac{1}{1-x}+\frac{2}{1+2x}.$$

Оскільки

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\quad |x|<1, \tag{1}$$

$$\frac{1}{1+2x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2x)^n,\quad |2x|<1 \text{ або } |x|<\frac{1}{2}, \tag{2}$$

то

$$\frac{3}{(1-x)(1+2x)}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n+2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n2^nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+(-1)^n2^{n+1}\right)x^n,\quad |x|<\frac{1}{2}.$$

Область збіжності останнього ряду $|x|<\frac{1}{2}$, бо область збіжності ряду (1) $|x|<1$, а ряду (2) – $|x|<\frac{1}{2}$.

б) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$.

Розкладемо знаменник на множники та представимо задану раціональну функцію у вигляді суми найпростіших дробів:

$$\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{-1}{x-1}+\frac{1}{x-2}.$$

Після простих перетворень отримуємо

$$\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}}.$$

Враховуємо, що

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n, \quad |x|<1, \tag{3}$$

$$\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n, \quad \left|\frac{x}{2}\right|<1 \text{ або } |x|<2. \tag{4}$$

Далі, враховуючи, що ряд (3) збігається для $|x|<1$, а ряд (4) – для $|x|<2$, маємо, що обидва ряди збігаються для $|x|<1$, тобто в інтервалі $(-1, 1)$ їх можна почленно віднімати.

Отже,

$$\frac{1}{x^2-3x+2}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}x^n, \ |x|<1. ◄$$

Приклад 7. Розкласти задані функції в ряд Тейлора за степенями $(x-2)$.

а) $f(x)=\dfrac{1}{4-x}$; б) $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

► а) $f(x)=\dfrac{1}{4-x}$.

Перетворимо задану функцію таким чином, щоб можна було застосувати формулу

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n, \quad |x|<1. \tag{1}$$

$$\frac{1}{4-x}=\frac{1}{4-((x-2)+2)}=\frac{1}{2-(x-2)}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x-2}{2}}.$$

Тоді, замінюючи x на $\dfrac{x-2}{2}$ у формулі (1), маємо

$$\frac{1}{4-x}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x-2}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-2}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{2^{n+1}}, \qquad \left|\frac{x-2}{2}\right|<1.$$

Отриманий ряд збігається при $\left|\dfrac{x-2}{2}\right|<1$ або $|x-2|<2$. Звідси $-2<x-2<2$ або $0<x<4$.

б) $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

Перетворимо задану функцію

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{(x-2)+2}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x-2}{2}}.$$

Далі скористаємось формулою

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, \quad |x|<1. \tag{2}$$

Тоді, замінюючи x на $\dfrac{x-2}{2}$ у формулі (2), маємо

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x-2}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-2}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^n}{2^{n+1}}, \qquad \left|\frac{x-2}{2}\right|<1.$$

Отриманий ряд збігається при $\left|\dfrac{x-2}{2}\right|<1$, або, після перетворень, для $\forall x$, що задовольняють нерівність $0<x<4$. ◄

Приклад 8. Розкласти задані функції в ряд за степенями x.

а) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{8-x^3}}$.

► Для розкладання заданих функцій в ряд Маклорена скористаємось біноміальним рядом:

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n, \quad -1<x<1. \tag{1}$$

а) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Перетворимо задану функцію до такого вигляду, щоб можна було скористатись біноміальним рядом:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=(1+(-x^2))^{-\frac{1}{2}}.$$

Покладемо у формулі (1) $m=-\frac{1}{2}$ і замість x запишемо $-x^2$. Матимемо

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots 2n}x^{2n}+\ldots=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n},\quad -1<x<1.$$

б) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{8-x^3}}$.

Перетворимо задану функцію до такого вигляду, щоб можна було скористатись біноміальним рядом:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{8-x^3}}=\frac{1}{2\left(1-\left(\frac{x}{2}\right)^3\right)^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{x}{2}\right)^3\right)^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\left(1+\left(-\left(\frac{x}{2}\right)^3\right)\right)^{-\frac{1}{3}}.$$

Покладемо у формулі (1) $m=-\frac{1}{3}$ і замість x запишемо $-\left(\frac{x}{2}\right)^3$. Матимемо

$$\frac{1}{\sqrt[3]{8-x^3}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\frac{1\cdot 4}{3^2}\frac{1}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^6+\frac{1\cdot 4\cdot 7}{3^3}\frac{1}{3!}\left(\frac{x}{2}\right)^9+\ldots\right.$$

$$\left.+\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots(3(n-1)+1)}{3^n}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{3n}+\ldots\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots(3(n-1)+1)}{3^n}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{3n},$$

де $\left|\frac{x}{2}\right|<1$. ◄

Приклад 9. Обчислити границі, використовуючи розклади функцій в ряд Маклорена.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^x-2-2x-x^2}{x-\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$.

► а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^x-2-2x-x^2}{x-\sin x}$.

Використаємо формули розкладу функцій e^x та $\sin x$ в ряд Маклорена:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad \sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Маємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{2e^x-2-2x-x^2}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)-2-2x-x^2}{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2+2x+x^2+\frac{2x^3}{3!}+\ldots-2-2x-x^2}{x-x+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\ldots}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x^3}{3!}+\frac{2x^4}{4!}+\ldots}{\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\ldots}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3!}+\frac{2x}{4!}+\ldots}{\frac{1}{3!}-\frac{x^2}{5!}+\ldots}=\frac{\frac{2}{3!}}{\frac{1}{3!}}=2.$$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$.

Використаємо формули розкладу функцій $\sin x$ та $\operatorname{arctg} x$ в ряд Маклорена:

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad \operatorname{arctg} x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\operatorname{arctg} x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots-\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots\right)}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3!}\right)x^3+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{5!}\right)x^5+\ldots}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3!}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{5!}\right)x^2+\ldots\right]=$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}.$$ ◄

Приклад 10. Обчислити з точністю до 0,001.

а) значення $\sin 18^{\circ}$; б) число e.

► а) знаходимо значення $\sin 18^{\circ}$.

Скористаємось формулою

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad x \in (-\infty, +\infty).$$

Покладемо $x = 18^{\circ}$ або $x = \pi/10$, тоді

$$\sin 18^{\circ} = \sin\frac{\pi}{10} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{10^3 \cdot 3!} + \frac{\pi^5}{10^5 \cdot 5!} - \frac{\pi^7}{10^7 \cdot 7!} + \ldots$$

Маємо ряд лейбніцевого типу. Оскільки

$$\frac{\pi}{10} > 0{,}001, \quad \frac{\pi^3}{10^3 \cdot 3!} > 0{,}001, \quad \frac{\pi^5}{10^5 \cdot 5!} < 0{,}001,$$

то з точністю до 0,001 маємо

$$\sin 18^{\circ} \approx \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{10^3 \cdot 3!} = 0{,}309.$$

б) знаходимо значення числа e.

Скористаємось формулою

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in (-\infty, +\infty).$$

Підставивши в цей ряд $x = 1$, отримуємо знакододатний ряд

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Оцінимо n-й залишок цього ряду

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \frac{1}{(n+4)!} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} + \ldots\right) <$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+2)^3} + \ldots\right) = \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!\,n}.$$

Залишається підібрати найменше натуральне число n, щоб виконувалась нерівність $\frac{1}{n!\,n} < 0{,}001$. Неважко обчислити, що ця нерівність виконується при $n \ge 6$, тому з точністю до 0,001 маємо

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} \approx 2{,}717. \blacktriangleleft$$

Приклад 11. Обчислити з точністю до 0,001 інтеграл

$$\int_0^{1/3} e^{-x^2}\,dx.$$

► Формула Ньютона-Лейбніца тут не застосована, тому, що первісна від e^{-x^2} в елементарних функціях не виражається.

Скориставшись рядом

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in (-\infty, +\infty),$$

запишемо ряд для e^{-x^2}:

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}, \qquad x \in (-\infty, +\infty).$$

Цей ряд рівномірно збіжний на всій числовій осі, тому його можна інтегрувати на будь-якому скінченному відрізку, а отже на відрізку $\left[0, \frac{1}{3}\right]$.

$$\int_0^{1/3} e^{-x^2}\,dx = \int_0^{1/3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}\Bigg|_0^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{1!\,3\cdot 3^3} + \frac{1}{2!\,5\cdot 3^5} - \frac{1}{3!\,7\cdot 3^7} + \ldots.$$

Маємо ряд лейбніцевого типу. Оскільки

$$\frac{1}{3} > 0{,}001, \quad \frac{1}{1!\,3\cdot 3^3} = \frac{1}{81} > 0{,}001, \quad \frac{1}{2!\,5\cdot 3^5} = \frac{1}{2430} < 0{,}001,$$

то з точністю до 0,001 маємо

$$\int_0^{1/3} e^{-x^2}\,dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{81} \approx 0{,}321.$$

Зауважимо, що первісна $F(x)$ для функції $f(x) = e^{-x^2}$, яка не є елементарною функцією, знаходиться у вигляді степеневого ряду, якщо проінтегрувати ряд для функції e^{-x^2} у межах від 0 до x:

$$F(x) = \int_0^x e^{-x^2}\,dx = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}, \quad x \in (-\infty, +\infty). \blacktriangleleft$$

Приклад 12. Знайти три перших (відмінних від нуля) члени розкладу в ряд розв'язку рівняння, що задовольняє задані початкові умови.

а) $y'' = xy' + y, \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 1$;

б) $y' = x^2 + y^3, \quad y(1) = -1$.

Використати метод послідовного диференціювання заданого рівняння для визначення коефіцієнтів ряду.

► а) $y'' = xy' + y, \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 1$.

Шукаємо розв'язок $y(x)$ у вигляді ряду Маклорена:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(0)}{k!} x^k = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Врахуємо, що за умовою $y(0) = 0, \ y'(0) = 1$.

Знаходимо

$$y''(0) = (xy' + y)\big|_{x=0} = 0 \cdot 1 + 0 = 0;$$

$$y^{(3)}(x) = y' + xy'' + y' = 2y' + xy'', \qquad y^{(3)}(0) = 2;$$

$$y^{(4)}(x) = 2y'' + y'' + xy''' = 3y'' + xy''', \qquad y^{(4)}(0) = 0;$$

$$y^{(5)}(x) = 3y''' + y''' + xy^{(4)} = 4y''' + xy^{(4)}, \ y^{(5)}(0) = 8.$$

Підставляємо знайдені значення похідних у ряд Маклорена:

$$y(x) \approx \frac{1}{1!}x + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{8}{5!}x^5 + \ldots = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{15} + \ldots.$$

б) $y' = x^2 + y^3, \quad y(1) = -1$.

Шукаємо розв'язок $y(x)$ у вигляді ряду Тейлора:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{y^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n + \ldots.$$

За умовою $y(1) = -1$.

Знаходимо

$$y'(1) = (x^2 + y^3)\big|_{x=1} = 1^2 + (-1)^3 = 0;$$

$$y''(x) = 2x + 3y^2 y', \qquad y''(1) = 2;$$

$$y'''(x) = 2 + 6y(y')^2 + 3y^2 y'', \qquad y'''(1) = 8.$$

Отже,

$$y(x) \approx -1 + \frac{2}{2!}(x-1)^2 + \frac{8}{3!}(x-1)^3 + \ldots = -1 + (x-1)^2 + \frac{4}{3}(x-1)^3 + \ldots. \ ◄$$

Приклад 13. Знайти розв'язок (у вигляді степеневого ряду) рівняння

$$y'' - xy' + y = 1,$$

що задовольняє початкові умови $y(0) = 0, \ y'(0) = 0$.

► Будемо шукати розв'язок у вигляді ряду

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (1)$$

Тоді

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k x^{k-1} = a_1 + 2a_2 x + \ldots + n\, a_n x^{n-1} + \ldots$$

Враховуючи початкові умови $y(0) = y'(0) = 0$, маємо, що $a_0 = a_1 = 0$.

Отже, маємо

$$y(x) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k, \quad y'(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k\, a_k x^{k-1}, \quad y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}.$$

Підставимо ці вирази в диференціальне рівняння. Отримуємо

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} - x\sum_{k=2}^{\infty} k\, a_k x^{k-1} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k = 1$$

або

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} k\, a_k x^k + \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k = 1.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x:

x^0	$2 \cdot 1 \cdot a_2 = 1$	$\Rightarrow a_2 = \frac{1}{2 \cdot 1}$
x^1	$3 \cdot 2 \cdot a_3 = 0$	$\Rightarrow a_3 = 0$
x^2	$4 \cdot 3 \cdot a_4 - 2a_2 + a_2 = 0$	$\Rightarrow a_4 = \frac{a_2}{4 \cdot 3}$
x^3	$5 \cdot 4 \cdot a_5 - 3a_3 + a_3 = 0$	$\Rightarrow a_5 = \frac{2a_3}{5 \cdot 4} = 0$
…	……………………………………………………	
x^{2m}	$(2m+2)(2m+1)a_{2m+2} - (2m)a_{2m} + a_{2m} = 0$	$\Rightarrow a_{2m+2} = \frac{(2m-1)a_{2m}}{(2m+1)(2m+2)}$
x^{2m+1}	$(2m+3)(2m+2)a_{2m+3} - (2m+1)a_{2m+1} + a_{2m+1} = 0$	$\Rightarrow a_{2m+3} = \frac{(2m-1)a_{2m+1}}{(2m+2)(2m+3)} = 0$

Отримуємо, що

$$a_{2m+1} = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$a_{2m+2} = \frac{(2m-1)\, a_{2m}}{(2m+1)(2m+2)}, \quad m = 1, 2, \dots \tag{2}$$

Враховуючи, що

$$a_2 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2!}, \quad a_4 = \frac{a_2}{3\cdot 4} = \frac{1}{4!}, \quad a_6 = \frac{3a_4}{5\cdot 6} = \frac{1\cdot 3}{2!}, \dots,$$

перетворюємо a_{2m+2} до вигляду:

$$a_{2m+2} = \frac{(2m-1)!!}{(2m+2)!}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Врахуємо також, що $a_0 = a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = 0$.

Підставимо отримані значення коефіцієнтів у ряд (1) і отримуємо:

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m-1)!!}{(2m+2)!} x^{2m+2}.$$

Отриманий ряд збігається при всіх $x \in \mathbf{R}$ (перевірте!). ◄

Приклад 14. Розв'язати рівняння Бесселя

$$y'' + \frac{y'}{x} + y = 0.$$

► Загальний вигляд рівняння Бесселя

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)\, y = 0.$$

Перетворимо задане рівняння, помноживши обидві частини рівняння на x^2. Маємо

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0. \tag{1}$$

Отже, $\nu = 0$, ν – ціле, тоді загальний розв'язок рівняння

$$y = C_1 I_0(x) + C_2 K_0(x).$$

Враховуючи, що

$$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{\Gamma(k+1)\ \Gamma(k+\nu+1)},$$

$$K_\nu(x) = I_\nu(x) \ln x + x^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k,$$

при $\nu = 0$ маємо ($\Gamma(k+1) = k!$):

$$I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k},$$

$$K_0(x) = I_0(x) \ln x + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k.$$

Коефіцієнти b_k знаходять з умови, що $K_0(x)$ задовольняє вихідне диференціальне рівняння. Тобто знайшовши $K_0'(x)$, $K_0''(x)$, підставимо в диференціальне рівняння (1). Далі, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів, знайдемо b_k.

Можна показати, що

$$K_0(x) = I_0(x) \ln x + \frac{x^2}{2^2} - \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \dots$$ ◄

IV. Задачі для практичних занять

Функціональні ряди

У задачах 2.81 – 2.92 знайти області збіжності заданих функціональних рядів.

2.81. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$.

2.82. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$.

2.83. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$.

2.84. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + x^n}$.

2.85. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 + x^{2n}}$.

2.86. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}$.

2.87. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$.

2.88. $\sum_{n=1}^{\infty} (3 - x^2)^n$.

2.89. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(x-3)^n}$.

2.90. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,(3x-4)^n}{5^n}$.

2.91. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{x}{2^n}$.

2.92. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x^n + \frac{1}{n\, 2^n x^n} \right)$.

У задачах 2.93 – 2.99 довести рівномірну збіжність заданих функціональних рядів у зазначених проміжках.

2.93. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}$, $(-\infty, +\infty)$.

2.94. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^n nx}{n^3}$, $(-\infty, +\infty)$.

2.95. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{2^{n-1}}$, $(-\infty, +\infty)$.

2.96. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$, $[-1, 1]$.

2.97. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2[1+(nx)^2]}$, $(-\infty, +\infty)$.

2.98. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2}$, $(-\infty, +\infty)$.

2.99. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n\sqrt{1+nx}}$, $(0, +\infty)$.

Степеневі ряди

У задачах 2.100 – 2.122 знайти області збіжності заданих степеневих рядів.

2.100. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}10^n x^n$.

2.101. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}$.

2.102. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 10^{n-1}}$.

2.103. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!\,x^n$.

2.104. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{n-1}x^{2(n-1)}$.

2.105. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}$.

2.106. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$.

2.107. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n x^n$.

2.108. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$.

2.109. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}5^{n^2}x^{n^2}$.

2.110. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{2^n+1}$.

2.111. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(nx)^n}{(2n+1)!}$.

2.112. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}\left(\frac{x}{2}\right)^n$.

2.113. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n^2+3)\,3^n}$.

2.114. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 5^n}$.

2.115. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{(n+1)\,9^n}$.

2.116. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2 2^n}$.

2.117. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(3x+2)^n}{(n^2+1)\,2^n}$.

2.118. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-4)^{2n-1}}{2n-1}$.

2.119. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{3n+2}$.

2.120. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3x+2)^n}{(2n)!}$.

2.121. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x+1)^n\,\mathrm{tg}\,\frac{\sqrt{n}}{n^3+1}$.

2.122. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x+1)^n\,\mathrm{arctg}^n\,\frac{n^2+1}{n^2+2}$.

У задачах 2.123 – 2.132 знайти суми заданих рядів, використовуючи почленне диференціювання та інтегрування.

2.123. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.

2.124. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$.

2.125. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

2.126. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

2.127. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)\,x^n$.

2.128. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2}$.

2.129. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1}$.

2.130. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{2n+1}$.

2.131. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(x-3)^{n-1}$.

2.132. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+n)x^{n-1}}{2^{n-1}}$.

У задачах 2.133 – 2.140 знайти суми заданих рядів, використовуючи відповідні степеневі ряди.

2.133. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 3^n}$.

2.134. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\,4^{2n-1}}$.

2.135. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

2.136. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n\cdot 5^n}$.

2.137. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)\cdot 2^n}$.

2.138. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(2n+1)}{2^{n+2}}$.

2.139. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$.

2.140. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\,3^{n-1}}$.

У задачах 2.141 – 2.152 розкласти в ряд Тейлора задані функції.

2.141. $f(x)=\ln x$ за степенями $(x-1)$.

2.142. $f(x)=\frac{1}{x^2}$ за степенями $(x+1)$.

2.143. $f(x)=\frac{1}{x}$ за степенями $(x-3)$.

2.144. $f(x)=\sin\frac{\pi x}{4}$ за степенями $(x-2)$.

2.145. $f(x)=\sqrt[3]{x}$ за степенями $(x-1)$.

2.146. $f(x)=e^x$ за степенями $(x+2)$.

2.147. $f(x)=\frac{1}{x^2+4x+7}$ за степенями $(x+2)$.

2.148. $f(x)=\cos^2 x$ за степенями $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

2.149. $f(x)=\frac{1}{4+3x}$ за степенями $(x+2)$.

2.150. $f(x)=\frac{1}{5+2x}$ за степенями $(x-3)$.

2.151. $f(x)=\ln(5x+3)$ за степенями $(x-1)$.

2.152. $f(x)=\ln\frac{1}{x^2-2x+2}$ за степенями $(x-1)$.

У задачах 2.153 – 2.156 розкласти задані функції в ряд Маклорена (за степенями x).

2.153. $f(x)=\operatorname{ch} x$.

2.154. $f(x)=x^2e^x$.

2.155. $f(x)=e^x\sin x$.

2.156. $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

У задачах 2.157 – 2.159 розкласти задані функції за степенями x, використовуючи відомі розклади функцій e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^m$ в ряд Маклорена.

2.157. а) $f(x)=e^{2x}$; б) $f(x)=e^{-x^2}$;

в) $f(x)=xe^{-2x}$; г) $f(x)=xe^{-\frac{x}{2}}$;

д) $f(x)=x^3e^x$; е) $f(x)=e^{-x}(1+x)$.

2.158. а) $f(x)=\sin\frac{x}{2}$; б) $f(x)=\sin 2x$;

в) $f(x)=\frac{\sin 3x}{x}$; г) $f(x)=\cos^2 x$;

д) $f(x)=(x-\operatorname{tg} x)\cos x$.

2.159. а) $f(x)=\sqrt{1+x^2}$; б) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$;

в) $f(x)=\sqrt[3]{8-x^3}$; г) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}$;

д) $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$.

У задачах 2.160 – 2.170 знайти границі, використовуючи розклади функцій в ряд Маклорена.

2.160. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$. **2.161.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{e^x-1-x}$.

2.162. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(\operatorname{tg} x-\sin x)-x^3}{x^5}$. **2.163.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\ln(\sqrt{1+x^2}-x)}{x^3}$.

2.164. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{x(e^x-1)}$.

2.165. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$. **2.166.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+\cos x}{x^3\sin x}-\dfrac{3}{x^4}\right)$.

2.167. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$. **2.168.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\operatorname{ctg} x}{x}\right)$.

2.169. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1+x^2}\,\cos x}{\operatorname{tg}^4 x}$.

2.170. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)e^{-x}-(1-x)e^x}{\arcsin x-\operatorname{arctg} x}$.

2.171. Обчислити наближене значення $\sqrt[3]{e}$, взявши три члени розкладу в ряд Маклорена функції $f(x)=e^x$, та оцінити похибку.

2.172. Обчислити наближене значення $\sin 18^\circ$, взявши три члени розкладу в ряд Маклорена функції $f(x)=\sin x$, та оцінити похибку.

У задачах 2.173 – 2.178 обчислити вказані вирази з заданою точністю, використовуючи відомі розклади відповідних функцій в ряд Маклорена.

2.173. а) e^2 з точністю до 0,001;

б) $\sqrt{e}$ з точністю до 0,001;

в) $\dfrac{1}{e}$ з точністю до 0,0001.

2.174. а) $\sin 1^\circ$ з точністю до 0,0001;

б) $\cos 1^\circ$ з точністю до 0,001;

в) $\cos 10^\circ$ з точністю до 0,0001.

2.175. а) $\sqrt[3]{30}$ з точністю до 0,001;

б) $\sqrt[3]{500}$ з точністю до 0,001;

в) $\sqrt[5]{250}$ з точністю до 0,0001.

2.176. а) $\ln 3$ з точністю до 0,0001;

б) $\ln 1{,}3$ з точністю до 0,0001;

в) $\lg 5$ з точністю до 0,0001.

2.177. $\arcsin\dfrac{1}{5}$ з точністю до 0,0001.

2.178. $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}$ з точністю до 0,0001.

У задачах 2.179, 2.180 для заданих рівнянь $f(x,y)=0$ знайти розклади функції $y(x)$ у ряд Маклорена (за степенями x). Для знаходження коефіцієнтів ряду використати:

а) метод невизначених коефіцієнтів,

б) послідовне диференціювання.

2.179. $xy+e^x=y$. **2.180.** $y=\ln(1+x)-xy$.

У задачах 2.181 – 2.185 виразити у формі ряду задані інтеграли, використовуючи розклади в ряд підінтегральних функцій; вказати області збіжності отриманих рядів.

2.181. а) $\displaystyle\int\frac{\sin x}{x}\,dx$; б) $\displaystyle\int\frac{\cos x}{x}\,dx$.

2.182. а) $\displaystyle\int\frac{e^x}{x}\,dx$; б) $\displaystyle\int\frac{e^x}{x^2}\,dx$; в) $\displaystyle\int_0^x e^{-x^2}\,dx$.

2.183. $\int\limits_0^x \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\, dx$.

2.184. а) $\int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$; б) $\int\limits_0^x \sqrt{1+x^3}\, dx$.

2.185. $\int\limits_0^x \frac{dx}{1-x^9}$.

2.186. Обчислити наближене значення заданих інтегралів, взявши вказане число членів розкладу підінтегральної функції в ряд Маклорена. Вказати похибку.

а) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos x}{x}\, dx$ (3 члени); б) $\int\limits_0^{1/4} e^{-x^2} dx$ (3 члени);

в) $\int\limits_{0,1}^{1} \frac{e^x}{x}\, dx$ (6 членів).

У задачах 2.187 – 2.191 обчислити з точністю до 0,001 задані інтеграли.

2.187. а) $\int\limits_{0,1}^{0,2} \frac{e^{-x}}{x^3}\, dx$; б) $\int\limits_0^{1/4} e^{-x^2} dx$.

2.188. а) $\int\limits_0^{0,8} x^{10} \sin x\, dx$; б) $\int\limits_0^{1/4} \sin x^2 dx$; в) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos x}{x}\, dx$.

2.189. а) $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4}$; б) $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

2.190. $\int\limits_0^{0,5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\, dx$. **2.191.** $\int\limits_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x}\, dx$.

2.192. Знайти шість перших членів розкладу в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння $y'' - (1+x^2)\, y = 0$, яке задовольняє задані початкові умови $y(0) = -2,\ y'(0) = 2$.

2.193. Знайти дев'ять перших членів розкладу в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння $y'' = x^2 y - y'$, що задовольняє задані початкові умови $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

2.194. Записати у вигляді степеневого ряду частинний розв'язок диференціального рівняння $y'' - xy' + y - 1 = 0$, що задовольняє початкові умови $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$.

2.195. Записати у вигляді степеневого ряду загальний розв'язок заданого диференціального рівняння (обмежитись шістьма першими членами).

а) $y'' = y e^x$; б) $y'' + xy' - x^2 y = 0$.

У задачах 2.196 – 2.198 знайти три перших (відмінних від нуля) члени розкладу в степеневий ряд розв'язків диференціальних рівнянь, що задовольняють задані початкові умови.

2.196. а) $y' = xy + \ln(x+y),\ y(1) = 0$;

б) $y' = 2x + \cos y,\ y(0) = 0$;

в) $2y' - (x+y)\, y - e^x = 0,\ y(0) = 2$.

2.197. а) $y'' = x^2 + y^2,\ y(-1) = 0,\ y'(-1) = 0$;

б) $y'' = (y')^2 + xy - 2x,\ y(2) = 0,\ y'(2) = 2$.

2.198. $y''' = y'' + (y')^2 + y^3 + 2x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 0$.

У задачах 2.199 – 2.200 знайти п'ять перших членів розкладу в степеневий ряд розв'язків диференціальних рівнянь, що задовольняють задані початкові умови.

2.199. а) $y' = 2\cos x - xy^2,\ y(0) = 1$;

б) $y' = x^2 + y^2,\ y(0) = 1$;

в) $y' = 2x - y,\ y(0) = 2$.

2.200. а) $y'' = -2xy,\ y(0) = y'(0) = 1$;

б) $y'' = y\cos x + x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$;

в) $y'' + y' = x^2 y,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

У задачах 2.201 – 2.210 розв'язати рівняння Бесселя.

2.201. $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$.

2.202. $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{9}{4}\right)y = 0$.

2.203. $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{4}{9}\right)y = 0$.

2.204. $x^2y'' + xy' + \left(4x^2 - \frac{1}{9}\right)y = 0$.

2.205. $y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{1}{9}y = 0$.

2.206. $y'' + \frac{1}{x}y' + 4y = 0$.

2.207. $x^2y'' - 2xy' + 4(x^2 - 1)y = 0$.

2.208. $xy'' + \frac{1}{2}y' + \frac{1}{4}y = 0$.

2.209. $y'' + \frac{5}{x}y' + y = 0$.

2.210. $y'' + \frac{3}{x}y' + 4y = 0$.

§3. Ряди Фур'є

I. Короткі теоретичні відомості

Ряд Фур'є для періодичної функції з періодом 2π

Тригонометричним рядом називається ряд вигляду

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \qquad (2.31)$$

де a_0, a_n, b_n – задані числа, $n = 1, 2, \ldots$.

Рядом Фур'є періодичної функції $f(x)$ з періодом 2π, визначеної на відрізку $[-\pi, \pi]$, називається ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \qquad (2.32)$$

де

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \qquad (2.33)$$

$n = 1, 2, \ldots$.

Числа a_0, a_n, b_n, визначені формулами (2.33), називаються *коефіцієнтами Фур'є*.

Якщо ряд (2.32) збігається, то його сума $S(x)$ є періодичною функцією з періодом 2π, тобто $S(x + 2\pi) = S(x)$.

Теорема 1. Якщо функцію $f(x)$ можна подати на відрізку $[-\pi, \pi]$ у вигляді рівномірно збіжного на цьому відрізку тригонометричного ряду, то цей ряд єдиний і є рядом Фур'є для функції $f(x)$.

Теорема 2 (Діріхле). Якщо функція $f(x)$ кусково-гладка на відрізку $[-\pi, \pi]$, то її ряд Фур'є збігається в кожній точці x цього відрізка, причому сума цього ряду $S(x)$ задовольняє такі умови:

1) $S(x) = f(x)$, якщо $-\pi < x < \pi$ і x є точкою неперервності функції $f(x)$;

2) $S(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$, якщо $-\pi < x < \pi$ і x є точкою розриву функції $f(x)$;

3) $S(\pi) = S(-\pi) = \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}$.

Нагадаємо, що кусково-гладкою на відрізку $[a, b]$ називається кусково-неперервна функція, що має неперервну похідну в усіх точках, за виключенням їх скінченного числа, в яких вона має розрив першого роду. Отже, кусково-гладка на відрізку $[a, b]$ функція обмежена та має обмежену першу похідну.

Теорема Діріхле дає достатню умову розкладання періодичної функції $f(x)$ з періодом 2π в ряд Фур'є.

Згідно з теоремою 2, у точках неперервності функції

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx). \qquad (2.34)$$

Якщо функція $f(x)$ *парна* на відрізку $[-\pi, \pi]$, то її ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \qquad (2.35)$$

де

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx\,, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\,. \tag{2.36}$$

Якщо функція $f(x)$ *непарна* на відрізку $[-\pi,\pi]$, то її ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx\,, \tag{2.37}$$

де

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\,. \tag{2.38}$$

Якщо функція $f(x)$ *задана на відрізку* $[0,\pi]$, то, для розкладання в ряд Фур'є, цю функцію довизначають на відрізку $[-\pi,0]$ довільним чином, а потім розкладають її в ряд Фур'є на відрізку $[-\pi,\pi]$. Найбільш доцільно довизначати цю функцію так, щоб виконувалась одна з двох умов:

1) $f(-x) = f(x)$. У цьому випадку кажуть, що функція $f(x)$ довизначена *парним чином*. Для її розкладання в ряд Фур'є використовуються формули (2.35), (2.36). Кажуть також, що функція $f(x)$ розкладена в ряд Фур'є *по косинусах*.

2) $f(-x) = -f(x)$. У цьому випадку кажуть, що функція $f(x)$ довизначена *непарним чином*. Для її розкладання в ряд Фур'є використовуються формули (2.37), (2.38). Кажуть також, що функція $f(x)$ розкладена в ряд Фур'є *по синусах*.

Ряд Фур'є для періодичної функції з періодом $2l$

Рядом Фур'є періодичної функції $f(x)$ *з періодом* $2l$, визначеної на відрізку $[-l, l]$, називається ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi nx}{l} + b_n \sin\frac{\pi nx}{l}\right), \tag{2.39}$$

де

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx\,, \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}\,dx\,, \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}\,dx\,. \tag{2.40}$$

Числа a_0, a_n, b_n, визначені формулами (2.40), називаються *коефіцієнтами Фур'є*.

Має місце теорема Діріхле, аналогічна теоремі 2, що дає достатню умову подання функції, періодичної з періодом $2l$, у вигляді ряду Фур'є. Згідно з цією теоремою, в точках неперервності функції маємо:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi nx}{l} + b_n \sin\frac{\pi nx}{l}\right). \tag{2.41}$$

Якщо функція $f(x)$ *парна* на відрізку $[-l, l]$, то її ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi nx}{l}\,, \tag{2.42}$$

де

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\,dx\,, \quad a_n = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}\,dx\,. \tag{2.43}$$

Якщо функція $f(x)$ *непарна* на відрізку $[-l, l]$, то її ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi nx}{l}\,, \tag{2.44}$$

де

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}\,dx\,. \tag{2.45}$$

Якщо функція $f(x)$ *задана на відрізку* $[0, l]$, то для її розкладання в ряд Фур'є виконують процедури аналогічні випадку задання функції на відрізку $[0,\pi]$. При цьому при довизначенні функції *парним чином* ($f(-x) = f(x)$) користуються формулами (2.42), (2.43), а *непарним чином* ($f(-x) = -f(x)$) – формулами (2.44), (2.45). У результаті отримуємо розкладання функції $f(x)$ в ряд Фур'є *по косинусах* та *синусах* відповідно.

Ряд Фур'є в комплексній формі

Комплексна форма ряду Фур'є на відрізку $[-\pi,\pi]$ має вигляд

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{inx}\,, \tag{2.46}$$

де

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx, \quad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots . \tag{2.47}$$

Аналогічно, комплексна форма ряду Фур'є на відрізку $[-l, l]$ має вигляд

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{\frac{\pi n x}{l} i}, \tag{2.48}$$

де

$$C_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x) e^{-\frac{\pi n x}{l} i}\, dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{2.49}$$

Інтеграл Фур'є. Перетворення Фур'є

Вважатимемо, що функція $f(x)$ задовольняє такі умови:

1) визначена на всій числовій осі,
2) кусково-гладка на будь-якому скінченному проміжку,
3) абсолютно інтегровна на всій числовій осі, тобто $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx$ збігається.

Тоді в точках неперервності функції $f(x)$ має місце формула

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \alpha (t - x)\, dt, \tag{2.50}$$

яка називається *інтегральною формулою Фур'є.*

Формула (2.50) може бути записана у вигляді

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \alpha t\, dt \right) \cos \alpha x + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \alpha t\, dt \right) \sin \alpha x \right] d\alpha. \tag{2.51}$$

Вираз, що стоїть справа у формулі (2.50) або (2.51), називається *інтегралом Фур'є.*

Для випадків, коли функція $f(x)$ парна, або непарна, вигляд формули (2.51), а отже і інтеграл Фур'є, спрощується.

Якщо функція $f(x)$ – *парна*, то

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \left[\int_{0}^{+\infty} f(t) \cos \alpha t\, dt \right] \cos \alpha x\, d\alpha. \tag{2.52}$$

Якщо функція $f(x)$ – *непарна*, то

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \left[\int_{0}^{+\infty} f(t) \sin \alpha t\, dt \right] \sin \alpha x\, d\alpha. \tag{2.53}$$

Інтеграл Фур'є може бути представлено *в комплексній формі*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\alpha t}\, dt \right) e^{i\alpha x}\, d\alpha. \tag{2.54}$$

З формулами (2.52), (2.53), (2.54) пов'язані *інтегральні перетворення Фур'є.*

1. *Косинус-перетворення* Фур'є (для парних функцій):

$$F_C(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} f(t) \cos \alpha t\, dt \qquad (\textit{пряме}), \tag{2.55}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} F_C(\alpha) \cos \alpha x\, d\alpha \qquad (\textit{обернене}). \tag{2.56}$$

2. *Синус-перетворення* Фур'є (для непарних функцій):

$$F_S(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} f(t) \sin \alpha t\, dt \qquad (\textit{пряме}), \tag{2.57}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} F_S(\alpha) \sin \alpha x\, d\alpha \qquad (\textit{обернене}). \tag{2.58}$$

3. *Перетворення Фур'є загального вигляду*:

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\alpha t}\, dt \qquad (\textit{пряме}), \tag{2.59}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha) e^{i\alpha x}\, d\alpha \qquad (\textit{обернене}). \tag{2.60}$$

II. Контрольні питання та завдання

1. Дайте означення тригонометричного ряду.

2. Дайте означення тригонометричного ряду Фур'є для періодичної функції з періодом 2π.

3. Сформулюйте теорему Діріхле, що дає достатні умови розкладання в ряд Фур'є періодичної функції з періодом 2π.

4. Запишіть ряд Фур'є для функції $f(x)$, парної на відрізку $[-\pi, \pi]$; непарної на відрізку $[-\pi, \pi]$.

5. За якими правилами розкладається в ряд Фур'є функція $f(x)$, задана на відрізку $[0, \pi]$?

6. За якими формулами визначаються коефіцієнти Фур'є для періодичної функції $f(x)$ з періодом $2l$? Який вигляд має ряд Фур'є для такої функції?

7. Запишіть ряд Фур'є для функції $f(x)$, парної на відрізку $[-l, l]$; непарної на відрізку $[-l, l]$.

8. За якими правилами розкладається в ряд Фур'є функція $f(x)$, задана на відрізку $[0, l]$?

9. Наведіть комплексну форму ряду Фур'є для функції періодичної з періодом 2π; для функції періодичної з періодом $2l$.

10. За яких умов має місце інтегральна формула Фур'є? Наведіть цю формулу.

11. Який вигляд має інтеграл Фур'є для випадку, коли $f(x)$ – парна функція; $f(x)$ – непарна функція?

12. Який вигляд має інтеграл Фур'є в комплексній формі?

13. Наведіть косинус-перетворення Фур'є, синус-перетворення Фур'є.

14. Наведіть перетворення Фур'є загального вигляду.

III. Приклади розв'язання задач

У цьому пункті розглянуто 16 прикладів розв'язання задач, які за своєю тематикою розподілились так:

1. Ряд Фур'є для періодичної функції з періодом 2π: *приклади 1 – 6.*

2. Ряд Фур'є для періодичної функції з періодом $2l$: *приклади 7 – 10.*

3. Ряд Фур'є в комплексній формі: *приклади 11, 12.*

4. Інтеграл Фур'є. Перетворення Фур'є: *приклади 13 – 16.*

При розгляданні прикладів розкладання функцій в ряд Фур'є, для знаходження коефіцієнтів Фур'є приходимо до обчислення інтегралів частинами, або іншими прийомами, вивченими раніше.

У процесі обчислення інтегралів можливе звертання до довідкового матеріалу, який наводимо для зручності нижче.

1. $\int x\cos kx\,dx = x\frac{\sin kx}{k} + \frac{1}{k^2}\cos kx + C$.

2. $\int x\sin kx\,dx = -x\frac{\cos kx}{k} + \frac{1}{k^2}\sin kx + C$.

3. $\int x^2\cos kx\,dx = x^2\frac{\sin kx}{k} - \frac{2}{k}\left(-x\frac{\cos kx}{k} + \frac{1}{k^2}\sin kx\right) + C$.

4. $\int x^2\sin kx\,dx = -x^2\frac{\cos kx}{k} + \frac{2}{k}\left(x\frac{\sin kx}{k} + \frac{1}{k^2}\cos kx\right) + C$.

5. $\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx + a\cos bx) + C$.

6. $\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C$.

7. $\int \cos ax\cos bx\,dx = \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + C, \quad |a| \neq |b|$.

8. $\int \sin ax\sin bx\,dx = -\frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + C, \quad |a| \neq |b|$.

9. $\int \sin ax\cos bx\,dx = -\frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} - \frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} + C, \quad |a| \neq |b|$.

Нагадаємо також, що

$$\cos k\pi = (-1)^k = \begin{cases} 1, & k = 2n, \\ -1, & k = 2n+1; \end{cases} \qquad \sin k\pi = 0.$$

Наведемо значення деяких визначених інтегралів.

1. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\cos mx\,dx = 0, \quad n \neq m$. 2. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\sin mx\,dx = 0, \quad n \neq m$.

3. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\cos mx\,dx = 0, \quad \forall n, m \in \mathbf{N}$.

4. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx = 0, \quad n \in \mathbf{N}$. 5. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx = 0, \quad n \in \mathbf{N}$.

6. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx = \pi, \quad n \in \mathbf{N}$. 7. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx = \pi, \quad n \in \mathbf{N}$.

8. $\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot dx = 2\pi$.

Ряд Фур'є для періодичної функції з періодом 2π

Приклад 1. Розкласти в ряд Фур'є функцію, одержану періодичним продовженням функції

$$f(x)=\begin{cases}2, & -\pi<x\le 0,\\ -1, & 0<x\le\pi\end{cases}$$

на всю числову вісь (період $T=2\pi$).

► Наведемо графік функції, одержаної періодичним продовженням функції $f(x)$ на всю числову вісь.

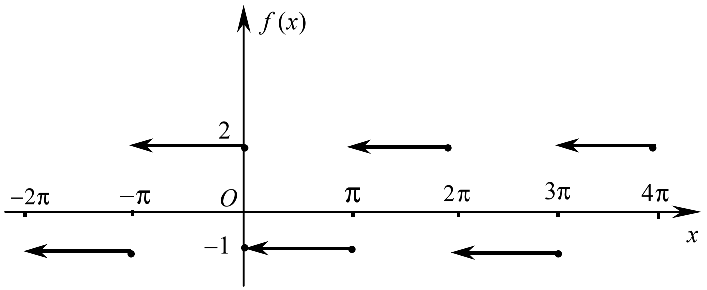


Рис.2.1

Функція $f(x)$ – кусково-гладка, тобто обмежена та має обмежену першу похідну, тому її ряд Фур'є у точках неперервності збігатиметься до цієї функції (теорема Діріхле).

Підрахуємо коефіцієнти Фур'є:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}2\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(-1)\,dx=2-1=1,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}2\cos nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(-1)\cos nx\,dx=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}2\sin nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(-1)\sin nx\,dx=$$

$$=-\frac{2}{\pi n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi n}\cos nx\Big|_{0}^{\pi}=-\frac{2}{\pi n}(1-(-1)^n)+\frac{1}{\pi n}((-1)^n-1)=$$

$$=-\frac{3}{\pi n}(1-(-1)^n)=\begin{cases}-\dfrac{3}{\pi n}\cdot 0=0, & n-\text{парне},\\ -\dfrac{3}{\pi n}\cdot 2=-\dfrac{6}{\pi n}, & n-\text{непарне}.\end{cases}$$

Отже,

$$b_{2n}=0,\quad b_{2n-1}=-\frac{6}{\pi(2n-1)}.$$

Підставимо отримані коефіцієнти в ряд Фур'є, вигляд якого такий:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

Одержимо ряд Фур'є, суму якого позначимо $S(x)$:

$$S(x)=\frac{1}{2}-\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)}\sin(2n-1)x.$$

Згідно з теоремою Діріхле

$$S(x)=f(x),\quad x\in(-\pi,0)\cup(0,\pi),$$

x – точка неперервності функції. У точці розриву $x=0$, що є точкою розриву першого роду, та на кінцях проміжку маємо:

$$S(0)=\frac{f(0-0)+f(0+0)}{2}=\frac{2+(-1)}{2}=\frac{1}{2},$$

$$S(\pi)=S(-\pi)=\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\frac{2+(-1)}{2}=\frac{1}{2}.$$

Отже,

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)}\sin(2n-1)x,\quad x\in(-\pi,0)\cup(0,\pi),$$

а в точках $x=-\pi,\ x=0,\ x=\pi$ сума ряду $S(x)=\frac{1}{2}$. ◄

Приклад 2. Розкласти функцію

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0,\\ x, & 0\le x<\pi\end{cases}$$

в ряд Фур'є на проміжку $(-\pi,\pi)$. Скориставшись одержаним рядом, обчислити суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

► Зобразимо задану функцію та її періодичне продовження на всю числову вісь на рис.2.2.

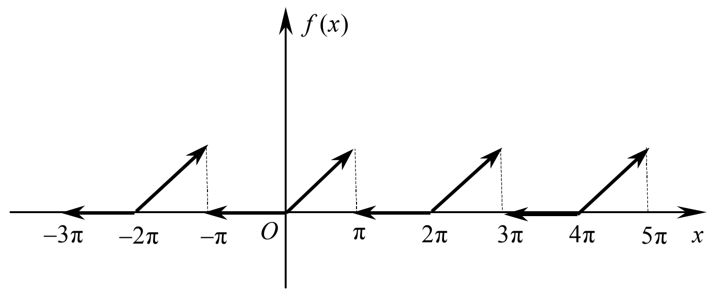


Рис.2.2

Задана функція задовольняє умови теореми Діріхле. Знайдемо коефіцієнти Фур'є. Використовуючи властивість адитивності визначеного інтеграла, матимемо

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0\cdot dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

Далі для обчислення коефіцієнтів a_n та b_n використовуємо інтегрування частинами:

$$\int_a^b u\,dv = uv\big|_a^b - \int_a^b v\,du,$$

або безпосередньо використовуємо формули інтегрування, наведені на початку даного пункту.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,d\left(\frac{\sin nx}{n}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\left.\frac{x\sin nx}{n}\right|_0^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{n\pi^2}\cos nx\Big|_0^{\pi} = \frac{\cos n\pi - 1}{n\pi^2} = \frac{(-1)^n - 1}{n\pi^2} = \begin{cases} -\dfrac{2}{\pi^2 n}, & n - \text{непарне}, \\ 0, & n - \text{парне}. \end{cases}$$

Отже,

$$a_{2n} = 0, \quad a_{2n-1} = -\frac{2}{(2n-1)\pi^2}.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,d\left(-\frac{\cos nx}{n}\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\left.\frac{x\cos nx}{n}\right|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right) =$$

$$= -\frac{\cos n\pi}{n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Отже, ряд Фур'є має вигляд:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{2}{\pi}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + (-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}\right], \quad -\pi < x < \pi.$$

На кінцях відрізку $x = -\pi$, $x = \pi$, в яких функція має розрив першого роду, сума ряду $S(x)$ така:

$$S(\pi) = S(-\pi) = \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = \frac{0+\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Якщо в отриманому ряді Фур'є покласти $x = 0$, то отримаємо:

$$0 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}.$$

Звідки

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. ◄$$

Приклад 3. Розкласти функцію $f(x) = e^{ax}$ ($a = \text{const}$, $a \neq 0$) в ряд Фур'є на проміжку $(-\pi, \pi]$.

► Оскільки $f(x) = e^{ax}$, задана на проміжку $(-\pi, \pi]$, неперервна і монотонна, продовжимо її періодично на всю вісь. Наведемо графік функції, одержаної періодичним продовженням функції $f(x)$ на всю числову вісь.

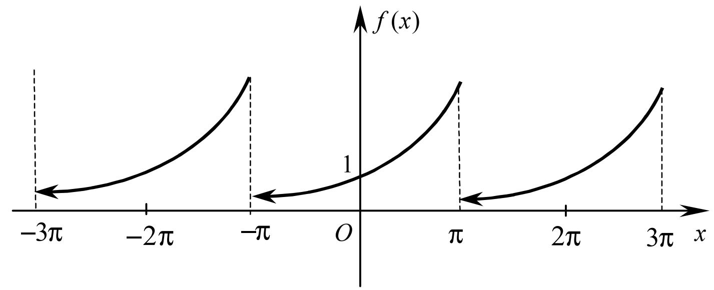


Рис.2.3

Одержана функція задовольняє умови теореми Діріхле.

Розкладемо функцію $f(x) = e^{ax}$ в ряд Фур'є на $(-\pi, \pi]$. Знайдемо коефіцієнти Фур'є, які обчислюються так:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\,dx = \left.\frac{e^{ax}}{\pi a}\right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{a\pi} - e^{-a\pi}}{\pi a} = 2\frac{\operatorname{sh} a\pi}{\pi a}.$$

Далі для обчислення коефіцієнтів a_n та b_n використовуємо інтегрування частинами. Тут скористались наведеним на початку пункту довідковим матеріалом.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\,\frac{a\cos nx + n\sin nx}{a^2+n^2}\,e^{ax}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{(-1)^n\cdot 2a}{\pi(a^2+n^2)}\,\mathrm{sh}\,a\pi,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\,\frac{a\sin nx - n\cos nx}{a^2+n^2}\,e^{ax}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{(-1)^{n-1}\cdot 2n}{\pi(a^2+n^2)}\,\mathrm{sh}\,a\pi.$$

Підставимо знайдені коефіцієнти та одержимо ряд

$$S(x) = \frac{2}{\pi}\mathrm{sh}\,a\pi\left(\frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2}(a\cos nx - n\sin nx)\right).$$

$S(x) = f(x)$ на проміжку $(-\pi,\pi)$, де функція $f(x)$ неперервна.

$$S(\pi) = S(-\pi) = \frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2} = \frac{e^{a\pi}+e^{-a\pi}}{2} = \mathrm{ch}\,a\pi.$$

Отже, маємо

$$e^{ax} = \frac{2}{\pi}\mathrm{sh}\,a\pi\left(\frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2}(a\cos nx - n\sin nx)\right), \quad -\pi < x < \pi. ◄$$

Приклад 4. Задана функція $f(x) = x^2$, $x \in [-\pi, \pi]$. Розкласти в ряд Фур'є задану 2π-періодичну функцію. Скориставшись одержаним рядом, обчислити

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}, \qquad S_2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

► Зобразимо графічно задану функцію та її періодичне продовження на всю числову вісь (рис.2.4).

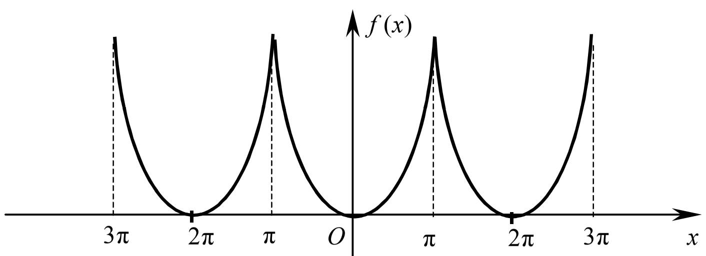


Рис.2.4

У даному випадку $f(x)$ – парна функція, тому $b_n = 0$, $\forall n$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Для обчислення коефіцієнтів a_n скористаємось двічі інтегруванням частинами. Можливо також використання формул інтегрування, наведених на початку даного пункту.

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left(x^2\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx\right) =$$

$$= -\frac{4}{\pi n}\left(-\frac{x\cos nx}{n} + \frac{1}{n^2}\sin nx\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{4}{n^2}(-1)^n.$$

Періодичне продовження $f(x)$ на всю числову вісь є неперервною функцією, бо $f(-\pi+0) = f(\pi-0) = \pi^2$. Виконуються умови теореми Діріхле. Підставимо коефіцієнти в ряд Фур'є. Маємо:

$$S(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,$$

де $S(x) = f(x) = x^2$ для всіх x, бо функція $f(x)$ неперервна у всіх точках.

Отже,

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx, \quad -\pi \le x \le \pi.$$

При $x = 0$ маємо:

$$0 = \frac{\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2},$$

тобто

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}, \qquad S_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

При $x = \pi$ маємо:

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

тобто

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}, \qquad S_2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. ◄$$

Приклад 5. Розкласти функцію $f(x) = x$ в ряд Фур'є на проміжку $(-\pi, \pi)$.

► Наведемо графік заданої функції $f(x) = x$ на проміжку $(-\pi, \pi)$ та її періодичне продовження на всю числову вісь (рис.2.5).

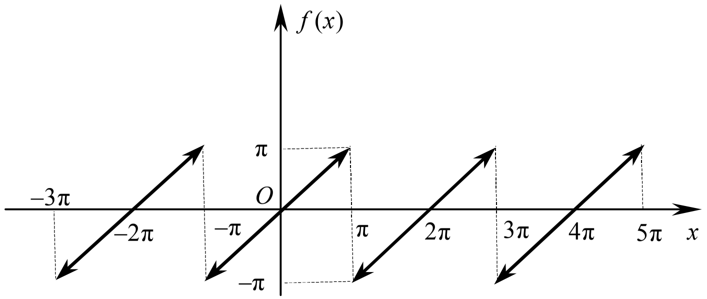


Рис.2.5

Функція $f(x)$ обмежена та має обмежену похідну, тому її ряд Фур'є у точках неперервності збігатиметься до цієї функції (теорема Діріхле).

Знайдемо коефіцієнти Фур'є. Оскільки функція $f(x) = x$ – непарна, то $a_0 = 0$, $a_n = 0 \ \ \forall n$.

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx = -\frac{2}{\pi n}\left(x\cos nx\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\cos nx\,dx \right) = \frac{2}{n}(-1)^{n-1}.$$

Підставимо одержані коефіцієнти та отримаємо ряд Фур'є, сума $S(x)$ якого така:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx\,dx = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx.$$

Згідно з теоремою Діріхле

$$S(x) = f(x) = x, \quad x \in (-\pi, \pi),$$

$$S(\pi) = S(-\pi) = \frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2} = \frac{1-1}{2} = 0.$$

Отже,

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx, \qquad x \in (-\pi, \pi). ◄$$

Приклад 6. Розкласти функцію $f(x) = \pi - x, \quad 0 \le x \le \pi$ в ряд Фур'є: а) по косинусах; б) по синусах.

► Задана функція при її парному та непарному продовженнях на відрізок $[-\pi, 0]$ буде кусково-гладкою, тобто задовольняє умови теореми Діріхле. Розглядаємо ці два вказані способи продовження функції, тоді матимемо відповідно розкладання функції в ряд по косинусах та по синусах.

а) розкладання в ряд Фур'є по косинусах.

Продовжимо функцію $f(x) = \pi - x$ на відрізок $[-\pi, 0]$ парним чином та періодично продовжимо отриману функцію на всю числову вісь (рис.2.6).

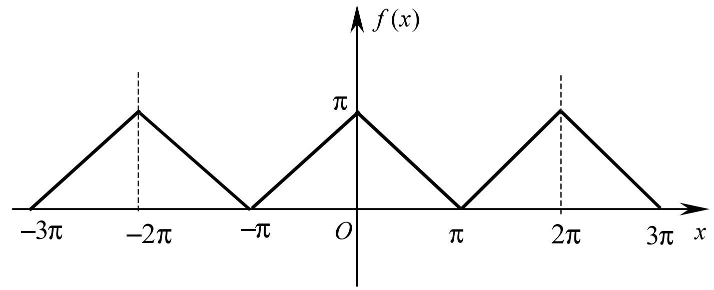


Рис.2.6

Тоді ряд Фур'є для цієї функції матиме вигляд:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

де коефіцієнти Фур'є визначаються так:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\,dx = -\frac{1}{\pi}(\pi - x)^2\Big|_0^{\pi} = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\,d\left(\frac{\sin nx}{n}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[(\pi - x)\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx\right] = -\frac{2}{\pi n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}(1 - \cos n\pi) =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}[1 - (-1)^n] = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi n^2}, & n \text{ – непарне}, \\ 0, & n \text{ – парне}. \end{cases}$$

Отже,

$$a_{2n} = 0, \quad a_{2n-1} = \frac{4}{(2n-1)^2\pi}.$$

Тоді

$$\pi - x = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right), \qquad 0 \le x \le \pi$$

або

$$\pi - x = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}, \qquad 0 \le x \le \pi .$$

б) розкладання в ряд Фур'є по синусах.

Продовжимо функцію $f(x) = \pi - x$ на відрізок $[-\pi, 0]$ непарним чином та періодично продовжимо отриману функцію на всю числову вісь (рис.2.7).

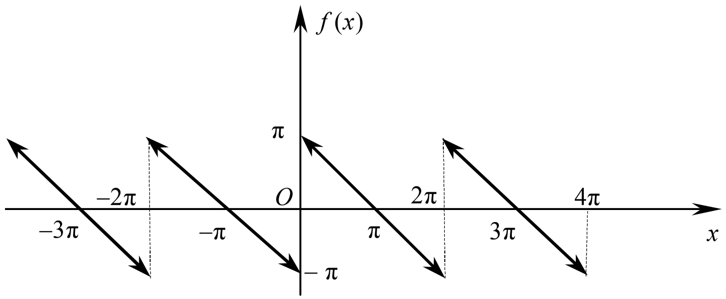


Рис.2.7

Тоді ряд Фур'є для цієї функції матиме вигляд:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx ,$$

де коефіцієнти Фур'є:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\,d\left(-\frac{\cos nx}{n}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-(\pi - x)\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right] = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{n} = \frac{2}{n}, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Отже,

$$\pi - x = 2\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots\right), \qquad 0 < x \le \pi$$

або

$$\pi - x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}, \qquad 0 < x \le \pi .$$

При $x = 0$ сума ряду $S(x)$ така:

$$S(0) = \frac{f(0+0) + f(0-0)}{2} = \frac{1 + (-1)}{2} = 0 . \blacktriangleleft$$

Ряд Фур'є для періодичної функції з періодом $2l$

Приклад 7. Розкласти в ряд Фур'є функцію

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -2 < x < 0, \\ 2, & 0 \le x \le 2, \end{cases}$$

періодичну з періодом $2l = 4$.

► Графічно задана функція представлена на рис.2.8.

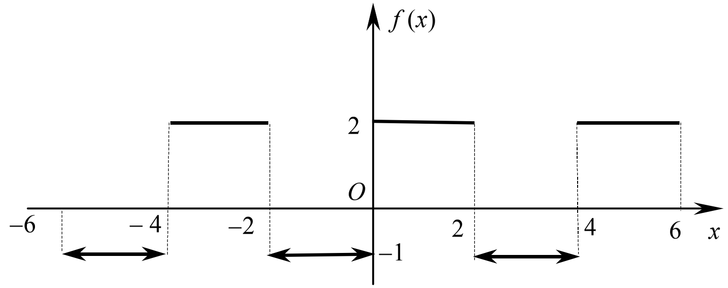


Рис.2.8

Задана функція задовольняє умови теореми Діріхле.

Знайдемо коефіцієнти Фур'є. Врахуємо, що $l = 2$.

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0}(-1)\,dx + \int_0^2 2\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-x\big|_{-2}^{0} + 2x\big|_0^2\right) = \frac{1}{2}(-2+4) = 1,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n}{l}x\,dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{\pi n}{2}x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0}(-1)\cos\frac{\pi n}{l}x\,dx + \int_0^2 2\cos\frac{\pi n}{2}x\,dx\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}x\Big|_{-2}^{0} + \frac{4}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}x\Big|_0^2\right) = 0$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\frac{\pi n}{2}x\,dx =$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0}(-1)\sin\frac{\pi n}{2}x\,dx+\int_{0}^{2}2\sin\frac{\pi n}{2}x\,dx\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{2}x\Big|_{-2}^{0}-\frac{4}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{2}x\Big|_{0}^{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi n}(1-\cos\pi n)-\frac{4}{\pi n}(\cos\pi n-1)\right)=\frac{3}{\pi n}((-1)^n-1)=\begin{cases}0, & n-\text{парне},\\ -\dfrac{6}{\pi n}, & n-\text{непарне}.\end{cases}$$

Отже,

$$b_{2n}=0,\quad b_{2n-1}=-\frac{6}{\pi(2n-1)}.$$

Підставимо отримані коефіцієнти в ряд Фур'є:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\right).$$

Маємо:

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\frac{\pi(2n-1)x}{2},\qquad x\in(-2,0)\cup(0,2).$$

Сума цього ряду $S(x)$ в точках $x=0,\ x=\pm2$, що є точками розриву першого роду, така: $S(0)=S(\pm2)=\dfrac{1}{2}$. ◄

Приклад 8. Розкласти в ряд Фур'є періодичну функцію з періодом $2l$, задану на відрізку $[-l,\ l]$ формулою $f(x)=|x|$.

► Задану функцію зображено на рис.2.9.

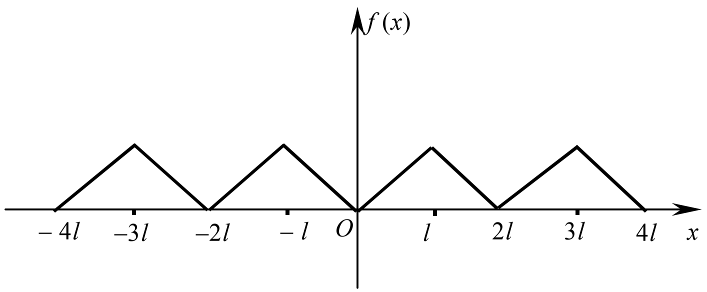


Рис.2.9

Враховуючи, що задана функція парна, її ряд Фур'є має вигляд

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{l}.$$

Знаходимо коефіцієнти a_0 та a_n, $n=1,2,\ldots$

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx=\frac{2}{l}\int_0^l x\,dx=l,$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi n}{l}x\,dx=\frac{2}{l}\int_0^l x\cos\frac{\pi n}{l}x\,dx=\frac{2}{l}\int_0^l x\,d\left(\frac{l}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{l}x\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi n}\int_0^l x\,d\left(\sin\frac{\pi n}{l}x\right)=\frac{2}{\pi n}\left(x\sin\frac{\pi n}{l}x\Big|_0^l-\int_0^l\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx\right)=\frac{2}{\pi n}\,\frac{l}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{l}x\Big|_0^l=$$

$$=\frac{2l}{\pi^2n^2}(\cos\pi n-1)=\frac{2l}{\pi^2n^2}((-1)^n-1)=\begin{cases}0, & n-\text{парне},\\ -\dfrac{4l}{\pi^2n^2}, & n-\text{непарне}.\end{cases}$$

Отже,

$$a_{2n}=0,\quad a_{2n-1}=-\frac{4l}{(2n-1)^2\pi^2}.$$

Підставивши знайдені значення коефіцієнтів в ряд Фур'є, отримаємо

$$|x|=\frac{l}{2}-\frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{\pi(2n-1)x}{l},\quad -l\le x\le l.$$ ◄

Приклад 9. Розкласти функцію $f(x)=x-\dfrac{x^2}{2}$, задану на відрізку $[0,2]$, в ряд Фур'є: а) по косинусах; б) по синусах.

► а) розкладання в ряд Фур'є по косинусах.

Продовжимо функцію $f(x)=x-\dfrac{x^2}{2}$ на відрізок $[-2,0]$ парним чином. Маємо $l=2$. Одержану функцію продовжимо на всю числову вісь з періодом $T=2l=4$ (рис.2.10).

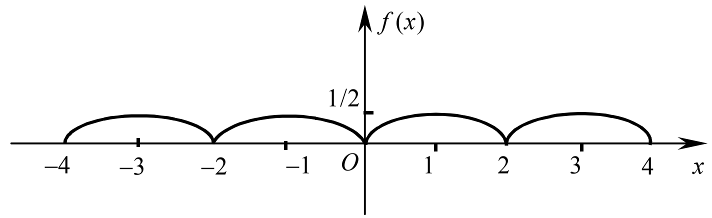


Рис.2.10

Підрахуємо коефіцієнти Фур'є. Оскільки одержана функція парна, то $b_n = 0$.

$$a_0 = \int_0^2 \left(x - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \Bigg|_0^2 = \frac{2}{3},$$

$$a_n = \int_0^2 \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \cos \frac{\pi n x}{2} dx = \frac{2}{\pi n} \int_0^2 \left(x - \frac{x^2}{2} \right) d\left(\sin \frac{\pi n x}{2} \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi n} \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \sin \frac{\pi n x}{2} \Bigg|_0^2 - \frac{2}{\pi n} \int_0^2 (1-x) \sin \frac{\pi n x}{2} dx = -\frac{2}{\pi n} \int_0^2 (1-x) \sin \frac{\pi n x}{2} dx =$$

$$= \frac{4}{\pi^2 n^2} \int_0^2 (1-x)\, d\left(\cos \frac{\pi n x}{2} \right) = \frac{4}{\pi^2 n^2} (1-x) \cos \frac{\pi n x}{2} \Bigg|_0^2 + \frac{4}{\pi^2 n^2} \int_0^2 \cos \frac{\pi n x}{2} dx =$$

$$= -\frac{4}{\pi^2 n^2} \cos \pi n - \frac{4}{\pi^2 n^2} = -\frac{4}{\pi^2 n^2} (\cos \pi n + 1) = -\frac{4}{\pi^2 n^2} ((-1)^n + 1) =$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{8}{\pi n^2}, & n - \text{парне}, \\ 0, & n - \text{непарне}. \end{cases}$$

Отже,

$$a_{2n} = -\frac{8}{\pi^2 (2n)^2}, \quad a_{2n-1} = 0.$$

Підставимо знайдені коефіцієнти в ряд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{2}.$$

Отже,

$$f(x) = \frac{1}{3} - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} \cos \frac{\pi \cdot 2n \cdot x}{2} = \frac{1}{3} - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} \cos \pi n x, \quad \forall x.$$

Сума ряду збігається до $f(x)$ $\forall x$, бо функція неперервна для $\forall x$.

б) розкладання в ряд Фур'є по синусах.

Продовжимо функцію $f(x) = x - \dfrac{x^2}{2}$ на відрізок $[-2,0]$ непарним чином та періодично продовжимо отриману функцію на всю числову вісь (рис.2.11). Маємо $l = 2$, $T = 2l = 4$.

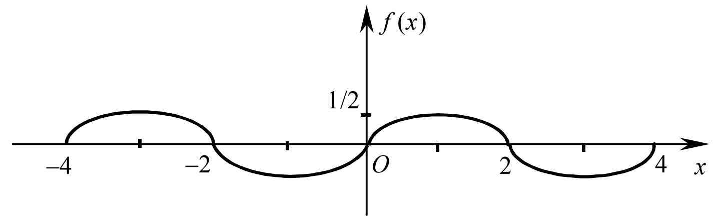


Рис.2.11

Підрахуємо коефіцієнти Фур'є. Оскільки одержана функція непарна, то $a_0 = 0$, $a_n = 0$.

$$b_n = \int_0^2 \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \sin \frac{\pi n x}{2} dx = -\frac{2}{\pi n} \int_0^2 \left(x - \frac{x^2}{2} \right) d\left(\cos \frac{\pi n x}{2} \right) =$$

$$= -\frac{2}{\pi n} \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \cos \frac{\pi n x}{2} \Bigg|_0^2 + \frac{2}{\pi n} \int_0^2 (1-x) \cos \frac{\pi n x}{2} dx = \frac{4}{\pi^2 n^2} \int_0^2 (1-x)\, d\left(\sin \frac{\pi n x}{2} \right) =$$

$$= \frac{4}{\pi^2 n^2} \left((1-x) \sin \frac{\pi n x}{2} \Bigg|_0^2 + \int_0^2 \sin \frac{\pi n x}{2} dx \right) = -\frac{8}{\pi^3 n^3} \cos \frac{\pi n x}{2} \Bigg|_0^2 =$$

$$= -\frac{8}{\pi^3 n^3} \cos \pi n + \frac{8}{\pi^3 n^3} = \frac{8}{\pi^3 n^3} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} \dfrac{16}{\pi^3 n^3}, & n - \text{непарне}, \\ 0, & n - \text{парне}. \end{cases}$$

Отже,

$$b_{2n} = 0, \quad b_{2n-1} = \frac{16}{\pi^3 (2n-1)^3}.$$

Підставимо коефіцієнти в ряд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n x}{2}.$$

Отже,

$$f(x) = \frac{16}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \sin \frac{\pi (2n-1) x}{2}, \quad \forall x.$$

Сума ряду збігається до $f(x)$ $\forall x$, бо функція неперервна для $\forall x$. ◄

Приклад 10. Розкласти в ряд Фур'є функцію, задану графічно (рис.2.12).

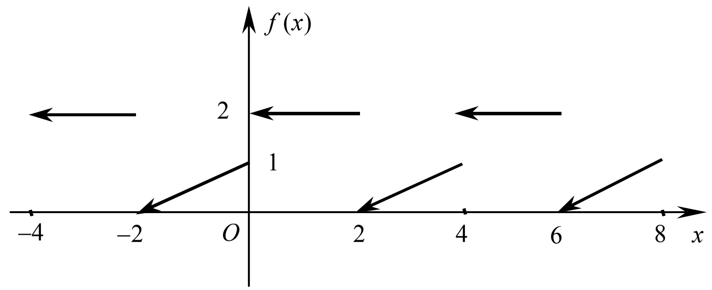


Рис.2.12

► Запишемо функцію, задану графічно, у вигляді

$$f(x)=\begin{cases}0{,}5x+1, & -2<x\le 0,\\ 2, & 0<x\le 2.\end{cases}$$

Тут функція $f(x)$ періодична з періодом $2l=4$, тобто $l=2$.

Обчислимо коефіцієнти Фур'є:

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}\left(\frac{x}{2}+1\right)dx+\frac{1}{2}\int_0^2 2\,dx=\left(\frac{x^2}{8}+\frac{x}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{0}+x\big|_0^2=\frac{5}{2},$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}\left(\frac{x}{2}+1\right)\cos\frac{\pi nx}{2}dx+\frac{1}{2}\int_0^2 2\cos\frac{\pi nx}{2}dx=\frac{x/2+1}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\Bigg|_{-2}^{0}+$$

$$+\frac{1}{\pi^2n^2}\cos\frac{\pi nx}{2}\Bigg|_{-2}^{0}+\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\Bigg|_0^2=\frac{1}{\pi^2n^2}(1-(-1)^n)=\begin{cases}0, & n-\text{парне},\\ \dfrac{2}{\pi^2n^2}, & n-\text{непарне}.\end{cases}$$

Отже,

$$a_n=\frac{1}{\pi^2n^2}(1-(-1)^n)$$

або

$$a_{2n}=0,\quad a_{2n-1}=\frac{2}{\pi^2(2n-1)^2}.$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}\left(\frac{x}{2}+1\right)\sin\frac{\pi nx}{2}dx+\frac{1}{2}\int_0^2 2\sin\frac{\pi nx}{2}dx=-\frac{x/2+1}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\Bigg|_{-2}^{0}+$$

$$+\frac{1}{\pi^2n^2}\sin\frac{\pi nx}{2}\Bigg|_{-2}^{0}-\frac{2}{\pi n}((-1)^n-1)-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\Bigg|_0^2=\frac{1+2(-1)^{n+1}}{\pi n}=$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{1}{\pi n}, & n-\text{парне},\\ \dfrac{3}{\pi n}, & n-\text{непарне}.\end{cases}$$

Отже,

$$b_n=\frac{1+2(-1)^{n+1}}{\pi n}$$

або

$$b_{2n}=-\frac{1}{2\pi n},\quad b_{2n-1}=\frac{3}{\pi(2n-1)}.$$

Підставимо отримані коефіцієнти в ряд вигляду

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{2}+b_n\sin\frac{\pi nx}{2}\right).$$

Отже,

$$f(x)=\frac{5}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(1-(-1)^n)}{\pi^2n^2}\cos\frac{\pi nx}{2}+\frac{1+2(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\right)$$

або, після перетворень

$$f(x)=\frac{5}{4}+\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{\pi(2n-1)x}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}\sin\frac{2\pi nx}{2}+$$

$$+\frac{3}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\frac{\pi(2n-1)x}{2},\qquad x\ne 2k,\ k\in Z.$$

Сума ряду співпадає з функцією $f(x)$ у всіх точках неперервності; у точках розриву сума ряду така:

$$S(-2)=S(2)=\frac{f(-2+0)+f(2-0)}{2}=\frac{0+2}{2}=1,$$

$$S(0)=\frac{f(-0)+f(0)}{2}=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}.$$ ◄

Ряд Фур'є в комплексній формі

Приклад 11. Розкласти в комплексний ряд Фур'є функцію

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0,\\ 1, & 0<x<\pi,\end{cases}$$

періодичну з періодом 2π.

► Задану функцію графічно зображено на рис.2.13.

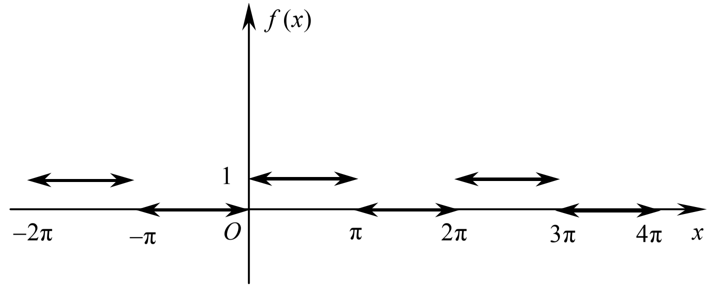


Рис.2.13

Ця функція задовольняє достатні умови розкладання в ряд Фур'є. Ряд Фур'є в комплексній формі:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{inx}.$$

Знайдемо коефіцієнти Фур'є цієї функції:

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} e^{-inx}dx=\frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1}{in}e^{-inx}\Big|_0^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{1-e^{-in\pi}}{2\pi ni}=\frac{1-(\cos(-n\pi)+i\sin(-n\pi))}{2\pi ni}=\frac{1-\cos n\pi}{2\pi ni}=i\,\frac{1-\cos n\pi}{-2\pi n}=$$

$$=i\,\frac{\cos n\pi-1}{2\pi n}=i\,\frac{(-1)^n-1}{2\pi n}=\begin{cases}0, & n-\text{парне},\\ -\dfrac{i}{\pi n}, & n-\text{непарне}.\end{cases}$$

Отже,

$$C_{2n-1}=-\frac{i}{\pi(2n-1)},\qquad C_{2n}=0.$$

Підставляючи знайдені значення коефіцієнтів в ряд Фур'є в комплексній формі, отримуємо

$$f(x)=-\frac{i}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i(2n-1)x}}{2n-1},\quad -\pi<x<0,\ \ 0<x<\pi.$$

У точках $x=-\pi,\ x=0,\ x=\pi$ сума ряду така:

$$S(0)=\frac{1}{2},\ \ S(\pm\pi)=\frac{1}{2}.$$ ◄

Приклад 12. Розкласти в комплексний ряд Фур'є функцію $f(x)=e^x$, задану на проміжку $(-\pi,\ \pi]$.

► Розкладемо в ряд Фур'є 2π-періодичну функцію $F(x)$, що збігається з заданою функцією на проміжку $(-\pi,\ \pi]$. Графік цієї функції представлено на рис.2.14.

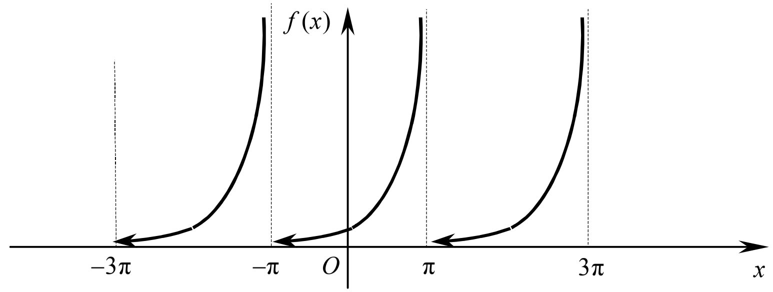


Рис.2.14

Ряд Фур'є в комплексній формі:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{inx}.$$

Підрахуємо коефіцієнти Фур'є:

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} e^{x}e^{-inx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} e^{(1-in)x}dx=\frac{1}{2\pi}\,\frac{e^{x(1-in)}}{1-in}\Big|_{-\pi}^{\pi}=$$

$$=\frac{e^{\pi(1-in)}-e^{-\pi(1-in)}}{2\pi(1-in)}=\frac{(e^{\pi}-e^{-\pi})(\cos n\pi-i\sin n\pi)}{2\pi(1-in)}=\frac{(-1)^n}{(1-in)}\frac{(e^{\pi}-e^{-\pi})}{2\pi}.$$

Оскільки функція неперервна на інтервалі $(-\pi,\ \pi)$, то

$$e^x=\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\frac{e^{inx}}{1-in}=\pi\,\mathrm{sh}\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\frac{e^{inx}}{1-in},$$

де $x\in(-\pi,\ \pi)$.

Сума одержаного ряду $S(x)$ при $x=-\pi,\ x=\pi$ така:

$$S(\pm\pi)=\frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{2}=\mathrm{ch}\,\pi$$ (за теоремою Діріхле). ◄

Інтеграл Фур'є. Перетворення Фур'є

Приклад 13. Зобразити інтегралом Фур'є функцію

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0{,}5, & x=0,\ x=1,\\ 0, & x<0,\ x>1.\end{cases}$$

► Задану функцію зобразимо графічно (рис.2.15).

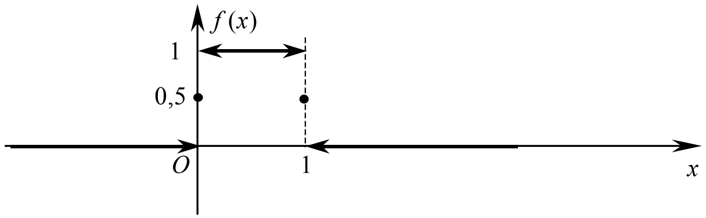


Рис.2.15

Ця функція кусково-монотонна на будь-якому скінченному відрізку $[-l,\ l]$, оскільки складається з трьох неперервних частин. Вона також абсолютно інтегровна на всій числовій осі:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx=\int_{-\infty}^{0}0\cdot dx+\int_{0}^{1}dx+\int_{1}^{+\infty}0\cdot dx=1<\infty .$$

Отже, таку функцію в точках її неперервності можна подати через інтеграл Фур'є:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt .$$

Для заданої функції маємо:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(\int_{0}^{1}\cos\alpha(t-x)\,dt\right)d\alpha=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\alpha(t-x)}{\alpha}\bigg|_{0}^{1}d\alpha=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\alpha(1-x)+\sin\alpha x}{\alpha}\,d\alpha=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{\alpha}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha(1-2x)}{2}\,d\alpha .$$

У точках розриву $x=0$ та $x=1$ інтеграл Фур'є дорівнює значенню

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=\frac{1}{2}.$$

Таким чином, знайдений інтеграл Фур'є зображує дану функцію на всій числовій осі.

Зокрема, якщо $x=0$, то дістанемо

$$f(0)=\frac{1}{2}=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{\alpha}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\,d\alpha=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,d\alpha ,$$

звідки

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,d\alpha=\frac{\pi}{2}.$$

Таким чином, ми обчислили інтеграл, який за формулою Ньютона-Лейбніца не обчислюється, оскільки первісна від $\frac{\sin x}{x}$ не виражається через елементарні функції. ◄

Приклад 14. Зобразити інтегралом Фур'є функцію

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & 0<x<+\infty,\\ -e^{x}, & -\infty<x<0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

► Ця функція задана на всій осі і кусково-монотонна на будь-якому скінченному відрізку $[-l,\ l]$, оскільки складається з двох неперервних частин і має один розрив першого роду при $x=0$ (рис.2.16).

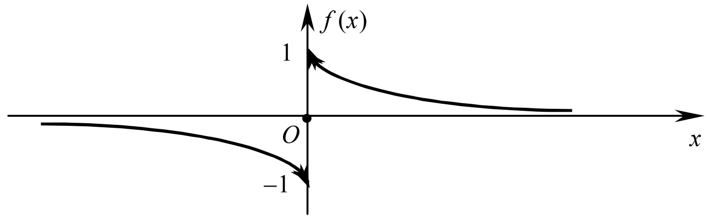


Рис.2.16

Переконаємось, що ця функція абсолютно інтегровна:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx=\int_{-\infty}^{0}e^{x}dx+\int_{1}^{+\infty}e^{-x}dx=e^{x}\Big|_{-\infty}^{0}-e^{-x}\Big|_{0}^{+\infty}=2<\infty .$$

Отже, задану функцію можна зобразити інтегралом Фур'є. Оскільки ця функція непарна, то інтегральна формула Фур'є має вигляд:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{0}^{+\infty}f(t)\sin\alpha t\,dt\right]\sin\alpha x\,d\alpha .$$

Для заданої функції маємо:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}e^{-t}\sin\alpha t\,dt\right]\sin\alpha x\,d\alpha . \qquad (1)$$

Інтегруючи частинами, знаходимо

$$\int_0^{+\infty}e^{-t}\sin\alpha t\,dt=\alpha-\alpha^2\int_0^{+\infty}e^{-t}\sin\alpha t\,dt .$$

Звідси

$$\int_0^{+\infty}e^{-t}\sin\alpha t\,dt=\frac{\alpha}{1+\alpha^2} .$$

Підставляючи отриманий вираз у формулу (1), отримаємо

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\alpha\sin\alpha x}{1+\alpha^2}\,d\alpha , \qquad x\in(-\infty,+\infty) . ◄$$

Приклад 15. Зобразити інтегралом Фур'є в комплексній формі функцію

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & 0<x<+\infty, \\ 0, & -\infty<x<0, \\ 0{,}5, & x=0. \end{cases}$$

► Скористаємось формулами

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\alpha t}\,dt\right)e^{i\alpha x}\,d\alpha . \qquad (1)$$

Обчислимо внутрішній інтеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\alpha t}dt=\int_0^{+\infty}e^{-t}\,e^{-i\alpha t}dt=\int_0^{+\infty}e^{-t(1+i\alpha)}dt=\left.\frac{e^{-t(1+i\alpha)}}{-(1+i\alpha)}\right|_0^{+\infty}=\frac{1}{1+i\alpha} .$$

Підставимо отримане значення у формулу (1). Отже, комплексна форма інтеграла Фур'є прийме вигляд:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\alpha x}}{1+i\alpha}\,d\alpha . ◄$$

Приклад 16. Знайти косинус-перетворення Фур'є та синус-перетворення Фур'є функції $f(x)=e^{-x}$, $x\ge 0$.

► Знаходимо косинус-перетворення Фур'є:

$$F_C(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}f(t)\cos\alpha t\,dt \qquad (\textit{пряме}).$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}F_C(\alpha)\cos\alpha x\,d\alpha \qquad (\textit{обернене}).$$

Для заданої функції маємо:

$$F_C(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-t}\cos\alpha t\,dt .$$

Інтегруючи частинами, отримуємо

$$\int_0^{+\infty}e^{-t}\cos\alpha t\,dt=\frac{1}{\alpha^2+1} .$$

Отже,

$$F_C(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{\alpha^2+1} .$$

Тоді

$$f(x)=e^{-x}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{\alpha^2+1}\cdot\cos\alpha x\,d\alpha .$$

Звідси

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{\alpha^2+1}\,d\alpha=\frac{\pi}{2}e^{-x} . \qquad (1)$$

Знаходимо синус-перетворення Фур'є:

$$F_S(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}f(t)\sin\alpha t\,dt \qquad (\textit{пряме}).$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}F_S(\alpha)\sin\alpha x\,d\alpha \qquad (\textit{обернене}).$$

Для заданої функції маємо:

$$F_S(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-t}\sin\alpha t\,dt .$$

Інтегруючи частинами, отримуємо

$$\int_0^{+\infty}e^{-t}\sin\alpha t\,dt=\frac{\alpha}{\alpha^2+1} .$$

Отже,

$$F_S(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\alpha}{\alpha^2+1}.$$

Тоді

$$f(x)=e^{-x}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\alpha}{\alpha^2+1}\cdot\sin\alpha x\,d\alpha.$$

Звідси

$$\int_0^{+\infty}\frac{\alpha\sin\alpha x}{\alpha^2+1}\,d\alpha=\frac{\pi}{2}e^{-x}. \qquad (2)$$

Інтеграли (1) та (2) називаються *інтегралами Лапласа*. ◄

IV. Задачі для практичних занять

Ряд Фур'є для періодичної функції з періодом 2π

У задачах 2.211 – 2.224 розкласти в ряд Фур'є задані функції, періодичні з періодом 2π. Навести графіки цих функцій

2.211. $f(x)=\begin{cases}-1, & x\in(-\pi,0),\\ 1, & x\in(0,\pi).\end{cases}$

Знайти суму S ряду Лейбніца $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$, користуючись отриманим результатом.

2.212. $f(x)=\begin{cases}1, & x\in(-\pi,0),\\ 3, & x\in(0,\pi).\end{cases}$

2.213. $f(x)=x-\pi,\quad x\in(-\pi,\ \pi]$.

2.214. $f(x)=x+\pi,\quad x\in(-\pi,\ \pi]$.

2.215. $f(x)=|\,x\,|,\quad x\in(-\pi,\ \pi]$.

Знайти суму S ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$, користуючись отриманим результатом.

2.216. а) $f(x)=x^2,\quad x\in(-\pi,\ \pi)$;

б) $f(x)=x^2,\quad x\in(0,\ 2\pi)$.

Знайти суми S_1 та S_2 рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$, користуючись отриманими результатами.

2.217. $f(x)=\begin{cases}\pi, & x\in(-\pi,0),\\ \pi-x, & x\in(0,\pi).\end{cases}$.

2.218. $f(x)=\frac{\pi-x}{2},\quad x\in(0,\ 2\pi]$.

2.219. $f(x)=x^3\qquad x\in(-\pi,\ \pi)$.

2.220. $f(x)=e^x-1,\quad x\in(0,\ 2\pi)$.

2.221. $f(x)=\cos ax,\quad x\in(-\pi,\ \pi),\quad$ (a – не ціле число).

2.222. $f(x)=\sin ax,\quad x\in(-\pi,\ \pi),\quad$ (a – не ціле число).

2.223. $f(x)=|\sin 3x|,\quad x\in(-\pi,\ \pi]$.

2.224. $f(x)=\operatorname{sh} ax,\quad x\in(-\pi,\ \pi)$.

У задачах 2.225 – 2.228 розкласти задані функції в ряд Фур'є по косинусах на заданому проміжку.

2.225. $f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}$ на проміжку $(0,\ \pi)$.

2.226. $f(x)=\begin{cases}1, & x\in(0,h),\\ 0, & x\in(h,\pi),\ \ 0<h<\pi\end{cases}$ на проміжку $(0,\pi)$.

2.227. $f(x)=\begin{cases}x, & x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\\ \pi-x, & x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]\end{cases}$ на проміжку $(0,\pi]$.

2.228. $f(x)=\sin\frac{x}{2}$ на проміжку $(0,\ \pi]$. Знайти суму S ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$.

У задачах 2.229 – 2.233 розкласти задані функції в ряд Фур'є по синусах на заданому проміжку.

2.229. $f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}$ на проміжку $(0,\ \pi)$.

2.230. $f(x)=x^2$ на проміжку $(0,\ \pi]$.

2.231. $f(x)=x(\pi-x)$ на проміжку $(0,\ \pi]$. Знайти суму S ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$.

2.232. $f(x)=\begin{cases}2, & x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\\ 0, & x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]\end{cases}$ на проміжку $(0,\pi]$.

2.233. $f(x)=\cos 2x$ на проміжку $(0,\ \pi]$.

2.234. Розкласти функцію $y=\mathrm{ch}\,x$ в інтервалі $(0,\pi)$ в ряд Фур'є: а) по косинусах; б) по синусах.

Ряд Фур'є для функції періодичної з періодом $2l$

У задачах 2.235 – 2.241 розкласти в ряд Фур'є задані функції, періодичні з періодом $2l$. Навести графіки цих функцій.

2.235. $f(x)=\begin{cases}0, & x\in(-2,0),\\ 2, & x\in[0,2],\end{cases}$ $2l=4$.

2.236. $f(x)=x,\quad x\in(-1,1],\quad 2l=2$.

2.237. $f(x)=\begin{cases}-x, & x\in(-2,0),\\ 0, & x\in[0,2],\end{cases}$ $2l=4$.

2.238. $f(x)=4-x^2,\quad x\in(-2,2],\quad 2l=4$.

2.239. $f(x)=\begin{cases}1, & x\in(-1,0),\\ 1-x, & x\in(0,1],\end{cases}$ $2l=2$.

2.240. $f(x)=|x|,\quad x\in(-2,2],\quad 2l=4$.

2.241. $f(x)=e^x,\quad x\in(-2,2],\quad 2l=4$.

2.242. Розкласти в ряд Фур'є функцію, зображену на рис.2.17.

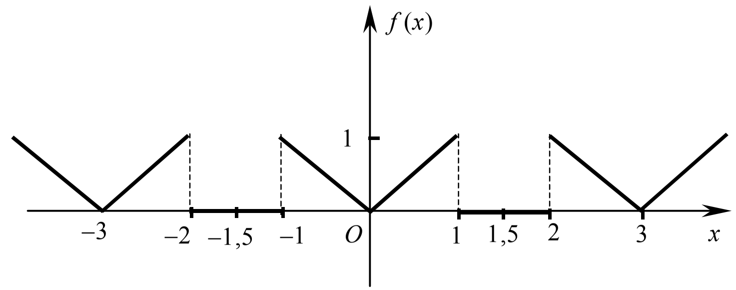


Рис.2.17

2.243. Розкласти функцію $f(x)=1-x$ на проміжку $(0,\ 1]$ в ряд Фур'є по косинусах.

2.244. Розкласти функцію $f(x)=x(2-x)$ на проміжку $[0,\ 2]$ в ряд Фур'є по синусах.

У задачах 2.245 – 2.247 розкласти задані функції в ряд Фур'є на заданому проміжку : а) по косинусах; б) по синусах.

2.245. $f(x)=\begin{cases}x, & x\in(0,1],\\ 2-x, & x\in(1,2),\end{cases}$ на проміжку $(0,2)$.

2.246. $f(x)=x^2$ на проміжку $(0,\ 1)$.

2.247. $f(x)=x$ на проміжку $(0,\ l)$.

Ряд Фур'є в комплексній формі

У задачах 2.248 – 2.255 розкласти в комплексний ряд Фур'є задані функції.

2.248. $f(x)=e^x,\quad x\in[-\pi,\ \pi]$.

2.249. $f(x)=\begin{cases}0, & x\in[-\pi,0),\\ e^{-x}, & x\in[0,\pi].\end{cases}$

2.250. $f(x)=x^2,\quad x\in[-\pi,\ \pi]$.

2.251. $f(x)=x,\quad x\in[-\pi,\ \pi]$.

2.252. $f(x)=\begin{cases}1, & x\in[-1,0),\\ 0, & x\in[0,\,1].\end{cases}$

2.253. $f(x)=1-e^{-x},\quad x\in[-1,\,1]$.

2.254. $f(x)=e^{x},\quad x\in[-2,\,2]$.

2.255. $f(x)=\begin{cases}0, & x\in(-1,0),\\ 1, & x\in[0;\,0{,}5],\\ 0, & x\in(0{,}5;\,1).\end{cases}$

Інтеграл Фур'є. Перетворення Фур'є

У задачах 2.256 – 2.260 зобразити інтегралом Фур'є задані функції.

2.256. $f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{x}{2}, & 0\le x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$

2.257. $f(x)=\begin{cases}0, & |x|>1,\\ 1, & 0\le x\le 1,\\ -1, & -1\le x\le 0.\end{cases}$

Обчислити $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\sin^3 t}{t}\,dt$.

2.258. $f(x)=e^{-x^2},\quad x\in(-\infty,\,+\infty)$.

2.259. $f(x)=\begin{cases}\sin x, & |x|\le\pi,\\ 0, & |x|>\pi.\end{cases}$

2.260. $f(x)=\begin{cases}\cos x, & |x|\le\pi/2,\\ 0, & |x|>\pi/2.\end{cases}$

У задачах 2.261 – 2.264 зобразити за допомогою комплексного інтеграла Фур'є задані функції.

2.261. $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$ **2.262.** $f(x)=e^{-2|x|}$.

2.263. $f(x)=x\,e^{-|x|}$. **2.264.** $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$

У задачах 2.265 – 2.268 знайти косинус-перетворення Фур'є та синус-перетворення Фур'є заданих функцій.

2.265. $f(x)=e^{-x},\quad x\in(0,\,+\infty)$.

2.266. $f(x)=\begin{cases}-1, & x\in[-1;\,-0{,}5),\\ 0, & x\in[-0{,}5;\,0{,}5),\\ 1, & x\in[0{,}5;\,1].\end{cases}$

2.267. $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\le x<\pi,\\ 0, & x\ge\pi.\end{cases}$

2.268. $f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<a,\\ 0, & x>a.\end{cases}$

У задачах 2.269 – 2.273 знайти загальне перетворення Фур'є заданих функцій.

2.269. $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{x}{2}, & |x|\le\pi,\\ 0, & |x|>\pi.\end{cases}$

2.270. $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$. **2.271.** $f(x)=x\,e^{-|x|}$.

2.272. $f(x)=e^{-k^2|x|}$.

2.273. $f(x)=\begin{cases}-e^{x}, & -1\le x<0,\\ e^{-x}, & 0\le x\le 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$

ГЛАВА 3. ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

§1. Комплексні числа

I. Короткі теоретичні відомості

Основні поняття. *Комплексним числом* називається вираз вигляду

$$z = x + i\,y\,, \tag{3.1}$$

де x та y – дійсні числа, а символ i – уявна одиниця, яка визначається умовою $i^2 = -1$.

При цьому число x називається *дійсною частиною* комплексного числа z і позначається $x = \operatorname{Re} z$, а число y називається *уявною частиною* z і позначається $y = \operatorname{Im} z$ (від французьких слів: reel – дійсний, imaginaire – уявний).

Множина комплексних чисел позначається буквою $\mathbf{C}$.

Вираз, що стоїть справа у формулі (3.1), називається *алгебраїчною формою* запису комплексного числа.

Два комплексні числа $z = x + i\,y$ та $\bar{z} = x - i\,y$, які відрізняються лише знаком уявної частини, називаються *спряженими*.

Два комплексні числа $z_1 = x_1 + i\,y_1$ та $z_2 = x_2 + i\,y_2$ *рівні* $(z_1 = z_2)$, тоді і тільки тоді, коли $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Комплексне число $z = x + i\,y = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = 0$, $y = 0$.

Геометрично кожне комплексне число $z = x + i\,y$ зображується точкою $M(x, y)$ на координатній площині xOy або вектором $\overrightarrow{OM}$ (рис.3.1). Площина xOy умовно називається *комплексною площиною* змінної z, вісь Ox – *дійсною віссю*, вісь Oy – *уявною віссю*.

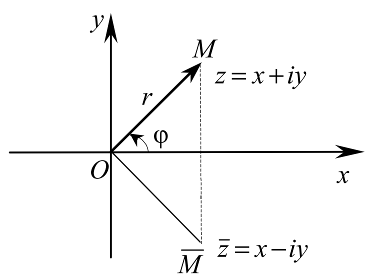


Рис.3.1

Комплексне число $z = x + i\,y$ при $y = 0$ збігається з дійсним числом $z = x$. Тому дійсні числа є окремим випадком комплексних, вони зображуються точками осі Ox.

Комплексні числа $z = x + i\,y$, в яких $x = 0$, тобто $z = i\,y$ називаються *суто уявними*; такі числа зображуються точками осі Oy.

Полярні координати r та φ точки M (рис.3.1) на комплексній площині називаються *модулем* і *аргументом* комплексного числа z і позначаються:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \qquad \varphi = \operatorname{Arg} z\,.$$

Модуль комплексного числа визначається однозначно, а аргумент визначається з точністю до доданка $2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Те із значень полярного кута φ, що задовольняє нерівності $-\pi < \varphi \le \pi$ (іноді покладають $0 \le \varphi < 2\pi$), називають *головним значенням* аргументу z і позначають $\arg z$.

У подальшому позначення φ збережемо тільки для головного значення аргументу z, тобто покладемо $\varphi = \arg z$, в силу чого для решти значень аргументу z, отримуємо рівність

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi = \varphi + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbf{Z}\,, \tag{3.2}$$

де

$$-\pi < \arg z \le \pi\,.$$

Оскільки $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ (рис.3.1), то з формули (3.1) маємо

$$z = r(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)\,. \tag{3.3}$$

Вираз, який стоїть справа у формулі (3.3), називається *тригонометричною формою* комплексного числа $z = x + i\,y$.

З формул $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ випливає, що головне значення аргументу z задовольняє співвідношення

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}, \qquad \sin\varphi = \frac{y}{r}\,. \tag{3.4}$$

З формул (3.4) випливає, що аргумент φ може визначатись із співвідношення

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}\,, \tag{3.5}$$

з урахуванням того, в якій чверті знаходиться точка $M(x, y)$.

З останнього випливає, що головне значення аргументу обчислюється за формулою:

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & x>0, \qquad (M(x,y)\in \text{ I, IV чверті}) \\ \pi+\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & x<0,\ \ y\ge 0,\ \ (M(x,y)\in \text{ II чверті}) \\ -\pi+\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & x<0,\ \ y<0,\ \ (M(x,y)\in \text{ III чверті}) \\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0,\ \ y>0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x=0,\ \ y<0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Використовуючи формулу Ейлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \quad (3.7)$$

та формулу (3.3), що дає тригонометричну форму комплексного числа, отримаємо

$$z = re^{i\varphi}. \quad (3.8)$$

Вираз, що стоїть справа у формулі (3.8), називається *показниковою формою* комплексного числа $z = x + iy$.

Дії над комплексними числами

Дії над комплексними числами, заданими *в алгебраїчній формі* виконуються таким чином:

1. $z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.
2. $z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$.
3. $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)\cdot(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$.
4. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \dfrac{z_1\cdot\bar z_2}{z_2\cdot\bar z_2} = \dfrac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)} =$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad z_2 \ne 0.$$

5. $z^n = \underbrace{z\cdot z\ldots\cdot z}_{n \text{ раз}}, \quad n\in \mathbf{N}$.

Результатом цих дій є, взагалі кажучи, комплексні числа. Вказані операції над комплексними числами мають всі властивості відповідних операцій над дійсними числами, тобто додавання та множення комутативні, асоціативні, пов'язані відношенням дистрибутивності і для них існують обернені операції віднімання та ділення (крім ділення на нуль).

На рис.3.2 наведено геометричну ілюстрацію операцій додавання та віднімання комплексних чисел: сума і різниця комплексних чисел z_1 та z_2 зображається відповідно векторами, рівними напрямленим діагоналям паралелограма, побудованого на векторах z_1 та z_2.

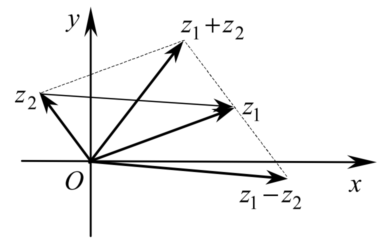


Рис.3.2

Зауважимо, що піднесення числа z до степеня n, $n\in\mathbf{N}$, виконується за формулою бінома Ньютона

$$z^n = (x+iy)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} iy + C_n^2 x^{n-2}(iy)^2 + \ldots + C_n^k x^{n-k}(iy)^k + \ldots + (iy)^n$$

з урахуванням того, що в отриманому виразі слід замінити степені i їх значеннями:

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \ \ldots$$

і, в загальному випадку,

$$i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i.$$

Дії над комплексними числами, заданими *в тригонометричній формі* виконуються за такими правилами:

1. $z_1\cdot z_2 = r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$.
2. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]$, $z_2 \ne 0$.
3. $z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

Ця формула називається *формулою Муавра.*

4. $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \quad k = \overline{0, n-1}$,

тобто корінь n-го степеня з комплексного числа z має n різних значень. Тут $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Дії над комплексними числами, заданими *в показниковій формі* виконуються так:

1. $z_1\cdot z_2 = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$.

2. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad z_2 \neq 0$.

3. $z^n = r^n e^{in\varphi}$.

Ця формула є *формулою Муавра* для випадку задання комплексного числа в показниковій формі.

4. $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\, e^{\frac{i(\varphi + 2k\pi)}{n}}, \quad k = \overline{0, n-1}$.

Тут $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}, \quad z = re^{i\varphi}$.

II. Контрольні питання та завдання

1. Дайте означення комплексного числа; що таке дійсна та уявна частина комплексного числа?

2. Як визначається уявна одиниця?

3. Які комплексні числа називаються рівними; спряженими?

4. Як зображується комплексне число на площині?

5. Яка форма запису комплексного числа називається алгебраїчною; тригонометричною?

6. Дайте означення модуля та аргументу комплексного числа.

7. Що називають головним значенням аргументу?

8. За якою формулою визначається модуль комплексного числа, аргумент комплексного числа?

9. Як виконуються дії над комплексними числами, заданими в алгебраїчній формі?

10. Як виконуються дії над комплексними числами, заданими в тригонометричній формі?

11. Наведіть показникову форму комплексного числа.

12. Як виконуються дії над комплексними числами, заданими в показниковій формі?

13. Який геометричний зміст суми та різниці комплексних чисел?

14. Який геометричний зміст операції множення двох комплексних чисел?

15. Який геометричний зміст операції ділення двох комплексних чисел?

III. Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Задано комплексні числа

$$z_1 = -3 + 2i, \quad z_2 = 2 - 3i.$$

Виконати вказані дії над ними.

а) $z_1 + z_2$; б) $z_1 - z_2$;

в) $z_1 \cdot z_2$; г) $\dfrac{z_1}{z_2}$; д) z_1^3.

► а) $z_1 + z_2 = (-3 + 2i) + (2 - 3i) = (-3 + 2) + (2 - 3)i = -1 - i$;

б) $z_1 - z_2 = (-3 + 2i) - (2 - 3i) = (-3 - 2) + (2 + 3)i = -5 + 5i$;

в) $z_1 \cdot z_2 = (-3 + 2i) \cdot (2 - 3i) = -3 \cdot 2 - 2(-3) + ((-3)(-3) + 2 \cdot 2)i = 13i$;

г) для знаходження частки чисельник та знаменник домножимо на вираз, спряжений знаменнику

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-3 + 2i}{2 - 3i} = \frac{(-3 + 2i)(2 + 3i)}{(2 - 3i)(2 + 3i)} = \frac{(-3 \cdot 2 - 2 \cdot 3) + (-3 \cdot 3 + 2 \cdot 2)i}{4 + 9} = -\frac{12}{13} - \frac{5}{13}i;$$

д) $z_1^3 = (-3 + 2i)^3 = (-3)^3 + 3 \cdot (-3)^2 \cdot 2i + 3 \cdot (-3) \cdot (2i)^2 + (2i)^3 =$
$= -27 + 54i + 36 - 8i = 9 + 46i$. ◄

Приклад 2. Задано комплексні числа $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = 2 + i$, $z_3 = 5i$. Знайти $z = z_1 \cdot z_2^2 + z_3$.

► Знаходимо

$z_2^2 = (2 + i)^2 = 4 + 4i + i^2 = 4 + 4i - 1 = 3 + 4i$,

$z_1 \cdot z_2^2 = (1 - 2i)(3 + 4i) = (3 + 8) + (4 - 6)i = 11 - 2i$.

Тоді

$z = z_1 \cdot z_2^2 + z_3 = (11 - 2i) + 5i = 11 + 3i$. ◄

Приклад 3. Знайти дійсні розв'язки рівняння

$$(4 + 2i)x + (5 - 3i)y = 13 + i.$$

► Перетворимо рівняння, виділивши в його лівій частині дійсну та уявну частини:

$$(4x+5y)+i(2x-3y)=13+i.$$

Звідси згідно з означенням рівності двох комплексних чисел, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases}4x+5y=13,\\ 2x-3y=1.\end{cases}$$

Розв'язавши систему, отримаємо $x=2$, $y=1$.

Отже, дійсний розв'язок заданого рівняння $x=2$, $y=1$. ◄

Приклад 4. Для заданого комплексного числа z знайти $\mathrm{Re}\,z$, $\mathrm{Im}\,z$ – дійсну та уявну частини, $|z|$, $\arg z$ – модуль та головне значення аргументу; записати ці числа в тригонометричній та показниковій формі; зобразити ці числа на комплексній площині.

а) $z=1+i$; б) $z=-2+2\sqrt{3}\,i$;

в) $z=-1-i\sqrt{3}$; г) $z=2\sqrt{3}-2i$.

► а) $z=1+i$.

Маємо: $\mathrm{Re}\,z=x=1$, $\mathrm{Im}\,z=y=1$.

На комплексній площині цьому числу відповідає точка $M(1,1)$ (рис.3.3а).

$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$.

$\mathrm{tg}\,\varphi=\frac{y}{x}=1$, точка $M(1,1)\in$ I чверті, тоді згідно з формулою (3.6) маємо: $\varphi=\arg z=\mathrm{arctg}\,1=\frac{\pi}{4}$.

Тригонометрична форма: $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Показникова форма: $z=\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i}$.

б) $z=-2+2\sqrt{3}\,i$.

Маємо: $\mathrm{Re}\,z=x=-2$, $\mathrm{Im}\,z=y=2\sqrt{3}$.

На комплексній площині цьому числу відповідає точка $M(-2,2\sqrt{3})$ (рис.3.3б).

$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-2)^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{16}=4$.

$\mathrm{tg}\,\varphi=\frac{y}{x}=\frac{2\sqrt{3}}{-2}=-\sqrt{3}$, точка $M(-2,2\sqrt{3})\in$ II чверті, тоді згідно з формулою (3.6) маємо: $\varphi=\arg z=\pi+\mathrm{arctg}\,(-\sqrt{3})=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$.

Тригонометрична форма: $z=4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

Показникова форма: $z=4e^{\frac{2\pi}{3}i}$.

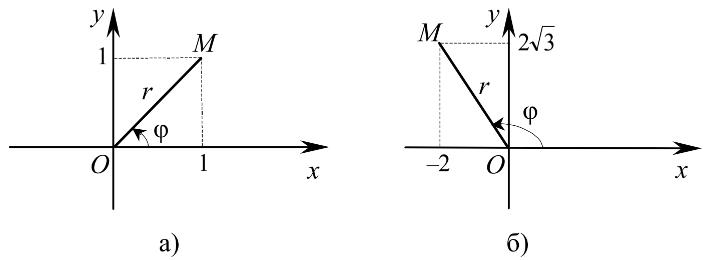


Рис.3.3

в) $z=-1-i\sqrt{3}$.

Маємо: $\mathrm{Re}\,z=x=-1$, $\mathrm{Im}\,z=y=-\sqrt{3}$.

На комплексній площині цьому числу відповідає точка $M(-1,-\sqrt{3})$ (рис.3.4а).

$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2$.

$\mathrm{tg}\,\varphi=\frac{y}{x}=\frac{-\sqrt{3}}{-1}=\sqrt{3}$, точка $M(-1,-\sqrt{3})\in$ III чверті, тоді згідно з формулою (3.6) маємо: $\varphi=\arg z=-\pi+\mathrm{arctg}\sqrt{3}=-\pi+\frac{\pi}{3}=-\frac{2\pi}{3}$.

Тригонометрична форма: $z=2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$.

Показникова форма: $z=2\,e^{-\frac{2\pi}{3}i}$.

г) $z=2\sqrt{3}-2i$.

Маємо: $\mathrm{Re}\,z=x=2\sqrt{3}$, $\mathrm{Im}\,z=y=-2$.

На комплексній площині цьому числу відповідає точка $M(2\sqrt{3},-2)$ (рис.3.4б).

$$|z| = r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2+(-2)^2} = \sqrt{16} = 4.$$

$\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x} = \dfrac{-2}{2\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, точка $M(2\sqrt{3}, -2) \in$ IV чверті, тоді згідно з формулою (3.6) маємо: $\varphi = \arg z = \operatorname{arctg}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$.

Тригонометрична форма: $z = 4\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$.

Показникова форма: $z = 4e^{-\frac{\pi}{6}i}$.

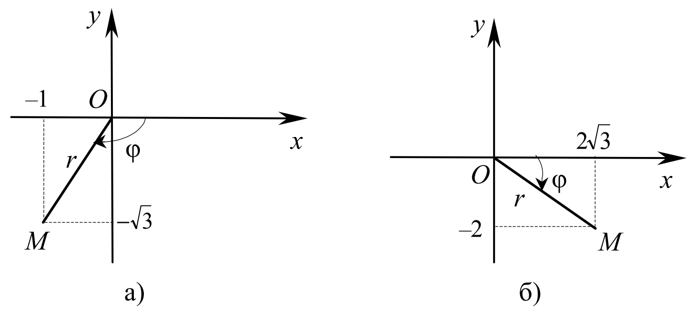


Рис.3.4

Зауважимо, що перехід до тригонометричної форми можна проводити, виконавши деякі перетворення заданого числа $z = x + iy$, звівши його до такого вигляду, щоб можна було формально замінити x та y на $\cos\varphi$ та $\sin\varphi$ відповідно. Для цього знаходимо $|z|$, домножуємо та ділимо на нього задане число.

Виконаємо такі перетворення над заданими числами.

а) $z = 1 + i$.

$|z| = \sqrt{2}$,

$$z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

б) $z = -2 + 2\sqrt{3}i$.

$|z| = 4$,

$$z = -2 + 2\sqrt{3}i = 4\left(-\frac{2}{4} + i\frac{2\sqrt{3}}{4}\right) = 4\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

в) $z = -1 - \sqrt{3}i$.

$|z| = 2$,

$$z = -1 - \sqrt{3}i = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right).$$

г) $z = 2\sqrt{3} - 2i$.

$|z| = 4$,

$$z = 2\sqrt{3} - 2i = 4\left(\frac{2\sqrt{3}}{4} - i\frac{2}{4}\right) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

Геометричну ілюстрацію цих результатів наведено на рис.3.3, рис.3.4. ◄

Приклад 5. Знайти дійсну та уявну частини комплексних чисел.

а) $z = \dfrac{1}{1-i}$; б) $z = \left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3$;

в) $z = \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$; г) $z = \left(\dfrac{2+i^5}{1+i^{19}}\right)^2$.

► Для знаходження дійсної та уявної частини комплексного числа z представимо його в алгебраїчній формі: $z = x + iy$. Тоді дійсна частина $\operatorname{Re} z = x$, а уявна частина $\operatorname{Im} z = y$.

а) $z = \dfrac{1}{1-i}$.

Для запису даного числа в алгебраїчній формі домножимо чисельник та знаменник на вираз, спряжений знаменнику:

$$z = \frac{1}{1-i} = \frac{1\cdot(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i}{1+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Отже, $\operatorname{Re} z = \dfrac{1}{2}$, $\operatorname{Im} z = \dfrac{1}{2}$.

б) $z = \left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3$.

Для запису даного числа в алгебраїчній формі домножимо чисельник та знаменник на вираз, спряжений знаменнику, та піднесемо до третього степеня:

$$z=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3=\left(\frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}\right)^3=\left(\frac{1-2i-1}{2}\right)^3=(-i)^3=-i^3=-i\cdot i^2=i\,.$$

Отже, $\operatorname{Re} z=0$, $\operatorname{Im} z=1$.

в) $z=\left(\frac{1}{2}-i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$.

Запишемо число $z_1=\frac{1}{2}-i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ в тригонометричній формі, а потім піднесемо його до третього степеня, використовуючи формулу Муавра. Враховуючи, що $|z_1|=r=1$, $\arg z_1=-\frac{\pi}{3}$, маємо

$$z=\left(\frac{1}{2}-i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)^3=\cos(-\pi)+i\sin(-\pi)=$$
$$=\cos\pi-i\sin\pi=-1+0=-1\,.$$

Отже, $\operatorname{Re} z=-1$, $\operatorname{Im} z=0$.

г) $z=\left(\frac{2+i^5}{1+i^{19}}\right)^2$.

Враховуючи, що $i^2=-1$, $i^4=1$, маємо $i^5=i$, $i^{19}=-i$. Тоді

$$z=\left(\frac{2+i^5}{1+i^{19}}\right)^2=\left(\frac{2+i}{1-i}\right)^2=\left(\frac{(2+i)(1+i)}{1+1}\right)^2=\left(\frac{(2-1)+3i}{2}\right)^2=$$
$$=\left(\frac{1+3i}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(1+6i-9)=-2+\frac{3}{2}\,i\,.$$

Отже, $\operatorname{Re} z=-2$, $\operatorname{Im} z=\frac{3}{2}$. ◄

Приклад 6. Знайти модулі, головні значення аргументів та аргументи заданих комплексних чисел.

а) $z=1+i^{123}$; б) $z=-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$.

► Запишемо задані числа у тригонометричній формі, звідки знайдемо модулі та аргументи цих комплексних чисел.

а) $z=1+i^{123}$.

$$z=1+i^{123}=1+i^3=1-i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\,i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Отже, $|z|=\sqrt{2}$, $\arg z=-\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{Arg} z=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

б) $z=-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$.

$$z=-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{7}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{7}\right)=\cos\frac{6\pi}{7}+i\sin\frac{6\pi}{7}\,.$$

Отже, $|z|=1$, $\arg z=\frac{6\pi}{7}$, $\operatorname{Arg} z=\frac{6\pi}{7}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$. ◄

Приклад 7. Обчислити задані вирази, використовуючи формулу Муавра.

а) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40}$; б) $(2-2i)^7$; в) $(\sqrt{3}-3i)^6$;

г) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8$; д) $z=(1+i)^8\left(1-i\sqrt{3}\right)^{-6}$.

► Представимо комплексні числа в тригонометричній формі та застосуємо формулу Муавра для піднесення до відповідних степенів.

а) $$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40}=\frac{2^{40}\left(\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{40}}{(\sqrt{2})^{40}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{40}}=\frac{2^{20}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{40}}{\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{40}}=$$

$$=\frac{2^{20}\left(\cos\frac{40\pi}{3}+i\sin\frac{40\pi}{3}\right)}{\left(\cos\left(-\frac{40\pi}{4}\right)-i\sin\left(-\frac{40\pi}{4}\right)\right)}=\frac{2^{20}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)}{(\cos(-10\pi)-i\sin(-10\pi))}=$$

$$=\frac{2^{20}\left(-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)}{1}=-2^{19}(1+i\sqrt{3})\,;$$

б) $(2-2i)^7 = 2^7(1-i)^7 = 2^7(\sqrt{2})^7\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^7 =$

$$= 2^{10}\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^7 = 2^{10}\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right)\right)=$$

$$= 2^{10}\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-2\pi\right)\right)= 2^{10}\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$= 2^{10}\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)= 2^{10}\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = 2^{10}(1+i);$$

в) $(\sqrt{3}-3i)^6 = (\sqrt{3})^6\cdot 2^6\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6 =$

$$= 3^3\,2^6\left(\cos 6\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 3^3\,2^6(\cos(-2\pi)+i\sin(-2\pi)) = 3^3\,2^6 = 1728;$$

г) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^8 = \dfrac{\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^8}{\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^8} =$

$$= \frac{\cos(-2\pi)+i\sin(-2\pi)}{\cos 2\pi + i\sin 2\pi} = 1;$$

д) $z = (1+i)^8\left(1-i\sqrt{3}\right)^{-6} = \dfrac{(1+i)^8}{(1-i\sqrt{3})^6} = \dfrac{\left[\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]^8}{\left[2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]^6} =$

$$= \frac{2^4}{2^6}\,\frac{\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^8}{\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)^6} = \frac{1}{4}\,\frac{\cos 2\pi + i\sin 2\pi}{\cos(-2\pi)+i\sin(-2\pi)} = \frac{1}{4}. \blacktriangleleft$$

Приклад 8. Знайти всі значення кореня заданого степеня з комплексного числа z:

а) $\sqrt[4]{-1}$; б) $\sqrt{-1+i}$; в) $\sqrt[5]{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}$.

► Зводимо комплексне число z до тригонометричної форми

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

і застосовуємо формулу для визначення значень кореня:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \quad k=\overline{0,\,n-1}.$$

а) $\sqrt[4]{-1}$.

Тут $z=-1$. Тригонометрична форма: $z=-1=\cos\pi+i\sin\pi$, бо $|z|=|-1|=1$, $\arg z = \arg(-1)=\pi$.

Отже, маємо: $\sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{\cos\pi + i\sin\pi}$.

Значення z_k заданого кореня отримуємо так:

$$z_k = \cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}, \text{ де } k=0,1,2,3.$$

$k=0$: $\quad z_0 = \cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$,

$k=1$: $\quad z_1 = \cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$,

$k=2$: $\quad z_2 = \cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)$,

$k=3$: $\quad z_3 = \cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$.

Всі корені знаходяться на колі з центром у точці $z=0$ і радіус якого дорівнює одиниці, і на однаковій відстані один від одного (рис.3.5а).

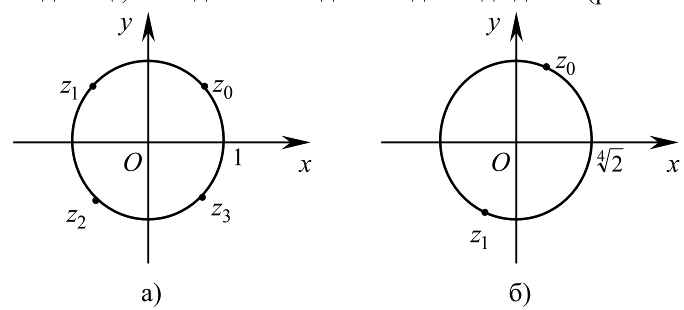


Рис.3.5

б) $\sqrt{-1+i}$.

Тут $z=-1+i$.

Тригонометрична форма числа: $z=-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$, бо $|z|=|-1+i|=\sqrt{2}$, $\arg z=\arg(-1+i)=\frac{3\pi}{4}$.

Отже, маємо: $\sqrt{-1+i}=\sqrt[4]{2}\sqrt{\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}}$.

Значення z_k заданого кореня отримуємо так:

$$z_k=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{2}\right), \text{ де } k=0,1.$$

$$k=0: \quad z_0=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}\right),$$

$$k=1: \quad z_1=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{8}+i\sin\frac{11\pi}{8}\right).$$

Корені розташовуються на колі з центром в точці $z=0$ і радіус якого $\sqrt[4]{2}$ (рис.3.5б).

в) $\sqrt[5]{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}$.

Число $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ задане в тригонометричній формі, тому за формулою для обчислення коренів маємо:

$$z_k=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{5}+i\sin\frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{5}\right), \text{ де } k=0,1,2,3,4.$$

$$k=0: \quad z_0=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{\pi}{30}+i\sin\frac{\pi}{30}\right),$$

$$k=1: \quad z_1=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{30}+i\sin\frac{13\pi}{30}\right),$$

$$k=2: \quad z_2=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{30}+i\sin\frac{25\pi}{30}\right),$$

$$k=3: \quad z_3=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{37\pi}{30}+i\sin\frac{37\pi}{30}\right),$$

$$k=4: \quad z_4=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{49\pi}{30}+i\sin\frac{49\pi}{30}\right). ◄$$

Приклад 9. Знайти корені заданих рівнянь і зобразити їх на комплексній площині.

а) $z^4+1=0$; б) $z^2+1-i=0$.

► а) $z^4+1=0$.

Запишемо задане рівняння у вигляді

$$z^4=-1.$$

Тоді $z=\sqrt[4]{-1}$, тобто розв'язання задачі зводиться до знаходження всіх значень кореня четвертого степеня з комплексного числа, що дорівнює -1.

Знаходження всіх значень вказаного кореня, а також їх зображення на комплексній площині наведено в прикладі 8 п.а).

б) $z^2+1-i=0$.

Запишемо задане рівняння у вигляді

$$z^2=-1+i.$$

Тоді $z=\sqrt{-1+i}$, тобто розв'язання задачі зводиться до знаходження всіх значень кореня другого степеня з комплексного числа, що дорівнює $-1+i$.

Знаходження всіх значень вказаного кореня, а також їх зображення на комплексній площині наведено в прикладі 8 п.б). ◄

Приклад 10. Довести рівності.

а) $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$; б) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$, $|z_2|\neq 0$;

в) $\arg(z_1\cdot z_2)=\arg z_1+\arg z_2$; г) $\overline{(z_1\cdot z_2)}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$.

► Представимо комплексні числа z_1 та z_2 в показниковій формі:

$$z_1=r_1e^{i\varphi_1}, \quad z_2=r_2e^{i\varphi_2},$$

де $|z_1|=r_1$, $|z_2|=r_2$, $\arg z_1=\varphi_1$, $\arg z_2=\varphi_2$.

Тоді

$$z_1\cdot z_2=r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Отже,

$$|z_1\cdot z_2|=r_1r_2, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{r_1}{r_2}.$$

Доведемо задані рівності.

а) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

$|z_1 \cdot z_2| = r_1 \cdot r_2 = |z_1| \cdot |z_2|$.

б) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $|z_2| \neq 0$.

$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.

в) $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$.

$\arg(z_1 \cdot z_2) = \varphi_1 + \varphi_2 = \arg z_1 + \arg z_2$.

г) $(\overline{z_1 \cdot z_2}) = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.

$\overline{z_1 \cdot z_2} = r_1 r_2 e^{-i(\varphi_1+\varphi_2)} = r_1 e^{-i\varphi_1} \cdot r_2 e^{-i\varphi_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$. ◀

Приклад 11. Навести геометричний опис множини всіх точок комплексної площини, що задовольняють нерівності.

а) $\operatorname{Re} z > 0$; б) $|\operatorname{Re} z| \le 1$; в) $\begin{cases} |\operatorname{Im} z| < 1, \\ 0 < \operatorname{Re} z < 1; \end{cases}$

г) $|z - i| > 1$; д) $1 \le |z - 1| \le 3$; е) $|\pi - \arg z| < \dfrac{\pi}{4}$.

► а) $\operatorname{Re} z > 0$.

$\operatorname{Re} z = \operatorname{Re}(x + iy) = x$, $x > 0$.

Задана множина є півплощиною, що розташована праворуч уявної осі, причому точки осі не належать їй (рис.3.6а).

б) $|\operatorname{Re} z| \le 1$.

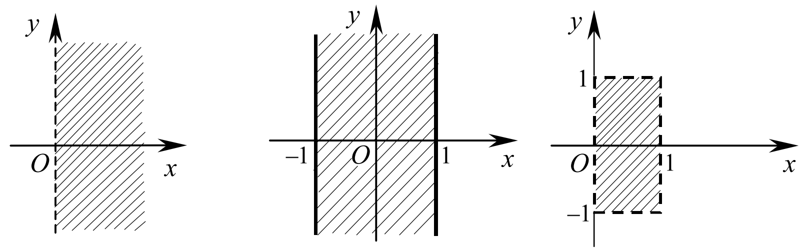
$|\operatorname{Re} z| = |\operatorname{Re}(x + iy)| \le 1 \Rightarrow |x| \le 1$, тобто $-1 \le x \le 1$.

Задана множина є смугою, що розташована між прямими $x = -1$, $x = 1$, включаючи ці прямі (рис.3.6б).

в) $\begin{cases} |\operatorname{Im} z| < 1, \\ 0 < \operatorname{Re} z < 1. \end{cases}$

З умови випливає, що $\begin{cases} |y| < 1, \\ 0 < x < 1, \end{cases}$ тобто $\begin{cases} -1 < y < 1, \\ 0 < x < 1. \end{cases}$

Задана множина є прямокутником, що є перетином смуг, розташованих між прямими $y = -1$, $y = 1$ та $x = 0$, $x = 1$, не включаючи самі ці прямі. Отже, маємо прямокутник з вершинами $-i$, $1 - i$, $1 + i$, i (не включаючи сторін) (рис.3.6в).



а) б) в)

Рис.3.6

г) $|z - i| > 1$.

З умови випливає, що

$|z - i| = |x + iy - i| > 1$, або $|z - i| = |x + i(y - 1)| > 1$.

Тоді

$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} > 1$ або $x^2 + (y-1)^2 > 1$.

Отже, задана множина є зовнішністю круга одиничного радіуса з центром у точці $z = i$, не включаючи кола (рис.3.7а).

д) $1 \le |z - 1| \le 3$.

Оскільки $|z - 1| = |x + iy - 1| = |(x-1) + iy| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$, то з умови випливає, що $1 \le (x-1)^2 + y^2 \le 9$.

Задана множина є кільцем, що міститься між колами із загальним центром у точці $z = 1$ і радіусами 1 і 3, включаючи обидва кола (рис.3.7б).

е) $|\pi - \arg z| < \dfrac{\pi}{4}$.

З умови випливає, що

$$-\frac{\pi}{4} < \pi - \arg z < \frac{\pi}{4},$$
$$-\frac{5\pi}{4} < -\arg z < -\frac{3\pi}{4},$$
$$\frac{3\pi}{4} < \arg z < \frac{5\pi}{4}.$$

Отже, задана множина є кутом розхилу $\dfrac{\pi}{2}$ з вершиною в точці $z = 0$ і сторонами $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$ і $\varphi = \dfrac{5\pi}{4}$, не включаючи сторін (рис.3.7в), тобто бісектрисою вказаного кута є від'ємна частина дійсної осі Ox.

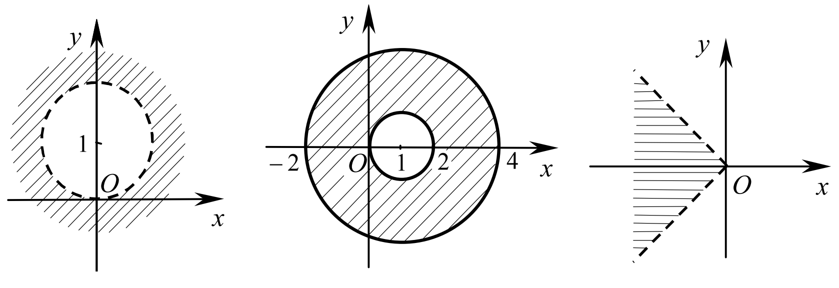


Рис.3.7 ◀

Приклад 12. З'ясувати, які множини точок z комплексної площини відповідають нерівностям.

а) $|z-i|+|z+i|\le 4$; б) $|z-2|-|z+2|<2$.

▶ а) $|z-i|+|z+i|\le 4$.

Виконаємо перетворення:

$|z-i|=|x+iy-i|=|x+i(y-1)|=\sqrt{x^2+(y-1)^2}$,

$|z+i|=|x+iy+i|=|x+i(y+1)|=\sqrt{x^2+(y+1)^2}$.

Тоді задана нерівність буде такою:

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2}+\sqrt{x^2+(y+1)^2}\le 4,$$

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2}\le 4-\sqrt{x^2+(y+1)^2},$$

$$x^2+(y-1)^2\le 16-8\sqrt{x^2+(y+1)^2}+x^2+(y+1)^2,$$

$$-2y\le 16-8\sqrt{x^2+(y+1)^2}+2y,$$

$$2\sqrt{x^2+(y+1)^2}\le y+4,$$

$$4x^2+4y^2+8y+4\le y^2+8y+16,$$

$$4x^2+3y^2\le 12,$$

$$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}\le 1.$$

Врахуємо, що рівняння $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$ є рівнянням еліпса з півосями $a=\sqrt{3}$, $b=2$. Тоді отримана нерівність

$$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}\le 1,$$

а отже, і задана нерівність

$$|z-i|+|z+i|\le 4,$$

визначає область, обмежену вказаним еліпсом (внутрішню його частину), включаючи його межу (рис.3.8а).

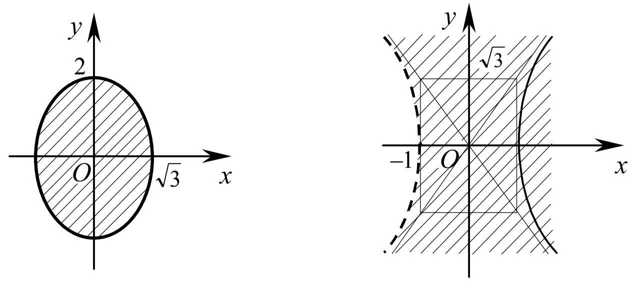


Рис.3.8

б) $|z-2|-|z+2|<2$.

Виконаємо перетворення:

$$|x+iy-2|-|x+iy+2|<2,$$

$$|(x-2)+iy|-|(x+2)+iy|<2,$$

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2}-\sqrt{(x+2)^2+y^2}<2,$$

$$(x-2)^2+y^2<4+4\sqrt{(x+2)^2+y^2}+(x+2)^2+y^2,$$

$$4\sqrt{(x+2)^2+y^2}>-8x-4,$$

$$\sqrt{(x+2)^2+y^2}>-2x-1,$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-2x-1\ge 0,\\(x+2)^2+y^2>4x^2+4x+1,\end{cases}\\ \begin{cases}-2x-1<0,\\(x+2)^2+y^2\ge 0,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le -\frac{1}{2},\\3x^2-y^2<3,\end{cases}\\ \begin{cases}x>-\frac{1}{2},\\(x+2)^2+y^2\ge 0,\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le -\dfrac{1}{2}, \\ x^2 - \dfrac{y^2}{3} < 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x > -\dfrac{1}{2}, \\ (x+2)^2 + y^2 \ge 0, \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le -\dfrac{1}{2}, \\ x^2 - \dfrac{y^2}{3} < 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x > -\dfrac{1}{2}, \\ x, y \in \mathbf{R}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Отже, задана нерівність визначає частину площини, що розташована праворуч лівої вітки гіперболи $x^2 - \dfrac{y^2}{3} = 1$, не включаючи цю вітку (рис.3.8б). ◀

Приклад 13. Знайти множини точок на площині комплексної змінної z, які задовольняють задані умови.

а) $0 < \arg\dfrac{i-z}{i+z} < \dfrac{\pi}{2}$; б) $\dfrac{\pi}{4} < \arg(z+i) < \dfrac{\pi}{2}$;

в) $\operatorname{Re} z^4 > \operatorname{Im} z^4$.

▶ а) $0 < \arg\dfrac{i-z}{i+z} < \dfrac{\pi}{2}$.

Виконаємо перетворення, поклавши $Z = \dfrac{i-z}{i+z}$, де $z = x + iy$.

$$Z = \frac{i-z}{i+z} = \frac{i-(x+iy)}{i+(x+iy)} = \frac{-x+i(1-y)}{x+i(1+y)} = \frac{(-x+i(1-y))(x-i(1+y))}{x^2+(1+y)^2} =$$

$$= \frac{-x^2+1-y^2+i(x+xy+x-xy)}{x^2+(1+y)^2} = \frac{-x^2-y^2+1+2xi}{x^2+(1+y)^2}.$$

Отже,

$$Z = \frac{-x^2-y^2+1+2xi}{x^2+(1+y)^2} = \frac{-x^2-y^2+1}{x^2+(1+y)^2} + i\frac{2x}{x^2+(1+y)^2}.$$

Вважаючи, що $Z = X + iY$, маємо

$$X = \frac{-x^2-y^2+1}{x^2+(1+y)^2},\quad Y = \frac{2x}{x^2+(1+y)^2}.$$

Оскільки за умовою $0 < \arg Z < \dfrac{\pi}{2}$, отримуємо

$$\arg Z = \arg\frac{i-z}{i+z} = \operatorname{arctg}\frac{Y}{X} = \operatorname{arctg}\frac{2x}{-x^2-y^2+1}.$$

В силу тієї ж умови $0 < \arg Z < \dfrac{\pi}{2}$ маємо, що $X = \dfrac{-x^2-y^2+1}{x^2+(1+y)^2} > 0$.

Звідки $-x^2-y^2+1 > 0$, тобто $x^2+y^2 < 1$.

Далі з нерівності

$$0 < \operatorname{arctg}\frac{2x}{-x^2-y^2+1} < \frac{\pi}{2}$$

маємо

$$0 < \frac{2x}{-x^2-y^2+1} < +\infty.$$

Враховуючи, що $x^2+y^2 < 1$, з останньої нерівності отримуємо, що $x > 0$, тобто задана множина визначається системою нерівностей

$$\begin{cases} x > 0, \\ x^2+y^2 < 1. \end{cases}$$

Отже, задана нерівність визначає множину точок, що є правою половиною круга радіуса 1 з центром у точці $z = 0$, не включаючи межу (рис.3.9а).

б) $\dfrac{\pi}{4} < \arg(z+i) < \dfrac{\pi}{2}$.

Виконаємо перетворення, поклавши $Z = z + i$, де $z = x + iy$:

$$Z = z + i = x + iy + i = x + i(y+1).$$

Тоді

$\arg(z+i) = \arg Z = \arg(X+iY) = \operatorname{arctg}\dfrac{Y}{X}$, де $X = x$, $Y = y+1$.

Оскільки за умовою $\dfrac{\pi}{4} < \arg Z < \dfrac{\pi}{2}$, маємо, що $X = x > 0$.

Далі з нерівності

$$\frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg}\frac{y+1}{x} < \frac{\pi}{2}$$

маємо

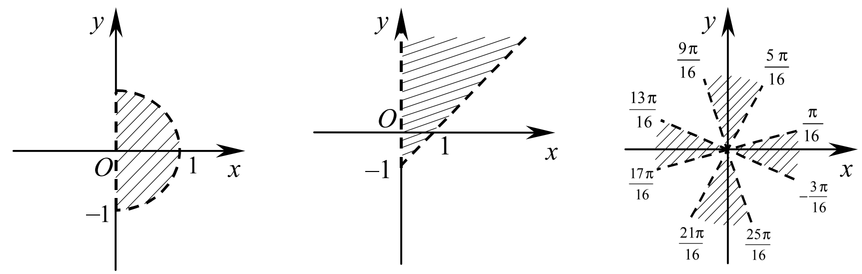
$$1 < \frac{y+1}{x} < +\infty,$$

$$\frac{y+1}{x} > 1,\quad \frac{y+1}{x} - 1 > 0,\quad \frac{y-x+1}{x} > 0.$$

Враховуючи, що $x > 0$, отримуємо

$$\begin{cases} y-x+1 > 0, \\ x > 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > x-1, \\ x > 0. \end{cases}$$

Отже, задана нерівність визначає множину, що є кутом розхилу $\frac{\pi}{4}$ з вершиною в точці $z=-i$, сторони якого проходять через точки $z=1$ і $z=0$, не включаючи сторін (рис.3.9б).



а) б) в)

Рис.3.9

в) $\operatorname{Re} z^4 > \operatorname{Im} z^4$.

Покладемо $z = r e^{i\varphi}$ і скористаємось формулою Муавра. Тоді

$$\operatorname{Re} z^4 = \operatorname{Re} r^4(\cos 4\varphi + i\sin 4\varphi) = r^4 \cos 4\varphi\,,$$

$$\operatorname{Im} z^4 = \operatorname{Im} r^4(\cos 4\varphi + i\sin 4\varphi) = r^4 \sin 4\varphi\,.$$

Отже, маємо

$$\operatorname{Re} r^4(\cos 4\varphi + i\sin 4\varphi) > \operatorname{Im} r^4(\cos 4\varphi + i\sin 4\varphi)\,,$$

$$r^4 \cos 4\varphi > r^4 \sin 4\varphi, \quad r \neq 0\,,$$

$$\cos 4\varphi > \sin 4\varphi\,.$$

Звідси

$$\cos 4\varphi - \sin 4\varphi > 0\,,$$

$$\cos 4\varphi - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 4\varphi\right) > 0\,, \; -2\sin\frac{\pi}{4}\sin\left(4\varphi - \frac{\pi}{4}\right) > 0\,,$$

$$\sqrt{2}\sin\left(4\varphi - \frac{\pi}{4}\right) < 0\,, \quad \sin\left(4\varphi - \frac{\pi}{4}\right) < 0\,,$$

$$2\pi k - \pi < 4\varphi - \frac{\pi}{4} < 2\pi k\,,$$

$$2\pi k - \frac{3\pi}{4} < 4\varphi < \frac{\pi}{4} + 2\pi k\,,$$

$$\frac{\pi k}{2} - \frac{3\pi}{16} < \varphi < \frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{2}, \quad k = 0, 1, 2, 3\,.$$

$k=0:\quad -\frac{3\pi}{16} < \varphi < \frac{\pi}{16}$, $\qquad k=1:\quad \frac{5\pi}{16} < \varphi < \frac{9\pi}{16}$,

$k=2:\quad \frac{13\pi}{16} < \varphi < \frac{17\pi}{16}$, $\qquad k=3:\quad \frac{21\pi}{16} < \varphi < \frac{25\pi}{16}$.

Отже, задана нерівність визначає чотири кути розхилу $\frac{\pi}{4}$ з вершиною в точці $z=0$, бісектрисами яких є промені $\varphi = -\frac{\pi}{16} + \pi k$, $k = 0,1,2,3$, не включаючи сторін кутів (рис.3.9в). ◄

Приклад 14. З'ясувати, які лінії комплексної площини задані вказаними умовами.

а) $\operatorname{Re}\frac{1}{z} = \frac{1}{a}$, $a > 0$; $\qquad$ б) $\operatorname{Im}\frac{z-1}{z+1} = 0$.

► а) $\operatorname{Re}\frac{1}{z} = \frac{1}{a}$, $a > 0$.

Перетворимо ліву частину рівності:

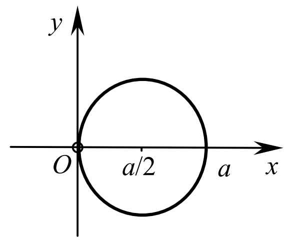
$$\operatorname{Re}\frac{1}{z} = \operatorname{Re}\frac{1}{x+iy} = \operatorname{Re}\frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \operatorname{Re}\frac{x-iy}{x^2+y^2} =$$

$$= \operatorname{Re}\left(\frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{x}{x^2+y^2}\,.$$

Отже, маємо $\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{a}$, де $x^2+y^2 \neq 0$, тобто рівність має місце в усій комплексній площині, крім точки $z=0$. Далі, продовжуючи перетворення, отримаємо $ax = x^2 + y^2$, або $x^2 - ax + y^2 = 0$, або

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}\,.$$

Отже, одержали коло з центром у точці $C\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ радіуса $\frac{a}{2}$ з виколотою точкою $z=0$ (рис.3.10а).



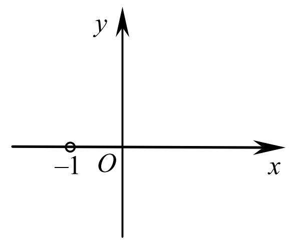


Рис.3.10

б) $\operatorname{Im}\dfrac{z-1}{z+1}=0$.

Виконаємо перетворення лівої частини рівності:

$$\operatorname{Im}\frac{z-1}{z+1}=\operatorname{Im}\frac{x+iy-1}{x+iy+1}=\operatorname{Im}\frac{(x-1)+iy}{(x+1)+iy}=\operatorname{Im}\frac{((x-1)+iy)((x+1)-iy)}{(x+1)^2+y^2}=$$

$$=\operatorname{Im}\frac{x^2-1+y^2+i(xy+y-xy+y)}{(x+1)^2+y^2}=\operatorname{Im}\left(\frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2}+i\frac{2y}{(x+1)^2+y^2}\right).$$

Отже, $\operatorname{Im}\dfrac{z-1}{z+1}=\dfrac{2y}{(x+1)^2+y^2}$.

Враховуючи умову, маємо

$$\frac{2y}{(x+1)^2+y^2}=0,$$

тобто

$$\begin{cases} y=0, \\ (x+1)^2+y^2\neq 0. \end{cases}$$

Маємо всю дійсну вісь, крім точки $x=-1$ на ній (рис.3.10б). ◄

IV. Задачі для практичних занять

3.1. Знайти суму і добуток заданих комплексних чисел.

а) $z_1=4+5i$, $z_2=3-2i$;

б) $z_1=\sqrt{2}-\sqrt{3}\,i$, $z_2=\sqrt{2}+\sqrt{3}\,i$.

3.2. Знайти різницю та частку заданих комплексних чисел.

а) $z_1=1-2i$, $z_2=0{,}6$;

б) $z_1=\sqrt{5}-i$, $z_2=\sqrt{5}-2i$.

3.3. Знайти уявну частину заданого комплексного числа.

а) $z=(2-i)^3(2+11i)$; б) $z=\dfrac{2-3i}{1+4i}+i^6$;

в) $z=\dfrac{5+2i}{2-5i}-\dfrac{3-4i}{4+3i}-\dfrac{1}{i}$.

3.4. Виконати вказані дії.

а) $i^{17}+i^{18}+i^{19}+i^{20}$; б) $2i\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$;

в) $\dfrac{1+i}{1-i}+\dfrac{1-i}{1+i}$; г) $\dfrac{13+12i}{-8+6i}+\dfrac{(1+2i)^3}{2+i}$.

У задачах 3.5 – 3.7 виконати вказані операції, представивши результат в алгебраїчній формі.

3.5. а) $(2+3i)(3-i)+(1+2i)^2$;

б) $(1-i)^3-(1+i)^3$; в) $(2i-i^2)^2+(1-3i)^3$.

3.6. а) $\dfrac{1}{1+4i}+\dfrac{1}{4-i}$; б) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3$;

в) $\dfrac{(1+i)(3+i)}{3-i}-\dfrac{(1-i)(3-i)}{3+i}$; г) $\left(\dfrac{i^5+2}{i^{10}+1}\right)^2$.

3.7. а) $\dfrac{(-3+2i)^2}{(1-i)^3}+2i-5$; б) $\dfrac{(-1+i)^3-(2+i)^3}{(1-2i)^2}$.

3.8. Знайти дійсні розв’язки заданих рівнянь.

а) $(3-i)x+(1+3i)y=1-7i$;

б) $(3x-i)(2+i)+(x-iy)(1+2i)=5+6i$;

в) $12((2x+1)(1+i)+(x+y)(3-2i))=17+6i$;

г) $(x-iy)(a-ib)=i^5$, $a,b\in\mathbf{R}$, $|a|\neq|b|$.

3.9. Визначити, за яких дійсних значень x та y комплексні числа z_1 та z_2 рівні.

$z_1=y^2-7y+9xi$, $z_2=-12+20i+x^2i$.

3.10. Визначити, за яких дійсних значень x та y комплексні числа z_1 та z_2 спряжені.

а) $z_1 = 8x^2 - 20i^9, \quad z_2 = 9x^2 - 4 + 10yi^3$;

б) $z_1 = -3 + ix^2 y, \quad z_2 = x^2 + y + 4i$.

3.11. Обчислити задані вирази.

а) $z_1 \cdot \bar{z}_2$ та $\left(\dfrac{\bar{z}_1}{z_2}\right)^2$, якщо $z_1 = 1 - i\sqrt{3}, \quad z_2 = \sqrt{3} + i$;

б) $z_1 \cdot \bar{z}_2$ та $\dfrac{\bar{z}_1^2}{z_2}$, якщо $z_1 = 3 + 2i, \quad z_2 = 2 + 2i$.

У задачах 3.12, 3.13 довести вказані рівності.

3.12. а) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$;

б) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$;

в) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$;

г) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \ z_2 \neq 0$.

3.13. а) $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$;

б) $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z$;

в) $|\bar{z}| = |z|$;

г) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

3.14. Розв'язати рівняння.

а) $(1+2i)(z-i) + (4i-3)(1-iz) + 1 + 7i = 0$;

б) $z^2 + \bar{z} = 0$.

3.15. Розв'язати систему $\begin{cases} z_1 + 2z_2 = 1 + i, \\ 3z_1 + i z_2 = 2 - 3i. \end{cases}$

3.16. Знайти модулі та головні значення аргументів заданих комплексних чисел.

а) $z = i$; б) $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$; в) $z = -5$;

г) $z = 1 - i$; д) $z = \dfrac{7}{2} - \dfrac{7\sqrt{3}}{2}i$; е) $z = -1 - i\sqrt{3}$;

є) $z = \dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}$; ж) $z = 5 - 7i$; з) $z = 2 - i\sqrt{3}$;

і) $z = 3i - 1$; к) $z = -\cos\dfrac{\pi}{7} - i\sin\dfrac{\pi}{7}$.

3.17. Знайти модулі та аргументи заданих комплексних чисел.

а) $z = -3$; б) $z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; в) $z = \dfrac{1-i}{1+i}$.

3.18. Представити задані комплексні числа в тригонометричній формі та зобразити їх на комплексній площині.

а) $-i$; б) -2; в) $1 - i\sqrt{3}$;

г) $-\sqrt{2} + i\sqrt{2}$; д) $-\cos\dfrac{\pi}{7} + i\sin\dfrac{\pi}{7}$; е) $\sin\dfrac{\pi}{3} + i\cos\dfrac{\pi}{3}$.

3.19. Обчислити вирази, використовуючи формулу Муавра.

а) $(3 - i\sqrt{3})^6$; б) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$;

в) $\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{40}$; г) $\dfrac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{18}} + \dfrac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{18}}$.

3.20. Знайти та зобразити на комплексній площині всі значення коренів.

а) $\sqrt{1}$; б) $\sqrt[3]{1}$ в) $\sqrt[4]{1}$.

3.21. Знайти всі значення коренів.

а) $\sqrt{i}$; б) $\sqrt[3]{i}$; в) $\sqrt[4]{-i}$; г) $\sqrt[9]{-9}$;

д) $\sqrt{-1+i\sqrt{3}}$; е) $\sqrt[3]{-2+2i\sqrt{3}}$; є) $\sqrt[5]{-1-i}$.

3.22. Знайти корені заданих рівнянь і зобразити їх на комплексній площині.

а) $z^2 + i = 0$; б) $z^4 - 16 = 0$; в) $z^8 - 1 = 0$.

3.23. Представити задані комплексні числа в показниковій формі.

а) -2; б) i; в) $-i$;

г) $-1 - i\sqrt{3}$; д) $5 + 3i$; е) $5 - 12i$;

є) $-3 - 4i$; ж) $-2 + i$; з) $\sin\alpha - i\cos\alpha$.

3.24. Представити задані комплексні числа в показниковій формі та виконати дії над ними.

а) $z_1 \cdot z_2$ та $\dfrac{z_1^2}{z_2}$, якщо $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i$, $\quad z_2 = 3 - 3\sqrt{3}\,i$;

б) $z_1^2 \cdot \bar{z}_2$ та $\dfrac{\bar{z}_2}{z_1}$, якщо $z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $\quad z_2 = \sqrt{8} - i\sqrt{8}$.

3.25. З'ясувати геометричний зміст вказаних співвідношень.

а) $|z - z_0| = R$; $\quad |z - z_0| > R$; $\quad |z - z_0| < R \quad (R > 0)$;

б) $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a \quad (a > 0)$;

в) $|z - z_1| - |z - z_2| = 2a \quad (a > 0)$.

У задачах 3.26 – 3.28 знайти множини точок на комплексній площині, які задовольняють задані умови.

3.26. а) $|z| \geq 2$; $\qquad$ б) $\dfrac{1}{|z|} \geq 1, \ z \neq 0$.

3.27. а) $|z - 5i| = 8$; $\quad$ б) $|z - 1 - i| \leq 4$.

3.28. а) $0 < \arg z \leq \dfrac{\pi}{4}$; б) $1 < |z + i| < 2, \quad \dfrac{\pi}{4} < \arg z < \dfrac{\pi}{2}$.

3.29. Навести геометричний опис множини всіх точок комплексної площини, що задовольняють нерівностям.

а) $\operatorname{Im} z \leq 1$; $\qquad$ б) $|z| \leq 1$; $\qquad$ в) $0 < |z + i| < 2$.

3.30. З'ясувати, які множини точок комплексної площини відповідають заданим нерівностям.

а) $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z} < \dfrac{1}{2}$; $\qquad$ б) $|1 + z| < |1 - z|$; $\qquad$ в) $|z| > 1 - \operatorname{Re} z$.

У задачах 3.31 – 3.34 з'ясувати, які лінії на комплексній площині задані вказаними рівняннями.

3.31. а) $\operatorname{Re}\dfrac{z-1}{z+1} = 0$; б) $\operatorname{Re}\dfrac{z-a}{z+a} = 0, \quad a > 0$;

в) $\operatorname{Re}(1 + z) = |z|$.

3.32. а) $\operatorname{Im} z^2 = 2$; $\qquad$ б) $\operatorname{Re} \bar{z}^2 = 1$; $\qquad$ в) $\operatorname{Im}\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2}$.

3.33. $z^2 + \bar{z}^2 = 1$.

3.34. $2z\bar{z} + (2 + i)z + (2 - i)\bar{z} = 2$.

3.35. а) $|z - 2| = |1 - 2\bar{z}|$; $\quad$ б) $|z - z_1| = |z - z_2|$;

в) $\operatorname{Re}(z^2 - \bar{z}) = 0$.

У задачах 3.36, 3.37 записати у комплексній формі рівняння вказаних ліній.

3.36. а) координатних осей Ox та Oy;

б) прямої $y = x$;

в) прямої $y = kx + b, \quad k, b \in \mathbf{R}$.

3.37. а) рівнобічної гіперболи $x^2 - y^2 = a^2$;

б) кола $x^2 + y^2 + 2x = 0$.

§2. Функції комплексної змінної

I. Короткі теоретичні відомості

Основні поняття

Область. *Областю* на комплексній площині називається множина D точок, які мають такі властивості:

1) кожна точка з множини D належить їй разом з достатньо малим кругом з центром у цій точці (*відкритість*);

2) будь-які дві точки можна з'єднати ламаною, що складається тільки з точок D (*зв'язність*).

Найпростішими прикладами області є околи точок на комплексній площині. Зауважимо, що ε - окіл точки a – це відкритий круг радіуса ε з центром у точці a, тобто сукупність точок z, що задовольняють нерівності $|z - a| < \varepsilon$.

Межовою точкою області D називають таку точку, яка сама не належить області D, але в будь-якому її околі містяться точки цієї області. Сукупність всіх межових точок області називається *межею області* D. Область D з приєднаною до неї межею називають *замкненою областю* і позначають $\overline{D}$.

Область D називається *обмеженою*, якщо вона належить кругу $|z| < R$. Якщо область обмежена, число зв'язних частин, на які розбивається її межа, називається *порядком зв'язності*.

Функції комплексної змінної. Кажуть, що на множині M точок площини Z *задана функція комплексної змінної* $w = f(z)$, якщо є закон, згідно з яким кожній точці $z \in M$ ставиться у відповідність цілком певна точка, або сукупність точок w. У першому випадку функція $f(z)$ називається *однозначною*, у другому – *многозначною*. Множина M називається *областю визначення* функції $f(z)$, а сукупність N всіх значень w, які $f(z)$ приймає на M, *областю її зміни*.

Нехай $z = x + iy$, $w = u + iv$. Тоді задання функції комплексної змінної $w = f(z)$ буде рівносильне заданню двох функцій дійсних змінних

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y),$$

тобто

$$w = f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y),$$

де $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$.

Геометрично задану в області D однозначну функцію $f(z)$ можна розглядати як відображення області D площини Z на деяку множину G площини W, що є сукупністю значень функції $f(z)$, які відповідають всім $z \in D$.

Отже, функція $w = f(z)$ здійснює *відображення* точок комплексної площини Z на відповідні точки комплексної площини W.

Знаходження рівняння образу кривої при відображенні $w = f(z)$.

Нехай в площині Z *крива задана рівнянням* $F(x, y) = 0$. Щоб знайти рівняння образу $\Phi(u, v) = 0$ цієї кривої в площині W при відображенні за допомогою функції $w = f(z) = u + iv$, треба виключити x та y з рівнянь

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y), \\ F(x, y) = 0. \end{cases} \tag{3.9}$$

Якщо *крива задана параметричними рівняннями* $x = x(t)$, $y = y(t)$ або $z = z(t) = x(t) + i\,y(t)$, то параметричними рівняннями її образу при відображенні $w = f(z) = u + iv$ будуть

$$u = u[x(t),\ y(t)] = U(t),$$
$$v = v[x(t),\ y(t)] = V(t).$$

Основні елементарні функції комплексної змінної

До основних елементарних функцій відносяться такі функції.

1. *Степенева функція*

$$z^n = (x + iy)^n, \quad n \in \mathbf{N}. \tag{3.10}$$

2. *Показникова функція*

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y). \tag{3.11}$$

Ця функція має такі властивості:

1°. Якщо $z = x$, то $e^z = e^x$.

2°. $|e^z| = e^x$.

3°. $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$.

4°. $e^{z+2\pi i} = e^z$, тобто функція періодична з періодом $2\pi i$.

5°. $e^0 = 1$, $e^{\frac{\pi}{2}i} = i$, $e^{\pi i} = -1$, $e^{\frac{3\pi}{2}i} = -i$, $e^{2\pi i} = 1$.

3. *Тригонометричні функції*

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \tag{3.12}$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}. \tag{3.13}$$

Ці функції мають такі властивості:

1°. Якщо $z = x$, то ці функції співпадають з аналогічними функціями дійсної змінної.

2°. Для введених функцій мають місце всі формули, справедливі для функцій дійсної змінної.

3°. $\cos(z + 2\pi) = \cos z$, $\sin(z + 2\pi) = \sin z$,

$\operatorname{tg}(z + \pi) = \operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg}(z + \pi) = \operatorname{ctg} z$,

тобто функції $\cos z$, $\sin z$ періодичні з періодом 2π, функції $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$ періодичні з періодом π.

4. *Гіперболічні функції*

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \tag{3.14}$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \qquad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}. \tag{3.15}$$

Ці функції мають такі властивості:

1°. Якщо $z = x$, то ці функції співпадають з аналогічними функціями дійсної змінної.

2°. Для введених функцій мають місце всі формули, справедливі для функцій дійсної змінної.

3°. $\operatorname{ch}(z+2\pi i) = \operatorname{ch} z$, $\quad \operatorname{sh}(z+2\pi i) = \operatorname{sh} z$,

$$\operatorname{th}(z+\pi i) = \operatorname{th} z, \qquad \operatorname{cth}(z+\pi i) = \operatorname{cth} z,$$

тобто функції $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$ періодичні з періодом $2\pi i$, функції $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$ періодичні з періодом πi.

4°. $\operatorname{ch} z = \cos iz$, $\quad \operatorname{sh} z = -i \sin iz$,

$$\operatorname{th} z = -i \operatorname{tg} iz, \qquad \operatorname{cth} z = i \operatorname{ctg} iz.$$

Звідси

$$\cos iz = \operatorname{ch} z, \qquad \sin iz = i \operatorname{sh} z,$$

$$\operatorname{tg} iz = i \operatorname{th} z, \qquad \operatorname{ctg} iz = -i \operatorname{cth} z.$$

5. *Логарифмічна функція*

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi), \quad z \neq 0, \; k \in \mathbf{Z}. \tag{3.16}$$

Логарифмічна функція $\operatorname{Ln} z$ визначається як обернена до показникової. Функція $\operatorname{Ln} z$ є многозначною. *Головним значенням* $\operatorname{Ln} z$ називається те значення, яке отримується при $k = 0$. Воно позначається через $\ln z$. Отже,

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z, \tag{3.17}$$

а тоді

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + 2k\pi i, \; k \in \mathbf{Z}. \tag{3.18}$$

Мають місце співвідношення:

$$\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2,$$

$$\operatorname{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2,$$

$$\operatorname{Ln} z^n = n \operatorname{Ln} z + 2k\pi i, \; k \in \mathbf{Z}.$$

6. *Загальна степенева функція*

$$z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}, \; a \in \mathbf{C}. \tag{3.19}$$

Ця функція многозначна, її головне значення $e^{a \ln z}$.

Якщо $a = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N}$, то отримуємо многозначну функцію – *корінь n-го степеня* з комплексного числа

$$z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z} = e^{\frac{1}{n}(\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi))} = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\frac{\arg z + 2k\pi}{n}}, \; k \in \mathbf{Z}.$$

7. *Загальна показникова функція*

$$a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}, \; a \in \mathbf{C}. \tag{3.20}$$

Головне значення цієї функції $e^{z \ln a}$.

8. *Обернені тригонометричні функції*

$$\begin{aligned} \operatorname{Arcsin} z &= -i \operatorname{Ln}(iz \pm \sqrt{1-z^2}), \\ \operatorname{Arccos} z &= -i \operatorname{Ln}(z \pm \sqrt{z^2-1}), \\ \operatorname{Arctg} z &= -\frac{i}{2} \operatorname{Ln}\frac{1+iz}{1-iz}, \\ \operatorname{Arcctg} z &= \frac{i}{2} \operatorname{Ln}\frac{z-i}{z+i}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

9. *Обернені гіперболічні функції*

$$\begin{aligned} \operatorname{Arsh} z &= \operatorname{Ln}(z \pm \sqrt{z^2+1}), \\ \operatorname{Arch} z &= \operatorname{Ln}(z \pm \sqrt{z^2-1}), \\ \operatorname{Arth} z &= \frac{1}{2} \operatorname{Ln}\frac{1+z}{1-z}, \\ \operatorname{Arcth} z &= \frac{1}{2} \operatorname{Ln}\frac{z+1}{z-1}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Границя та неперервність функцій комплексної змінної

Нехай функція $f(z)$ визначена в деякому околі Ω точки z_0, крім, можливо, самої точки z_0.

Означення 1. Число A називається *границею функції $f(z)$ в точці z_0*, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ можна вказати таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх точок $z \in \Omega$, які задовольняють умові $0 < |z - z_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(z) - A| < \varepsilon$.

Коротко це записується так: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$.

Тут припускається, що z_0 і A скінченні точки комплексної площини.

Означення 2. Якщо для будь-якої послідовності $\{z_n\}$ $(z_n \neq z_0)$, збіжної до точки z_0, відповідна їй послідовність значень функції $f(z_n)$ збігається до числа A, то число A називається *границею функції* $f(z)$ *в точці* z_0. Тут нескінченність z_0 і A не припускається.

Існування границі $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$, де $f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$, $z_0 = x_0 + i\, y_0$ рівносильне існуванню границь $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = u_0$ і $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = v_0$, причому

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = u_0 + v_0 = w_0 .$$

Властивості границі функцій комплексної змінної

Нехай існують границі $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A,\ \lim\limits_{z \to z_0} g(z) = B$. Тоді

$$\lim_{z \to z_0} (f(z) \pm g(z)) = A \pm B ,$$

$$\lim_{z \to z_0} (f(z) \cdot g(z)) = A \cdot B ,$$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{A}{B}, \quad B \neq 0 .$$

Означення 3. Функція $f(z)$, що задана в області D, називається *неперервною в точці* $z_0 \in D$, якщо $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Означення 4. Функція $f(z)$ *неперервна в точці* z_0, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх точок $z \in D$, які задовольняють умові $|z - z_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Для неперервності функції комплексної змінної $f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$ в точці $z_0 = x_0 + i\, y_0$, необхідно та достатньо, щоб її дійсна та уявна частини, тобто функції $u(x, y)$, $v(x, y)$, були неперервні в точці (x_0, y_0) за сукупністю змінних x і y.

Означення 5. Функція $f(z)$ комплексної змінної називається *неперервною в області* D, якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

Сума, різниця та добуток двох функцій комплексної змінної $f(z)$ та $g(z)$, неперервних в області D, також є неперервною функцією в цій області, а функція $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ неперервна в тих точках області D, де $g(z) \neq 0$.

Якщо функція $f(z)$ неперервна в точці z_0, а $F(\tau)$ неперервна в точці $\tau = f(z_0)$, то складна функція $F(f(z))$ неперервна в точці z_0.

Означення 6. Функція $f(z)$ називається *рівномірно неперервною в області* D, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для будь-яких точок z_1, $z_2 \in D$, які задовольняють умові $|z_1 - z_2| < \delta$, виконується нерівність $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$.

II. Контрольні питання та завдання

1. Дайте означення області на комплексній площині.
2. Яка область називається замкненою; обмеженою?
3. Дайте означення функції комплексної змінної.
4. Яка функція називається однозначною; многозначною?
5. Перелічіть основні елементарні функції комплексної змінної.
6. Дайте означення показникової функції. Які її властивості?
7. Дайте означення тригонометричних функцій. Наведіть їхні властивості.
8. Дайте означення гіперболічних функцій. Наведіть їхні властивості.
9. Як визначається логарифмічна функція? Що називається головним значенням цієї функції? Запишіть відповідні функції.
10. Як визначається загальна степенева функція; загальна показникова функція?
11. Наведіть обернені тригонометричні функції.
12. Запишіть обернені гіперболічні функції.
13. Дайте означення границі функції в точці.
14. Дайте означення функції, неперервної в точці; неперервної в області?
15. Наведіть означення рівномірно неперервної функції в області.

III. Приклади розв'язання задач

Основні поняття

Приклад 1. Знайти дійсну та уявну частини функції

$$f(z) = iz^2 - \bar{z}.$$

► Покладемо $z = x + iy$. Тоді

$$f(z) = u(x,y) + iv(xz,y) = i(x+iy)^2 - (x-iy) = i(x^2 - y^2 + 2ixy) -$$
$$-(x-iy) = -x(1+2y) + i(x^2 - y^2 + y).$$

Отже,

$$\operatorname{Re} f(z) = u(x,y) = -x(1+2y), \quad \operatorname{Im} f(z) = v(x,y) = x^2 - y^2 + y. \blacktriangleleft$$

Приклад 2. Визначити функцію $w = f(z)$ за відомими дійсною та уявною частинами $u(x,y) = x + y$, $v(x,y) = x - y$.

► Покладемо $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$. Тоді

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y = -\frac{i}{2}(z - \bar{z}).$$

$$u(x,y) = x + y = \frac{1}{2}(z+\bar{z}) - \frac{i}{2}(z-\bar{z}) = \frac{1-i}{2}z + \frac{1+i}{2}\bar{z},$$

$$v(x,y) = x - y = \frac{1}{2}(z+\bar{z}) + \frac{i}{2}(z-\bar{z}) = \frac{1+i}{2}z + \frac{1-i}{2}\bar{z}.$$

Отже,

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = \frac{1-i}{2}z + \frac{1+i}{2}\bar{z} + \frac{1+i}{2}iz + \frac{1-i}{2}i\bar{z} =$$
$$= \left(\frac{1-i}{2} + \frac{1+i}{2}i\right)z + \left(\frac{1+i}{2} + \frac{1-i}{2}i\right)\bar{z} = (1+i)\bar{z}.$$

Таким чином, $f(z) = (1+i)\bar{z}$. ◄

Приклад 3. Знайти образ одиничного кола C при відображенні $w = f(z)$.

а) $C: |z| = 1, \quad w = z^2$;

б) $C: z = R\cos t + iR\sin t, \; 0 \le t \le 2\pi, \quad w = \dfrac{z}{\bar{z}}$.

► а) $C: |z| = 1, \quad w = z^2$.

Нехай $z = x + iy$. Тоді $w = z^2 = (x+iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$.

Звідси $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$.

Виключаючи x та y з системи рівнянь

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2, \\ v = 2xy, \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$

отримаємо $u^2 + v^2 = 1$.

Отже, образом кола $|z| = 1$ в площині Z є коло $u^2 + v^2 = 1$ в площині W, що проходиться двічі. Це випливає з того, що оскільки $w = z^2$, то $\operatorname{Arg} w = 2\operatorname{Arg} z + 2k\pi$, отже, коли точка z описує повне коло $|z| = 1$, то її образ описує коло $|w| = 1$ двічі.

б) $C: z = R\cos t + iR\sin t, \; 0 \le t \le 2\pi, \quad w = \dfrac{z}{\bar{z}}$.

Нехай $z = x + iy$.

Рівняння кола запишемо у вигляді $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, де $0 \le t \le 2\pi$. Виділимо дійсну та уявну частини функції $w = u + iv$. Маємо

$$w = u + iv = \frac{z}{\bar{z}} = \frac{z^2}{\bar{z}\cdot z} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + i\frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

Звідси $u = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $v = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$.

Підставимо $x = R\cos t$, $y = R\sin t$ у вирази для u та v. Отримаємо параметричне рівняння кола

$$u = \frac{\cos^2 t - \sin^2 t}{\cos^2 t + \sin^2 t} = \cos 2t, \quad v = \frac{2\cos t \sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} = \sin 2t$$

або $u^2 + v^2 = 1$.

Отже, образом є одиничне коло, що проходиться двічі. Це випливає з того, що $0 \le t \le 2\pi$, а рівняння кола $\begin{cases} u = \cos 2t, \\ v = \sin 2t. \end{cases}$ ◄

Основні елементарні функції

Приклад 4. Обчислити значення $e^{-2+\frac{\pi}{3}i}$, записати його модуль, дійсну та уявну частини.

► Скористаємось формулою

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Тоді

$$e^{-2+\frac{\pi}{3}i} = e^{-2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{e^2}\left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Звідси

$$\left|e^{-2+\frac{\pi}{3}i}\right| = \frac{1}{e^2}, \quad \mathrm{Re}\left(e^{-2+\frac{\pi}{3}i}\right) = \frac{1}{2e^2}, \quad \mathrm{Im}\left(e^{-2+\frac{\pi}{3}i}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2e^2}. \blacktriangleleft$$

Приклад 5. Знайти дійсну та уявну частини заданих функцій.

а) $w = e^{2z+3i}$; б) $w = \sin(iz-1)$.

► а) $w = e^{2z+3i}$.

Нехай $z = x + iy$. Тоді

$2z + 3i = 2(x+iy) + 3i = 2x + i(2y+3)$.

Отже,

$$w = e^{2z+3i} = e^{2x+i(2y+3)} = e^{2x}(\cos(2y+3) + i\sin(2y+3)) =$$
$$= e^{2x}\cos(2y+3) + i\,e^{2x}\sin(2y+3).$$

Звідси

$$\mathrm{Re}(e^{2z+3i}) = e^{2x}\cos(2y+3), \quad \mathrm{Im}(e^{2z+3i}) = e^{2x}\sin(2y+3).$$

б) $w = \sin(iz-1)$.
Нехай $z = x + iy$. Тоді

$iz - 1 = i(x+iy) - 1 = ix - y - 1 = -(y+1) + ix$.

Отже,

$$w = \sin(iz-1) = \sin(-(y+1)+ix) = \sin(-(y+1))\cos ix + \cos(-(y+1))\sin ix =$$
$$= -\sin(y+1)\,\mathrm{ch}\,x + \cos(y+1)\,i\,\mathrm{sh}\,x = -\sin(y+1)\,\mathrm{ch}\,x + i\,\cos(y+1)\,\mathrm{sh}\,x.$$

При перетворенні скористались формулою тригонометрії

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$

а також формулами $\cos ix = \mathrm{ch}\,x$, $\sin ix = i\,\mathrm{sh}\,x$.

Отже,

$$\mathrm{Re}\,\sin(iz-1) = -\sin(y+1)\,\mathrm{ch}\,x, \quad \mathrm{Im}\,\sin(iz-1) = \cos(y+1)\,\mathrm{sh}\,x. \blacktriangleleft$$

Приклад 6. Обчислити значення заданих функцій у вказаних точках.

а) $\sin i$; б) $\cos(2+i)$; в) $\mathrm{ch}\,(2-3i)$; г) $\mathrm{Ln}\,i$; д) i^i.

► а) $\sin i$.

$$\sin i = \frac{e^{i\cdot i} - e^{-i\cdot i}}{2i} = \frac{e^{-1} - e^{1}}{2i} = -\frac{e^{1} - e^{-1}}{2i} = i\,\frac{e^{1} - e^{-1}}{2} = i\,\mathrm{sh}1.$$

б) $\cos(2+i)$.

$$\cos(2+i) = \frac{e^{i(2+i)} + e^{-i(2+i)}}{2} = \frac{1}{2}(e^{2i-1} + e^{-2i+1}) = \frac{1}{2}(e^{-1+2i} + e^{1-2i}) =$$
$$= \frac{1}{2}(e^{-1}(\cos 2 + i\sin 2) + e^{1}(\cos 2 - i\sin 2)) = \cos 2\,\frac{e^{1}+e^{-1}}{2} - i\sin 2\,\frac{e^{1}-e^{-1}}{2} =$$
$$= \cos 2\cdot\mathrm{ch}1 - i\sin 2\cdot\mathrm{sh}1.$$

в) $\mathrm{ch}\,(2-3i)$.

$$\mathrm{ch}\,(2-3i) = \frac{e^{2-3i} + e^{-2+3i}}{2} = \frac{1}{2}(e^{2}(\cos 3 - i\sin 3) + e^{-2}(\cos 3 + i\sin 3)) =$$
$$= \cos 3\,\frac{e^{2}+e^{-2}}{2} - i\sin 3\,\frac{e^{2}-e^{-2}}{2} = \cos 3\cdot\mathrm{ch}\,2 - i\sin 3\cdot\mathrm{sh}\,2.$$

г) $\mathrm{Ln}\,i$.

Скористаємось формулою

$$\mathrm{Ln}\,z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi), \; k\in\mathbf{Z}.$$

Оскільки $|i| = 1$, $\arg i = \frac{\pi}{2}$, маємо

$$\mathrm{Ln}\,i = \ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \; k\in\mathbf{Z}.$$

д) i^i.

Скористаємось формулою

$$z^a = e^{a\,\mathrm{Ln}\,z}, \; a\in\mathbf{C}.$$

поклавши $a = i$, $z = i$. Тоді

$$i^i = e^{i\,\mathrm{Ln}\,i} = e^{i\left(\ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right)} = e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}, \; k\in\mathbf{Z}. \blacktriangleleft$$

Приклад 7. Обчислити значення заданих функцій у вказаних точках.

а) $\mathrm{Arcsin}\, i$; б) $\mathrm{Arch}\, 2$.

► а) $\mathrm{Arcsin}\, i$.
Скористаємось формулою
$$\mathrm{Arcsin}\, z = -i\,\mathrm{Ln}(iz \pm \sqrt{1-z^2}\,),$$
поклавши $z = i$. Тоді
$$\mathrm{Arcsin}\; i = -i\;\mathrm{Ln}(i^2 \pm \sqrt{1-i^2}\,) = -i\;\mathrm{Ln}(-1 \pm \sqrt{2}\,).$$
Числа $-1+\sqrt{2}$ та $-1-\sqrt{2}$ – дійсні, причому перше додатне, а друге – від'ємне. Тому
$$\left|-1+\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}-1,\ \arg(-1+\sqrt{2}) = 0,\quad \left|-1-\sqrt{2}\right| = 1+\sqrt{2},\ \arg(-1-\sqrt{2}) = \pi.$$
Підставляючи ці значення у формулу
$$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi),$$
отримуємо дві послідовності значень $\mathrm{Arcsin}\, i$:
$$\mathrm{Arcsin}\, i = -i\;\mathrm{Ln}(-1+\sqrt{2}\,) = -i(\ln(\sqrt{2}-1) + i2k\pi) = 2k\pi - i\ln(\sqrt{2}-1),\ k \in \mathbf{Z}$$
та
$$\mathrm{Arcsin}\, i = -i\;\mathrm{Ln}(-1-\sqrt{2}\,) = -i(\ln(\sqrt{2}+1) + i(\pi+2k\pi)) = (2k+1)\pi - i\ln(\sqrt{2}+1),$$
$k \in \mathbf{Z}$.

б) $\mathrm{Arch}\, 2$.
Скористаємось формулою
$$\mathrm{Arch}\, z = \mathrm{Ln}(z \pm \sqrt{z^2-1}\,),$$
поклавши $z = 2$. Тоді
$$\mathrm{Arch}\, 2 = \mathrm{Ln}(2 \pm \sqrt{2^2-1}\,) = \mathrm{Ln}(2 \pm \sqrt{3}\,).$$
Обидва числа $2 \pm \sqrt{3}$ додатні, тому $\left|2 \pm \sqrt{3}\right| = 2 \pm \sqrt{3}$, $\arg(2 \pm \sqrt{3}) = 0$.
Підставляючи ці значення у формулу
$$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi),$$
знайдемо
$$\mathrm{Arch}\, 2 = \ln(2 \pm \sqrt{3}\,) + i2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}. ◄$$

Приклад 8. Розв'язати рівняння $\sin z = 3$.

► Розв'язком даного рівняння є
$$z = \mathrm{Arcsin}\, 3.$$
Отже, задача зводиться до обчислення $\mathrm{Arcsin}\, 3$.

Скористаємось формулою
$$\mathrm{Arcsin}\, t = -i\,\mathrm{Ln}(it \pm \sqrt{1-t^2}\,),$$
поклавши $t = 3$. Тоді
$$z = \mathrm{Arcsin}\; 3 = -i\;\mathrm{Ln}(3i \pm \sqrt{-8}\,).$$
Враховуючи, що $\sqrt{-8} = \pm i\sqrt{8}$, отримуємо
$$z = -i\;\mathrm{Ln}(3+\sqrt{8}\,)i,\quad z = -i\;\mathrm{Ln}(3-\sqrt{8}\,)i.$$
Оскільки
$$\left|(3+\sqrt{8})i\right| = 3+\sqrt{8},\quad \left|(3-\sqrt{8})i\right| = 3-\sqrt{8},$$
$$\arg((3+\sqrt{8}\,)i) = \arg((3-\sqrt{8}\,)i) = \frac{\pi}{2},$$
то
$$\mathrm{Ln}[(3+\sqrt{8}\,)i] = \ln(3 \pm \sqrt{8}\,) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right),\ k \in \mathbf{Z}.$$
Отже,
$$z = \mathrm{Arcsin}\, 3 = -i\left(\ln(3 \pm \sqrt{8}\,) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\;\ln(3 \pm \sqrt{8}\,),\ k \in \mathbf{Z}. ◄$$

Границя та неперервність функцій

Приклад 9. Задана лінійна функція $w = f(z) = az + b$, де a і b – комплексні сталі, $a \neq 0$. Користуючись означенням границі та неперервності функції в точці, довести, що

а) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = az_0 + b = w_0$;

б) функція $f(z)$ неперервна в точці z_0.

► а) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = az_0 + b = w_0$.

Візьмемо довільне число $\varepsilon > 0$. За умовою
$$|f(z) - w_0| = |(az+b) - (az_0+b)| = |a(z-z_0)| = |a| \cdot |z - z_0|.$$
Взявши за $\delta(\varepsilon) > 0$ число $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|a|}$, матимемо $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ при $0 < |z - z_0| < \delta$. Це означає, що $w_0 = az_0 + b$ є границя функції $f(z) = az + b$ в точці z_0, тобто $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = az_0 + b = w_0$.

б) функція $f(z)$ неперервна в точці z_0.

Оскільки $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = az_0 + b = f(z_0)$, то згідно з означенням неперервності функції в точці маємо, що лінійна функція неперервна в будь-якій точці z_0. ◀

Приклад 10. Знайти границі заданих функцій.

а) $\lim\limits_{z\to -i} \dfrac{z^2+3iz-2}{z+i}$; б) $\lim\limits_{z\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos 2z}{\operatorname{ch} iz + i\operatorname{sh} iz}$; в) $\lim\limits_{z\to -\frac{\pi}{2}i} \dfrac{e^{2z}+1}{e^z+i}$.

▶ а) $\lim\limits_{z\to -i} \dfrac{z^2+3iz-2}{z+i} = \left\{\dfrac{0}{0}\right\} = \lim\limits_{z\to -i} \dfrac{(z+i)(z+2i)}{z+i} = \lim\limits_{z\to -i}(z+2i) = i$.

б) $\lim\limits_{z\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos 2z}{\operatorname{ch} iz + i\operatorname{sh} iz} = \left\{\dfrac{0}{0}\right\} = \lim\limits_{z\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos 2z}{\cos z - \sin z} =$

$$= \lim_{z\to\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos z - \sin z)(\cos z + \sin z)}{\cos z - \sin z} = \lim_{z\to\frac{\pi}{4}} (\cos z + \sin z) = \sqrt{2}.$$

в) $\lim\limits_{z\to -\frac{\pi}{2}i} \dfrac{e^{2z}+1}{e^z+i} = \left\{\dfrac{0}{0}\right\} = \lim\limits_{z\to -\frac{\pi}{2}i} \dfrac{2e^{2z}}{e^z} = \dfrac{2e^{-\pi i}}{e^{-\frac{\pi}{2}i}} = \dfrac{2\cdot(-1)}{-i} = -2i$.

Тут використано правило Лопіталя. ◀

Приклад 11. Показати, що функція $w = z^2$ неперервна при будь-якому значенні z.

▶ Візьмемо довільну точку z_0 і довільне число $\varepsilon > 0$. Оскільки $f(z_0) = z_0^2$, то покажемо, що існує число $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що $\left|z^2 - z_0^2\right| < \varepsilon$ при $\left|z - z_0\right| < \delta$.

Якщо $z \to z_0$, то знайдеться таке число $M > 0$, що $|z| < M$ і $|z_0| < M$. Тоді

$$\left|z^2 - z_0^2\right| = \left|(z-z_0)(z+z_0)\right| = \left|z+z_0\right|\cdot\left|z-z_0\right| < \left(|z| + |z_0|\right)\cdot\left|z-z_0\right| < 2M\left|z-z_0\right|.$$

Якщо взяти $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2M}$, то з нерівності $\left|z - z_0\right| < \delta$ випливає, що $\left|z^2 - z_0^2\right| < 2M\delta \le \varepsilon$, тобто для будь-якого z_0 функція $w = f(z) = z^2$ неперервна. ◀

IV. Задачі для практичних занять

Основні поняття

3.38. Знайти дійсну та уявну частини заданих функцій.

а) $w = \bar{z} - iz^2$; б) $w = z^2 + i$;

в) $w = i - z^3$; г) $w = \dfrac{\bar{z}}{z}$.

3.39. Визначити функцію $w = f(z)$ за відомими дійсною та уявною частинами.

а) $u(x,y) = x^2 - y^2 - 2y - 1$, $v(x,y) = 2xy + x$;

б) $u(x,y) = x\dfrac{x^2+y^2+1}{x^2+y^2}$, $v(x,y) = \dfrac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2}$;

в) $u(x,y) = \dfrac{1}{x}$, $v(x,y) = \dfrac{1}{y}$.

3.40. Знайти образи заданих точок при вказаних відображеннях $w = f(z)$.

а) $z_0 = -i$, $w = z^2$; б) $z_0 = 1 - i$, $w = (z-i)^2$;

в) $z_0 = 1$, $w = \dfrac{1}{z-i}$; г) $z_0 = 2 + 3i$, $w = \dfrac{\bar{z}}{z}$.

3.41. Знайти образи заданих ліній при відображенні $w = \dfrac{1}{z}$.

а) $|z| = \dfrac{1}{2}$; б) $\operatorname{Re} z = 0$; в) $\arg z = \dfrac{3}{4}\pi$.

3.42. Знайти образи заданих ліній при відображенні $w = z^2$.

а) $x = C$; б) $|z| = R$; в) $\arg z = \alpha$.

3.43. Виділити дійсну та уявну частини заданих функцій.

а) $w = e^{-z}$; б) $w = e^{z^2}$; в) $w = \sin z$;

г) $w = \operatorname{ch}(z-i)$; д) $w = \operatorname{sh} z$.

Основні елементарні функції

У задачах 3.44 – 3.46 знайти значення модуля та головного значення аргументу заданих функцій у вказаних точках.

3.44. а) $w = \cos z$, $z_0 = \dfrac{\pi}{2} + i\ln 2$;

б) $w = \sin z$, $z_0 = \pi + i\ln 3$.

3.45. а) $w = \operatorname{sh} z$, $z_0 = 1 + i\dfrac{\pi}{2}$; б) $w = \operatorname{ch}^2 z$, $z_0 = i\ln 3$.

3.46. а) $w = ze^z$, $z_0 = \pi i$; б) $w = z^2 e^z$, $z_0 = -\pi i$.

У задачах 3.47 – 3.51 обчислити значення заданих функцій у вказаних точках.

3.47. а) $\cos(1+i)$; б) $\sin \pi i$; в) $\cos \pi i$.

3.48. а) $\operatorname{ch} i$; б) $\operatorname{sh}(-2+i)$; в) $\operatorname{sh}\dfrac{\pi i}{2}$.

3.49. а) $\operatorname{Ln}(-1)$; б) $\ln i$; в) $\operatorname{Ln}\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.

3.50. а) $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}i$; б) $\operatorname{ctg}\pi i$; в) $\operatorname{th}\pi i$.

3.51. а) $\operatorname{Arcsin} i$; б) $\operatorname{Arccos} i$; в) $\operatorname{Arctg}\dfrac{i}{3}$.

У задачах 3.52 – 3.53 знайти всі значення степенів.

3.52. а) i^i; б) $i^{1/i}$; в) 1^i; г) $(-1)^{\sqrt{2}}$.

3.53. а) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{3i}$; б) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2i}$; в) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}\right)^{1+i}$.

У задачах 3.54 – 3.59 розв’язати задані рівняння.

3.54. $e^z + i = 0$. **3.55.** $4\cos z + 5 = 0$.

3.56. $\operatorname{sh} iz = -i$. **3.57.** $e^{ix} = \cos \pi x$.

3.58. $e^{2z} + 2e^z - 3 = 0$.

3.59. а) $\ln(z+i) = 0$; б) $\ln(i-z) = 1$.

Границя та неперервність функцій

3.60. Користуючись означенням границі, довести, що

а) $\lim\limits_{z\to 2}(3z-5) = 1$; б) $\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{z-i}{z} = 1-i$;

в) $\lim\limits_{z\to 1-i}\dfrac{1}{z+2i} = \dfrac{1-i}{2}$.

У задачах 3.61 – 3.69 знайти границі функцій.

3.61. $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{(z-2)(z+1)(z+4)+8}{z}$.

3.62. $\lim\limits_{z\to 1-i}\bar{z}$. **3.63.** $\lim\limits_{z\to -i} 2\arg z$.

3.64. $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z-2i}{z+i}$. **3.65.** $\lim\limits_{z\to 1-i}\dfrac{z^2-2z+2}{z-1+i}$.

3.66. $\lim\limits_{z\to\infty}\left(\dfrac{z^3}{3z^2-4} - \dfrac{z^2}{3z+2}\right)$. **3.67.** $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$.

3.68. $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z^3-3z+1}{z^2+1}$. **3.69.** $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z^2-5z+1}{3z^3+1}$.

3.70. Користуючись означенням неперервності функції, довести неперервність заданих функцій у вказаних точках z_0.

а) $f(z) = z^2 + 2$, $z_0 = -i$; б) $f(z) = \dfrac{1}{z}$, $z_0 = 1+i$;

в) $f(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$, $z_0 = i$.

3.71. Знайти точки розриву функцій.

а) $f(z) = \dfrac{z}{z^2-2z+2}$; б) $f(z) = \dfrac{z}{z^2+4}$;

в) $f(z) = \dfrac{z+2}{z^2-3z+3i+1}$.

§3. Диференціювання функцій комплексної змінної

I. Короткі теоретичні відомості

Аналітичні функції

Нехай функція $w = f(z)$ визначена в деякій області D комплексної змінної z і точки z і $z + \Delta z$ належать області D. Позначимо

$$\Delta w = f(z+\Delta z) - f(z), \quad \Delta z = \Delta x + i\,\Delta y .$$

Означення 1. Функція $w = f(z)$ називається *диференційовною* в точці $z \in D$, якщо відношення $\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ має скінченну границю, коли Δz прямує до нуля довільним чином. Ця границя називається *похідною функції* $f(z)$ *в точці* z і позначається $f'(z)$ (або w' чи $\dfrac{dw}{dz}$).

Отже, за означенням маємо

$$w' = f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} . \qquad (3.23)$$

Теорема. Для того, щоб функція $w = f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ була диференційовною в точці $z = x + i\,y$, необхідно і достатньо, щоб:

1) функції $u(x,y)$ і $v(x,y)$ були диференційовні в точці (x,y),

2) у точці (x,y) виконувались *умови Коші-Рімана*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} . \qquad (3.24)$$

При виконанні умов теореми має місце *формула для обчислення похідної* $f'(z)$:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} . \qquad (3.25)$$

Означення 2. Функція $w = f(z)$ називається *аналітичною* в точці $z \in D$, якщо вона диференційовна як в самій точці z, так і в деякому її околі. Функція $w = f(z)$ називається *аналітичною* в області D, якщо вона диференційовна в кожній точці цієї області.

Формули диференціювання функцій комплексної змінної аналогічні відповідним формулам диференціювання функцій дійсної змінної.

Гармонічні функції

Означення 3. Функція $\varphi(x,y)$ називається *гармонічною* в області D, якщо вона має в цій області неперервні частинні похідні до другого порядку включно і задовольняє в цій області *рівняння Лапласа*

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{або} \quad \Delta\varphi = 0 ,$$

де $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Якщо функція $f(z) = u + i\,v$ *аналітична* в деякій області D, то її дійсна частина $u(x,y)$ і уявна частина $v(x,y)$ є *гармонічними* функціями.

Але ж, якщо $u_1(x,y)$ і $v_1(x,y)$ – дві будь-які гармонічні функції, то функція $f_1(z) = u_1(x,y) + i\,v_1(x,y)$ зовсім не повинна бути аналітичною функцією; для аналітичності $f_1(z)$ треба, щоб функції $u_1(x,y)$ і $v_1(x,y)$ додатково задовольняли умови Коші-Рімана.

Дві гармонічні функції, що задовольняють умови Коші-Рімана, називаються *спряженою парою гармонічних функцій* (порядок функцій в парі має істотне значення).

Відновлення функції за її дійсною або уявною частиною

Якщо відомо, що функція $f(z) = u + i\,v$ аналітична в деякій області D і відома її тільки дійсна частина $u(x,y)$ або тільки уявна частина $v(x,y)$ (це означає, що функції $u(x,y)$ та $v(x,y)$ гармонічні), то цю функцію можна відновити.

Процес відновлення функції $f(z)$ можна виконати *трьома способами*.

1. Використовуються формули

$$f(z) = 2u\left(\frac{z+\bar z_0}{2}, \frac{z-\bar z_0}{2i}\right) - f(z_0) , \qquad (3.26)$$

$$f(z) = 2i\,v\left(\frac{z+\bar z_0}{2}, \frac{z-\bar z_0}{2i}\right) + \overline{f(z_0)} . \qquad (3.27)$$

Формули (4), (5) використовуються для відновлення функції за відомою дійсною частиною або відомою уявною частиною відповідно.

2. Використовуються безпосередньо умови Коші-Рімана (3.24).

3. Використовуються формули для знаходження дійсної та уявної частини відповідно, пов’язані з обчисленням криволінійних інтегралів другого роду

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \frac{\partial v}{\partial y}dx-\frac{\partial v}{\partial x}dy\,, \qquad (3.28)$$

$$v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy\,, \qquad (3.29)$$

де інтегрування здійснюється вздовж будь-якої кусково-гладкої кривої, що цілком міститься в області D і з'єднує фіксовану точку $(x_0,y_0)\in D$ з довільною точкою $(x,y)\in D$.

Геометричний зміст модуля і аргументу похідної

Нехай функція $f(z)$ аналітична в точці z_0 і $f(z_0)\neq 0$. Тоді $|f(z_0)|$ дорівнює коефіцієнту розтягу в точці z_0 при відображенні $w=f(z)$ площини Z на площину W; інакше, при $|f(z_0)|>1$ має місце розтяг, при $|f(z_0)|<1$ – стиск.

Аргумент похідної $f'(z_0)$ геометрично дорівнює куту, на який треба повернути дотичну в точці z_0 до будь-якої гладкої кривої на площині Z, що проходить через точку z_0, щоб одержати напрямок дотичної в точці $w_0=f(z_0)$ до образу цієї кривої на площині W при відображенні $w=f(z)$. Якщо $\varphi=\arg f'(z)>0$, то поворот відбувається проти руху годинникової стрілки, а при $\varphi=\arg f'(z)<0$ – за рухом годинникової стрілки.

II. Контрольні питання та завдання

1. Дайте означення диференційовної функції комплексної змінної.
2. Що називається похідною функції?
3. Запишіть умови Коші-Рімана.
4. Яка функція називається аналітичною?
5. Запишіть рівняння Лапласа.
6. Яка функція називається гармонічною?
7. Чи буде аналітичною функція, у якої дійсна та уявна частини є гармонічними?
8. У чому геометричний зміст модуля похідної?
9. Наведіть геометричний зміст аргументу похідної.

III. Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Довести, що функція $w=e^z$ аналітична в усій комплексній площині.

► Маємо $w=e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$, звідки

$$u(x,y)=e^x\cos y,\quad v(x,y)=e^x\sin y\,.$$

Функції $u(x,y)$, $v(x,y)$ як функції дійсних змінних x і y диференційовні в будь-якій точці (x,y). Вони мають неперервні частинні похідні будь-якого порядку і задовольняють умови Коші-Рімана (перевірте!). Звідси $w=e^z$ всюди аналітична. Згідно з формулою для похідної

$$w'=(e^z)'=(e^{x+iy})'=(e^x(\cos y+i\sin y))'=(e^x\cos y)'_x+$$
$$+i(e^x\sin y)'_x=e^x(\cos y+i\sin y)=e^z\,.$$

Таким чином, $(e^z)'=e^z$. ◄

Приклад 2. Чи буде функція $w=\bar z=x-iy$ аналітичною?

► Тут $u(x,y)=x$, $v(x,y)=-y$ – всюди диференційовні функції.

Знайдемо

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-1,$$

тобто $\dfrac{\partial u}{\partial x}\neq\dfrac{\partial v}{\partial y}$ (перша з умов Коші-Рімана не виконується).

Отже, $w=\bar z=x-iy$ ніде не диференційовна, а звідси і не аналітична. ◄

Приклад 3. Користуючись умовами Коші-Рімана, знайти множини точок, в яких задані функції аналітичні.

а) $w=z^2\bar z$; б) $w=ze^z$; в) $w=e^{z^2}$;

г) $w=\sin 3z-i$; д) $w=\bar z\cdot\operatorname{Im}z$; е) $w=\operatorname{ch}z$.

► а) $w=z^2\bar z$.

$$w=z^2\bar z=(x+iy)^2(x-iy)=(x^2+y^2)(x+iy)=x(x^2+y^2)+iy(x^2+y^2)\,,$$

тобто $u(x,y)=x(x^2+y^2)$, $v(x,y)=y(x^2+y^2)$.

Ці функції диференційовні в будь-якій точці (x,y).

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+y^2,\ \frac{\partial v}{\partial y}=x^2+3y^2,\ \frac{\partial u}{\partial y}=2xy,\ \frac{\partial v}{\partial x}=2xy.$$

З'ясуємо, в яких точках виконуються умови Коші-Рімана:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Маємо

$$\begin{cases}3x^2+y^2=x^2+3y^2,\\ 2xy=-2xy,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x^2-2y^2=0,\\ xy=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2-y^2=0,\\ xy=0,\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(x-y)(x+y)=0,\\ xy=0,\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-y=0,\\ xy=0,\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=0,\\ xy=0,\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\begin{cases}x=0,\\ y=0.\end{cases}$$

Отже, функція $w=z^2\overline{z}$ диференційовна в точці $(0,0)$, але ніде не аналітична.

Додатково доведемо, використовуючи означення, що в точці $z=0$ функція $w=z^2\overline{z}$ диференційовна, тобто $\exists\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta z}$.

$$f(0)=0;\ \ \Delta f=f(0+\Delta z)-f(0)=f(\Delta z)=(\Delta z)^2\overline{\Delta z}.$$

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(\Delta z)^2\overline{\Delta z}}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\Delta z\overline{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}(\Delta x+i\,\Delta y)(\Delta x-i\,\Delta y)=$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)=0.$$

б) $w=ze^z$.

$$w=ze^z=(x+i\,y)e^{x+i\,y}=(x+i\,y)e^x(\cos y+i\sin y)=$$

$$=e^x(x\cos y-y\sin y)+i\,e^x(x\sin y+y\cos y),$$

тобто $u(x,y)=e^x(x\cos y-y\sin y)$, $\quad v(x,y)=e^x(x\sin y+y\cos y)$.

Ці функції диференційовні в будь-якій точці (x,y).

Перевіримо, чи виконуються умови Коші-Рімана.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x(x\cos y-y\sin y)+e^x\cos y=e^x(x\cos y+\cos y-y\sin y);$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=e^x(x\cos y+\cos y-y\sin y)\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\quad\forall(x,y)\in\mathbf{Z}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=e^x(-x\sin y-\sin y-y\cos y)=-e^x(x\sin y+\sin y+y\cos y);$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=e^x(x\sin y+\sin y+y\cos y)\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\quad\forall(x,y)\in\mathbf{Z}.$$

Отже, функція диференційовна всюди в комплексній площині, а звідси і аналітична.

в) $w=e^{z^2}$.

$$w=e^{z^2}=e^{(x+i\,y)^2=e^{x^2-y^2+2x\,y\,i}}=e^{x^2-y^2}\cdot e^{2x\,y\,i}=e^{x^2-y^2}(\cos 2xy+i\sin 2xy),$$

тобто $u(x,y)=e^{x^2-y^2}\cos 2xy$, $\quad v(x,y)=e^{x^2-y^2}\sin 2xy$.

Ці функції диференційовні в будь-якій точці (x,y).

Перевіримо, чи виконуються умови Коші-Рімана.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{x^2-y^2}2x\cos 2xy-e^{x^2-y^2}2y\sin 2xy=2e^{x^2-y^2}(x\cos 2xy-y\sin 2xy);$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=e^{x^2-y^2}(-2y)\sin 2xy+e^{x^2-y^2}2x\cos 2xy=2e^{x^2-y^2}(x\cos 2xy-y\sin 2xy);$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=e^{x^2-y^2}2x\sin 2xy+e^{x^2-y^2}2y\cos 2xy=2e^{x^2-y^2}(x\sin 2xy+y\cos 2xy);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=e^{x^2-y^2}(-2y)\cos 2xy-e^{x^2-y^2}2x\sin 2xy=-2e^{x^2-y^2}(x\sin 2xy+y\cos 2xy)$$

Отже, $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

Функція всюди диференційовна і внаслідок цього всюди аналітична.

г) $w=\sin 3z-i$.

$$w=\sin 3z-i=\sin 3(x+i\,y)-i=\sin 3x\cos 3i\,y+\cos 3x\sin 3i\,y-i=$$

$$=\sin 3x\cdot\operatorname{ch}3y+i\cos 3x\cdot\operatorname{sh}3y-i=\sin 3x\cdot\operatorname{ch}3y+i(-1+\cos 3x\cdot\operatorname{sh}3y),$$

тобто $u(x,y)=\sin 3x\cdot\operatorname{ch}3y$, $\quad v(x,y)=-1+\cos 3x\cdot\operatorname{sh}3y$.

Ці функції диференційовні в будь-якій точці (x,y).

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3\cos 3x\cdot\operatorname{ch}3y,\quad\frac{\partial v}{\partial y}=3\cos 3x\cdot\operatorname{ch}3y;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=3\sin 3x\cdot\operatorname{sh}3y,\quad\frac{\partial v}{\partial x}=-3\sin 3x\cdot\operatorname{sh}3y.$$

Умови Коші-Рімана виконані, бо

$$\begin{cases} 3\cos 3x\cdot \operatorname{ch} 3y = 3\cos 3x\cdot \operatorname{ch} 3y,\\ 3\sin 3x\cdot \operatorname{sh} 3y = 3\sin 3x\cdot \operatorname{ch} 3y,\end{cases}$$

а звідси функція всюди диференційовна, і внаслідок цього всюди аналітична.

д) $w=\bar z\cdot \operatorname{Im} z$.

$$w=\bar z\cdot \operatorname{Im} z=(x-i\,y)\,y=xy-i\,y^2,$$

тобто $u(x,y)=xy$, $v(x,y)=-y^2$.

Ці функції диференційовні в будь-якій точці (x,y).

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-2y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=x,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=0.$$

Згідно з умовами Коші-Рімана повинно бути $y=-2y$, $x=0$. Це можливо тільки при $x=0$, $y=0$, тобто функція диференційовна тільки в одній точці $(0, 0)$ і ніде в комплексній площині не аналітична.

е) $w=\operatorname{ch} z$.

$$w=\operatorname{ch} z=\frac{e^z+e^{-z}}{2}=\frac{e^{x+iy}+e^{-z-iy}}{2}=\frac{e^x(\cos y+i\sin y)+e^{-x}(\cos y-i\sin y)}{2}=$$

$$=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cos y+i\frac{e^x-e^{-x}}{2}\sin y=\operatorname{ch} x\cdot\cos y+i\operatorname{sh} x\cdot\sin y,$$

тобто $u(x,y)=\operatorname{ch} x\cdot\cos y$, $v(x,y)=\operatorname{sh} x\cdot\sin y$.

Ці функції диференційовні в будь-якій точці (x,y).

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\operatorname{sh} x\cdot\cos y,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\operatorname{sh} x\cdot\cos y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\operatorname{ch} x\cdot\sin y,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\operatorname{ch} x\cdot\sin y.$$

Отже, $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

Функція всюди аналітична, тому що умови Коші-Рімана виконуються в усій комплексній площині. ◄

Приклад 4. Довести, що $(z^n)'=n\,z^{n-1}$, $\forall n\in\mathbf{N}$.

► Доведення виконаємо методом математичної індукції.

$$(z^1)'=(x+i\,y)'=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial x}{\partial x}+i\frac{\partial y}{\partial x}=1=1\cdot z^{1-1}=1.$$

Нехай $(z^n)'=n\,z^{n-1}$. Треба довести, що $(z^{n+1})'=(n+1)\,z^n$.

$$(z^{n+1})'=(z^n z)'=(z^n)'z+z^n z'=n\,z^{n-1}z+z^n=n\,z^n+z^n=(n+1)\,z^n.$$

Отже, $\forall n\in\mathbf{N}$ маємо $(z^n)'=n\,z^{n-1}$. ◄

Приклад 5. Довести, що якщо аналітична функція $w=f(z)$ в деякій області дійсна, то вона стала.

► Нехай $w=f(z)=u+i\,v$, де $u=u(x,y)$, $v=0$. Оскільки ця функція аналітична, то з умов Коші-Рімана $\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$ і $\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$, а звідси, інтегруючи перше співвідношення по x матимемо $u=\varphi(y)$. Тоді $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(y)$. Але ж, з другого співвідношення $\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$. Отже, $\varphi'(y)=0$, тобто $\varphi(y)=C$, $C=\text{const}$, а це і означає, що $u=C$, а значить і $w=C$. ◄

Приклад 6. Показати, що модуль і аргумент функції $f(z)=R(x,y)\cdot e^{i\Phi(x,y)}$ зв'язані співвідношеннями

$$\frac{\partial R}{\partial x}=R\frac{\partial\Phi}{\partial y},\qquad \frac{\partial R}{\partial y}=-R\frac{\partial\Phi}{\partial x}.$$

► $f(z)=R(x,y)\cdot e^{i\Phi(x,y)}=R(x,y)(\cos\Phi(x,y)+i\sin\Phi(x,y))=$
$=R(x,y)\cos\Phi(x,y)+i\,R(x,y)\sin\Phi(x,y)$,

тобто $u(x,y)=R(x,y)\cos\Phi(x,y)$, $v(x,y)=R(x,y)\sin\Phi(x,y)$.

Знайдемо похідні

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial R}{\partial x}\cos\Phi(x,y)-R\sin\Phi(x,y)\frac{\partial\Phi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial R}{\partial y}\sin\Phi(x,y)+R\cos\Phi(x,y)\frac{\partial\Phi}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial R}{\partial y}\cos\Phi(x,y)-R\sin\Phi(x,y)\frac{\partial\Phi}{\partial y},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial R}{\partial x}\sin\Phi(x,y)+R\cos\Phi(x,y)\frac{\partial\Phi}{\partial x}.$$

З умов Коші-Рімана $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$ матимемо рівності

$$\begin{cases}\dfrac{\partial R}{\partial x}\cos\Phi(x,y)-R\sin\Phi(x,y)\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}=\dfrac{\partial R}{\partial y}\sin\Phi(x,y)+R\cos\Phi(x,y)\dfrac{\partial\Phi}{\partial y},\\[2mm] \dfrac{\partial R}{\partial y}\cos\Phi(x,y)-R\sin\Phi(x,y)\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}=-\dfrac{\partial R}{\partial x}\sin\Phi(x,y)-R\cos\Phi(x,y)\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}.\end{cases}$$

З цієї системи визначимо $\dfrac{\partial R}{\partial x}, \dfrac{\partial R}{\partial y}$. З цією метою першу рівність помножимо на $\cos\Phi$, а другу – на $\sin\Phi$ і віднімемо з лівої частини першої рівності праву частину другої і з правої частини першої рівності ліву частину другої:

$$\frac{\partial R}{\partial x}\cos^2\Phi - R\sin\Phi\cos\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial x}\sin^2\Phi + R\sin\Phi\cos\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial R}{\partial y}\sin\Phi\cos\Phi + R\cos^2\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial y}\sin\Phi\cos\Phi + R\sin^2\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial y}.$$

Звідси

$$\frac{\partial R}{\partial x} = R\frac{\partial\Phi}{\partial y}.$$

Далі першу рівність помножимо на $\sin\Phi$, а другу – на $\cos\Phi$ і ліву частину першої рівності складемо з правою частиною другої і навпаки: праву частину першої рівності складемо з лівою частиною другої. Одержимо

$$\frac{\partial R}{\partial y}\sin^2\Phi + R\sin\Phi\cos\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial y}\cos^2\Phi - R\sin\Phi\cos\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial y} =$$

$$= \frac{\partial R}{\partial x}\sin\Phi\cos\Phi - R\sin^2\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial x}\sin\Phi\cos\Phi - R\cos^2\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial x}.$$

Звідси

$$\frac{\partial R}{\partial y} = -R\frac{\partial\Phi}{\partial x}.$$

Отже, отримали співвідношення, які треба було довести. ◄

Приклад 7. Відновити аналітичну в околі точки z_0 функцію $f(z)$ за відомою її дійсною частиною $u(x,y)$ та значенням $f(z_0)$, якщо $u(x,y) = x^2 - y^2 + 2x$, $z_0 = i$, $f(i) = 2i - 1$.

► Перевіримо, що задана функція є дійсною частиною аналітичної функції $f(z)$, тобто, що функція $u(x,y)$ – гармонічна. Знаходимо похідні

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x+2, & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y, & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 \end{array}\right. \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0,$$

тобто функція $u(x,y)$ задовольняє рівняння Лапласа, отже, є гармонічною.

Наведемо три способи знаходження функції $f(z)$.

Спосіб 1. Скористаємось формулою

$$f(z) = 2u\left(\frac{z+\bar{z}_0}{2}, \frac{z-\bar{z}_0}{2i}\right) - f(z_0). \qquad (1)$$

У нашому випадку

$u(x,y) = x^2 - y^2 + 2x$, $z_0 = i$, $\bar{z}_0 = -i$, $f(z_0) = f(i) = 2i - 1$.

Тоді

$$f(z) = 2\left(\left(\frac{z-i}{2}\right)^2 - \left(\frac{z+i}{2i}\right)^2 + 2\frac{z+i}{2i}\right) - 2i + 1 =$$

$$= 2\left(\frac{1}{4}(z^2 - 2zi - 1) + \frac{1}{4}(z^2 + 2zi - 1) + z + i\right) - 2i + 1 =$$

$$= \frac{1}{2}(z^2 - 2zi - 1 + z^2 + 2zi - 1) + 2z + 2i - 2i + 1 = z^2 - 1 + 2z + 1 = z^2 + 2z.$$

Отже, $f(z) = z^2 + 2z$.

Спосіб 2. Скористаємось безпосередньо умовами Коші-Рімана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

За умовою $u(x,y) = x^2 - y^2 + 2x$.

Знайдемо $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y$.

Згідно з першою умовою Коші-Рімана $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2 = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, тоді

$$v = \int (2x+2)\,dy = 2xy + 2y + \varphi(x).$$

Згідно з другою умовою Коші-Рімана $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}$, тоді

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + \varphi'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y},$$

але $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y$.

Маємо

$$\begin{gathered} 2y + \varphi'(x) = 2y, \\ \varphi'(x) = 0, \\ \varphi(x) = C. \end{gathered}$$

Отже, $v(x,y)=2xy+2y+C$. Звідки

$$f(z)=x^2-y^2+2x+i(2xy+2y+C).$$

Знайдемо константу C, враховуючи початкову умову $f(i)=2i-1$, тобто поклавши $x=0$, $y=1$, бо $i=0+1\cdot i$.

$$f(i)=-1+(2+C)i=2i-1.$$

Звідси $C=0$.

Враховуючи, що $z=x+i\,y$, після перетворень отримуємо

$$f(z)=x^2+2xy\,i-y^2+2(x+i\,y)=z^2+2z.$$

Отже, $f(z)=z^2+2z$.

Спосіб 3. Скористаємось формулою

$$v(x,y)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy. \qquad (2)$$

У нашому випадку $u(x,y)=x^2-y^2+2x$.

Отже, $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x+2$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-2y$.

За точку (x_0,y_0) виберемо точку $(0,0)$. За шлях інтегрування ламану OAB (рис.3.11).

Маємо

$$v(x,y)=\int\limits_{(0,0)}^{(x,y)}2y\,dx+(2x+2)\,dy=\int\limits_0^x 0\cdot dx+\int\limits_0^y(2x+2)\,dy=2(x+1)\,y+C.$$

Тоді $f(z)=x^2-y^2+2x+i(2(x+1)\,y+C)$.

Знайдемо C з умови, що $f(i)=2i-1$, тобто $f(0+i\cdot 1)=2i-1$:

$$-1+i(2+C)=2i-1 \;\Rightarrow\; C=0.$$

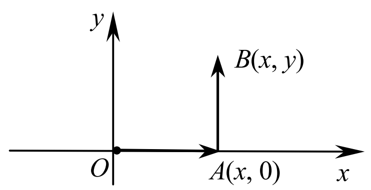


Рис.3.11

Отже, $f(z)=x^2-y^2+2x+2(x+1)\,y\,i$.

Враховуючи, що $z=x+i\,y$, після перетворень отримуємо

$$f(z)=x^2+2xy\,i-y^2+2(x+i\,y)=z^2+2z.$$

Отже, $f(z)=z^2+2z$. ◀

Приклад 8. Знайти аналітичну функцію $w=f(z)$ за відомою її уявною частиною $v(x,y)=3x+2xy$ за умови, що $f(-i)=2$.

▶ Використаємо формулу

$$f(z)=2i\,v\left(\frac{z+\bar z_0}{2},\frac{z-\bar z_0}{2i}\right)+\overline{f(z_0)}.$$

У нашому прикладі $v(x,y)=3x+2xy$, $z_0=-i$, $f(z_0)=f(-i)=2$, $\bar z_0=i$, $\overline{f(z_0)}=\overline{f(i)}=2$.

Тоді

$$f(z)=2i\left(3\frac{z+i}{2}+2\frac{z+i}{2}\cdot\frac{z-i}{2i}\right)+2=3i\,z+z^2. \;◀$$

Приклад 9. Відновити аналітичну в околі точки z_0 функцію $f(z)$ за відомою її дійсною $u(x,y)$ або уявною $v(x,y)$ частиною і значенням $f(z_0)$.

а) $v=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ $(x>0)$, $f(1)=0$;

б) $u=2\sin x\cdot \operatorname{ch} y-x$, $f(0)=0$;

в) $v=-2\sin 2x\cdot \operatorname{sh} 2y+y$, $f(0)=2$.

▶ а) $v=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ $(x>0)$, $f(1)=0$.

Спосіб 1. Скористаємось формулою

$$f(z)=2i\,v\left(\frac{z+\bar z_0}{2},\frac{z-\bar z_0}{2i}\right)+\overline{f(z_0)}.$$

$$f(z)=2i\operatorname{arctg}\frac{2(z-1)}{2i(z+1)}+0=2i\operatorname{arctg}\left(-\frac{i(z-1)}{z+1}\right)=$$

$$=\left|\operatorname{arctg} z=\frac{-i}{2}\ln\frac{1+iz}{1-iz}\right|=2i\frac{-i}{2}\ln\frac{1+\dfrac{i(z-1)}{i(z+1)}}{1-\dfrac{i(z-1)}{i(z+1)}}=\ln\frac{1+\dfrac{z-1}{z+1}}{1-\dfrac{z-1}{z+1}}=$$

$$=\ln\frac{z+1+z-1}{z+1-z+1}=\ln\frac{2z}{2}=\ln z\,.$$

Спосіб 2. Скористаємось безпосередньо умовами Коші-Рімана

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

враховуючи, що $v=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, $x>0$.

Згідно з першою умовою

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$u=\int\frac{x\,dx}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\varphi(y)\,.$$

За другою умовою

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2y}{x^2+y^2}+\varphi'(y)=\frac{y}{x^2+y^2}+\varphi'(y)=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

але $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{y}{\left(1+\dfrac{y^2}{x^2}\right)x^2}=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

Тоді

$$\frac{y}{x^2+y^2}+\varphi'(y)=\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\varphi'(y)=0,$$

$$\varphi(y)=C\,.$$

Отже,

$$f(z)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+i\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+C\,.$$

Знайдемо C з початкової умови: $f(1)=0$.

$$f(1)=\frac{1}{2}\ln 1+i\cdot 0+C=0\quad\Rightarrow\quad C=0\,.$$

Нарешті маємо

$$f(z)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+i\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}+i\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln|z|+i\arg z=\ln z\,.$$

б) $u=2\sin x\cdot\operatorname{ch}y-x$, $f(0)=0$.

Спосіб 1. Скористаємось формулою

$$f(z)=2u\left(\frac{z+\bar z_0}{2},\,\frac{z-\bar z_0}{2i}\right)-f(z_0)\,.$$

$$f(z)=2\left(2\sin\frac{z}{2}\operatorname{ch}\frac{z}{2i}-\frac{z}{2}\right)+0=2\left(2\sin\frac{z}{2}\operatorname{ch}\left(-\frac{iz}{2}\right)-\frac{z}{2}\right)=$$

$$=2\left(2\sin\frac{z}{2}\operatorname{ch}\frac{iz}{2}-\frac{z}{2}\right)=4\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}-z=2\sin z-z\,.$$

Спосіб 2. Скористаємось безпосередньо умовами Коші-Рімана

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

враховуючи, що $u=2\sin x\cdot\operatorname{ch}y-x$.

Згідно з першою умовою

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2\cos x\cdot\operatorname{ch}y-1=\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$v=\int(2\cos x\cdot\operatorname{ch}y-1)\,dy=2\cos x\operatorname{sh}y-y+\varphi(x)\,.$$

За другою умовою

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-2\sin x\operatorname{sh}y+\varphi'(x)=-\frac{\partial u}{\partial y},$$

але $\dfrac{\partial u}{\partial y}=2\sin x\operatorname{sh}y$.

Тоді

$$-2\sin x\operatorname{sh}y+\varphi'(x)=-2\sin x\operatorname{sh}y,$$

$$\varphi'(x)=0,$$
$$\varphi(x)=C\,.$$

Отже,

$$f(z)=2\sin x\operatorname{ch}y-x+i(2\cos x\operatorname{sh}y-y+C)\,.$$

Знайдемо C з початкової умови: $f(0)=0$.

$f(0)=0-0+i(0+C)=0\quad\Rightarrow\quad C=0$.

Нарешті маємо

$$f(z)=2\sin x\operatorname{ch}y-x+i(2\cos x\operatorname{sh}y-y)=$$

$$=2\left((\sin x+i\cos x)\frac{e^{y}}{2}+(\sin x-i\cos x)\frac{e^{-y}}{2}\right)-z=$$

$$= 2i\left((\cos x - i\sin x)\frac{e^{y}}{2} - (\cos x + i\sin x)\frac{e^{-y}}{2}\right) - z = 2i\left(\frac{e^{-ix}e^{y}}{2} - \frac{e^{ix}e^{-y}}{2}\right) - z =$$

$$= -2i\,\frac{e^{ix-y} - e^{-ix+y}}{2} - z = -2i\,\frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i}\,i - z = 2\,\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} - z =$$

$$= 2\sin z - z\,.$$

в) $v = -2\sin 2x \cdot \operatorname{sh} 2y + y$, $f(0) = 2$.

Спосіб 1. Скористаємось формулою

$$f(z) = 2i\,v\left(\frac{z + \bar{z}_0}{2}, \frac{z - \bar{z}_0}{2i}\right) + \overline{f(z_0)}\,.$$

$$f(z) = 2i\left(-2\sin\frac{2z}{2}\operatorname{sh}\frac{2z}{2i} + \frac{z}{2i}\right) + 2 = -4i\sin z\operatorname{sh}(-iz) + z + 2 =$$

$$= 2(1 - 2\sin^2 z) + z = 2\cos 2z + z\,.$$

Спосіб 2. Скористаємось безпосередньо умовами Коші-Рімана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

враховуючи, що $v = -2\sin 2x \cdot \operatorname{sh} 2y + y$.

Згідно з першою умовою

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -2 \cdot 2\sin 2x \operatorname{ch} 2y + 1 = \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$u = \int(-4\sin 2x\operatorname{ch} 2y + 1)\,dx = 2\cos 2x\operatorname{ch} 2y + x + \varphi(y)\,.$$

За другою умовою

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2 \cdot 2\cos 2x\operatorname{sh} 2y + \varphi'(y) = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

але $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -4\cos 2x\operatorname{sh} 2y$.

Тоді

$$4\cos 2x\operatorname{sh} 2y + \varphi'(y) = 4\cos 2x\operatorname{sh} 2y,$$

$$\varphi'(y) = 0,$$

$$\varphi(y) = C\,.$$

Отже,

$$f(z) = 2\cos 2x \cdot \operatorname{ch} 2y + x + C + i(-2\sin 2x \cdot \operatorname{sh} 2y + y)\,.$$

Знайдемо C з початкової умови: $f(0) = 2$.

$f(0) = 2 + C = 2 \quad \Rightarrow \quad C = 0$.

Нарешті маємо

$$f(z) = 2\cos 2x \cdot \operatorname{ch} 2y + x + i(-2\sin 2x \cdot \operatorname{sh} 2y + y) =$$

$$= 2(\cos 2x\operatorname{ch} 2y - i\sin 2x\operatorname{sh} 2y) + z = 2(\cos 2x\cos 2yi - \sin 2x\sin 2yi) + z =$$

$$= 2\cos(2(x + iy)) + z = 2\cos 2z + z\,.$$ ◄

Приклад 10. Показати, що задані функції є гармонічними.

а) $u(x, y) = 2e^{x}\cos y$; б) $u(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$;

в) $u(x, y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

► а) $u(x, y) = 2e^{x}\cos y$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2e^{x}\cos y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2e^{x}\cos y;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2e^{x}\sin y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2e^{x}\cos y.$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2e^{x}\cos y - 2e^{x}\cos y = 0\,.$$

Згідно з означенням, $u(x, y)$ – гармонічна функція.

б) $u(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{-2x(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2)2x(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^4} =$$

$$= \frac{-2x(x^2 + y^2 + 2y^2 - 2x^2)}{(x^2 + y^2)^3} = 2x\frac{x^2 - 3y^2}{(x^2 + y^2)^3};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2\frac{x(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2)2y\,xy}{(x^2 + y^2)^4} =$$

$$= -2x\frac{x^2+y^2-4y^2}{(x^2+y^2)^3} = -2x\frac{x^2-3y^2}{(x^2+y^2)^3}.$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Згідно з означенням, $u(x, y)$ – гармонічна функція.

в) $u(x, y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Згідно з означенням, $u(x, y)$ – гармонічна функція. ◄

Приклад 11. З'ясувати, чи можуть бути задані функції дійсною або уявною частиною аналітичної функції

$$f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y).$$

а) $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2xy$; б) $u(x, y) = x^2$;

в) $v(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$; г) $v(x, y) = \frac{x^2+1}{2}y^2$.

► Оскільки для аналітичної функції її дійсна й уявна частини є гармонічними функціями, то задача зводиться до з'ясування, чи є задані функції гармонічними, тобто чи задовольняють вони рівняння Лапласа.

а) $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2xy$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y + 2x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2.$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0.$$

Функція $u(x, y)$ може бути дійсною частиною аналітичної функції.

б) $u(x, y) = x^2$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 0 = 2 \neq 0.$$

Функція $u(x, y)$ не задовольняє рівняння Лапласа і не може бути дійсною частиною аналітичної функції.

в) $v(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 2\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = 2\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 2\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = 2\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = -2\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Функція $v(x, y)$ може бути уявною частиною аналітичної функції.

г) $v(x, y) = \frac{x^2+1}{2}y^2$.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = xy^2, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = y^2; \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = x^2 y + y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2 + 1.$$

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = y^2 + x^2 + 1 \neq 0.$$

Функція $v(x, y)$ не гармонічна і не може бути уявною частиною аналітичної функції. ◄

Приклад 12. За яких умов тричлен $u = ax^2 + 2bxy + cy^2$ є гармонічною функцією?

► Знайдемо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2ax + 2by, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2a; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2bx + 2cy, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2c.$$

Згідно з означенням, функція u гармонічна, якщо вона задовольняє рівняння Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, отже

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2a+2c=2(a+c)=0 \;\Rightarrow\; a=-c\,.$$

При $a=-c$ заданий тричлен є гармонічною функцією. ◄

Приклад 13. Задана пара гармонічних функцій $u(x,y)$ і $v(x,y)$. Довести, що ці функції спряжені.

$$u(x,y)=e^x\cos y+1,\quad v(x,y)=1+e^x\sin y\,.$$

► Перевіримо виконання умов Коші-Рімана.

$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y$, $\frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y \;\Rightarrow\; \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ – перша умова виконується.

$\frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y$, $\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\sin y \;\Rightarrow\; \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ – друга умова виконується.

Отже, задані гармонічні функції спряжені. ◄

Приклад 14. Довести, що добуток спряжених гармонічних функцій $u(x,y)$ і $v(x,y)$ в області D буде гармонічною функцією в цій області.

► Оскільки функції гармонічні, то вони задовольняють рівняння Лапласа, тобто

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0\,.$$

Нехай $w=u(x,y)\cdot v(x,y)$. Треба довести, що $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$.

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot v+\frac{\partial v}{\partial x}\cdot u,\quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot v+2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\cdot u\,;$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}\cdot v+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot u,\quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot v+2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\cdot u\,.$$

Тоді

$$\Delta w=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\cdot v+2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)+$$
$$+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\cdot u=\Delta u\cdot v+2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\Delta v\cdot u\,.$$

Оскільки $u(x,y)$ і $v(x,y)$ спряжені гармонічні функції, вони задовольняють рівняння Лапласа, тобто $\Delta u=0$, $\Delta v=0$, і задовольняють умови Коші-Рімана $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$, тобто

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}=0\,.$$

Отже,

$$\Delta w=\Delta u\cdot v+2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\Delta v\cdot u=0\,.$$

Таким чином, функція $w=u(x,y)\cdot v(x,y)$ задовольняє рівняння Лапласа, тобто є гармонічною. ◄

Приклад 15. Знайти коефіцієнт розтягу і кут повороту при відображенні $w=z^2$ в точці $z_0=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$.

► Знайдемо похідну

$$w'=(z^2)'=2z\,.$$

Тоді

$$w'\big|_{z_0=\sqrt{2}+i\sqrt{2}}=2(\sqrt{2}+i\sqrt{2})=2\sqrt{2}+i\,2\sqrt{2}\,.$$

Перейдемо до тригонометричної форми запису комплексного числа і одержимо

$$w'\big|_{z_0=\sqrt{2}+i\sqrt{2}}=2\sqrt{2}+i\,2\sqrt{2}=4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=4\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Звідси

$$\left|w'\right|\big|_{z_0=\sqrt{2}+i\sqrt{2}}=4\,,\qquad \arg w'\big|_{z_0=\sqrt{2}+i\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}\,.$$

тобто коефіцієнт розтягу $r=4$, а кут повороту $\varphi=\frac{\pi}{4}$. ◄

IV. Задачі для практичних занять

3.72. Знайти всі точки, в яких диференційовні задані функції.

а) $w=\operatorname{Re}z$; б) $w=|z|^2$; в) $w=z\operatorname{Re}z$;

г) $w=\operatorname{Im}z+i\operatorname{Re}z$.

3.73. Показати, що задані функції не є аналітичними ні в якій області.

а) $w = \operatorname{Re} z$; б) $w = \bar{z}$; в) $w = |z|$; г) $w = \dfrac{\operatorname{Re} z}{z}$.

3.74. Використовуючи умови Коші-Рімана, з'ясувати, які із заданих функцій є аналітичними хоча б в одній точці, а які – ні.

а) $w = |z|\bar{z}$; б) $w = (1-2i)z^3$; в) $w = |z|\operatorname{Re}\bar{z}$;

г) $w = ze^z$; д) $w = \bar{z}\operatorname{Re} z$; е) $w = |z|\operatorname{Im} z$;

є) $w = z\cos z$.

У задачах 3.75 – 3.80 відновити аналітичну в околі точки z_0 функцію $f(z)$ за відомою її дійсною $u(x,y)$ або уявною $v(x,y)$ частиною і значенням $f(z_0)$.

3.75. $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 2$, $f(0) = 2 + i$.

3.76. $u(x,y) = x^2 - y^2 + xy$, $f(0) = 0$.

3.77. $v(x,y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$, $f(0) = 0$.

3.78. $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $f(\pi) = \dfrac{1}{\pi}$.

3.79. $v(x,y) = 2(\operatorname{ch} x\sin y - xy)$, $f(0) = 0$.

3.80. $v(x,y) = 2(2\operatorname{sh} x\sin y + xy)$, $f(0) = 3$.

У задачах 3.81 – 3.86 перевірити гармонічність заданих функцій і знайти, якщо це можливо, аналітичну функцію за заданою її дійсною $u(x,y)$ або уявною $v(x,y)$ частиною.

3.81. $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$. **3.82.** $v(x,y) = 2e^x\sin y$.

3.83. $u(x,y) = 2xy + 3$. **3.84.** $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2} - 2y$.

3.85. $u(x,y) = x^2 - y^2 + xy$. **3.86.** $v(x,y) = xy$.

3.87. Показати, що задані функції є гармонічними.

а) $u = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$; б) $u = \ln(x^2 + y^2)$.

3.88. Задано пари гармонічних функцій $u(x,y)$ і $v(x,y)$. Знайти серед них спряжені пари гармонічних функцій.

а) $u(x,y) = 3(x^2 - y^2)$, $v(x,y) = 3x^2y - y^3$;

б) $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $v(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$;

в) $u(x,y) = x$, $v(x,y) = -y$.

3.89. Знайти коефіцієнт розтягу r і кут повороту φ при заданих відображеннях $w = f(z)$ в заданих точках.

а) $w = e^z$ у точках $z_1 = \ln 2 + i\dfrac{\pi}{4}$ і $z_2 = -1 - i\dfrac{\pi}{2}$;

б) $w = \sin z$ у точках $z_1 = 0$ і $z_2 = 1 + i$;

в) $w = z^3$ у точках $z_1 = 2 - i$ і $z_2 = 1 + i\dfrac{\pi}{2}$.

§4. Інтегрування функцій комплексної змінної

I. Короткі теоретичні відомості

Основні поняття і формули для обчислення інтегралів. Нехай задана деяка орієнтовна крива C, в кожній точці якої задана функція комплексної змінної $w = f(z)$. Розіб'ємо криву C на n довільних частин точками $z_0, z_1, \ldots, z_n$. У кожній частині візьмемо довільну точку ξ_k, знайдемо $f(\xi_k)$ та сформуємо інтегральну суму

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k,$$

де $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$.

Позначимо $\lambda = \max|\Delta z_k|$.

Означення. Якщо існує границя $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k$, яка не залежить від способу розбиття кривої C та вибору точок ξ_k, то ця границя називається *інтегралом від функції* $w = f(z)$ *вздовж кривої* C та позначається

$$\int_C f(z)\,dz.$$

Отже, за означенням

$$\int_C f(z)\,dz = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta z_k\ . \qquad (3.30)$$

Нехай

$$z = x + i\,y, \quad f(z) = u + i\,v\,,$$

де $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ – дійсні функції змінних x та y.

Обчислення інтеграла від функції комплексної змінної z зводиться до обчислення криволінійних інтегралів другого роду:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C (u + i\,v)(dx + i\,dy) = \int_C u\,dx - v\,dy + i\int_C u\,dy + v\,dx\ . \quad (3.31)$$

На інтеграли від функцій комплексної змінної розповсюджуються всі властивості криволінійних інтегралів другого роду.

Інтеграл $\int_C f(z)\,dz$, взагалі кажучи, залежить від шляху інтегрування C.

Якщо $f(z)$ – аналітична функція в однозв'язній області D, то інтеграл не залежить від форми шляху інтегрування. В цьому випадку

$$\int_L f(z)\,dz = 0\,, \qquad (3.32)$$

де L – будь-який замкнений кусково-гладкий контур в області D (див. далі основну теорему Коші).

Якщо крива C задана *параметричними рівняннями*

$$x = x(t), \ \ y = y(t)$$

або задана *в комплексній формі*

$$z(t) = x(t) + i\,y(t)\,,$$

і початкова та кінцева точки дуги C відповідають значенням параметра $t = \alpha$, $t = \beta$, то

$$\int_C f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)]\,z'(t)\,dt\ . \qquad (3.33)$$

Тут $z(t) = x(t) + i\,y(t)$.

Якщо функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D, яка містить точки z_0 та z_1, то має місце *формула Ньютона-Лейбніца*

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz = \Phi(z)\Big|_{z_0}^{z_1} = \Phi(z_1) - \Phi(z_0)\,, \qquad (3.34)$$

де $\Phi(z)$ – будь-яка первісна для функції $f(z)$, тобто $\Phi'(z) = f(z)$ в області D.

Якщо функції $f(z)$ і $\varphi(z)$ аналітичні в однозв'язній області D, а z_0 та z_1 – довільні точки цієї області, то має місце *формула інтегрування частинами*

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\cdot\varphi'(z)\,dz = [f(z)\cdot\varphi(z)]\Big|_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1}\varphi(z)\cdot f'(z)\,dz\ . \qquad (3.35)$$

Заміна змінної в інтегралах від функцій комплексної змінної виконується аналогічно випадку функції дійсної змінної.

Нехай аналітична функція $z = \varphi(w)$ взаємно однозначно відображає контур C_1 в площині W на контур C в площині Z. Тоді має місце *формула заміни змінної*

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f[\varphi(w)]\,\varphi'(w)\,dw\ . \qquad (3.36)$$

Якщо шляхом інтегрування є *півпряма (промінь)*, що виходить з точки z_0 або *коло* з центром у точці $z = z_0$, то корисно робити *заміну змінної вигляду*

$$z - z_0 = r\,e^{i\varphi}\ . \qquad (3.37)$$

У першому випадку $\varphi = \mathrm{const}$, а r – дійсна змінна інтегрування, у другому випадку $r = \mathrm{const}$, а φ – дійсна змінна інтегрування

Якщо $z_0 = 0$, то отримуємо *заміну змінної вигляду*

$$z = r\,e^{i\varphi}\ . \qquad (3.38)$$

Інтегральна формула Коші

Якщо функція $f(z)$ є аналітичною в області D, обмеженій кусково-гладким замкненим контуром C, і на самому контурі, то справедлива *інтегральна формула Коші*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz\,, \qquad (3.39)$$

де $z_0 \in D$, контур C обходиться так, що область D залишається весь час зліва.

Інтегральна формула Коші дозволяє обчислювати деякі інтеграли, при цьому формула (3.39) використовується у вигляді

$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = 2\pi i\,f(z_0)\ . \qquad (3.40)$$

Якщо функція $f(z)$ *аналітична* в області D і на її межі C, то для $\forall\, n \in \mathbf{N}$ має місце *формула для похідної* n*-го порядку*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz , \qquad (3.41)$$

де $z_0 \in D$, $z \in C$.

Формула (3.41) – *формула для похідної n -го порядку аналітичної функції*. Ця формула дозволяє обчислювати деякі інтеграли, при цьому вона використовується у вигляді

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = 2\pi i \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} . \qquad (3.42)$$

Теорема Коші

Теорема 1 (*основна теорема Коші*). Якщо функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D, обмеженій контуром C і L – замкнений контур в D, то

$$\int_L f(z)\,dz = 0 .$$

Якщо функція $f(z)$ неперервна в замкненій області $\overline{D} = D + C$, то

$$\int_C f(z)\,dz = 0 . \qquad (3.43)$$

Теорема 2 (*узагальнена теорема Коші*). Якщо функція $f(z)$ аналітична в многозв'язній області D, обмеженій контуром C і внутрішніми по відношенню до нього контурами $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$, і неперервна в замкненій області $\overline{D} = D + C^+ + \gamma_1^- + \gamma_2^- + \ldots + \gamma_k^-$, де знаки верхніх індексів означають напрямки обходів, то

$$\int_{C^+ + \sum_{i=1}^{k} \gamma_i^-} f(z)\,dz = 0 . \qquad (3.44)$$

Теорема 2 є теоремою Коші для многозв'язної області. На рис.3.12 наведена многозв'язна область з обмежуючим її контуром. Вказано напрямки обходу межі.

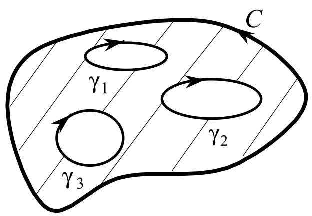


Рис.3.12

З формули (3.44) маємо

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \ldots + \int_{\gamma_k} f(z)\,dz . \qquad (3.45)$$

Формула (3.45) використовується для обчислення деяких інтегралів.

II. Контрольні питання та завдання

1. Дайте означення інтеграла від функції комплексної змінної вздовж кривої C.

2. Наведіть формулу, що зводить обчислення інтеграла від функції комплексної змінної до обчислення криволінійних інтегралів другого роду від функцій дійсних змінних.

3. Наведіть формулу для обчислення інтеграла від функції комплексної змінної вздовж кривої C для випадку, коли крива C задана параметричними рівняннями.

4. Запишіть формулу Ньютона-Лейбніца для обчислення інтеграла від функції комплексної змінної. За яких умов вона має місце?

5. Запишіть формулу інтегрування частинами. За яких умов вона має місце?

6. Наведіть формулу заміни змінної. Яка заміна використовується для випадку, коли шляхом інтегрування є коло з центром у точці $z = z_0$; у точці $z = 0$?

7. Запишіть інтегральну формулу Коші. Як вона використовується для обчислення інтегралів?

8. Запишіть формулу для похідної n-го порядку аналітичної функції. За яких умов вона має місце? Як вона пов'язана з інтегральною формулою Коші?

9. Сформулюйте основну теорему Коші.

10. Сформулюйте узагальнену теорему Коші.

11. Як використовується узагальнена теорема Коші для обчислення інтегралів?

III. Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int\limits_C (1+i-2\bar{z})\,dz$, де C – лінія, що з'єднує точки $z_1=0$ і $z_2=1+i$ (рис.3.13), якщо:

а) C – пряма;

б) C – парабола $y=x^2$;

в) C – ламана $z_1z_3z_2$, де $z_3=1$.

► Перепишемо підінтегральну функцію у вигляді

$$f(z)=1+i-2\bar{z}=(1-2x)+i(1+2y).$$

Тут $u=1-2x$, $v=1+2y$.
Застосувавши формулу

$$\int\limits_C f(z)\,dz=\int\limits_C u\,dx-v\,dy+i\int\limits_C v\,dx+u\,dy,$$

маємо

$$\int\limits_C (1+i-2\bar{z})\,dz=\int\limits_C (1-2x)\,dx-(1+2y)\,dy+i\int\limits_C (1+2y)\,dx+(1-2x)\,dy.$$

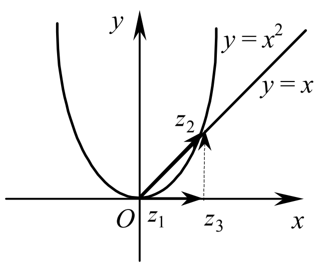


Рис.3.13

а) C – пряма.

Рівнянням прямої, що проходить через точки $z_1=0$ і $z_2=1+i$, буде $y=x$, а звідси $dy=dx$, $0\le x\le 1$, тому

$$\int\limits_C (1+i-2\bar{z})\,dz=\int\limits_C (1-2x)\,dx-(1+2y)\,dy+i\int\limits_C (1+2y)\,dx+(1-2x)\,dy=$$

$$=\int\limits_0^1((1-2x)-(1+2x))\,dx+i\int\limits_0^1((1+2x)+(1-2x))\,dx=-\int\limits_0^1 4x\,dx+i\int\limits_0^1 2\,dx=$$

$$=-2+2i=2(i-1).$$

б) C – парабола $y=x^2$.

Для параболи $y=x^2$ маємо $dy=2x\,dx$, $0\le x\le 1$. Звідси

$$\int\limits_C (1+i-2\bar{z})\,dz=\int\limits_C (1-2x)\,dx-(1+2y)\,dy+i\int\limits_C (1+2y)\,dx+(1-2x)\,dy=$$

$$=\int\limits_0^1 (1-2x-(1+2x^2)2x)\,dx+\ i\int\limits_0^1 (1+2x^2+(1-2x)2x)\,dx=-2+\frac{4}{3}i.$$

в) C – ламана $z_1z_3z_2$, де $z_3=1$.

На відрізку z_1z_3: $y=0$, $dy=0$, $0\le x\le 1$; на відрізку z_3z_2: $x=1$, $dx=0$, $0\le y\le 1$. Використовуючи властивість лінійності криволінійного інтеграла, матимемо

$$\int\limits_C (1+i-2\bar{z})\,dz=\int\limits_{z_1z_3} (1+i-2\bar{z})\,dz+\int\limits_{z_3z_2} (1+i-2\bar{z})\,dz=$$

$$=\int\limits_{z_1z_3} (1-2x)\,dx-(1+2y)\,dy+i\int\limits_{z_1z_3} (1+2y)\,dx+(1-2x)\,dy+$$

$$+\int\limits_{z_3z_2} (1-2x)\,dx-(1+2y)\,dy+i\int\limits_{z_3z_2} (1+2y)\,dx+(1-2x)\,dy=$$

$$=\int\limits_0^1 (1-2x)\,dx+i\int\limits_0^1 dx-\int\limits_0^1 (1+2y)\,dy+i\int\limits_0^1 (1-2\cdot 1)\,dy=-2. ◄$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $I=\int\limits_C z\,\mathrm{Im}\,z^2 dz$,

де $C:\ |z|=1$ $(-\pi\le \arg z\le 0)$ (рис.3.14).

► Застосуємо формулу

$$\int\limits_C f(z)\,dz=\int\limits_C u\,dx-v\,dy+i\int\limits_C v\,dx+u\,dy,$$

де $f(z)=u+iv$, $z=x+iy$.

Тоді $z^2=x^2-y^2+2xyi$, $\mathrm{Im}\,z^2=2xy$.

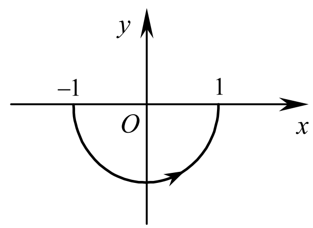


Рис.3.14

У нашому випадку $f(z) = z\,\mathrm{Im}\,z^2$, тому

$f(z) = z\,\mathrm{Im}\,z^2 = 2x^2y + i\,2xy^2$, де $u = 2x^2y$, $v = 2xy^2$.

Тоді

$$I = \int_C z\,\mathrm{Im}\,z^2 dz = \int_C 2x^2y\,dx - 2xy^2dy + i\int_C 2xy^2dx + 2x^2y\,dy =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x = \cos\varphi, \ \ dx = -\sin\varphi\, d\varphi \\ y = \sin\varphi, \ \ dy = \cos\varphi\, d\varphi, \\ \quad -\pi \le \varphi \le 0 \end{array} \right| = 2\int_{-\pi}^{0}(\cos^2\varphi(-\sin^2\varphi) - \sin^2\varphi\cos^2\varphi)\,d\varphi +$$

$$+2i\int_{-\pi}^{0}((-\sin^3\varphi)\cos\varphi + \sin\varphi\cos^3\varphi)\,d\varphi = 2\int_{-\pi}^{0}\left(-\frac{1}{2}\sin^2 2\varphi\right)d\varphi +$$

$$+2i\int_{-\pi}^{0}\frac{1}{2}\sin 2\varphi\cos 2\varphi\, d\varphi = -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{0}(1-\cos 4\varphi)\,d\varphi + \frac{i}{2}\int_{-\pi}^{0}\sin 4\varphi\, d\varphi =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4}\right)\Bigg|_{-\pi}^{0} + \frac{i}{2}\left(-\frac{\cos 4\varphi}{4}\right)\Bigg|_{-\pi}^{0} = -\frac{\pi}{2}. \ ◄$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\int_C (z^2 + z\bar{z})\,dz$, де C – дуга кола $|z| = 1$ $(0 \le \arg z \le \pi)$ (рис.3.15).

► Для обчислення інтеграла скористаємось формулою

$$\int_C f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)]\cdot z'(t)\,dt.$$

Нехай $z = re^{i\varphi}$. При $r = 1$ маємо $z = e^{i\varphi}$. Тоді

$$\int_C (z^2 + z\bar{z})\,dz = \left| \begin{array}{c} z = e^{i\varphi} \\ dz = i\,e^{i\varphi}d\varphi \\ z\bar{z} = e^{i\varphi}e^{-i\varphi} = 1 \\ 0 \le \varphi \le \pi \end{array} \right| = \int_0^\pi (e^{i2\varphi} + 1)\,i\,e^{i\varphi}d\varphi =$$

$$= i\int_0^\pi (e^{i3\varphi} + e^{i\varphi})\,d\varphi = \left(\frac{1}{3}e^{i3\varphi} + e^{i\varphi}\right)\Bigg|_0^\pi = -\frac{8}{3}.$$

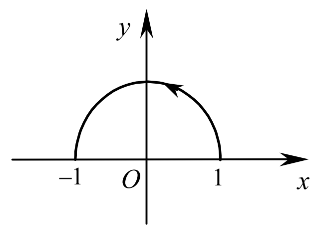


Рис.3.15 ◄

Приклад 4. Обчислити інтеграл $\int_0^i z\cos z\,dz$.

► Для обчислення інтеграла скористуємось формулою інтегрування частинами

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\varphi'(z)\,dz = [f(z)\varphi(z)]\Big|_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1}\varphi(z)\,f'(z)\,dz.$$

У нашому випадку функції $f(z) = z$ і $\varphi(z) = \cos z$ – аналітичні всюди. Застосовуючи формулу інтегрування частинами, одержимо

$$\int_0^i z\cos z\,dz = \int_0^i z\,(\sin z)'\,dz = (z\sin z)\Big|_0^i - \int_0^i \sin z\,dz = i\sin i + \cos z\Big|_0^i =$$

$$= i\sin i + \cos i - 1 = -\mathrm{sh}\,1 + \mathrm{ch}\,1 - 1 = -\frac{e^1 - e^{-1}}{2} + \frac{e^1 + e^{-1}}{2} - 1 = \frac{1}{e} - 1. \ ◄$$

Приклад 5. Обчислити інтеграл $\int_C \ln z\,dz$ ($\ln z$ – головне значення логарифма), де $C:\ |z| = 1$, за умови, що

а) початок шляху інтегрування $z_0 = 1$ (рис.3.16а);

б) початок шляху інтегрування $z_0 = -1$ (рис.3.16б).

Обхід проти годинникової стрілки.

► Для обчислення інтеграла скористаємось формулою

$$\int_C f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)]\cdot z'(t)\,dt.$$

а) початок шляху інтегрування $z_0 = 1$.

Покладемо $z = re^{i\varphi}$. При $r = 1$ маємо $z = e^{i\varphi}$. Отже,

$$\int_C \ln z\,dz = \left|\begin{array}{c} z=e^{i\varphi} \\ dz = i\,e^{i\varphi}d\varphi \\ \ln z = i\varphi \\ 0\le\varphi\le 2\pi \end{array}\right| = \int_0^{2\pi} i\varphi\, i\,e^{i\varphi}d\varphi = -\int_0^{2\pi}\varphi\, e^{i\varphi}d\varphi =$$

$$= \left|\begin{array}{ll} u=\varphi, & du=d\varphi \\ dv=i\,e^{i\varphi}d\varphi, & v=\frac{1}{i}e^{i\varphi} \end{array}\right| = \varphi\frac{1}{i}\,e^{i\varphi}\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\frac{1}{i}\,e^{i\varphi}d\varphi = i\,2\pi + \frac{e^{i\varphi}}{i^2}\Big|_0^{2\pi} = 2\pi i\,.$$

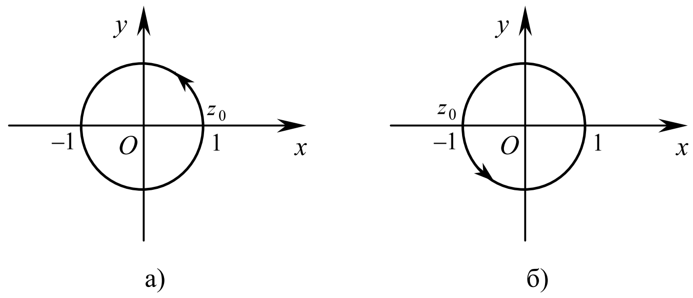


Рис.3.16

б) початок шляху інтегрування $z_0=-1$.

$$\int_C \ln z\,dz = \left|\begin{array}{c} z=e^{i\varphi} \\ dz = i\,e^{i\varphi}d\varphi \\ \ln z = i\varphi \\ -\pi\le\varphi\le \pi \end{array}\right| = \int_{-\pi}^{\pi} i\,\varphi\, i\,e^{i\varphi}d\varphi = -\int_{-\pi}^{\pi}\varphi\, e^{i\varphi}d\varphi = -\varphi\frac{1}{i}\,e^{i\varphi}\Big|_{-\pi}^{\pi} +$$

$$+\frac{1}{i}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\varphi}d\varphi = i\,(\pi e^{i\pi}+\pi e^{-i\pi}) + \frac{e^{i\varphi}}{i^2}\Big|_{-\pi}^{\pi} = i\,\pi(-1-1)-(-1+1) = -2\pi i\,. ◄$$

Приклад 6. Обчислити інтеграл $\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}}$, де C – верхня дуга кола $|z|=1$ $(0\le \arg z\le\pi)$ (рис.3.17). Для $\sqrt{z}$ береться та вітка, для якої $\sqrt{1}=-1$.

► *Спосіб 1.* Функція $\sqrt{z}$ має два значення:

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right),$$

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)\right) = -\sqrt{|z|}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right),$$

де $\varphi=\arg z$.

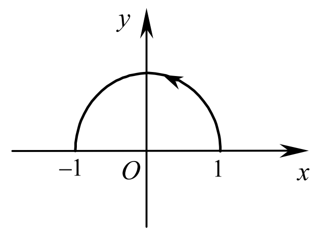


Рис.3.17

Оскільки значення z беруться на одиничному колі, то $|z|=1$, і тому

$$\sqrt{z} = \cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\,,$$

$$\sqrt{z} = -\cos\frac{\varphi}{2} - i\sin\frac{\varphi}{2}\,.$$

Умові $\sqrt{1}=-1$ задовольняє друге значення $\sqrt{z} = -\cos\frac{\varphi}{2} - i\sin\frac{\varphi}{2}$, бо при $z=1$ маємо $\arg z=0$ і $\sqrt{1} = -\cos 0 - i\sin 0 = -1$.

Переходимо до обчислення заданого інтеграла.

Застосовуючи формулу Ньютона-Лейбніца, отримуємо

$$\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_1^{-1}\frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z}\,\Big|_1^{-1} = 2\,(\sqrt{-1}-\sqrt{1})\,. \qquad (1)$$

Підрахуємо значення $\sqrt{-1}$, враховуючи, що $\sqrt{z} = -\cos\frac{\varphi}{2} - i\sin\frac{\varphi}{2}$.

Знаходимо

$$\sqrt{-1} = -\left(\cos\frac{\arg(-1)}{2} + i\sin\frac{\arg(-1)}{2}\right) = -\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = -i\,.$$

Отже, маємо $\sqrt{-1}=-i$. Згідно з вибором вітки за умовою маємо $\sqrt{1}=-1$. Підставивши ці значення у формулу (1), отримуємо значення шуканого інтеграла

$$\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\,(\sqrt{-1}-\sqrt{1}) = 2\,(-i+1) = 2\,(1-i)\,.$$

Спосіб 2. Покладемо $z=r\,e^{i\varphi}$, де $r=1$, $0\le\varphi\le\pi$.

З умови $\sqrt{1}=-1$ випливає, що $\sqrt{e^{i\varphi}}=e^{i\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)}$. Дійсно, перевіримо цей факт, поклавши $\varphi=0$. Маємо $\sqrt{e^{i\varphi}}=\sqrt{1}=e^{i(0+\pi)}=-1$.

Переходимо до обчислення заданого інтеграла.

$$\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}}=\left|\begin{array}{c} z=e^{i\varphi} \\ dz=ie^{i\varphi}d\varphi \\ 0\le\varphi\le\pi \end{array}\right|=\int_0^{\pi}\frac{ie^{i\varphi}d\varphi}{\sqrt{e^{i\varphi}}}=\int_0^{\pi}\frac{ie^{i\varphi}d\varphi}{e^{i\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)}}=\int_0^{\pi} ie^{i\left(\frac{\varphi}{2}-\pi\right)}d\varphi=$$

$$=2e^{i\left(\frac{\varphi}{2}-\pi\right)}\Big|_0^{\pi}=2\left(e^{-i\frac{\pi}{2}}-e^{-i\pi}\right)=2(-i+1)=2(1-i).\ ◀$$

Приклад 7. Обчислити задані інтеграли:

а) $I=\int_C \frac{dz}{\sqrt[4]{z^3}}$, де C – верхня половина кола $|z|=1$ $(0\le\arg z\le\pi)$ (рис.3.18а), за умови, що вибирається та вітка функції $w=\sqrt[4]{z^3}$, для якої $\sqrt[4]{1}=1$;

б) $I=\int_0^{i}\frac{\ln(z+1)}{z+1}dz$ вздовж дуги кола $|z|=1$, $\mathrm{Im}\,z\ge0$, $\mathrm{Re}\,z\ge0$ (рис.3.18б).

▶ а) $I=\int_C \frac{dz}{\sqrt[4]{z^3}}$.

Покладемо $z=re^{i\varphi}$. При $r=1$ маємо $z=e^{i\varphi}$, тоді

$$\sqrt[4]{z}=\sqrt[4]{e^{i\varphi}}=e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{4}},\quad k=0,1,2,3. \qquad (1)$$

Виберемо таке значення кореня, щоб задовольнити умову $\sqrt[4]{1}=1$. Маємо

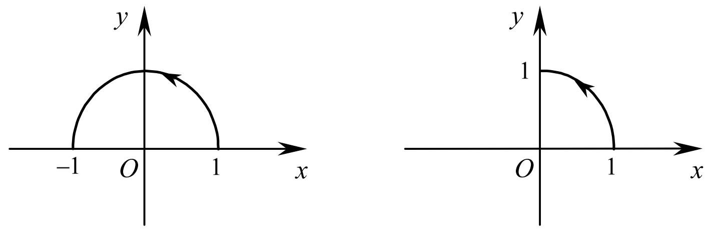
$$\sqrt[4]{1}=\sqrt[4]{e^{i0}}=e^{i\frac{0+2k\pi}{4}}=1 \text{ при } k=0.$$

Поклавши $k=0$ у формулі (1), отримуємо $\sqrt[4]{z}=e^{i\frac{\varphi}{4}}$.

Переходимо до інтегрування.

$$\int_C \frac{dz}{\sqrt[4]{z^3}}=\left|\begin{array}{c} z=e^{i\varphi} \\ dz=ie^{i\varphi}d\varphi \\ 0\le\varphi\le\pi \end{array}\right|=\int_0^{\pi}\frac{ie^{i\varphi}d\varphi}{\left(e^{i\frac{\varphi}{4}}\right)^3}=i\int_0^{\pi}e^{i\frac{\varphi}{4}}d\varphi=4e^{i\frac{\varphi}{4}}\Big|_0^{\pi}=$$

$$=4\left(e^{i\frac{\pi}{4}}-e^0\right)=4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)=2\sqrt{2}-4+i2\sqrt{2}.$$



а) б)

Рис.3.18

б) $I=\int_0^{i}\frac{\ln(z+1)}{z+1}dz$.

Покладемо $z=re^{i\varphi}$. При $r=1$ маємо $z=e^{i\varphi}$. Враховуючи, що $\mathrm{Im}\,z\ge0$, $\mathrm{Re}\,z\ge0$, маємо $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$ (рис.3.18б).

Переходимо до інтегрування.

$$\int_C \frac{\ln(z+1)}{z+1}dz=\left|\begin{array}{c} z=e^{i\varphi} \\ dz=ie^{i\varphi}d\varphi \\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2} \end{array}\right|=\int_0^{\pi/2}\frac{\ln(e^{i\varphi}+1)}{e^{i\varphi}+1}ie^{i\varphi}d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}d(\ln^2(e^{i\varphi}+1))=\frac{1}{2}\ln^2(e^{i\varphi}+1)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{1}{2}\left(\ln^2\left(e^{i\frac{\pi}{2}}+1\right)-\ln^2 2\right)=$$

$$=\frac{1}{2}(\ln^2(1+i)-\ln^2 2)=\frac{1}{2}\left(\ln|1+i|+i\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{1}{2}\ln^2 2=\frac{1}{2}\left(\ln\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{1}{2}\ln^2 2=$$

$$=\frac{1}{2}\ln^2\sqrt{2}+\frac{1}{2}2i\frac{\pi}{4}\ln\sqrt{2}-\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}\ln^2 2=\frac{1}{8}\ln^2 2-\frac{1}{2}\ln^2 2+i\frac{\pi}{8}\ln 2-\frac{\pi^2}{16}=$$

$$=-\frac{3}{8}\ln^2 2-\frac{\pi^2}{16}+i\frac{\pi}{8}\ln 2=-\frac{1}{8}\left(3\ln^2 2+\frac{\pi^2}{2}\right)+i\frac{\pi}{8}\ln 2.\ ◀$$

Приклад 8. Користуючись інтегральною формулою Коші, обчислити інтеграл $\int\limits_C \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz$, якщо:

а) $C: \ |z-2|=1$; б) $C: \ |z-2|=3$; в) $C: \ |z-2|=5$.

► а) $C: |z-2|=1$.

У замкненій області, обмеженій колом $|z-2|=1$ (рис.3.19а), підінтегральна функція аналітична, тому в силу теореми Коші

$$\int\limits_{|z-2|=1} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}\,dz = 0.$$

б) $C: |z-2|=3$.

Всередині області, обмеженої колом $|z-2|=3$ (рис.3.19б), знаходиться одна точка $z=0$, в якій знаменник підінтегральної функції перетворюється в нуль. Перепишемо інтеграл у вигляді

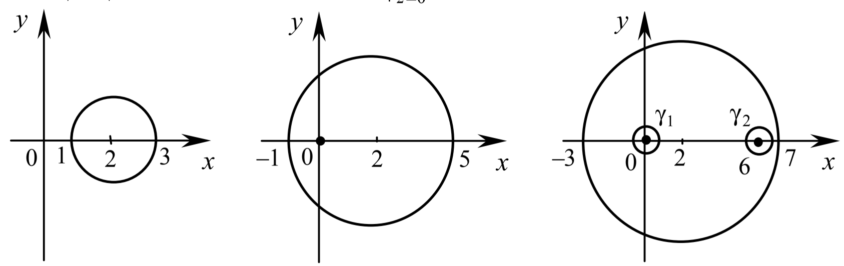
$$\int\limits_{|z-2|=3} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}\,dz = \int\limits_{|z-2|=3} \frac{e^{z^2}}{z(z-6)}\,dz = \int\limits_{|z-2|=3} \frac{\frac{e^{z^2}}{z-6}}{z}\,dz.$$

Функція $f(x)=\frac{e^{z^2}}{z-6}$ – аналітична в даній області. Застосовуючи інтегральну формулу Коші у вигляді

$$\int\limits_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i\, f(z_0), \quad z_0=0,$$

отримуємо

$$\int\limits_{|z-2|=3} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}\,dz = 2\pi i \left.\frac{e^{z^2}}{z-6}\right|_{z=0} = 2\pi i\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{\pi i}{3}.$$



а) б) в)

Рис.3.19

в) $C: |z-2|=5$.

В області, обмеженій колом $|z-2|=5$ (рис.3.19в), знаходяться дві точки $z=0$ і $z=6$, в яких знаменник підінтегральної функції перетворюється в нуль. Безпосередньо формулу Коші використовувати не можна. В цьому випадку для обчислення інтеграла можна зробити так.

Спосіб 1. Розкладемо дріб $\frac{1}{z^2-6z}$ на суму найпростіших дробів. Маємо

$$\frac{1}{z^2-6z} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z-6} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z}.$$

Підставляючи в інтеграл, одержимо

$$\int\limits_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}\,dz = \frac{1}{6}\int\limits_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}}{z-6}\,dz - \frac{1}{6}\int\limits_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}}{z}\,dz =$$

$$= \frac{1}{6}\,2\pi i\left. e^{z^2}\right|_{z=6} - \frac{1}{6}\,2\pi i\left. e^{z^2}\right|_{z=0} = \frac{1}{3}\pi i e^{36} - \frac{1}{3}\pi i = \frac{e^{36}-1}{3}\pi i.$$

Спосіб 2. Побудуємо два кола γ_1 і γ_2 з центрами в точках $z=0$ і $z=6$ достатньо малих радіусів, таких, щоб кола не перетнулись і цілком містились в крузі $|z-2|\le 5$, як зображено на рис.3.19в). В тризв'язній області, обмеженій колами $|z-2|=5$, γ_1 і γ_2, підінтегральна функція всюди аналітична. За теоремою Коші для многозв'язної області

$$\int\limits_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}\,dz = \int\limits_{\gamma_1} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}\,dz + \int\limits_{\gamma_2} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}\,dz.$$

До кожного інтеграла можна застосувати інтегральну формулу Коші. Тоді одержимо

$$\int\limits_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}\,dz = \int\limits_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}}{z(z-6)}\,dz = \int\limits_{\gamma_1} \frac{\frac{e^{z^2}}{z-6}}{z}\,dz + \int\limits_{\gamma_2} \frac{\frac{e^{z^2}}{z}}{z-6}\,dz =$$

$$= 2\pi i \left.\frac{e^{z^2}}{z-6}\right|_{z=0} + 2\pi i \left.\frac{e^{z^2}}{z}\right|_{z=6} = \frac{e^{36}-1}{3}\pi i. \ ◄$$

Приклад 9. Обчислити задані інтеграли:

$$\text{а) } I=\int\limits_{|z-1|=2}\frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z^2+2z-3}\,dz\,;\quad \text{б) } I=\int\limits_{|z|=1}\frac{\operatorname{tg} z}{z\,e^{\frac{1}{z+2}}}\,dz\,;$$

$$\text{в) } I=\int\limits_{|z|=2}\frac{\sin z\sin(z-1)}{z^2-z}\,dz\,.$$

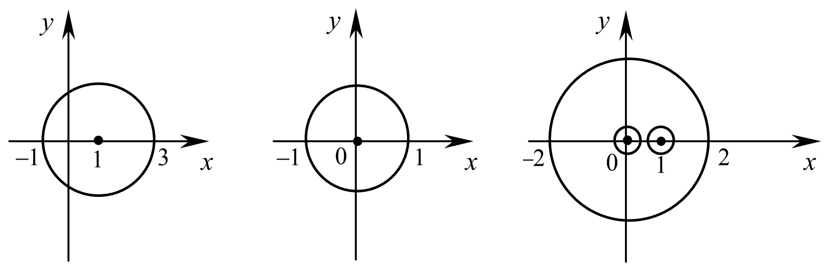
► При обчисленні користуватимемось інтегральною формулою Коші. Кожний приклад супроводжується рисунком, де відзначаються точки, що належать області D, обмеженої контуром C, в яких знаменник підінтегральної функції перетворюється в нуль.

$$\text{а) } I=\int\limits_{|z-1|=2}\frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z^2+2z-3}\,dz\,.$$

В точці $z=1$ знаменник обертається в нуль (рис.3.20а).

$$I=\int\limits_{|z-1|=2}\frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z^2+2z-3}\,dz=\int\limits_{|z-1|=2}\frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{(z+3)(z-1)}\,dz=\int\limits_{|z-1|=2}\frac{\frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z+3}}{z-1}\,dz=$$

$$=2\pi i\,f(1)=2\pi i\,\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1+3}=\frac{2\pi i}{4}=\frac{\pi i}{2}\,.$$



а) б) в)

Рис.3.20

$$\text{б) } I=\int\limits_{|z|=1}\frac{\operatorname{tg} z}{z\,e^{\frac{1}{z+2}}}\,dz\,.$$

У точці $z=0$ знаменник обертається в нуль (рис.3.20б).

$$I=\int\limits_{|z|=1}\frac{\operatorname{tg} z}{z\,e^{\frac{1}{z+2}}}\,dz=\int\limits_{|z|=1}\frac{\operatorname{tg} z\cdot e^{\frac{-1}{z+2}}}{z}\,dz=2\pi i\,f(0)=2\pi i\cdot\operatorname{tg}0\cdot e^{-\frac{1}{2}}=0\,.$$

$$\text{в) } I=\int\limits_{|z|=2}\frac{\sin z\sin(z-1)}{z^2-z}\,dz\,.$$

Перетворимо

$$I=\int\limits_{|z|=2}\frac{\sin z\sin(z-1)}{z^2-z}\,dz=\int\limits_{|z|=2}\frac{\sin z\sin(z-1)}{z(z-1)}\,dz\,.$$

У точках $z=0$ і $z=1$ знаменник обертається в нуль (рис.3.20в).

Побудуємо два кола γ_1 і γ_2 з центрами в точках $z=0$ і $z=1$ і радіусів $<\frac{1}{2}$ (щоб вони не перетинались і цілком містились в крузі $|z|\le 2$). За теоремою Коші для многозв’язної області

$$I=\int\limits_{|z|=2}\frac{\sin z\sin(z-1)}{z(z-1)}\,dz=\int\limits_{\gamma_1}\frac{\frac{\sin z\cdot\sin(z-1)}{z-1}}{z}\,dz+\int\limits_{\gamma_2}\frac{\frac{\sin z\sin(z-1)}{z}}{z-1}\,dz\,.$$

Далі за інтегральною теоремою Коші

$$I=2\pi i\,f_1(0)+2\pi i\cdot f_2(1)=2\pi i\,\frac{\sin0\cdot\sin(0-1)}{-1}+2\pi i\,\frac{\sin1\cdot\sin(1-1)}{1}=0\,,$$

де $f_1(z)=\dfrac{\sin z\cdot\sin(z-1)}{z-1}$, $f_2(z)=\dfrac{\sin z\cdot\sin(z-1)}{z}$. ◄

Приклад 10. Обчислити інтеграл $\displaystyle\int\limits_{|z|=2}\frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3(z-1)}\,dz$.

► *Спосіб 1*. Знаменник $(z+3)^3(z-1)$ підінтегральної функції перетворюється в нуль в точках $z=-1$ і $z=1$, що містяться всередині круга $|z|\le 2$. Розкладемо підінтегральну функцію на суму найпростіших дробів.

$$\frac{1}{(z+1)^3(z-1)}=\frac{1}{8}\frac{1}{z-1}-\frac{1}{8}\frac{1}{z+1}-\frac{1}{4}\frac{1}{(z+1)^2}-\frac{1}{2}\frac{1}{(z+1)^3}\,.$$

Використовуючи лінійність інтеграла, отримуємо

$$\int\limits_{|z|=2}\frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3(z-1)}\,dz=\frac{1}{8}\int\limits_{|z|=2}\frac{\operatorname{ch} z}{z-1}\,dz-\frac{1}{8}\int\limits_{|z|=2}\frac{\operatorname{ch} z}{z+1}\,dz-$$

$$-\frac{1}{4}\int\limits_{|z|=2}\frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^2}\,dz-\frac{1}{2}\int\limits_{|z|=2}\frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3}\,dz .$$

До перших двох інтегралів застосовуємо інтегральну формулу Коші

$$\int\limits_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i\, f(z_0):$$

$$\int\limits_{|z|=2}\frac{\operatorname{ch} z}{z-1}\,dz = 2\pi i\cdot \operatorname{ch}1; \qquad \int\limits_{|z|=2}\frac{\operatorname{ch} z}{z+1}\,dz = 2\pi i\cdot \operatorname{ch}1 .$$

Третій і четвертий інтеграли обчислюємо за допомогою формули, що є наслідком формули для n - ї похідної аналітичної функції

$$\int\limits_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = 2\pi i \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},$$

де беремо відповідно $n=1$ та $n=2$.

$$\int\limits_{|z|=2}\frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^2}\,dz = 2\pi i\cdot(\operatorname{ch} z)'\big|_{z=-1} = 2\pi i\cdot \operatorname{sh} z\big|_{z=-1} = -2\pi i\cdot \operatorname{sh}1;$$

$$\int\limits_{|z|=2}\frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2!}\cdot(\operatorname{ch} z)''\Big|_{z=-1} = \pi i\cdot \operatorname{ch} z\big|_{z=-1} = \pi i\cdot \operatorname{ch}1 .$$

Нарешті одержимо

$$I = \frac{2\pi i\cdot \operatorname{ch}1}{8}-\frac{2\pi i\cdot \operatorname{ch}1}{8}+\frac{2\pi i\cdot \operatorname{sh}1}{4}-\frac{\pi i\cdot \operatorname{ch}1}{2}=\frac{(\operatorname{sh}1-\operatorname{ch}1)\pi i}{2}=-\frac{\pi i}{2e}.$$

Спосіб 2. Побудуємо два кола γ_1 і γ_2 з центрами в точках $z=-1$ і $z=1$ достатньо малих радіусів, таких, щоб кола не перетинались і цілком містились в крузі $|z|\le 2$. В тризв'язній області, обмеженій колами $|z|=2$, γ_1 і γ_2, підінтегральна функція всюди аналітична. За теоремою Коші для многозв'язної області маємо:

$$\int\limits_{|z|=2}\frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3(z-1)}\,dz = \int\limits_{\gamma_1}\frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3(z-1)}\,dz + \int\limits_{\gamma_2}\frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3(z-1)}\,dz .$$

До першого інтеграла застосуємо формулу

$$\int\limits_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = 2\pi i \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},$$

представивши підінтегральну функцію у вигляді $\dfrac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3(z-1)} = \dfrac{\frac{\operatorname{ch} z}{z-1}}{(z+1)^3}$.

Функція $\dfrac{\operatorname{ch} z}{z-1}$ аналітична всередині γ_1, тому поклавши $n=2$, отримуємо

$$\int\limits_{\gamma_1}\frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3(z-1)}\,dz = \int\limits_{\gamma_1}\frac{\frac{\operatorname{ch} z}{z-1}}{(z+1)^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2!}\left(\frac{\operatorname{ch} z}{z-1}\right)''\Bigg|_{z=-1} =$$

$$=\pi i\left(\frac{\operatorname{sh} z}{z-1}-\frac{\operatorname{ch} z}{(z-1)^2}\right)'\Bigg|_{z=-1} = \pi i\left(\frac{\operatorname{ch} z}{z-1}-\frac{2\operatorname{sh} z}{(z-1)^2}+\frac{2\operatorname{ch} z}{(z-1)^3}\right)\Bigg|_{z=-1} =$$

$$==\pi i\left(-\frac{\operatorname{ch}1}{2}+\frac{\operatorname{sh}1}{2}-\frac{\operatorname{ch}1}{4}\right)=\pi i\,\frac{2\operatorname{sh}1-3\operatorname{ch}1}{4}=\pi i\,\frac{2(\operatorname{sh}1-\operatorname{ch}1)-\operatorname{ch}1}{4}=$$

$$=\pi i\,\frac{2(-e^{-1})-\operatorname{ch}1}{4}=-\pi i\,\frac{2e^{-1}+\operatorname{ch}1}{4}.$$

До другого інтеграла застосуємо інтегральну формулу Коші

$$\int\limits_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i\, f(z_0):$$

$$\int\limits_{\gamma_2}\frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3(z-1)}\,dz = \int\limits_{\gamma_2}\frac{\frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3}}{z-1}\,dz = 2\pi i\,\frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3}\bigg|_{z=1} = \pi i\,\frac{\operatorname{ch}1}{4}.$$

Нарешті отримуємо

$$\int\limits_C \frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3(z-1)}\,dz = -\pi i\,\frac{2e^{-1}+\operatorname{ch}1}{4}+\pi i\,\frac{\operatorname{ch}1}{4}=-\frac{\pi i}{2e}. \blacktriangleleft$$

Приклад 11. Обчислити інтеграл $\displaystyle\int\limits_{|z-2|=3}\frac{\operatorname{ch} e^{i\pi z}}{z^3-4z^2}\,dz$.

► Знаменник z^3-4z підінтегральної функції перетворюється в нуль в точках $z=0$ і $z=4$, що містяться всередині круга $|z-2|\le 3$ (рис.3.21).

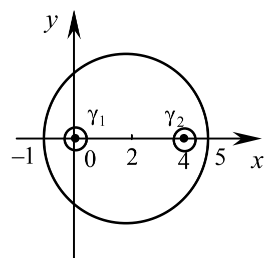


Рис.3.21

За теоремою Коші для многозв'язної області маємо:

$$I=\int\limits_{|z-2|=3}\frac{\operatorname{ch}e^{i\pi z}}{z^3-4z^2}dz=\int\limits_{|z-2|=3}\frac{\operatorname{ch}e^{i\pi z}}{z^2(z-4)}dz=\int\limits_{\gamma_1}\frac{\frac{\operatorname{ch}e^{i\pi z}}{z-4}}{z^2}dz+\int\limits_{\gamma_2}\frac{\frac{\operatorname{ch}e^{i\pi z}}{z^2}}{z-4}dz=I_1+I_2.$$

Кожний з двох інтегралів, що знаходяться справа, обчислюється за інтегральною формулою Коші.

Для інтеграла I_1, в якому підінтегральна функція аналітична всюди в крузі γ_1, крім $z=0$, використовуємо формулу

$$\int\limits_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz=2\pi i\,\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},$$

поклавши $n=1$:

$$I_1=\int\limits_{\gamma_1}\frac{\frac{\operatorname{ch}e^{i\pi z}}{z-4}}{z^2}\,dz=\frac{2\pi i}{1!}f_1'(0)=2\pi i\left.\left(\frac{\operatorname{ch}e^{i\pi z}}{z-4}\right)'\right|_{z=0}=$$

$$=2\pi i\left.\frac{(\operatorname{sh}e^{i\pi z}\cdot e^{i\pi z}\,i\pi)(z-4)-\operatorname{ch}e^{i\pi z}}{(z-4)^2}\right|_{z=0}=2\pi i\,\frac{\operatorname{sh}1\cdot i\pi(-4)-\operatorname{ch}1}{16}=$$

$$=\frac{\pi^2\operatorname{sh}1}{2}-\frac{i\pi\cdot\operatorname{ch}1}{8}.$$

Для інтеграла I_2 застосовуємо формулу

$$\int\limits_C\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz=2\pi i\,f(z_0):$$

$$I_2=\int\limits_{\gamma_1}\frac{\frac{\operatorname{ch}e^{i\pi z}}{z^2}}{z-4}\,dz=2\pi i\left.\frac{\operatorname{ch}e^{i\pi z}}{z^2}\right|_{z=4}=2\pi i\,\frac{\operatorname{ch}e^{4i\pi}}{16}=\pi i\,\frac{\operatorname{ch}1}{8}.$$

Нарешті одержимо

$$I=I_1+I_2=\frac{\pi^2\operatorname{sh}1}{2}-\frac{i\pi\cdot\operatorname{ch}1}{8}+\frac{i\pi\cdot\operatorname{ch}1}{8}=\frac{\pi^2\operatorname{sh}1}{2}.\ ◄$$

IV. Задачі для практичних занять

У задачах 3.90 – 3.97 обчислити інтеграли від заданих функцій вздовж заданих ліній.

3.90. $\int\limits_C(1-iz)\,dz$, де C – відрізок прямої, що з'єднує точки $z_1=1$ та $z_2=-i$.

3.91. $\int\limits_C\left((\operatorname{Re}z)^2+i(\operatorname{Im}z)^2\right)dz$, де C – відрізок прямої, що з'єднує точки $z_1=1+i$ та $z_2=2+3i$.

3.92. $\int\limits_C(\operatorname{Im}z+i\operatorname{Re}z)dz$, де C – ламана з вершинами у точках $z_1=0,\ z_2=i,\ z_3=1+i$.

3.93. $\int\limits_C e^{|z|^2}\operatorname{Re}z\,dz$, де C – відрізок прямої, що з'єднує точки $z_1=0$ та $z_2=1+i$.

3.94. $\int\limits_C z\operatorname{Re}z\,dz$, де C – коло $|z|=1$. Обхід проти годинникової стрілки.

3.95. $\int\limits_C z\cdot\bar z\,dz$, де C – коло $|z|=1$. Обхід проти годинникової стрілки.

3.96. $\int\limits_C\operatorname{Re}z\,dz$, де

а) C – відрізок прямої $z=(2+i)t\quad(0\le t\le1)$;

б) C – ламана, що складається з відрізка $[0,\ 2]$ дійсної осі і відрізка, який з'єднує точки $z_1=2$ та $z_2=2+i$.

3.97. $\int\limits_C\bar z\,dz$, де C – коло $x=\cos t,\ y=\sin t,\ 0\le t\le2\pi$.

У задачах 3.98 – 3.103 обчислити задані інтеграли.

3.98. $\int\limits_{1+i}^{-1-i}(2z+1)\,dz$.   **3.99.** $\int\limits_0^{i+1}z^3dz$.

3.100. а) $\int\limits_1^i(3z^4-2z^3)\,dz$;   б) $\int\limits_{1-i}^{2+i}(3z^2+2z)\,dz$.

3.101. $\int\limits_1^i z\sin z\,dz$. **3.102.** $\int\limits_0^i (z-i)\,e^{-z}dz$.

3.103. $\int\limits_0^{1+i} \sin z\cos z\,dz$.

У задачах 3.104 – 3.107 обчислити інтеграли від заданих функцій вздовж заданих ліній.

3.104. $\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt{z}}$, де C – верхня половина кола $|z|=1$; вибирається та вітка функції $\sqrt{z}$, для якої $\sqrt{1}=1$.

3.105. $\int\limits_1^i \frac{\ln^3 z}{z}dz$ вздовж дуги кола $|z|=1$ ($\ln z$ – головне значення логарифма, $\ln 1 = 0$).

3.106. $\int\limits_1^i \frac{\ln(z+1)}{z+1}dz$ вздовж дуги кола $|z|=1$, $\operatorname{Re} z \ge 0$, $\operatorname{Im} z \ge 0$.

3.107. $\int\limits_1^i \frac{\ln z}{z}dz$ вздовж відрізка прямої, що з'єднує точки $z_1 = 1$, $z_2 = i$.

У задачах 3.108 – 3.116 обчислити задані інтеграли за допомогою інтегральної формули Коші.

3.108. $\int\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^{1/z}}{z^2+z}dz$. **3.109.** $\int\limits_{|z|=1} \frac{e^z\cos\pi z}{z^2+2z}dz$.

3.110. $\int\limits_{|z-2|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{z^4-1}dz$. **3.111.** $\int\limits_{|z-1-i|=1} \frac{\sin\pi(z-1)}{z^2-2z+2}dz$.

3.112. $\int\limits_{|z|=1} \frac{\operatorname{tg} z}{z\,e^{\frac{1}{z+2}}}dz$. **3.113.** $\int\limits_{|z|=3} \frac{\cos(z+\pi i)}{z\,(e^z+2)}dz$.

3.114. $\int\limits_{|z|=5} \frac{dz}{z^2+16}$. **3.115.** $\int\limits_{|z|=4} \frac{dz}{(z^2+9)\,(z+9)}$.

3.116. $\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin z\cdot\sin(z-1)}{z^2-z}dz$.

У задачах 3.117 – 3.124 обчислити задані інтеграли.

3.117. $\int\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3}dz$. **3.118.** $\int\limits_{|z|=1} \frac{\operatorname{sh}^2 z}{z^3}dz$.

3.119. $\int\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{(z-1)^2(z-3)}dz$. **3.120.** $\int\limits_{|z|=2} \frac{z\operatorname{sh} z}{(z^2-1)^2}dz$.

3.121. $\int\limits_{|z-3|=6} \frac{z}{(z-2)^3(z+4)}dz$. **3.122.** $\int\limits_{|z-2|=3} \frac{\operatorname{ch} e^{i\pi z}}{z^3-4z^2}dz$.

3.123. $\int\limits_{|z-2|=1} \frac{e^{1/z}}{(z^2+4)^2}dz$. **3.124.** $\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1-\sin z}{z^2}dz$.

§5. Комплексні ряди

I. Короткі теоретичні відомості

Числові ряди

Числовий ряд вигляду

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n\,, \tag{3.46}$$

де $z_n = x_n + i\,y_n$, називається *числовим рядом з комплексними членами*.

Цей ряд збіжний тоді і тільки тоді, коли збігаються ряди

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \tag{3.47}$$

та

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} y_n\,. \tag{3.48}$$

Ряд (3.46) називається *абсолютно збіжним*, коли збігається ряд

$$|z_1|+|z_2|+\ldots+|z_n|+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|. \qquad (3.49)$$

Ряди (3.47), (3.48), (3.49) є рядами з дійсними членами і питання про їхню збіжність вирішується за допомогою відомих ознак збіжності рядів у дійсній області.

Степеневі ряди

Ряд вигляду

$$c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots+c_nz^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n\,, \qquad (3.50)$$

де c_0, $c_1,\ldots,c_n,\ldots$ – комплексні сталі, а z – комплексна змінна, називається *степеневим рядом*.

Теорема Абеля. Якщо степеневий ряд збіжний при деякому значенні $z=z_0$, то він збігається абсолютно для всіх z, для яких $|z|<|z_0|$. Якщо ж ряд розбіжний при $z=z_0$, то він розбіжний при будь-якому z, для якого $|z|>|z_0|$.

Область збіжності ряду – круг з центром на початку координат. Радіус збіжності R визначається за формулою

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} \qquad (3.51)$$

або

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}\,. \qquad (3.52)$$

Ряди Тейлора та Лорана

Функція $f(z)$, однозначна і аналітична в точці $z=z_0$, може бути розкладена в околі цієї точки в степеневий *ряд Тейлора*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n\,!}(z-z_0)^n\,, \qquad (3.53)$$

коефіцієнти якого обчислюються за формулою

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz\,,\quad n=0,1,2,\ldots, \qquad (3.54)$$

де Γ – коло з центром у точці $z=z_0$, яке міститься в околі точки z_0, де функція $f(z)$ аналітична. Центр круга збіжності знаходиться в точці z_0; коло проходить через особливу точку функції $f(z)$, найближчу до точки z_0, тобто радіус збіжності ряду Тейлора дорівнює відстані від точки z_0 до найближчої особливої точки функції $f(z)$.

Застосування формули (3.54) для обчислення коефіцієнтів c_n призводить до громіздких обчислень. Тому на практиці часто використовують відомі формули розкладу в ряд Тейлора елементарних функцій.

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n\,!},\quad |z|<+\infty\,, \qquad (3.55)$$

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad |z|<+\infty\,, \qquad (3.56)$$

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!},\quad |z|<+\infty\,, \qquad (3.57)$$

$$\operatorname{sh} z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad |z|<+\infty\,, \qquad (3.58)$$

$$\operatorname{ch} z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!},\quad |z|<+\infty\,, \qquad (3.59)$$

$$\ln(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n},\quad |z|<1\,, \qquad (3.60)$$

$$\ln(1-z)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n},\quad |z|<1\,, \qquad (3.61)$$

$$\operatorname{arctg} z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1},\quad |z|<1\,, \qquad (3.62)$$

$$(1+z)^{\alpha}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}z^n\,,\quad |z|<1, \qquad (3.63)$$

$$\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,\quad |z|<1\,, \qquad (3.64)$$

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n,\quad |z|<1\,. \qquad (3.65)$$

Далі розглядаємо ряд вигляду

$$\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2}+\ldots+\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}\,. \qquad (3.66)$$

Якщо $c_{-n}\neq 0$ і існує скінченна границя

$$r=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{-n-1}|}{|c_{-n}|}\,, \qquad (3.67)$$

то ряд (3.66) збігається в області

$$|z-z_0|>r. \tag{3.68}$$

Ряд вигляду

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n =$$

$$= \ldots + \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \ldots + c_n(z-z_0)^n + \ldots \tag{3.69}$$

збігається в області, в якій збігаються ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} \tag{3.70}$$

та

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n . \tag{3.71}$$

Нехай ряд (3.70) збігається в області $|z-z_0|>r$, тобто зовні круга з центром у точці $z=z_0$ радіуса r, а ряд (3.71) – у крузі $|z-z_0|<R$.

Тоді, якщо

1) $r>R$, то ряд (3.69) розбігається всюди,
2) $r<R$, то ряд (3.69) збігається в кільці $r<|z-z_0|<R$.

Тут $r \ge 0$, $0<R<+\infty$.

Функція $f(z)$, однозначна і аналітична в кільці $r<|z-z_0|<R$ (включаючи випадки, коли $r=0$ і $R=+\infty$), розкладається в цьому кільці в *ряд Лорана*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n , \tag{3.72}$$

де коефіцієнти c_n обчислюються за формулою

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz , \quad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots . \tag{3.73}$$

Тут Γ – довільне коло з центром у точці z_0, що міститься всередині даного кільця.

Ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-z_0)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$ називають *головною частиною* ряду Лорана, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ – *правильною частиною.*

На практиці застосування формули (3.73) призводить до громіздких обчислень. Тому, якщо це можливо, намагаються використовувати відомі розклади функцій у ряди, або зводити до них.

Нулі та ізольовані особливі точки функцій

Припустимо, що функція $f(z)$ аналітична в точці z_0. Точка z_0 називається *нулем функції* $f(z)$ *порядку (або кратності)* n, якщо виконуються умови

$$f(z_0)=0,\ f'(z_0)=0, \ldots,\ f^{(n-1)}(z_0)=0,\ f^{(n)}(z_0)\ne 0. \tag{3.74}$$

Якщо $n=1$, то точка z_0 — *простий нуль.*

Точка z_0 тоді і тільки тоді буде нулем n-го порядку функції $f(z)$, аналітичної в точці z_0, коли в деякому околі цієї точки має місце рівність

$$f(z) = (z-z_0)^n \varphi(z), \tag{3.75}$$

де функція $\varphi(z)$ аналітична а точці z_0 і $\varphi(z_0)\ne 0$.

Точка $z=z_0$ називається *ізольованою особливою точкою* функції $f(z)$, якщо існує окіл цієї точки, в якому функція $f(z)$ аналітична всюди, крім самої точки $z=z_0$.

Точка $z=z_0$ називається *усувною особливою точкою* функції $f(z)$, якщо існує скінченна границя функції $f(z)$ в точці $z=z_0$.

Точка z_0 називається *полюсом* функції $f(z)$, якщо $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$.

Для того, щоб точка z_0 була полюсом функції $f(z)$, необхідно та достатньо, щоб ця точка була нулем для функції $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}$.

Точка z_0 називається *полюсом порядку* n $(n\ge 1)$ функції $f(z)$, якщо ця точка є нулем порядку n для функції $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}$.

У випадку $n=1$ полюс називається *простим*.

Для того, щоб точка z_0 була полюсом порядку n функції $f(z)$, необхідно та достатньо, щоб функцію $f(z)$ можна було представити у вигляді $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}$, де функція $\varphi(z)$ аналітична в точці z_0 і $\varphi(z_0)\ne 0$.

Точка z_0 називається *істотно особливою точкою* функції $f(z)$, якщо в точці z_0 функція не має границі ні скінченної, ні нескінченної.

Мають місце такі твердження.

1. Для того, щоб точка z_0 була *усувною особливою точкою* функції $f(z)$, необхідно та достатньо, щоб лоранів розклад $f(z)$ в околі точки z_0 не містив головної частини.

2. Для того, щоб точка z_0 була *полюсом* функції $f(z)$, необхідно та достатньо, щоб головна частина лоранового розкладу $f(z)$ в околі точки z_0 містила лише скінченне число членів, тобто

$$f(z)=\frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n\,,\quad c_{-k}\neq 0\,.$$

Найбільший показник степенів різниць $z-z_0$, які знаходяться в знаменниках членів головної частини ряду Лорана, співпадає з порядком полюса.

3. Точка z_0 тоді і тільки тоді є *істотно особливою точкою* функції $f(z)$, коли головна частина її лоранового розкладу в околі точки z_0 містить нескінченну кількість членів.

II. Контрольні питання та завдання

1. Дайте означення ряду з комплексними членами.
2. Що називається сумою ряду?
3. Який ряд називається збіжним?
4. Який ряд називається степеневим?
5. Де збігається степеневий ряд? Сформулюйте теорему Абеля.
6. Що є областю збіжності степеневого ряду?
7. За якими формулами визначається радіус збіжності степеневого ряду?
8. Запишіть ряд Тейлора.
9. Як визначаються коефіцієнти ряду Тейлора?
10. Як визначається радіус збіжності ряду Тейлора?
11. Де збігаються ряди для функцій $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$?
12. Який ряд називається рядом Лорана?
13. Які назви мають частини ряду Лорана з додатними та від'ємними степенями $z-z_0$?

14. Як знаходяться коефіцієнти ряду Лорана?
15. Що є областю збіжності ряду Лорана?
16. Що називається нулем функції?
17. Що називається простим нулем функції?
18. Що називається нулем n-го порядку функції?
19. Дайте означення ізольованої особливої точки функції.
20. Яка точка називається усувною особливою?
21. Що таке полюс?
22. Яка точка називається істотно особливою ізольованою точкою?
23. Сформулюйте необхідну та достатню умову існування полюса.
24. Сформулюйте необхідну та достатню умову усувної особливості.
25. Сформулюйте необхідну та достатню умову істотно особливої ізольованої точки.

III. Приклади розв'язання задач

У цьому пункті розглянуто 15 прикладів розв'язання задач, які за своєю тематикою розподілились так:

1. Числові ряди: *приклад 1*.
2. Степеневі ряди: *приклад 2*.
3. Ряди Тейлора та Лорана: *приклади 3 – 10*.
4. Нулі та ізольовані особливі точки: *приклади 11 – 15*.

Числові ряди

Приклад 1. Дослідити на збіжність задані ряди.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos in}{2^n}$.

► а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{n^2}$.

Скористаємось тим, що $e^{in}=\cos n+i\sin n$. Тоді

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}.$$

Тому для дослідження збіжності даного ряду, треба з’ясувати збіжність рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2}$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$. Кожний з них збігається абсолютно за ознакою порівняння. Порівнюємо зазначені ряди з рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, який збіжний як узагальнений гармонічний ряд при $p=2>1$. Звідси даний ряд абсолютно збіжний.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos in}{2^n}$.

Перетворимо заданий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos in}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{ch} n}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n+e^{-n}}{2^{n+1}}.$$

Цей ряд розбіжний, оскільки не виконується необхідна ознака збіжності

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^n+e^{-n}}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{e}{2}\right)^n+\frac{1}{(2e)^n}\right)=\infty. \blacktriangleleft$$

Степеневі ряди

Приклад 2. Знайти радіуси збіжності заданих рядів.

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\cos in\cdot z^n$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1+i)^n z^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{\ln in}\right)^n$.

► а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\cos in\cdot z^n$.

Маємо, що $c_n=\cos in=\frac{e^n+e^{-n}}{2}=\operatorname{ch} n$. Тоді

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch}(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch} n\cdot\operatorname{ch}1+\operatorname{sh} n\cdot\operatorname{sh}1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\operatorname{ch}1+\operatorname{th} n\cdot\operatorname{sh}1}=\frac{1}{\operatorname{ch}1+\operatorname{sh}1}=e^{-1},$$

оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{th} n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^n+e^{-n}}{e^n-e^{-n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+e^{-2n}}{1-e^{-2n}}=1$.

Отже, радіус збіжності заданого степеневого ряду $R=1$.

б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1+i)^n z^n$.

Маємо $c_n=(1+i)^n$. Тоді $|c_n|=\left|(1+i)^n\right|=|1+i|^n=(\sqrt{2})^n=2^{n/2}$.

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{2^{n/2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отже, радіус збіжності заданого степеневого ряду $R=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{\ln in}\right)^n$.

Маємо $c_n=\frac{1}{(\ln in)^n}$. Тоді

$$|c_n|=\left|\frac{1}{(\ln in)^n}\right|=\frac{1}{|\ln in|^n}=\frac{1}{\left|\ln n+i\frac{\pi}{2}\right|^n}=\frac{1}{\left(\sqrt{\ln^2 n+\frac{\pi^2}{4}}\right)^n}.$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\ln^2 n+\frac{\pi^2}{4}}=+\infty.$$

Отже, радіус збіжності заданого степеневого ряду $R=+\infty$. ◄

Ряди Тейлора та Лорана

Приклад 3. Розкласти функцію $f(z)=\cos z$ в ряд за степенями $z+\frac{\pi}{4}$.

► Перетворимо задану функцію.

$$\cos z=\cos\left(\left(z+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(z+\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}+\sin\left(z+\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(z+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(z+\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Далі використовуємо формули (3.57) та (3.56) розкладу функцій $\cos z$ та $\sin z$ в ряд за степенями z, замінивши в них z на $z+\frac{\pi}{4}$. Маємо

$$\cos z=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{\left(z+\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!}+\frac{\left(z+\frac{\pi}{4}\right)^4}{4!}-\frac{\left(z+\frac{\pi}{4}\right)^6}{6!}+\ldots+\right.$$

$$\left.+\left(z+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\left(z+\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!}+\frac{\left(z+\frac{\pi}{4}\right)^5}{5!}-\frac{\left(z+\frac{\pi}{4}\right)^7}{7!}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\left(z+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\left(z+\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!}-\frac{\left(z+\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!}+\frac{\left(z+\frac{\pi}{4}\right)^4}{4!}+\frac{\left(z+\frac{\pi}{4}\right)^5}{5!}-\ldots\right).$$

Радіус збіжності даного ряду $R=+\infty$, бо функція $f(z)=\cos z$ не має особливих точок. ◄

Приклад 4. Розкласти задану функцію в ряд за степенями z.

а) $f(z)=\dfrac{z+1}{z^2+4z-5}$; б) $f(z)=\ln(2+z-z^2)$.

► а) $f(z)=\dfrac{z+1}{z^2+4z-5}$.

Перетворимо задану функцію, що є правильним раціональним дробом, на суму найпростіших дробів:

$$f(z)=\frac{z+1}{z^2+4z-5}=\frac{z+1}{(z+5)(z-1)}.$$

$$\frac{z+1}{(z+5)(z-1)}=\frac{A}{z+5}+\frac{B}{z-1},$$

$$z+1=A(z-1)+B(z+5),$$

$$\begin{cases} A+\ B=1, \\ -A+5B=1 \end{cases} \Rightarrow \quad A=\frac{2}{3},\ B=\frac{1}{3}.$$

Отже,

$$f(z)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{z+5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z-1}=\frac{2}{3\cdot 5}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{5}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-z}.$$

Останнє перетворення виконано для того, щоб застосувати формули (3.64) та (3.65) розкладу в ряд за степенями z функцій $\frac{1}{1+z}$ та $\frac{1}{1-z}$. При цьому в першій з них слід замінити z на $\frac{z}{5}$, другу – використати безпосередньо.

$$f(z)=\frac{2}{15}\left(1-\frac{z}{5}+\frac{z^2}{5^2}-\frac{z^3}{5^3}+\frac{z^4}{5^4}-\ldots\right)-\frac{1}{3}(1+z+z^2+\ldots)=$$

$$=-\frac{1}{5}-\frac{9}{25}z-\frac{41}{125}z^2-\ldots.$$

Радіус збіжності даного ряду $R=1$, бо найближчою до точки $z_0=0$ особливою точкою є точка $z=1$.

б) $f(z)=\ln(2+z-z^2)$.

Перетворимо задану функцію.

$$f(z)=\ln(2+z-z^2)=\ln[-(z^2-z-2)]=\ln[-(z-2)(1+z)]=\ln(2-z)+\ln(1+z).$$

Далі перетворимо кожний з доданків з метою застосування формул (3.61) та (3.60) розкладу в ряд за степенями z функцій $\ln(1-z)$ та $\ln(1+z)$:

$$\ln(2-z)=\ln\left[2\left(1-\frac{z}{2}\right)\right]=\ln 2+\ln\left(1-\frac{z}{2}\right)=\ln 2-\frac{z}{2}-\frac{z^2}{2^2\cdot 2}-\frac{z^3}{2^3\cdot 3}-\frac{z^4}{2^4\cdot 4}-\ldots,$$

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\ldots.$$

Отже,

$$f(z)=\ln 2+\frac{z}{2}-\frac{z^2\cdot 5}{8}+\frac{z^3\cdot 7}{3\cdot 8}-\ldots.$$

Знайдемо радіус збіжності отриманого ряду. З цією метою знайдемо особливі точки даної функції з рівняння $2+z-z^2=0$. Корені цього рівняння $z=2$, $z=-1$ є особливими точками. Найближчою до точки $z_0=0$ є особлива точка $z=-1$. Отже, радіус збіжності $R=1$. ◄

Приклад 5. Знайти декілька перших членів розкладу в ряд за степенями z функції $f(z)=\dfrac{1}{2+\sin z}$ та знайти радіус збіжності цього ряду.

► Шуканий ряд має вигляд

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \qquad (1)$$

де

$$c_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n=0,1,2,\ldots. \qquad (2)$$

Знаходимо послідовно $f^{(n)}(z)$ та $f^{(n)}(0)$:

$$f(z)=\frac{1}{2+\sin z}=(2+\sin z)^{-1}, \quad f(0)=\frac{1}{2};$$

$$f'(z)=-(2+\sin z)^{-2}\cos z, \quad f'(0)=-\frac{1}{4};$$

$$f''(z)=2(2+\sin z)^{-3}\cos^2 z+(2+\sin z)^{-2}\sin z, \quad f''(0)=2\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{4};$$

$$f'''(z)=-6(2+\sin z)^{-4}\cos^3 z-2(2+\sin z)^{-3}2\cos z\sin z-$$

$$-2(2+\sin z)^{-3}\cos z\sin z+(2+\sin z)^{-2}\cos z, \quad f'''(0)=-6\cdot\frac{1}{16}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{8}.$$

Далі знаходимо значення коефіцієнтів c_n за формулою (2) та, підставляючи ці значення в ряд (1), отримуємо

$$f(z)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}z+\frac{1}{2^2}\cdot\frac{z^2}{2!}-\frac{1}{2^3}\cdot\frac{z^3}{3!}+\ldots.$$

Знайдемо радіус збіжності R. Для цього знаходимо особливі точки функції $f(z)$, які є коренями рівняння

$$2+\sin z=0,$$

$$2+\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=0,$$

$$4i+e^{iz}-e^{-iz}=0,$$

$$e^{2iz}+4ie^{iz}-1=0.$$

Покладемо $e^{iz}=t$, тоді

$$t^2+4it-1=0,$$

$$t=-2i\pm\sqrt{-4+1},$$

$$t=-2i\pm i\sqrt{3},$$

$$t_1=-2i-i\sqrt{3}=-i(2+\sqrt{3}), \quad t_2=-i(2-\sqrt{3}).$$

Отже,

$$e^{iz}=-i(2\pm\sqrt{3}),$$

$$iz=\ln(-i(2\pm\sqrt{3}))=\ln\left|-i(2\pm\sqrt{3})\right|+i\left(-\frac{\pi}{2}\right)+2\pi k i,$$

$$z=-i\ln\left|2\pm\sqrt{3}\right|-\frac{\pi}{2}+2\pi k,$$

$$\text{при } k=0 \quad z=-i\ln\left|2\pm\sqrt{3}\right|-\frac{\pi}{2}.$$

Точка $z=-i\ln\left|2-\sqrt{3}\right|-\dfrac{\pi}{2}$ найближча до $z_0=0$. Отже, відстань від знайденої точки до точки $z_0=0$ є радіусом збіжності, тобто

$$R=\sqrt{\ln^2(2-\sqrt{3})+\frac{\pi^2}{4}}. ◄$$

Приклад 6. Знайти область збіжності заданого ряду.

а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^{n+1}}{z^n}$; б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{b^n}$, $b\neq 0$.

► а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^{n+1}}{z^n}$.

За умовою $c_{-n}=(1+i)^{n+1}$, $c_{-n-1}=(1+i)^{n+2}$, $z_0=0$. Тому

$$r=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{-n-1}|}{|c_{-n}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|(1+i)^{n+2}\right|}{\left|(1+i)^{n+1}\right|}=\lim_{n\to\infty}|1+i|=\sqrt{2}.$$

Отже, даний ряд збігається в області $|z|>\sqrt{2}$.

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{b^n}$, $b\neq 0$.

За умовою $c_{-n}=a^n$, $c_{-n-1}=a^{n+1}$. Тому

$$r=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{-n-1}|}{|c_{-n}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|a^{n+1}\right|}{\left|a^n\right|}=|a|.$$

За умовою $c_n=\dfrac{1}{b^n}$, $c_{n+1}=\dfrac{1}{b^{n+1}}$. Тому

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|b^{n+1}\right|}{\left|b^n\right|}=|b|.$$

Отже, якщо $|a|<|b|$, то ряд збіжний в кільці $|a|<|z|<|b|$. Якщо $|a|>|b|$, то ряд всюди розбіжний. ◄

Приклад 7. Розкласти функцію $f(z)=\dfrac{1}{(z^2-1)^2}$ в ряд Лорана в кільці $0<|z-1|<2$.

► *Спосіб 1.* $f(z)=\dfrac{1}{(z^2-1)^2}$ – аналітична функція в кільці $0<|z-1|<2$. Коефіцієнти ряду Лорана знаходимо за формулою (3.73)

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\frac{1}{(z^2-1)^2}}{(z-1)^{n+1}}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dz}{(z-1)^{n+3}(z+1)^2},$$

де Γ – довільне коло з центром в точці $z_0=1$, що міститься в заданому кільці.

Якщо $n+3\le 0$, тобто $n\le 3$, то підінтегральна функція $\dfrac{1}{(z-1)^{n+3}(z+1)^2}$ аналітична в усіх точках, що містяться всередині кола Γ, в тому числі і в точці $z_0=1$. У цьому випадку

$$\int_\Gamma \frac{dz}{(z-1)^{n+3}(z+1)^2}=0,$$

тобто $c_n=0$ при $n=-3,-4,\ldots$.

Якщо $n+3>0$, тобто $n>-3$, то застосувавши формулу для похідної n - го порядку від аналітичної функції

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz,$$

одержимо

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\frac{1}{(z+1)^2}}{(z-1)^{n+3}}\,dz=\frac{1}{(n+2)!}\frac{d^{n+2}}{dz^{n+2}}\left[\frac{1}{(z+1)^2}\right]\Bigg|_{z=1}=$$

$$=\frac{1}{(n+2)!}\,\frac{(-1)^n(n+3)!}{(z+1)^{n+4}}\Bigg|_{z=1}=\frac{(-1)^n(n+3)}{2^{n+4}}.$$

Отже, для $n=-2,-1,0,1,2,\ldots$ маємо $c_n=\dfrac{(-1)^n(n+3)}{2^{n+4}}$.

Ряд Лорана для заданої функції в кільці $0<|z-1|<2$ має вигляд:

$$\frac{1}{(z^2-1)^2}=\sum_{n=-2}^{\infty}c_n(z-1)^n=\sum_{n=-2}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+3)}{2^{n+4}}(z-1)^n$$

або

$$\frac{1}{(z^2-1)^2}=\frac{1}{4}\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{4}\frac{1}{z-1}+\frac{3}{16}-\frac{1}{8}(z-1)+\frac{5}{64}(z-1)^2-\frac{3}{64}(z-1)^3+\ldots.$$

Спосіб 2. Згідно з умовою треба представити функцію $f(z)$ у вигляді суми степенів (додатних та від'ємних) різниці $(z-1)$. Перетворимо задану функцію, розклавши вираз $\dfrac{1}{z^2-1}$ на суму найпростіших дробів.

Тоді

$$f(z)=\frac{1}{(z^2-1)^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right)^2=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(z-1)^2}-2\frac{1}{z^2-1}+\frac{1}{(z+1)^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{4}\frac{1}{z-1}+\frac{1}{4}\frac{1}{z+1}+\frac{1}{4}\frac{1}{(z+1)^2}. \qquad (1)$$

Перші два доданки подані в потрібному вигляді (містять $(z-1)$ у від'ємних степенях), а два інші перетворимо. Запишемо їх у вигляді

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{(z-1)+2}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{z-1}{2}+\frac{(z-1)^2}{2^2}-\frac{(z-1)^3}{2^3}+\ldots\right), \qquad (2)$$

$$\frac{1}{(z+1)^2}=\frac{1}{4}\left[1+\left(\frac{z-1}{2}\right)\right]^{-2}=\frac{1}{4}\left[1-2\,\frac{z-1}{2}+\frac{-2(-2-1)}{2!}\left(\frac{z-1}{2}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{-2(-2-1)(-2-2)}{3!}\left(\frac{z-1}{2}\right)^3+\ldots\right]. \qquad (3)$$

Для запису правої частини формули (2) скористались формулою (3.64) розкладу функції $\dfrac{1}{1+z}$ в степеневий ряд за степенями z, замінивши z на $\dfrac{z-1}{2}$. Для запису правої частини формули (3) скористались формулою (3.63) (біноміальний ряд), поклавши $\alpha=-2$.

Підставивши отримані вирази з формул (2) та (3) у формулу (1), маємо

$$\frac{1}{(z^2-1)^2}=\frac{1}{4}\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{4}\frac{1}{z-1}+\frac{1}{8}\left(1-\frac{z-1}{2}+\frac{(z-1)^2}{2^2}-\frac{(z-1)^3}{2^3}+\ldots\right)+$$
$$+\frac{1}{16}\left(1-(z-1)+\frac{3}{2^2}(z-1)^2-\frac{4}{2^3}(z-1)^3+\ldots\right)$$

або

$$\frac{1}{(z^2-1)^2}=\frac{1}{4}\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{4}\frac{1}{z-1}+\frac{3}{16}-\frac{1}{8}(z-1)+\frac{5}{64}(z-1)^2-\frac{3}{64}(z-1)^3+\ldots. \blacktriangleleft$$

Приклад 8. Знайти всі розклади в ряд Лорана функції $f(z)=\dfrac{2z+1}{z^2+z-2}$ за степенями z, в залежності від її особливих точок.

► Функція $f(z)=\dfrac{2z+1}{z^2+z-2}=\dfrac{2z+1}{(z+2)(z-1)}$ має дві особливі точки: $z_1=-2$ та $z_2=1$, звідки маємо три "кільця" з центром у точці $z_0=0$, в яких функція буде аналітичною:

а) круг $|z|<1$;

б) кільце $1<|z|<2$;

в) $2<|z|<+\infty$ – зовнішність круга $|z|\le 2$.

Знайдемо ряд Лорана для функції $f(z)$ за степенями z у кожному "кільці".

Представимо $f(z)$ у вигляді суми найпростіших дробів:

$$f(z)=\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\frac{2z+1}{(z+2)(z-1)}=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}.$$

а) розкладання функції в крузі $|z|<1$.

$$f(z)=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}}-\frac{1}{1-z}. \qquad (1)$$

Скористаємось формулами (3.65) та (3.64):

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\ldots, \qquad |z|<1, \qquad (2)$$

$$\frac{1}{1+\frac{z}{2}}=1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}-\frac{z^3}{2^3}+\ldots, \qquad |z|<2. \qquad (3)$$

Підставивши вирази (2) та (3) у формулу (1), маємо

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\frac{1}{2}-\frac{z}{4}+\frac{z^2}{8}-\frac{z^3}{16}+\ldots-(1+z+z^2+z^3+\ldots)=$$
$$=-\frac{1}{2}-\frac{5}{4}z-\frac{7}{8}z^2-\frac{17}{16}z^3+\ldots.$$

Цей розклад є рядом Тейлора функції $f(z)$.

б) розкладання функції в кільці $1<|z|<2$.

Для розглядуваного кільця скористатись представленням функції $f(z)$ у вигляді (1) не можна, бо для функції $\dfrac{1}{1+\frac{z}{2}}$ написаний в п.а) ряд (3) буде збіжним в кільці, тому що $|z|<2$, але для функції $\dfrac{1}{1-z}$ при $|z|>1$ написаний в п.а) ряд (2) буде розбіжним.

Тому перетворимо $f(z)$ таким чином:

$$f(z)=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}}+\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}. \qquad (4)$$

Далі, застосовуючи формулу (3.65), отримуємо

$$\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\ldots. \qquad (5)$$

Цей ряд збіжний при $\dfrac{1}{|z|}<1$, тобто $|z|>1$.

Підставивши вирази (3) та (5) у формулу (4), отримуємо

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}-\frac{z^3}{2^3}+\ldots\right)+\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\ldots\right)=$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{z}{4}+\frac{z^2}{8}-\frac{z^3}{16}+\ldots+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\ldots=\ldots+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+\frac{1}{2}-\frac{z}{4}+\frac{z^2}{8}-\frac{z^3}{16}+\ldots$$

або

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}z^n.$$

в) розкладання функції при $|z|>2$.

Для розглядуваної області $|z|>2$ скористатись представленням функції $f(z)$ у вигляді (4) не можна, бо ряд (5) для функції $\dfrac{1}{1-\frac{1}{z}}$ збігається, бо він є збіжним для $|z|>1$, а отже і для $|z|>2$, але ряд (3) для функції $\dfrac{1}{1+\frac{z}{2}}$ при $|z|>2$ розбігається.

Тому функцію $f(z)$ представимо у вигляді:

$$f(z)=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{2}{z}}+\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1+\frac{2}{z}}+\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right). \quad (6)$$

Далі, застосовуючи формулу (3.64), отримуємо:

$$\frac{1}{1+\frac{2}{z}}=1-\frac{2}{z}+\left(\frac{2}{z}\right)^2-\left(\frac{2}{z}\right)^3+\ldots. \quad (7)$$

Підставивши вирази (7) та (5) у формулу (6), маємо

$$f(z)=\frac{1}{z}\left(1-\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}-\frac{8}{z^3}+\ldots+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{z}\left(2-\frac{1}{z}+\frac{5}{z^2}-\frac{7}{z^3}+\ldots\right)$$

або

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\frac{2}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{5}{z^3}-\frac{7}{z^4}+\ldots.$$

Аналізуючи результати п. а), б), в), бачимо, що ряд Лорана для однієї і тієї ж функції має різний вигляд для різних “кілець”. ◄

Приклад 9. Розкласти функцію $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2}$ в ряд Лорана в околі точки $z=0$.

► Скористаємось формулою (3.56) розкладу функції $\sin z$.

$$\frac{\sin z}{z^2}=\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n-1}}{(2n+1)!}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n-1}}{(2n+1)!}, \quad z\neq 0.$$

Знайдемо область збіжності отриманого ряду.

$$c_n=\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}, \quad c_{n+1}=\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!},$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+3)!}{(2n+1)!}\right|=\lim_{n\to\infty}(2n+2)(2n+3)=+\infty.$$

Отже, ряд збіжний в області $0<|z|<+\infty$. ◄

Приклад 10. Розкласти функцію $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$ в ряд Лорана у вказаних кільцях:

а) $2<|z|<3$; б) $3<|z|<+\infty$.

► а) $2<|z|<3$.

Представимо задану функцію у вигляді

$$f(z)=\frac{1}{(z-2)(z-3)}=\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z-2}. \quad (1)$$

$$\frac{1}{z-3}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{3}}=-\frac{1}{3}\left(1+\frac{z}{3}+\frac{z^2}{3^2}+\frac{z^3}{3^3}+\ldots+\frac{z^n}{3^n}+\ldots\right), \quad |z|<3,$$

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)}=\frac{1}{z}\left(1+\frac{2}{z}+\frac{2^2}{z^2}+\frac{2^3}{z^3}+\ldots+\frac{2^n}{z^n}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}+\frac{2^2}{z^3}+\frac{2^3}{z^4}+\ldots+\frac{2^{n-1}}{z^n}+\ldots, \quad |z|>2.$$

Отже,

$$f(z)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n}-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n, \quad 2<|z|<3.$$

б) $3<|z|<+\infty$.

Скористаємось представленням функції $f(z)$ у вигляді (1).

$$\frac{1}{z-3}=\frac{1}{z\left(1-\frac{3}{z}\right)}=\frac{1}{z}\left(1+\frac{3}{z}+\frac{3^2}{z^2}+\ldots+\frac{3^n}{z^n}+\ldots\right)=\frac{1}{z}+\frac{3}{z^2}+\ldots+\frac{3^n}{z^{n+1}}+\ldots, \; |z|>3,$$

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)}=\frac{1}{z}\left(1+\frac{2}{z}+\frac{2^2}{z^2}+\ldots+\frac{2^n}{z^n}+\ldots\right)=\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}+\ldots+\frac{2^n}{z^{n+1}}+\ldots, \; |z|>3.$$

Отже,

$$f(z)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}}-\left(\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-2^n}{z^{n+1}}, \quad 3<|z|<+\infty . ◄$$

Нулі та ізольовані особливі точки функцій

Приклад 11. Знайти нулі функцій.

а) $f(z)=1+\cos z$; б) $f(z)=z^4+4z^2$.

► а) $f(z)=1+\cos z$.

Прирівнюючи функцію до нуля, отримуємо рівняння $\cos z=-1$, звідки $z_n=(2n+1)\pi$, $n\in \mathbf{Z}$ – нулі заданої функції.

Далі

$f'((2n+1)\pi)=-\sin(2n+1)\pi=0$,

$f''((2n+1)\pi)=-\cos(2n+1)\pi=1\neq 0$.

Звідси, точки $z_n=(2n+1)\pi$, $n\in \mathbf{Z}$ є нулями другого порядку заданої функції.

б) $f(z)=z^4+4z^2$.

Покладемо $f(z)=0$. Тоді

$$z^2(z^2+4)=0,$$

$$z^2(z-2i)(z+2i)=0.$$

Звідси знаходимо нулі функції $f(z)$: $z=0$, $z=-2i$, $z=2i$.

Нехай $z=0$, тоді функцію $f(z)$ представимо у вигляді

$$f(z)=z^2(z^2+4)=z^2\,\varphi(z),$$

де функція $\varphi(z)=z^2+4$ є аналітичною в точці $z=0$, причому $\varphi(0)=4\neq 0$. Це означає, що точка $z=0$ є нулем другого порядку.

Нехай $z=-2i$, тоді функцію $f(z)$ представимо у вигляді

$$f(z)=z^2(z-2i)(z+2i)=(z+2i)\varphi(z),$$

де $\varphi(z)=z^3-2iz^2$ є аналітичною в точці $z=-2i$, причому

$$\varphi(-2i)=(-2i)^3-2i(-2i)^2=2(-2i)^3=2\cdot 8i=16i\neq 0.$$

Це означає, що точка $z=-2i$ є нулем першого порядку.

Аналогічно досліджується, що точка $z=2i$ – нуль першого порядку. ◄

Приклад 12. Знайти порядок нуля $z_0=0$ функції

$$f(z)=\frac{z^8}{z-\sin z}.$$

► Використаємо розклад функції $\sin z$ в ряд Тейлора в околі точки $z_0=0$. Отримаємо

$$f(z)=\frac{z^8}{z-\sin z}=\frac{z^8}{z-\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots\right)}=\frac{z^8}{\frac{z^3}{3!}-\frac{z^5}{5!}+\frac{z^7}{7!}-\ldots}=$$

$$=\frac{z^5}{\frac{1}{3!}-\frac{z^2}{5!}+\frac{z^4}{7!}-\ldots}.$$

Покладемо $\varphi(z)=\dfrac{1}{\frac{1}{3!}-\frac{z^2}{5!}+\frac{z^4}{7!}-\ldots}$. Тоді $f(z)=z^5\varphi(z)$, де $\varphi(z)$ – функція аналітична в точці $z_0=0$ і $\varphi(0)=6\neq 0$. Звідси $z_0=0$ є нулем п'ятого порядку для заданої функції $f(z)$. ◄

Приклад 13. Визначити характер особливої точки z_0 для заданих функцій.

а) $f(z)=\dfrac{1}{z^2}$; б) $f(z)=\dfrac{1}{2+z^2-2\operatorname{ch} z}$.

► а) $f(z)=\dfrac{1}{z^2}$.

Особлива точка $z_0=0$. Покладемо $z=re^{i\varphi}$, тоді $f(z)=\dfrac{e^{-i2\varphi}}{r^2}$, $|f(z)|=\dfrac{1}{r^2}$, звідси випливає, що $|f(z)|$ необмежено зростає, коли $z_0\to 0$ за будь-яким законом, тобто $\lim\limits_{z\to 0} f(z)=\infty$.

Отже, точка $z_0=0$ є полюсом цієї функції. Для функції $\varphi(z)=z^2$ точка $z_0=0$ – нуль другого порядку і звідси для функції $f(z)=\dfrac{1}{z^2}$ точка $z_0=0$ – полюс другого порядку.

б) $f(z)=\dfrac{1}{2+z^2-2\operatorname{ch} z}$.

Точка $z_0=0$ – полюс функції $f(z)$, тому що вона є нулем знаменника, а чисельник функції $f(z)$ відмінний від нуля.

Розглянемо функцію $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}=2+z^2-2\operatorname{ch} z$. Для неї $\varphi(0)=0$. Знаходимо порядок нуля $z_0=0$ цієї функції. Маємо

$\varphi'(z)=2z-2\operatorname{sh} z\big|_{z_0=0}=0$,

$\varphi''(z)=2-2\operatorname{ch} z\big|_{z_0=0}=0$,

$\varphi'''(z)=-2\operatorname{sh} z\big|_{z_0=0}=0$,

$\varphi^{IV}(z)=-2\operatorname{ch} z\big|_{z_0=0}=-2\neq 0$.

Таким чином, $z_0=0$ – нуль четвертого порядку для $\varphi(z)$.

Отже, $z_0=0$ – полюс четвертого порядку для даної функції $f(z)$. ◀

Приклад 14. Визначити характер особливих точок заданих функцій.

а) $f(z)=\dfrac{1}{\cos z-1+\dfrac{z^2}{2}}$; б) $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^2}$;

в) $f(z)=e^{\frac{1}{z+1}}$; г) $f(z)=e^{-\frac{1}{z^9}}$.

▶ а) $f(z)=\dfrac{1}{\cos z-1+\dfrac{z^2}{2}}$.

Введемо функцію

$$\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}=\cos z-1+\frac{z^2}{2}=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots-1+\frac{z^2}{2}=$$
$$=z^4\left(\frac{1}{4!}-\frac{z^2}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n-4}}{(2n)!}+\ldots\right).$$

Точка $z=0$ – нуль четвертого порядку для функції $\varphi(z)$, а звідси для функції $f(z)$ – полюс четвертого порядку.

б) $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^2}$.

Перетворимо задану функцію.

$$f(z)=\frac{1-\cos z}{z^2}=\frac{2\sin^2\frac{z}{2}}{z^2}.$$

Точка $z=0$ є усувною особливою точкою функції $f(z)$, бо існує скінченна границя $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{z}{2}}{z^2}=\dfrac{1}{2}$.

в) $f(z)=e^{\frac{1}{z+1}}$.

Розкладемо в ряд задану функцію за степенями $z+1$.

$$f(z)=e^{\frac{1}{z+1}}=1+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{2!(z+1)^2}+\ldots+\frac{1}{n!(z+1)^n}+\ldots.$$

У розкладі присутня безліч членів з від'ємними степенями $z+1$, тому точка $z=-1$ є істотно особливою точкою для функції $f(z)$.

г) $f(z)=e^{-\frac{1}{z^9}}$.

Розкладемо в ряд задану функцію за степенями z.

$$f(z)=e^{-\frac{1}{z^9}}=1-\frac{1}{z^9}+\frac{1}{2!(z^9)^2}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!(z^9)^n}+\ldots.$$

Точка $z=0$ є істотно особливою точкою, бо у розкладі присутня безліч членів з від'ємними степенями z. ◀

Приклад 15. Визначити характер вказаних особливих точок z_0 заданих функцій.

а) $f(z)=\dfrac{1+\cos z}{z-\pi}$, $z_0=\pi$; б) $f(z)=\dfrac{\ln(1+z^3)}{z^2}$, $z_0=0$;

в) $f(z)=\dfrac{\sin^2 z}{z}$, $z_0=0$; г) $f(z)=\cos\dfrac{1}{z+\pi}$, $z_0=-\pi$;

д) $f(z)=\dfrac{e^{z+e}}{z+e}$, $z_0=-e$.

► а) $f(z)=\dfrac{1+\cos z}{z-\pi},\ \ z_0=\pi$.

Перетворимо задану функцію та використовуємо розклад функції $\cos z$ в ряд Тейлора.

$$f(z)=\frac{1-\cos(z-\pi)}{z-\pi}=\frac{1-\left(1-\frac{(z-\pi)^2}{2!}+\frac{(z-\pi)^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n(z-\pi)^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right)}{z-\pi}=$$

$$=\frac{z-\pi}{2!}-\frac{(z-\pi)^3}{4!}+\frac{(z-\pi)^6}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^n(z-\pi)^{2n-1}}{(2n)!}+\ldots.$$

Цей розклад не містить головної частини. Тому точка $z_0=\pi$ – усувна особлива точка.

б) $f(z)=\dfrac{\ln(1+z^3)}{z^2},\ \ z_0=0$.

$$f(z)=\frac{\ln(1+z^3)}{z^2}=\frac{z^3-\frac{(z^3)^2}{2}+\frac{(z^3)^3}{3}-\frac{(z^3)^4}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}(z^3)^n}{n}+\ldots}{z^2}=$$

$$=z-\frac{z^4}{2}+\frac{z^7}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}z^{3n-2}}{n}+\ldots.$$

Точка $z_0=0$ – усувна особлива точка, бо в розкладі відсутня головна частина.

в) $f(z)=\dfrac{\sin^2 z}{z},\ \ z_0=0$.

Перетворимо задану функцію та розкладемо її в ряд за степенями z.

$$f(z)=\frac{1-\cos 2z}{2z}=\frac{1}{2z}\left(1-1+\frac{(2z)^2}{2!}-\frac{(2z)^4}{4!}+\ldots\right)=\frac{2z}{2!}-\frac{(2z)^3}{4!}+\ldots.$$

Точка $z_0=0$ – усувна особлива точка, бо в розкладі відсутня головна частина.

г) $f(z)=\cos\dfrac{1}{z+\pi},\ \ z_0=-\pi$.

Розкладемо задану функцію в ряд за степенями $z+\pi$.

$$f(z)=\cos\frac{1}{z+\pi}=1-\frac{1}{2!(z+\pi)^2}+\frac{1}{4!(z+\pi)^4}-\frac{1}{6!(z+\pi)^6}+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!(z+\pi)^{2n}}+\ldots.$$

Точка $z_0=-\pi$ є істотно особливою точкою, бо у розкладі присутня безліч членів з від'ємними степенями $z+\pi$.

д) $f(z)=\dfrac{e^{z+e}}{z+e},\ \ z_0=-e$.

Розкладемо задану функцію в ряд за степенями $z+e$.

$$f(z)=\frac{e^{z+e}}{z+e}=\frac{1}{z+e}\left(1+(z+e)+\frac{(z+e)^2}{2!}+\frac{(z+e)^3}{3!}+\ldots+\frac{(z+e)^n}{n!}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{z+e}+1+\frac{z+e}{2!}+\frac{(z+e)^2}{3!}+\ldots+\frac{(z+e)^{n-1}}{n!}+\ldots.$$

Точка $z_0=-e$ – простий полюс, бо у розкладі присутній один доданок з від'ємним степенем $z+e$. ◄

IV. Задачі для практичних занять

Числові ряди

У задачах 3.125 – 3.130 дослідити на збіжність задані ряди.

3.125. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{n}$. **3.126.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\sin in}{3^n}$. **3.127.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos in^2}{5^{n^2}}$.

3.128. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{i2n}}{n\sqrt{n}}$. **3.129.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{\sqrt{n}}$. **3.130.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{\operatorname{tg} i\pi n}$.

Степеневі ряди

У задачах 3.131 – 3.138 знайти радіуси збіжності заданих степеневих рядів.

3.131. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{in}z^n$. **3.132.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{i\frac{\pi}{n}}z^n$.

3.133. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{z}{1-i}\right)^n$. **3.134.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{z}{in}\right)^n$.

3.135. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{ch}\dfrac{i}{n}\cdot z^n$. **3.136.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}i^n z^n$.

3.137. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin i\pi}{n}z^n$. **3.138.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{\sin^n(1+in)}$.

Ряди Тейлора та Лорана

У задачах 3.139 – 3.146 задані функції розкласти в ряд Тейлора, використовуючи відомі розклади та знайти радіуси збіжності знайдених рядів.

3.139. $f(z)=\dfrac{z}{z^2-2z-3}$ за степенями z.

3.140. $f(z)=\dfrac{1}{3-2z}$ за степенями $z-3$.

3.141. $f(z)=\sin(2z+1)$ за степенями $z+1$.

3.142. $f(z)=e^z$ за степенями $2z-1$.

3.143. $f(z)=\dfrac{1}{3z+1}$ за степенями $z+2$.

3.144. $f(z)=\cos^2\dfrac{iz}{2}$ за степенями z.

3.145. $f(z)=\mathrm{sh}^2\dfrac{z}{2}$ за степенями z.

3.146. $f(z)=\ln(2-z)$ за степенями z.

У задачах 3.147 – 3.151 знайти декілька перших членів розкладу в ряд за степенями z заданих функцій. Знайти радіуси збіжності знайдених рядів.

3.147. $f(z)=\dfrac{1}{1+e^z}$. **3.148.** $f(z)=\dfrac{1}{e^{-z}+5}$.

3.149. $f(z)=\ln(1+e^{-z})$. **3.150.** $f(z)=\ln\cos z$.

3.151. $f(z)=\ln(1+\cos z)$.

У задачах 3.152 – 3.160 знайти області збіжності заданих рядів.

3.152. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin in}{(z+i)^n}$. **3.153.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(1-i)^n z^n}$.

3.154. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^n}{z^n}$. **3.155.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^{-n}}{\cos in}$.

3.156. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{e}{i}\right)^n\dfrac{1}{z^n}$. **3.157.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4^n(z+1)^n}$.

3.158. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\cdot 2^{-n}}{(z-(2+i))^n}$. **3.159.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+1}{(z+2i)^n}$.

3.160. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z+1-i)^{-n}}{n+i}$.

3.161. Розкласти в ряд Лорана функцію $f(z)=z^2\cos\dfrac{1}{z}$ в околі точки $z_0=0$.

3.162. Розкласти в ряд Лорана функцію $f(z)=\dfrac{2z-3}{z^2-3z+2}$ в околі її особливих точок.

У задачах 3.163 – 3.164 задані функції розкласти в ряд Лорана в околі точки $z_0=0$ (за степенями z).

3.163. а) $f(z)=\dfrac{e^z}{z}$; б) $f(z)=\dfrac{e^z}{z^3}$; в) $f(z)=z^3e^{1/z}$.

3.164. а) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2}$; б) $f(z)=\dfrac{\sin^2 z}{z}$; в) $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^2}$.

У задачах 3.165 – 3.170 розкласти задані функції в ряд Лорана у вказаних кільцях.

3.165. $f(z)=\dfrac{1}{z^2+z}$; а) $0<|z|<1$; б) $1<|z|<+\infty$.

3.166. $f(z)=\dfrac{1}{(z+2)(z^2+1)}$; а) $1<|z|<4$; б) $4<|z|<+\infty$.

3.167. $f(z)=\dfrac{2z+3}{z^2+3z+2}$; $1<|z|<2$.

3.168. $f(z)=\dfrac{z^2-z+3}{z^2-3z+2}$;

а) $0<|z|<1$; б) $1<|z|<2$; в) $2<|z|<+\infty$.

3.169. $f(z)=\dfrac{z}{(z^2-4)(z^2-1)}$; $1<|z|<2$.

3.170. а) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$; $0<|z-i|<2$;

б) $f(z)=\dfrac{1}{(z^2-4)^2}$; $4<|z+2|<+\infty$.

3.171. Знайти всі розклади в ряд Лорана заданої функції $f(z)$ за степенями $z-z_0$, в залежності від її особливих точок.

а) $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$, $z_0=1$; б) $f(z)=\dfrac{z+1}{z^2-3z+2}$, $z_0=1$.

Нулі та ізольовані особливі точки функцій

У задачах 3.172 – 3.175 знайти нулі функцій та визначити їх порядок.

3.172. а) $f(z)=(z^2+1)^3\operatorname{sh}z$; б) $f(z)=(z+\pi i)\operatorname{sh}z$.

3.173. а) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$; б) $f(z)=z^2\sin z$.

3.174. а) $f(z)=1+\operatorname{ch}z$; б) $f(z)=\dfrac{(1-\operatorname{sh}z)^2}{z}$.

3.175. а) $f(z)=(z^2+\pi^2)(1+e^{-z})$; б) $f(z)=\cos z+\operatorname{ch}iz$.

3.176. Знайти порядок нуля $z_0=0$ для заданих функцій.

а) $f(z)=\dfrac{z^6}{\left(\dfrac{z}{2}\right)^2-\left(\sin\dfrac{z}{2}\right)^2}$; б) $f(z)=e^{\sin z}-e^{\operatorname{tg}z}$.

У задачах 3.177 – 3.180 визначити характер особливої точки $z_0=0$ для заданих функцій.

3.177. а) $f(z)=\dfrac{1}{z-\sin z}$; б) $f(z)=\dfrac{1}{e^{-z}+z-1}$.

3.178. а) $f(z)=\dfrac{\sin z}{e^{-z}+z-1}$; б) $f(z)=\dfrac{\operatorname{sh}z}{z-\operatorname{sh}z}$.

3.179. а) $f(z)=\dfrac{1}{1-\sin z}$; б) $f(z)=\cos\dfrac{1}{z}$.

3.180. а) $f(z)=\dfrac{z}{z^5+2z^4+z^3}$; б) $f(z)=\dfrac{1}{e^{-z}-1}+\dfrac{1}{z^2}$.

У задачах 3.181 – 3.187 визначити характер вказаних особливих точок заданих функцій.

3.181. а) $f(z)=\dfrac{1-e^{-z}}{z}$, $z_0=0$;

б) $f(z)=(z-1)e^{1/(z-1)}$, $z_0=1$.

3.182. $f(z)=\dfrac{z^2-3z+2}{z^2-2z+1}$, $z_0=1$.

3.183. $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2}$, $z_0=0$.

3.184. $f(z)=\dfrac{\operatorname{sh}z}{z}$, $z_0=1$.

3.185. $f(z)=\dfrac{z^2-1}{z^6+2z^5+z^4}$, $z_0=0$, $z_1=-1$.

3.186. $f(z)=\cos\dfrac{1}{z}+\sin\dfrac{2-\pi z}{2z}$, $z_0=0$.

3.187. $f(z)=z\operatorname{sh}\dfrac{1}{z}$, $z_0=0$.

§6. Лишки функцій та їх застосування

I. Короткі теоретичні відомості

Основні поняття та формули для обчислення лишків

Нехай точка z_0 – ізольована особлива точка функції $f(z)$. *Лишком* функції $f(z)$ в точці z_0 називається число, що позначається $\operatorname{res} f(z_0)$ і яке визначається рівністю

$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z)\,dz\,, \qquad (3.76)$$

де за контур γ можна взяти коло з центром у точці z_0 достатньо малого радіуса і такого, щоб коло не виходило за межі області аналітичності функції $f(z)$ і не містило всередині інших особливих точок функції $f(z)$.

Допускаються також інші позначення лишку: $\operatorname{res}\left[f(z);z_0\right]$, $\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)$.

Лишок функції дорівнює коефіцієнту c_{-1} при $(z-z_0)^{-1}$ в лорановім розкладі функції $f(z)$ в околі точки $z = z_0$:

$$\operatorname{res} f(z_0) = c_{-1}\,. \qquad (3.77)$$

Якщо z_0 – *усувна особлива точка* функції $f(z)$, то

$$\operatorname{res} f(z_0) = 0\,. \qquad (3.78)$$

Якщо точка z_0 – *полюс n - го порядку* функції $f(z)$, то

$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (f(z)(z-z_0)^n)\,. \qquad (3.79)$$

Якщо *полюс простий* ($n=1$), то

$$\operatorname{res} f(z_0) = \lim_{z\to z_0} (f(z)(z-z_0))\,. \qquad (3.80)$$

Якщо функція $f(z)$ в околі точки z_0 може бути подана як частка двох аналітичних функцій $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, причому $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, а $\psi'(z_0) \neq 0$, тобто z_0 – *простий полюс*, то

$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}\,. \qquad (3.81)$$

Якщо точка z_0 – *істотно особлива точка* функції $f(z)$, то лишок обчислюється за формулою (3.77), тобто

$$\operatorname{res} f(z_0) = c_{-1}\,. \qquad (3.82)$$

Основна теорема про лишки

Теорема Коші. Якщо функція $f(z)$ аналітична на межі C області D і всюди всередині області, за винятком скінченного числа особливих точок $z_1, z_2, \ldots, z_n$, то

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(z_k)\,. \qquad (3.83)$$

Теорема використовується для обчислення інтегралів за допомогою лишків.

Застосування лишків до обчислення визначених та невласних інтегралів

1. *Інтеграли вигляду*

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)\,dx\,, \qquad (3.84)$$

де R – раціональна функція від $\cos x$ та $\sin x$, скінченна всередині проміжку інтегрування.

Покладемо $e^{ix} = z$, тоді $dx = \dfrac{dz}{iz}$ і $\cos x = \dfrac{z^2+1}{2z}$, $\sin x = \dfrac{z^2-1}{2iz}$.

Очевидно, що в цьому випадку $|z| = 1$, бо $0 \le x \le 2\pi$.

Тоді інтеграл (3.84) приймає вигляд

$$\int_C F(z)\,dz\,,$$

де C – коло одиничного радіуса з центром у початку координат.

Згідно з теоремою Коші про лишки

$$\int_C F(z)\,dz = 2\pi i\,\sigma\,, \qquad (3.85)$$

де σ – сума лишків функції $F(z)$ відносно полюсів, що містяться всередині кола C.

2. *Інтеграли вигляду*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx\,, \qquad (3.86)$$

де $f(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, $P_m(x)$, $Q_n(x)$ – многочлени степенів m та n відповідно. Якщо функція $f(x)$ неперервна на всій дійсній осі ($Q_n(x) \neq 0$) і $n \ge m+2$, тобто степінь знаменника хоча б на дві одиниці більше степеня чисельника, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sigma\,, \qquad (3.87)$$

де σ – сума лишків функції $f(z) = \dfrac{P_m(z)}{Q_n(z)}$ у всіх полюсах, що розташовані у верхній півплощині.

3. *Інтеграли вигляду*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx\,, \tag{3.88}$$

коли

$$f(z) = e^{i\alpha z}F(z), \quad \alpha > 0\,, \tag{3.89}$$

функція $F(z)$ аналітична на дійсній осі, у верхній півплощині має скінченне число особливих точок $z_1, z_2, \ldots, z_n$ і $\lim\limits_{z\to\infty} F(z) = 0$.

У цьому випадку справедлива формула

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(z_k)\,. \tag{3.90}$$

Перетворимо функцію $f(z)$.

$$f(z) = e^{i\alpha z}F(z) = (\cos\alpha z + i\sin\alpha z)\,F(z) = F(z)\cos\alpha z + i\,F(z)\sin\alpha z\,. \tag{3.91}$$

Тоді

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (F(x)\cos\alpha x + i\,F(x)\sin\alpha x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\cos\alpha x\,dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\sin\alpha x\,dx\,.$$

Враховуючи формулу (3.90), маємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\cos\alpha x\,dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\sin\alpha x\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(z_k)\,. \tag{3.92}$$

Прирівнюючи дійсні та уявні частини виразів, що стоять зліва та справа у формулі (3.92), отримуємо значення інтегралів, що містяться зліва в цій формулі.

Отже, в розглядуваному випадку приходимо до обчислення *інтегралів вигляду*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\cos\alpha x\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\sin\alpha x\,dx\,. \tag{3.93}$$

II. Контрольні питання та завдання

1. Що називається лишком функції?
2. Чому дорівнює лишок в усувній особливій точці?
3. Як обчислити лишок у полюсі?
4. Як обчислити лишок в істотно особливій точці?

5. Чому дорівнює лишок функції в n-кратному полюсі?
6. Сформулюйте теорему Коші про лишки. Як вона застосовується для обчислення інтегралів?
7. Для обчислення яких типів визначених інтегралів застосовуються лишки?
8. Для обчислення яких типів невласних інтегралів застосовуються лишки?

III. Приклади розв'язання задач

Обчислення лишків

Приклад 1. Знайти лишки функцій в їх особливих точках.

а) $f(z) = \dfrac{\sin z^2}{z^3 - \frac{\pi}{4}z^2}$; б) $f(z) = \dfrac{\operatorname{ch} z}{(z^2+1)(z-3)}$.

► а) $f(z) = \dfrac{\sin z^2}{z^3 - \frac{\pi}{4}z^2}$.

Особливими точками функції $f(z) = \dfrac{\sin z^2}{z^3 - \frac{\pi}{4}z^2} = \dfrac{\sin z^2}{z^2\left(z - \frac{\pi}{4}\right)}$ є точки $z = 0$ і $z = \dfrac{\pi}{4}$.

Визначимо характер особливих точок.

У точці $z = 0$ маємо

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z^2}{z^2\left(z - \frac{\pi}{4}\right)} = \lim_{z\to 0}\frac{\sin z^2}{z^2}\lim_{z\to 0}\frac{1}{z - \frac{\pi}{4}} = -\frac{4}{\pi}\,.$$

Звідси точка $z = 0$ – усувна особлива точка функції $f(z)$. Тому

$$\operatorname{res} f(0) = 0\,.$$

У точці $z = \dfrac{\pi}{4}$ маємо $\lim\limits_{z\to\frac{\pi}{4}} f(z) = \infty$, тобто точка $z = \dfrac{\pi}{4}$ – полюс першого порядку функції $f(z)$. Згідно з формулою (3.80) обчислення лишку для простого полюса

$$\operatorname{res} f(z_0)=\lim_{z\to z_0}\left(f(z)(z-z_0)\right),$$

маємо

$$\operatorname{res} f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\lim_{z\to\frac{\pi}{4}} f(z)\left(z-\frac{\pi}{4}\right)=\lim_{z\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin z^2}{z^2\left(z-\frac{\pi}{4}\right)}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)=\lim_{z\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin z^2}{z^2}=$$

$$=\frac{16}{\pi^2}\sin\frac{\pi^2}{16}.$$

б) $f(z)=\dfrac{\operatorname{ch} z}{(z^2+1)(z-3)}$.

Особливі точки заданої функції $z=i$, $z=-i$, $z=3$.

Далі доведемо, що це прості полюси і для обчислення лишків скористаємось формулою (3.81)

$$\operatorname{res} f(z_0)=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Точка $z=i$.

$$f(z)=\frac{\frac{\operatorname{ch} z}{(z+i)(z-3)}}{z-i}=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \text{ тоді}$$

$$\varphi(i)=\frac{\operatorname{ch} i}{2i(i-3)}=\frac{\cos 1\cdot(i+3)i}{2\cdot 10}=\frac{\cos 1\cdot(-1+3i)}{20}\neq 0.$$

$\psi(i)=0$, $\psi'(i)=1\neq 0$.

Отже, точка $z=i$ – простий полюс.

Таким чином, $\operatorname{res} f(i)=\dfrac{\varphi(i)}{\psi'(i)}=\dfrac{\cos 1\cdot(-1+3i)}{20}=-\dfrac{(1-3i)\cos 1}{20}$.

Точка $z=-i$.

$$f(z)=\frac{\frac{\operatorname{ch} z}{(z-i)(z-3)}}{z+i}=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \text{ тоді}$$

$$\varphi(-i)=\frac{\operatorname{ch}(-i)}{-2i(-i-3)}=-\frac{\cos 1\cdot(3-i)i}{2\cdot 10}=\frac{-\cos 1\cdot(1+3i)}{20}\neq 0.$$

$\psi(-i)=0$, $\psi'(-i)=1\neq 0$.

Отже, точка $z=-i$ – простий полюс.

Таким чином, $\operatorname{res} f(i)=\dfrac{\varphi(i)}{\psi'(i)}=\dfrac{-\cos 1\cdot(1+3i)}{20}=-\dfrac{(1+3i)\cos 1}{20}$.

Точка $z=3$.

$$f(z)=\frac{\frac{\operatorname{ch} z}{z^2+i}}{z-3}=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \text{ тоді } \varphi(3)=\frac{\operatorname{ch} 3}{9+1}=\frac{\operatorname{ch} 3}{10}\neq 0.$$

$\psi(3)=0$, $\psi'(3)=1\neq 0$.

Отже, точка $z=3$ – простий полюс.

Таким чином, $\operatorname{res} f(i)=\dfrac{\varphi(i)}{\psi'(i)}=\dfrac{\operatorname{ch} 3}{10}$. ◄

Приклад 2. Знайти лишки в особливих точках заданих функції.

а) $f(z)=\dfrac{e^z}{z^3(z-1)}$; б) $f(z)=\dfrac{z^{2n}}{(z-1)^n}$, $n\in\mathbf{N}$.

► а) $f(z)=\dfrac{e^z}{z^3(z-1)}$.

Особливими точками заданої функції є $z=1$ – простий полюс, $z=0$ – полюс третього порядку.

При $z=1$ для обчислення лишку скористаємось формулою (3.80)

$$\operatorname{res} f(z_0)=\lim_{z\to z_0}\left(f(z)(z-z_0)\right).$$

Отже,

$$\operatorname{res} f(1)=\lim_{z\to 1}\frac{e^z(z-1)}{z^3(z-1)}=e.$$

При $z=0$ для обчислення лишку скористаємось формулою (3.79)

$$\operatorname{res} f(z_0)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(f(z)(z-z_0)^n\right),$$

поклавши $n=3$.

Отже,

$$\operatorname{res} f(0)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{e^z z^3}{z^3(z-1)}\right)=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{e^z}{z-1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^z(z-1)-e^z}{(z-1)^2}\right)=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^z(z-2)}{(z-1)^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{(e^z(z-2)+e^z)(z-1)^2-2(z-1)e^z(z-2)}{(z-1)^4}=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{e^z((z-1)^2-2(z-2))}{(z-1)^3}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{e^z(z^2-2z+1-2z+4)}{(z-1)^3}=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{e^z(z^2-4z+5)}{(z-1)^3}=-\frac{5}{2}.$$

б) $f(z)=\dfrac{z^{2n}}{(z-1)^n}$, $n\in\mathbf{N}$.

Особливою точкою заданої функції є $z=1$ – полюс n - го порядку.

Для обчислення лишку скористаємось формулою (3.79)

$$\operatorname{res} f(z_0)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(f(z)(z-z_0)^n).$$

Тоді

$$\operatorname{res} f(1)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\frac{z^{2n}(z-1)^n}{(z-1)^n}\right)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z^{2n})=$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{d^{n-2}}{dz^{n-2}}(2nz^{2n-1})=\frac{1}{(n-1)!}2n(2n-1)\lim_{z\to 1}\frac{d^{n-3}}{dz^{n-3}}(z^{2n-2})=$$

$$=\frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(2n-(n-2))}{(n-1)!}=\frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+2)}{(n-1)!}\cdot\frac{(n+1)!}{(n+1)!}=$$

$$=\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}.\blacktriangleleft$$

Приклад 3. Знайти лишки в особливих точках заданих функції.

а) $f(z)=z^3e^{1/z}$; б) $f(z)=e^{z^2+\frac{1}{z^2}}$.

► а) $f(z)=z^3e^{1/z}$.

Особлива точка заданої функції $z=0$. Визначимо її характер.

Перетворимо функцію $f(z)$.

$$f(z)=z^3e^{1/z}=z^3\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{4!z^4}+\ldots+\frac{1}{n!z^n}+\ldots\right)=$$

$$=z^3+z^2+\frac{z}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!z}+\frac{1}{5!z^2}+\ldots+\frac{1}{n!z^{n-3}}+\ldots.$$

Отже, $z=0$ – істотно особлива точка, бо головна частина ряду має безліч членів.

Отже, $\operatorname{res} f(z_0)=c_{-1}$, тобто $\operatorname{res} f(0)=\dfrac{1}{4!}=\dfrac{1}{24}$.

б) $f(z)=e^{z^2+\frac{1}{z^2}}$.

Особлива точка заданої функції $z=0$.

Нехай $u=z^2+\dfrac{1}{z^2}$, тоді

$$e^u=1+u+\frac{u^2}{2!}+\frac{u^3}{3!}+\ldots+\frac{u^n}{n!}+\ldots$$

або

$$e^{z^2+\frac{1}{z^2}}=1+z^2+\frac{1}{z^2}+\frac{\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)^2}{2!}+\frac{\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)^3}{3!}+\ldots+\frac{\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)^n}{n!}+\ldots.$$

Оскільки в доданках присутні тільки парні степені z^2 і $\dfrac{1}{z^2}$, то в розкладі не буде z^{-1}, а членів з від'ємними степенями z нескінченна множина.

Отже, $z=0$ – істотна особлива точка і тоді

$$\operatorname{res} f(0)=c_{-1}=0.\blacktriangleleft$$

Застосування теореми Коші про лишки до обчислення інтегралів

Приклад 4. Обчислити інтеграли.

а) $I=\displaystyle\int_{|z|=4}\frac{e^z-1}{z^2+z}dz$; б) $I=\displaystyle\int_{|z|=\sqrt{3}}\frac{\sin\pi z}{z^2-z}dz$.

► а) $I=\displaystyle\int_{|z|=4}\frac{e^z-1}{z^2+z}dz$.

В області $|z|<4$ функція $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z^2+z}$ аналітична всюди, крім точок $z=0$, $z=-1$. За теоремою Коші про лишки

$$I=\int_{|z|=4}\frac{e^z-1}{z^2+z}dz=2\pi i(\operatorname{res} f(0)+\operatorname{res} f(-1)).$$

Точка $z=0$ – усувна особлива точка, бо $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{e^z-1}{z(z+1)}=1$ і тому $\operatorname{res} f(0)=0$.

Точка $z=-1$ – полюс першого порядку і тому

$$\operatorname{res} f(-1)=\lim_{z\to -1}\frac{(e^z-1)(z+1)}{z(z+1)}=\lim_{z\to -1}\frac{e^z-1}{z}=1-e^{-1}.$$

Таким чином,

$$I=\int\limits_{|z|=4}\frac{e^z-1}{z^2+z}dz=2\pi i(1-e^{-1}).$$

б) $I=\int\limits_{|z|=\sqrt{3}}\dfrac{\sin\pi z}{z^2-z}dz$.

Особливими точками підінтегральної функції в крузі $|z|<\sqrt{3}$ є точки $z=0,\ z=1$. Це усувні особливі точки, бо

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin\pi z}{z(z-1)}=\lim_{z\to 0}\frac{\pi z-\frac{(\pi z)^3}{3!}+\frac{(\pi z)^5}{5!}-\ldots+\frac{(-1)^n(\pi z)^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots}{z(z-1)}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\pi z\left(1-\frac{(\pi z)^2}{3!}+\frac{(\pi z)^4}{5!}-\ldots+\frac{(-1)^n(\pi z)^{2n}}{(2n+1)!}+\ldots\right)}{z(z-1)}=-\pi,$$

Або інакше

$$\lim_{z\to 1}\frac{\sin\pi z}{z(z-1)}=\left|\begin{array}{c} z=u+1\\ z\to 1,\ u\to 0\end{array}\right|=\lim_{u\to 0}\frac{\sin(\pi+\pi u)}{u(u+1)}=-\lim_{u\to 0}\frac{\sin\pi u}{u(u+1)}=-\pi.$$

Отже,

$$\operatorname{res} f(0)=\operatorname{res} f(1)=0.$$

За теоремою Коші

$$I=\int\limits_{|z|=\sqrt{3}}\frac{\sin\pi z}{z^2-z}dz=2\pi i\cdot 0=0. \blacktriangleleft$$

Приклад 5. Обчислити інтеграли.

а) $I=\int\limits_{|z|=1} z\operatorname{tg}\pi z\,dz$; б) $I=\int\limits_{|z|=2}\dfrac{e^z}{z^3(z+1)}dz$;

в) $I=\int\limits_{|z-i|=1}\dfrac{e^z}{z^4+2z^2+1}dz$.

► а) $I=\int\limits_{|z|=1} z\operatorname{tg}\pi z\,dz$.

В області $|z|<1$ функція $f(z)=z\operatorname{tg}\pi z$ аналітична всюди, крім точок $z=\frac{1}{2}$ і $z=-\frac{1}{2}$. Ці точки – прості полюси. Всі інші особливі точки містяться поза цією областю $\left(z_k=\frac{1}{2}+k,\ k=1,\pm 2,\ldots\right)$.

Тоді

$$\operatorname{res} f\left(\frac{1}{2}\right)=z\cdot\frac{\sin\pi z}{(\cos\pi z)'}\bigg|_{z=\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}}{-\pi\sin\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{2\pi},$$

$$\operatorname{res} f\left(-\frac{1}{2}\right)=z\cdot\frac{\sin\pi z}{(\cos\pi z)'}\bigg|_{z=-\frac{1}{2}}=\frac{-\frac{1}{2}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{-\pi\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{2\pi}.$$

За теоремою Коші

$$I=\int\limits_{|z|=1} z\cdot\operatorname{tg}\pi z\,dz=2\pi i\left(-\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{2\pi}\right)=0.$$

б) $I=\int\limits_{|z|=2}\dfrac{e^z}{z^3(z+1)}dz$.

Особливими точками підінтегральної функції в крузі $|z|<2$ є точки $z=0$ – полюс третього порядку і $z=-1$ – простий полюс.

Тоді

$$\operatorname{res} f(0)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{e^z z^3}{z^3(z+1)}\right)=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{e^z}{(z+1)}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^z(z+1)-e^z}{(z+1)^2}\right)=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\frac{ze^z}{(z+1)^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{(ze^z+e^z)(z+1)^2-ze^z\cdot 2(z+1)}{(z+1)^4}=\lim_{z\to 0}\frac{e^z(z^2+2z+1-2z)}{2(z+1)^3}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{e^z}{2}\frac{z^2+1}{(z+1)^3}=\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{res} f(-1)=\left.\frac{\dfrac{e^z}{z^3}}{(z+1)'}\right|_{z=-1}=-e^{-1}.$$

За теоремою Коші

$$I=\oint_{|z|=2}\frac{e^z dz}{z^3(z+1)}=2\pi i\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{e}\right)=\pi i(1-2e^{-1}).$$

в) $I=\oint\limits_{|z-i|=1}\dfrac{e^z}{z^4+2z^2+1}dz$.

Особливою точкою підінтегральної функції $f(z)=\dfrac{e^z}{z^4+2z^2+1}=$ $=\dfrac{e^z}{(z^2+1)^2}$ в крузі $|z-i|<1$ є точка $z=i$ – полюс другого порядку.

Тоді

$$\operatorname{res} f(i)=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^z(z-i)^2}{(z-i)^2(z+i)^2}\right)=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^z}{(z+i)^2}\right)=$$

$$=\lim_{z\to i}\frac{e^z(z+i)^2-2(z+i)e^z}{(z+i)^4}=\lim_{z\to i}\frac{e^z(z+i-2)}{(z+i)^3}=\frac{e^i(2i-2)}{(2i)^3}=$$

$$=-\frac{2e^i(i-1)}{8i}=-\frac{(1+i)e^i}{4}.$$

За теоремою Коші

$$I=\oint_{|z-i|=1}\frac{e^z dz}{z^4+2z^2+1}=2\pi i\left(-\frac{(1+i)e^i}{4}\right)=\frac{\pi(1-i)e^i}{2}=$$

$$=\frac{\pi}{2}(1-i)(\cos 1+i\sin 1)=\frac{\pi}{2}(\cos 1+\sin 1+i(\sin 1-\cos 1)).\ ◄$$

Приклад 6. Обчислити інтеграли.

а) $I=\oint\limits_{|z|=1}z^3\sin\dfrac{1}{z}dz$; б) $I=\oint\limits_{|z|=\frac{2}{3}}\left(\sin\dfrac{1}{z^2}+e^{z^2}\cos z\right)dz$.

► а) $I=\oint\limits_{|z|=1}z^3\sin\dfrac{1}{z}dz$.

Особливою точкою підінтегральної функції в крузі $|z|<1$ є точка $z=0$. Розкладемо підінтегральну функцію в околі точки $z=0$ в ряд Лорана.

$$f(z)=z^3\sin\frac{1}{z}=z^3\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}-\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!z^{2n+1}}+\ldots\right)=$$

$$=z^2-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!z^2}-\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!z^{2n-2}}+\ldots.$$

Оскільки в розкладі безліч членів з від'ємним степенем z, то точка $z=0$ – істотно особлива точка. В наведеному розкладі функції в ряд Лорана коефіцієнт $c_{-1}=0$ і тому $\operatorname{res} f(0)=c_{-1}=0$.

Отже, за теоремою Коші

$$I=\oint_{|z|=1}z^3\sin\frac{1}{z}dz=2\pi i\cdot 0=0.$$

б) $I=\oint\limits_{|z|=\frac{2}{3}}\left(\sin\dfrac{1}{z^2}+e^{z^2}\cos z\right)dz$.

Для підінтегральної функції $f(z)=\sin\dfrac{1}{z^2}+e^{z^2}\cos z$ в крузі $|z|<\dfrac{2}{3}$ особливою точкою є точка $z=0$, яка є істотно особливою, бо в розкладі функції в ряд Лорана безліч членів з від'ємними степенями z.

У розкладі функції $\sin\dfrac{1}{z^2}$ в ряд Лорана коефіцієнт при z^{-1} дорівнює нулю. Функція $e^{z^2}\cos z$ парна. Функції e^{z^2} і $\cos z$ всюди в крузі $|z|<\dfrac{2}{3}$ аналітичні, тому їх можна розкласти тільки в ряди Тейлора (від'ємні степені відсутні). Отже, $\operatorname{res} f(0)=c_{-1}=0$.

Тоді за теоремою Коші

$$I=\oint_{|z|=\frac{2}{3}}\left(\sin\frac{1}{z^2}+e^{z^2}\cos z\right)dz=2\pi i\cdot 0=0.\ ◄$$

Застосування лишків до обчислення визначених інтегралів

Приклад 7. Обчислити інтеграл

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1-2p\cos x+p^2},\quad 0<p<1.$$

► Виконаємо підстановку $e^{ix} = z$ і після перетворень отримуємо інтеграл від функції комплексної змінної

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2p\cos x + p^2} = \left| \begin{array}{c} e^{ix} = z, \quad ix = \ln z \\ x = \frac{1}{i}\ln z, \quad dx = \frac{1}{i}\frac{dz}{z} \\ \cos x = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{z^2+1}{2z} \\ 0 \le x \le 2\pi, \quad |z| = 1 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{z\left(1 - 2p\frac{z^2+1}{2z} + p^2\right)} = \frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{z - p(z^2+1) + p^2 z} =$$

$$= i\int_{|z|=1} \frac{dz}{pz^2 - (p^2+1)z + p}. \qquad (1)$$

Знайдемо полюси підінтегральної функції.

$$pz^2 - (p^2+1)z + p = 0,$$

$$z = \frac{(p^2+1) \pm \sqrt{(p^2+1)^2 - 4p^2}}{2p},$$

$$z = \frac{(p^2+1) \pm (p^2-1)}{2p},$$

$$z_1 = p, \quad z_2 = \frac{1}{p}.$$

Оскільки за умовою $0 < p < 1$, то в крузі $|z| \le 1$ міститься тільки один полюс (простий) $z = p$. Обчислимо лишок функції в цій точці.

$$\operatorname{res} f(p) = \lim_{z\to p} \frac{z-p}{pz^2 - (p^2+1)z + p} = \lim_{z\to p} \frac{z-p}{p(z-p)\left(z - \frac{1}{p}\right)} =$$

$$= \frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p - \frac{1}{p}} = \frac{1}{p^2-1}.$$

За теоремою Коші про лишки

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{p^2 z - (p^2+1)z + p} = 2\pi i \cdot \operatorname{res} f(p) = \frac{2\pi i}{p^2-1}.$$

Підставивши отриманий результат у формулу (1), маємо

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2p\cos p + p^2} = i\int_{|z|=1} \frac{dz}{p^2 z - (p^2+1)z + p} =$$

$$= i\,\frac{2\pi i}{p^2-1} = \frac{2\pi}{1-p^2}. \blacktriangleleft$$

Застосування лишків до обчислення невласних інтегралів

Приклад 8. Обчислити невласні інтеграли.

а) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)^2}$; б) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$;

в) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+4x+13)^2}\,dx$.

► а) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)^2}$.

Введемо допоміжну функцію $f(z) = \frac{1}{(z^2+9)^2}$. Вона неперервна на всій дійсній осі; має один полюс другого порядку $z_0 = 3i$, що міститься у верхній півплощині.

Тому, скориставшись формулою (3.87), маємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)^2} = 2\pi i \operatorname{res} f(3i),$$

де

$$\operatorname{res} f(3i) = \lim_{z\to 3i} \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(z^2+9)^2}(z-3i)^2\right) = \lim_{z\to 3i} \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(z^2+3i)^2}\right) =$$

$$= \lim_{z\to 3i}\left(-\frac{2}{(z^2+3i)^3}\right) = -\frac{2}{(6i)^3} = \frac{2}{6^3 i}.$$

Отже,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)^2} = 2\pi i\,\frac{2}{6^3 i} = \frac{\pi}{54}.$$

б) $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$.

Розглянемо функцію $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3}$. Вона неперервна на всій дійсній осі; має один полюс третього порядку $z_0 = i$, що міститься у верхній півплощині. Подамо функцію $f(z)$ у вигляді $f(z) = \frac{1}{(z+i)^3(z-i)^3}$. Тоді

$$\operatorname{res} f(i) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1\cdot(z-i)^3}{(z+i)^3(z-i)^3}\right) = \frac{1}{2}\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{(z+i)^3}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left(\frac{-3}{(z+i)^4}\right) = \frac{-3}{2}\lim_{z\to i}\frac{-4}{(z+i)^5} = -\frac{3(-4)}{2}\frac{1}{(2i)^5} = \frac{12}{2^6\cdot i} = -\frac{3i}{16}.$$

Отже,

$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} = 2\pi i\left(-\frac{3i}{16}\right) = \frac{3\pi}{8}.$$

в) $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+4x+13)^2}\,dx$.

Розглянемо функцію $f(z) = \frac{z}{(z^2+4z+13)^2}$, яка на дійсній осі (при $z = x$) неперервна і співпадає з підінтегральною функцією $f(x)$. Знайдемо полюси функції $f(z)$, що містяться у верхній півплощині. З цією метою знайдемо корені знаменника

$$z^2+4z+13 = 0,$$

$$z = -2 \pm \sqrt{-9},$$

$$z = -2 \pm 3i,$$

$$z_1 = -2+3i,\ \ z_2 = -2-3i.$$

Точка $z_1 = -2+3i$ – двократний полюс функції $f(z)$, який належить верхній півплощині. Знайдемо лишок функції $f(z)$ в цій точці.

$$\operatorname{res} f(-2+3i) = \lim_{z\to -2+3i}\frac{d}{dz}\left(\frac{z(z-(-2+3i)^2)}{(z+2+3i)^2(z-(-2+3i)^2)}\right) =$$

$$= \lim_{z\to -2+3i}\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{(z+2+3i)^2}\right) = \lim_{z\to -2+3i}\frac{(z+2+3i)^2 - 2(z+2+3i)z}{(z+2+3i)^4} =$$

$$= \lim_{z\to -2+3i}\frac{-z+2+3i}{(z+2+3i)^3} = \frac{2-3i+2+3i}{(-2+3i+2+3i)^3} = \frac{4}{(6i)^3} = \frac{4i}{6^3(-i)i} = \frac{i}{54}.$$

Отже,

$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+4x+13)^2} = 2\pi i\cdot\frac{i}{54} = -\frac{\pi}{27}. ◄$$

Приклад 9. Обчислити невласні інтеграли.

а) $I = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx,\ a>0$; б) $I = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$.

► а) $I = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx,\ a>0$.

Оскільки підінтегральна функція $f(x) = \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}$ – парна, то

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx.$$

Введемо функцію $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+a^2)^2}$, яка на всій дійсній осі неперервна і співпадає з $f(x)$. Функція $f(z)$ має у верхній півплощині полюс другого порядку в точці $z = ai$. Лишок функції $f(z)$ відносно цього полюса

$$\operatorname{res} f(ai) = \lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}(f(z)(z-ai)^2) = \lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{(z+ai)^2}\right) =$$

$$= \lim_{z\to ai}\frac{2aiz}{(z+ai)^3} = \frac{1}{4ai}.$$

Використаємо формулу (3.87)

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\,\sigma,$$

де σ – сума лишків функції $f(z)$ у всіх полюсах, що розташовані у верхній півплощині.

Тоді одержимо

$$I = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i\cdot\frac{1}{4ai} = \frac{\pi}{4a}.$$

б) $I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$.

Оскільки підінтегральна функція $f(x)=\frac{x^2+1}{x^4+1}$ – парна, то

$$I=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx.$$

Введемо функцію $f(z)=\frac{z^2+1}{z^4+1}$. Вона неперервна на всій дійсній осі. Особливими точками функції $f(z)$ є корені рівняння $z^4=-1$, тобто $z_k=\sqrt[4]{-1}$, $z_k=\sqrt[4]{e^{i\pi+2k\pi i}}$, $k=0,1,2,3$, або

$$z_0=e^{\frac{\pi i}{4}}=\frac{\sqrt2}{2}(1+i), \qquad z_1=e^{\frac{3\pi i}{4}}=\frac{\sqrt2}{2}(-1+i),$$

$$z_2=e^{\frac{5\pi i}{4}}=\frac{\sqrt2}{2}(-1-i), \qquad z_3=e^{\frac{7\pi i}{4}}=\frac{\sqrt2}{2}(1-i).$$

Верхній півплощині належать точки z_0 і z_1 – прості полюси функції $f(z)$. Знаходимо лишки функції $f(z)$ в цих точках, скориставшись формулою (3.81)

$$\operatorname{res} f(z_0)=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

$$\operatorname{res} f\left(e^{\frac{\pi i}{4}}\right)=\left.\frac{z^2+1}{4z^3}\right|_{z=e^{\frac{\pi i}{4}}}=\frac{e^{\frac{\pi i}{2}}+1}{4e^{\frac{3\pi i}{4}}}=\frac{i+1}{4\left(-\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}\right)}=$$

$$=\frac{(i+1)(-1-i)}{2\sqrt2\,(-1+i)(-1-i)}=\frac{-2i}{4\sqrt2}=\frac{-\sqrt2\,i}{4},$$

$$\operatorname{res} f\left(e^{\frac{3\pi i}{4}}\right)=\left.\frac{z^2+1}{4z^3}\right|_{z=e^{\frac{3\pi i}{4}}}=\frac{e^{\frac{3\pi i}{2}}+1}{4e^{\frac{9\pi i}{4}}}=\frac{-i+1}{4\left(\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}\right)}=$$

$$=\frac{(-i+1)(1-i)}{2\sqrt2\,(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{4\sqrt2}=\frac{-\sqrt2\,i}{4}.$$

Отже,

$$I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\frac12\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\frac12\,2\pi i\left(-\frac{\sqrt2}{4}i-\frac{\sqrt2}{4}i\right)=\frac{\pi\sqrt2}{2}=\frac{\pi}{\sqrt2}. \blacktriangleleft$$

Приклад 10. Обчислити невласні інтеграли.

а) $I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^2-2x+10}dx$;

б) $I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\sin ax}{x^2+k^2}dx$, $a>0,\ k>0$.

► а) $I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^2-2x+10}dx$.

Підінтегральна функція є дійсною частиною функції $\varphi(x)=\frac{x}{x^2-2x+10}\cdot e^{ix}$, значення якої на дійсній осі співпадають зі значеннями функції $f(z)=\frac{z}{z^2-2z+10}\cdot e^{iz}=F(z)e^{iz}$.

Функція $F(z)=\frac{z}{z^2-2z+10}$ аналітична на всій дійсній осі, має у верхній півплощині простий полюс $z_0=1+3i$ і $\lim\limits_{z\to\infty}F(z)=0$. Тому, скориставшись формулою (3.90), отримуємо

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,e^{ix}}{x^2-2x+10}dx=2\pi i\operatorname*{res}_{z=1+3i}f(z_0)=2\pi i\operatorname*{res}_{z=1+3i}\left(\frac{z\,e^{iz}}{z^2-2z+10}\right),$$

де

$$\operatorname*{res}_{z=1+3i}\left(\frac{z\,e^{iz}}{z^2-2z+10}\right)=\lim_{z\to1+3i}\frac{z\,e^{iz}\,(z-(1+3i))}{(z-(1+3i))(z-(1-3i))}=\lim_{z\to1+3i}\frac{z\,e^{iz}}{z-(1-3i)}=$$

$$=\frac{(1+3i)\,e^{i(1+3i)}}{6i}=\frac{(1+3i)\,e^{-3+i}}{6i}.$$

Отже,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,e^{ix}}{x^2-2x+10}dx=2\pi i\frac{(1+3i)\,e^{-3+i}}{6i}=\frac{\pi}{3}(1+3i)\,e^{-3+i}=$$

$$=\frac{\pi e^{-3}}{3}(\cos1-3\sin1+i\,(3\cos1+\sin1)).$$

Враховуючи, що $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, маємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+10}dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2-2x+10}dx = \frac{\pi e^{-3}}{3}(\cos 1 - 3\sin 1) +$$
$$+ i\,\frac{\pi e^{-3}}{3}(3\cos 1 + \sin 1).$$

Прирівнюючи дійсні частини, маємо значення інтеграла, який треба було обчислити за умовою.

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+10}dx = \frac{\pi e^{-3}(\cos 1 - 3\sin 1)}{3}.$$

Прирівнюючи уявні частини, одночасно обчислимо інтеграл

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2-2x+10}dx = \frac{\pi e^{-3}(3\cos 1 + \sin 1)}{3}.$$

б) $I = \int_{0}^{+\infty} \frac{x\sin ax}{x^2+k^2}dx, \ \ a>0, k>0.$

Оскільки підінтегральна функція парна, то

$$I = \int_{0}^{+\infty} \frac{x\sin ax}{x^2+k^2}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin ax}{x^2+k^2}dx.$$

Розглядаємо $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin ax}{x^2+k^2}dx$.

Підінтегральна функція є уявною частиною функції $\varphi(x) = \frac{x e^{iax}}{x^2+k^2}$, значення якої на дійсній осі співпадають зі значеннями функції $f(z) = \frac{z}{z^2+k^2}e^{iaz} = F(z)e^{iaz}$.

Функція $F(z) = \frac{z}{z^2+k^2}$ аналітична на всій дійсній осі, має у верхній півплощині простий полюс $z_0 = ik$ і $\lim\limits_{z\to\infty} F(z) = 0$. Тому, скориставшись формулою (3.90), отримуємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{iax}}{x^2+k^2}dx = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=ik} f(z) = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=ik}\left(\frac{z e^{iaz}}{z^2+k^2}\right),$$

де

$$\operatorname*{res}_{z=ik}\left(\frac{z e^{iaz}}{z^2+k^2}\right) = \lim_{z\to ik}\left(\frac{z e^{iaz}}{z^2+k^2}(z-ik)\right) = \lim_{z\to ik}\frac{z e^{iaz}}{z+ik} = \frac{1}{2}e^{-ak}.$$

Отже,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{iax}}{x^2+k^2}dx = 2\pi i\,\frac{1}{2}e^{-ak} = i\pi e^{-ak}.$$

Враховуючи, що $e^{iax} = \cos ax + i\sin ax$, маємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos ax}{x^2+k^2}dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin ax}{x^2+k^2}dx = i\pi e^{-ak}.$$

Звідси, прирівнюючи уявні частини, маємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin ax}{x^2+k^2}dx = \pi e^{-ak}.$$

Звідси отримуємо значення шуканого інтеграла.

$$I = \int_{0}^{+\infty} \frac{x\sin ax}{x^2+k^2}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin ax}{x^2+k^2}dx = \frac{\pi}{2}e^{-ak}. \blacktriangleleft$$

IV. Задачі для практичних занять

У задачах 3.188 – 3.198 знайти лишки заданих функцій в їх особливих точках .

3.188. $f(z) = \dfrac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}$. **3.189.** $f(z) = \dfrac{\operatorname{tg} z}{z^2 - \frac{\pi}{4}z}$.

3.190. $f(z) = \dfrac{z}{(z+1)^3(z-2)^2}$. **3.191.** $f(z) = z^2\sin\dfrac{1}{z}$.

3.192. $f(z) = \cos\dfrac{1}{z} + z^3$. **3.193.** $f(z) = \dfrac{\sin 2z}{(z+i)\left(z-\frac{i}{2}\right)^2}$.

3.194. $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{z^3(z-3)}$. **3.195.** $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{(z^2-1)(z+3)}$.

3.196. $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2\left(z-\frac{\pi}{2}\right)}$. **3.197.** $f(z) = \dfrac{e^{\pi z}}{z-i}$.

3.198. $f(z) = \operatorname{ctg}^2 z$.

У задачах 3.199 – 3.213 обчислити задані інтеграли, використовуючи теорему Коші про лишки.

3.199. $\int\limits_{|z|=2} \operatorname{tg} z\, dz$.

3.200. $\int\limits_{|z-i|=\frac{3}{2}} \frac{e^{1/z^2}}{z^2+1} dz$.

3.201. $\int\limits_C \frac{z\, dz}{(z-1)^2(z+2)}$, де $C: x^{2/3}+y^{2/3}=3^{2/3}$ – астроїда.

3.202. $\int\limits_{|z-i|=3} \frac{e^{z^2}-1}{z^3-i z^2} dz$.

3.203. $\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} z^2 \sin\frac{1}{z}\, dz$.

3.204. $\int\limits_{|z+1|=4} \frac{z}{e^z+3} dz$.

3.205. $\int\limits_{|z|=1} \frac{z^2}{\sin^3 z \cos z} dz$.

3.206. $\int\limits_{|z|=4} \frac{e^{iz}}{(z-\pi)^3} dz$.

3.207. $\int\limits_C \frac{\cos\frac{z}{2}}{z^2-4}\, dz$, $C: \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

3.208. $\int\limits_C \frac{e^{2z}}{z^3-1}\, dz$, $C: x^2+y^2-2x=0$.

3.209. $\int\limits_C \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^3}\, dz$, $C: \frac{x^2}{4}+y^2=1$.

3.210. $\int\limits_C \frac{z+1}{z^2+2z-3}\, dz$, $C: x^2+y^2=16$.

3.211. $\int\limits_C \frac{z\sin z}{(z-1)^5} dz$, $C: \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{9}=1$.

3.212. $\int\limits_C \frac{dz}{z^4+1}$, $C: x^2+y^2=2x$.

3.213. $\int\limits_{|z|=\frac{1}{3}} (z+1)\, e^{1/z} dz$.

У задачах 3.214 – 3.219 обчислити задані визначені інтеграли.

3.214. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(a+b\cos x)^2} \quad (a>b>0)$.

3.215. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos 2x}{1-2p\cos x+p^2} dx \quad (p>1)$.

3.216. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos x}{1-2p\sin x+p^2} dx \quad (0<p<1)$.

3.217. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{a+\cos x} \quad (a>1)$.

3.218. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{1+a\cos x} \quad (0<a<1)$.

3.219. $\int\limits_0^{\pi} \operatorname{ctg}(x-a)\, dx \quad (\operatorname{Im} a>0)$.

У задачах 3.220 – 3.225 обчислити задані невласні інтеграли.

3.220. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} \quad (a>0,\ b>0)$.

3.221. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}$.

3.222. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1} dx$.

3.223. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} dx$.

3.224. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^6+1}$.

3.225. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$.

У задачах 3.226 – 3.232 обчислити задані невласні інтеграли.

3.226. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+4x+20}dx$. **3.227.** $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$.

3.228. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+9}dx$. **3.229.** $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}dx \ (a>0)$.

3.230. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x\sin x}{1+x^2+x^4}dx$. **3.231.** $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^3\sin ax}{x^2+1}dx \ (a>0)$.

3.232. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2\cos x}{(1+x^2)^2}dx$.

ГЛАВА 4. ***ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ***

§1. Перетворення Лапласа

I. Короткі теоретичні відомості

Основні поняття. *Функцією-оригіналом* або *оригіналом* називається комплексна функція дійсної змінної $f(t)=u(t)+i\,v(t)$, яка задовольняє такі умови:

1) функція $f(t)$ неперервна або кусково-неперервна, тобто функція $f(t)$ інтегровна на будь-якому скінченному проміжку;

2) $f(t)=0$ при $t<0$;

3) існують такі сталі $M>0$, $s\ge 0$, що для всіх t виконується нерівність $|f(t)|<Me^{s_0 t}$ (величина $s_0=\inf s$ називається показником росту функції $f(t)$).

Зображенням функції-оригіналу $f(t)$ називається функція $F(p)$ комплексної змінної $p=s+i\sigma$, яка визначається рівністю

$$F(p)=\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt. \quad (4.1)$$

Інтеграл, що стоїть справа у формулі (4.1), називається *інтегралом Лапласа*. Цей інтеграл залежить від параметра p. Функцію $F(p)$ називають також L*-зображенням* або *лапласовим зображенням* функції $f(t)$.

Той факт, що $F(p)$ є зображенням $f(t)$ символічно записується так:

$$F(p) \risingdotseq f(t), \quad f(t) \fallingdotseq F(p), \quad F(p)=L\{f(t)\}.$$

Перетворенням Лапласа функції $f(t)$ називається перетворення, що ставить у відповідність функції дійсної змінної $f(t)$ функцію комплексної змінної $F(p)$ за формулою (4.1).

Теорема. Якщо $f(t)$ – функція-оригінал з показником росту s_0, то функція $F(p)$ *визначена* у півплощині $\operatorname{Re} p=s>s_0$ і є *аналітичною* в цій півплощині.

Найпростішою функцією-оригіналом є *одинична функція Хевісайда*

$$\eta(t)=\begin{cases}1, & t\ge 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

У подальшому під заданою за допомогою аналітичної формули функцією $f(t)$ розумітимемо функцію $f(t)\cdot\eta(t)$, тобто вважати, що $f(t)=0$ при $t<0$.

Виходячи з означення зображення, можна довести, що

$$\eta(t) \risingdotseq \frac{1}{p}$$

або записують так:

$$1 \risingdotseq \frac{1}{p}.$$

Властивості перетворення Лапласа

1^0. *Властивість лінійності.* Якщо $f_i(t) \risingdotseq F_i(p)$, $\alpha_i \in \mathbf{C}$, $i=\overline{1,n}$, то

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(t) \risingdotseq \sum_{i=1}^{n}\alpha_i F_i(p).$$

2^0. *Теорема подібності.* Якщо $f(t) \risingdotseq F(p)$, $\alpha\in\mathbf{R}$, $\alpha>0$, то

$$f(\alpha t) \risingdotseq \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

3^0. *Теорема запізнювання.* Якщо $f(t) \risingdotseq F(p)$, $\tau\in\mathbf{R}$, $\tau>0$, то

$$\eta(t-\tau)f(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau}F(p).$$

Теорему запізнювання зручно використовувати при знаходженні зображень функцій, які на різних проміжках задаються різними аналітичними виразами.

4^0. *Теорема зміщення.* Якщо $f(t) \risingdotseq F(p)$, $\alpha\in\mathbf{C}$, то

$$e^{-\alpha t}f(t) \risingdotseq F(p+\alpha).$$

5^0. *Диференціювання оригіналу.* Якщо функції $f(t)$, $f'(t)$, $f''(t),\ldots$, $f^{(n)}(t)$ є функціями-оригіналами і $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$f'(t) \risingdotseq pF(p)-f(0),$$

$$f''(t) \risingdotseq p^2F(p)-pf(0)-f'(0),$$

$$f'''(t) \risingdotseq p^3F(p)-p^2f(0)-pf'(0)-f''(0),$$

. . . .

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0).$$

Зокрема, якщо $f(0)=f'(0)=\ldots=f^{(n-1)}(0)=0$, то

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^nF(p).$$

6^0. *Диференціювання зображення.* Якщо $F(p) \risingdotseq f(t)$, то

$$F'(p) \risingdotseq -t f(t),$$

$$F''(p) \risingdotseq t^2 f(t),$$

$$F'''(p) \risingdotseq -t^3 f(t),$$

. . . .

$$F^{(n)}(p) \risingdotseq (-1)^n t^n f(t).$$

Останню формулу представимо у вигляді

$$t^n f(t) \risingdotseq (-1)^n F^{(n)}(p).$$

7^0. *Інтегрування оригіналу.* Якщо $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p}.$$

8^0. *Інтегрування зображення.* Якщо $F(p) \risingdotseq f(t)$ і $\int_p^{+\infty}F(p)\,dp$ збігається, то

$$\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int_p^{+\infty}F(p)\,dp.$$

9^0. *Теорема множення (теорема про згортку).*

Якщо $f_1(t) \risingdotseq F_1(p)$, $f_2(t) \risingdotseq F_2(p)$, то

$$f_1(t)*f_2(t) \risingdotseq F_1(p)\cdot F_2(p).$$

Тут вираз

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau=\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)\,d\tau$$

називається *згорткою* функцій $f_1(t)$ та $f_2(t)$.

10^0. *Формула Дюамеля.*

Якщо $f_1(t) \risingdotseq F_1(p)$, $f_2(t) \risingdotseq F_2(p)$, то

$$pF_1(p)F_2(p) \risingdotseq f_1(0)f_2(t)+f_1'(t)*f_2(t)=f_2(0)f_1(t)+f_2'(t)*f_1(t).$$

Враховуючи, що одинична функція Хевісайда $\eta(t) \risingdotseq \frac{1}{p}$, тобто $1 \risingdotseq \frac{1}{p}$, та введені властивості 1^0-10^0 перетворення Лапласа, можна побудувати таблицю зображень основних функцій.

Таблиця зображень основних функцій

	Оригінал $f(t)$	Зображення $F(p)$
1	1	$\dfrac{1}{p}$
2	$e^{-\alpha t}$	$\dfrac{1}{p+\alpha}$
3	$\sin\beta t$	$\dfrac{\beta}{p^2+\beta^2}$
4	$\cos\beta t$	$\dfrac{p}{p^2+\beta^2}$
5	$\mathrm{sh}\beta t$	$\dfrac{\beta}{p^2-\beta^2}$
6	$\mathrm{ch}\beta t$	$\dfrac{p}{p^2-\beta^2}$
7	$e^{-\alpha t}\sin\beta t$	$\dfrac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$
8	$e^{-\alpha t}\cos\beta t$	$\dfrac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$
9	$e^{-\alpha t}\mathrm{sh}\beta t$	$\dfrac{\beta}{(p+\alpha)^2-\beta^2}$
10	$e^{-\alpha t}\mathrm{ch}\beta t$	$\dfrac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2-\beta^2}$
11	t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
12	$t^n e^{-\alpha t}$	$\dfrac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}}$
13	$t\sin at$	$\dfrac{2pa}{(p^2+a^2)^2}$
14	$t\cos at$	$\dfrac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$
15	$t\,\mathrm{sh}\,at$	$\dfrac{2pa}{(p^2-a^2)^2}$

16	$t\,\mathrm{ch}\,at$	$\dfrac{p^2+a^2}{(p^2-a^2)^2}$
17	$\dfrac{1}{2a^3}(\sin at - at\cos at)$	$\dfrac{1}{(p^2+a^2)^2}$

Знаходження зображення за заданим оригіналом

Цей процес виконується з використанням властивостей перетворення Лапласа та таблиці основних зображень.

Знаходження оригіналу за заданим зображенням

У багатьох випадках задане зображення можна перетворити до такого вигляду, коли оригінал легко визначається безпосередньо з використанням властивостей перетворення Лапласа та таблиці зображень. Наведемо деякі прийоми знаходження оригіналу за заданим зображенням.

1. Знаходження оригіналу $f(t)$ за зображенням $F(p)$, що є *правильним раціональним дробом*, тобто $F(p)=\dfrac{P_m(p)}{Q_n(p)}$, де $P_m(p), Q_n(p)$ – многочлени степенів m та n відповідно, причому $m<n$.

Розкладаємо задане зображення на суму найпростіших дробів

$$\frac{A}{p-a},\quad \frac{A}{(p-a)^k},\quad \frac{Bp+C}{p^2+\alpha p+\beta},\quad \frac{Bp+C}{(p^2+\alpha p+\beta)^k}.$$

Для кожного з дробів знаходимо оригінал, користуючись властивостями перетворення Лапласа. Далі, використовуючи лінійність перетворення Лапласа, знаходимо шуканий оригінал $f(t)$.

2. Знаходження оригіналу для *зображення вигляду* $F_1(p)\cdot F_2(p)$.

Знаходимо оригінали $f_1(t), f_2(t)$ для зображень $F_1(p), F_2(p)$, тобто $F_1(p)\risingdotseq f_1(t),\ F_2(p)\risingdotseq f_2(t)$.

Далі обчислюємо згортку функцій $f_1(t), f_2(t)$:

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)\,d\tau .$$

Далі використовуємо *теорему множення*:

$$F_1(p)\cdot F_2(p)\risingdotseq f_1(t)*f_2(t).$$

3. Знаходження оригіналу для *зображення вигляду* $F(p)=R(p)e^{-p\tau}$, де $R(p)$ – правильний раціональний дріб і $\tau>0$.

Знаходимо оригінал $r(t)$ за його зображенням $R(p)$.

Далі використовуємо *теорему запізнювання*, згідно з якою шуканий оригінал $f(t)$ визначається формулою

$$f(t) = \eta(t-\tau)\, r(t-\tau).$$

4. Знаходження оригіналу $f(t)$ за його зображенням $F(p)$ за допомогою *другої теореми розкладання*, яка читається так: якщо зображення $F(p)$ є однозначною функцією і має лише скінченне число особливих точок $p_1, p_2, \ldots, p_n$, які містяться в скінченній частині площини, то

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}[F(p)e^{pt}, p_k].$$

Якщо $F(p) = \dfrac{P_m(p)}{Q_n(p)}$, де $P_m(p)$, $Q_n(p)$ – многочлени степенів m та n, причому $m < n$, то у випадку, коли всі особливі точки $p_1, p_2, \ldots, p_n$ функції $F(p)$ прості полюси, маємо:

$$\operatorname{res}[F(p)e^{pt}, p_k] = \frac{P_m(p_k)}{Q_n'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Тоді

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_m(p_k)}{Q_n'(p_k)} e^{p_k t}.$$

II. Контрольні питання та завдання

1. Дайте означення функції-оригіналу.
2. Що називається зображенням функції-оригіналу?
3. Дайте означення перетворення Лапласа.
4. Яка функція називається одиничною; що є її зображенням?
5. Наведіть зображення функції $e^{\alpha t}$.
6. Сформулюйте властивість лінійності перетворення Лапласа і, використовуючи її, знайдіть зображення функцій $\sin t$, $\operatorname{ch} t$.
7. Сформулюйте теорему подібності і, використовуючи її, знайдіть зображення функцій $\sin at$, $\operatorname{ch} at$, $\sin^2 at$, $\operatorname{ch}^2 at$.
8. Сформулюйте теорему запізнювання і, використовуючи її, знайдіть зображення функцій $\sin(\omega t - \varphi_0)$, $\operatorname{ch}(\omega t - \varphi_0)$.

9. Наведіть теорему зміщення та знайдіть зображення функцій $e^{-\alpha t}\sin\beta t$, $e^{-\alpha t}\operatorname{ch}\beta t$.
10. Сформулюйте теорему про диференціювання оригіналу; про диференціювання зображення.
11. Сформулюйте теорему про інтегрування оригіналу; про інтегрування зображення.
12. Дайте означення згортки функцій.
13. Як читається теорема множення?
14. Наведіть таблицю зображень основних функцій.
15. Як знаходиться зображення за заданим оригіналом?
16. Як знаходиться оригінал за його зображенням?
17. Наведіть метод знаходження оригіналу, якщо зображенням є правильний раціональний дріб.
18. Яка теорема використовується для знаходження оригіналу для зображення вигляду $F_1(p)\cdot F_2(p)$?
19. Яка теорема використовується для знаходження оригіналу для зображення вигляду $F(p) = R(p)e^{-p\tau}$, $\tau > 0$, $R(p)$ – правильний раціональний дріб?
20. Як читається друга теорема розкладання і як вона застосовується для знаходження оригіналу $f(t)$ для заданого зображення $F(p)$?

III. Приклади розв’язання задач

У цьому пункті розглянуто 13 прикладів розв’язання задач, які за своєю тематикою розподілились так:

1. Знаходження зображень функцій за їх оригіналами: *приклади 1 – 9.*
2. Знаходження оригіналів функцій за їх зображенням: *приклади 10 – 13.*

Знаходження зображень функцій за їх оригіналами

Приклад 1. Довести, що задані функції є оригіналами та знайти їх зображення.

а) $\eta(t)=\begin{cases}1, & t\ge 0,\\ 0, & t<0,\end{cases}$ б) $f(t)=\eta(t)e^{\alpha t}$.

► Для заданих функцій умови 1) – 3), які накладаються на функції-оригінали, виконані, що перевіряється безпосередньо. Зокрема, для першої функції показник росту $s_0=0$, бо функція обмежена; для другої функції – $s_0=\alpha$.

Для знаходження зображень цих функцій користуватимемось формулою

$$F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt.$$

а) $\eta(t)=\begin{cases}1, & t\ge 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$

Знаходимо зображення $F(p)$.

$$F(p)=\int_0^{+\infty}\eta(t)e^{-pt}dt=-\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{p},$$

бо з рівності $\left|e^{-pt}\right|=e^{\mathrm{Re}(-pt)}=e^{-t\,\mathrm{Re}\,p}$ випливає, що $\lim\limits_{t\to+\infty}e^{-pt}=0$ при $\mathrm{Re}\,p>s=0$.

Отже, $\eta(t)\risingdotseq\frac{1}{p}$, або $1\risingdotseq\frac{1}{p}$.

б) $f(t)=\eta(t)e^{\alpha t}$.

Знаходимо зображення $F(p)$.

$$F(p)=\int_0^{+\infty}e^{\alpha t}e^{-pt}dt=\int_0^{+\infty}e^{(\alpha-p)t}dt=\frac{e^{(\alpha-p)t}}{\alpha-p}\Big|_0^{+\infty}=-\frac{1}{\alpha-p}=\frac{1}{p-\alpha},$$

бо з рівності $\left|e^{(\alpha-p)t}\right|=e^{-t(\mathrm{Re}\,p-\mathrm{Re}\,\alpha)}$ випливає, що $\lim\limits_{t\to+\infty}e^{(\alpha-p)t}=0$ при $\mathrm{Re}\,p>s=\alpha$.

Отже, $\eta(t)e^{\alpha t}\risingdotseq\frac{1}{p-\alpha}$, або $e^{\alpha t}\risingdotseq\frac{1}{p-\alpha}$. ◄

Приклад 2. Застосовуючи властивість лінійності, знайти зображення заданих функцій.

а) $f(t)=\sin t$; б) $f(t)=\mathrm{ch}\,t$; в) $f(t)=\frac{1}{2}(\mathrm{ch}\,t+\cos t)$.

► У п. а), б) представляємо кожну з заданих функцій у вигляді лінійної комбінації експоненціальних функцій, зображення яких відомі.

У п. в) використовуємо зображення, отримані у п. а), б). Далі, використовуючи властивість лінійності, отримуємо шукане зображення.

а) $f(t)=\sin t$.

$$\sin t=\frac{1}{2i}(e^{it}-e^{-it})\risingdotseq\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i}-\frac{1}{p+i}\right)=\frac{1}{p^2+1}.$$

Отже, $\sin t\risingdotseq\frac{1}{p^2+1}$.

б) $f(t)=\mathrm{ch}\,t$.

$$\mathrm{ch}\,t=\frac{1}{2}(e^{t}+e^{-t})\risingdotseq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p+1}\right)=\frac{p}{p^2-1}.$$

Отже, $\mathrm{ch}\,t\risingdotseq\frac{p}{p^2-1}$.

в) $f(t)=\frac{1}{2}(\mathrm{ch}\,t+\cos t)$.

$$\frac{1}{2}(\mathrm{ch}\,t+\cos t)\risingdotseq\frac{1}{2}\left(\frac{p}{p^2-1}+\frac{p}{p^2+1}\right)=\frac{p^3}{p^4-1}.$$

Отже, $\frac{1}{2}(\mathrm{ch}\,t+\cos t)\risingdotseq\frac{p^3}{p^4-1}$. ◄

Приклад 3. Застосовуючи теорему подібності, знайти зображення заданих функцій.

а) $f(t)=\sin\alpha t$; б) $f(t)=\mathrm{ch}\,\alpha t$;

в) $f(t)=\sin\alpha t-\mathrm{sh}\,\alpha t$; г) $f(t)=\cos\alpha t+\mathrm{ch}\,\alpha t$;

д) $f(t)=\cos^2\alpha t$; е) $f(t)=\mathrm{ch}^2\alpha t$.

► У цьому прикладі використовується теорема подібності, згідно з якою

$$f(\alpha t)\risingdotseq\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right), \qquad (1)$$

за умови, що $f(t)\risingdotseq F(p)$.

а) $f(t)=\sin\alpha t$.

Врахуємо, що $\sin t\risingdotseq\frac{1}{p^2+1}$. Тоді за формулою (1) маємо

$$\sin\alpha t \risingdotseq \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\frac{p^2}{\alpha^2}+1}=\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}.$$

Отже, $\sin\alpha t \risingdotseq \dfrac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$.

б) $f(t)=\mathrm{ch}\,\alpha t$.

Врахуємо, що $\mathrm{ch}\,t \risingdotseq \dfrac{p}{p^2-1}$. Тоді за формулою (1) маємо

$$\mathrm{ch}\,\alpha t \risingdotseq \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\frac{p}{\alpha}}{\frac{p^2}{\alpha^2}-1}=\frac{p}{p^2-\alpha^2}.$$

Отже, $\mathrm{ch}\,\alpha t \risingdotseq \dfrac{p}{p^2-\alpha^2}$.

в) $f(t)=\sin\alpha t-\mathrm{sh}\,\alpha t$.

Скористаємось відомими зображеннями функцій $\sin\alpha t$, $\mathrm{sh}\,\alpha t$ (формули 3, 5 таблиці основних зображень) та властивістю лінійності.

$$\sin\alpha t-\mathrm{sh}\,\alpha t \risingdotseq \frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}-\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}=-\frac{2\alpha^3}{p^4-\alpha^4}.$$

Отже, $\sin\alpha t-\mathrm{sh}\,\alpha t \risingdotseq -\dfrac{2\alpha^3}{p^4-\alpha^4}$.

г) $f(t)=\cos\alpha t+\mathrm{ch}\,\alpha t$.

Скористаємось відомими зображеннями функцій $\cos\alpha t$, $\mathrm{ch}\,\alpha t$ (формули 4, 6 таблиці основних зображень) та властивістю лінійності.

$$\cos\alpha t+\mathrm{ch}\,\alpha t \risingdotseq \frac{p}{p^2+\alpha^2}+\frac{p}{p^2-\alpha^2}=\frac{2p^3}{p^4-\alpha^4}.$$

Отже, $\cos\alpha t+\mathrm{ch}\,\alpha t \risingdotseq \dfrac{2p^3}{p^4-\alpha^4}$.

д) $f(t)=\cos^2\alpha t$.

Скористаємось формулою зниження степеня для функції $\cos^2\alpha t$, а далі використовуємо властивість лінійності та теорему подібності.

$$\cos^2\alpha t=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha t) \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}+\frac{p}{p^2+4\alpha^2}\right)=\frac{p^2+2\alpha^2}{p(p^2+4\alpha^2)}.$$

Отже, $\cos^2\alpha t \risingdotseq \dfrac{p^2+2\alpha^2}{p(p^2+4\alpha^2)}$.

е) $f(t)=\mathrm{ch}^2\alpha t$.

Врахуємо, що $\mathrm{ch}\,\alpha t=\cos i\alpha t$, і скористаємось результатом п.д).

$$\mathrm{ch}^2\alpha t=\cos^2 i\alpha t \risingdotseq \frac{p^2+2i^2\alpha^2}{p(p^2+4i^2\alpha^2)}=\frac{p^2-2\alpha^2}{p(p^2-4\alpha^2)}.$$

Отже, $\mathrm{ch}^2\alpha t \risingdotseq \dfrac{p^2-2\alpha^2}{p(p^2-4\alpha^2)}$. ◄

Приклад 4. Знайти зображення заданих функцій.

а) $f(t)=\cos\alpha t\cos\beta t$; б) $f(t)=\sin\alpha t\cos\beta t$;

в) $f(t)=\mathrm{ch}\,\alpha t\,\mathrm{ch}\,\beta t$; г) $f(t)=\cos\alpha t\,\mathrm{ch}\,\beta t$.

► У цьому прикладі використовуються представлення добутку тригонометричних та гіперболічних функцій у вигляді суми вказаних функцій і використовуються відомі зображення для тригонометричних та гіперболічних функцій (формули 3 – 6 таблиці основних зображень).

а) $f(t)=\cos\alpha t\cos\beta t$.

$$\cos\alpha t\cos\beta t=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)t+\cos(\alpha-\beta)t] \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{p}{p^2+(\alpha+\beta)^2}+\frac{p}{p^2+(\alpha-\beta)^2}\right)=$$

$$=\frac{p}{2}\,\frac{p^2+(\alpha-\beta)^2+p^2+(\alpha+\beta)^2}{(p^2+(\alpha+\beta)^2)(p^2+(\alpha-\beta)^2)}=\frac{p(p^2+\alpha^2+\beta^2)}{(p^2+(\alpha+\beta)^2)(p^2+(\alpha-\beta)^2)}.$$

Отже, $\cos\alpha t\cos\beta t \risingdotseq \dfrac{p(p^2+\alpha^2+\beta^2)}{(p^2+(\alpha+\beta)^2)(p^2+(\alpha-\beta)^2)}$.

б) $f(t)=\sin\alpha t\cos\beta t$.

$$\sin\alpha t\cos\beta t=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)t+\sin(\alpha-\beta)t] \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha+\beta}{p^2+(\alpha+\beta)^2}+\frac{\alpha-\beta}{p^2+(\alpha-\beta)^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{p^2(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)^2+p^2(\alpha-\beta)+(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)^2}{(p^2+(\alpha+\beta)^2)(p^2+(\alpha-\beta)^2)}=$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{p^2\cdot 2\alpha+(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)\cdot 2\alpha}{(p^2+(\alpha+\beta)^2)(p^2+(\alpha-\beta)^2)}=\frac{1}{2}\,\frac{2\alpha(p^2+\alpha^2-\beta^2)}{(p^2+(\alpha+\beta)^2)(p^2+(\alpha-\beta)^2)}=$$

$$=\frac{\alpha(p^2+\alpha^2-\beta^2)}{(p^2+(\alpha+\beta)^2)(p^2+(\alpha-\beta)^2)}.$$

Отже, $\sin\alpha t\cos\beta t \risingdotseq \dfrac{\alpha(p^2+\alpha^2-\beta^2)}{(p^2+(\alpha+\beta)^2)(p^2+(\alpha-\beta)^2)}$.

в) $f(t)=\operatorname{ch}\alpha t\operatorname{ch}\beta t$.

$$\operatorname{ch}\alpha t\operatorname{ch}\beta t=\cos i\alpha t\cos i\beta t=\frac{1}{2}[\cos i(\alpha+\beta)t+\cos i(\alpha-\beta)t]\risingdotseq$$

$$\risingdotseq\frac{1}{2}\left(\frac{p}{p^2-(\alpha+\beta)^2}+\frac{p}{p^2-(\alpha-\beta)^2}\right)=\frac{p(p^2-(\alpha-\beta)^2+p^2-(\alpha+\beta)^2)}{2\,(p^2-(\alpha+\beta)^2)(p^2-(\alpha-\beta)^2)}=$$

$$=\frac{p(p^2-\alpha^2-\beta^2)}{(p^2-(\alpha+\beta)^2)(p^2-(\alpha-\beta)^2)}.$$

Отже, $\operatorname{ch}\alpha t\operatorname{ch}\beta t\risingdotseq\dfrac{p(p^2-\alpha^2-\beta^2)}{(p^2-(\alpha+\beta)^2)(p^2-(\alpha-\beta)^2)}$.

г) $f(t)=\cos\alpha t\operatorname{ch}\beta t$.

$$\cos\alpha t\operatorname{ch}\beta t=\cos\alpha t\cos i\beta t=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+i\beta)t+\cos(\alpha-i\beta)t]\risingdotseq$$

$$\risingdotseq\frac{1}{2}\left(\frac{p}{p^2+(\alpha+i\beta)^2}+\frac{p}{p^2+(\alpha-i\beta)^2}\right)=\frac{p}{2}\cdot\frac{p^2+(\alpha-i\beta)^2+p^2+(\alpha+i\beta)^2}{(p^2+(\alpha+i\beta)^2)(p^2+(\alpha-i\beta)^2)}=$$

$$=\frac{p(p^2+\alpha^2-\beta^2)}{(p^2+\alpha^2-\beta^2+2i\alpha\beta)(p^2+\alpha^2-\beta^2-2i\alpha\beta)}=\frac{p(p^2+\alpha^2-\beta^2)}{(p^2+\alpha^2-\beta^2)+4\alpha^2\beta^2}.$$

Отже, $\cos\alpha t\operatorname{ch}\beta t\risingdotseq\dfrac{p(p^2+\alpha^2-\beta^2)}{(p^2+\alpha^2-\beta^2)+4\alpha^2\beta^2}$. ◄

Приклад 5. Застосовуючи теорему зміщення, знайти зображення заданих функцій.

а) $f(t)=e^{-\alpha t}\sin\beta t$; б) $f(t)=e^{-\alpha t}\operatorname{ch}\beta t$.

► У цьому прикладі застосовується теорема зміщення, згідно з якою

$$e^{-\alpha t}f(t)\risingdotseq F(p+\alpha),$$

за умови, що $f(t)\risingdotseq F(p)$.

а) $f(t)=e^{-\alpha t}\sin\beta t$.

Врахуємо, що $\sin\beta t\risingdotseq\dfrac{\beta}{p^2+\beta^2}$. Тоді

$$e^{-\alpha t}\sin\beta t\risingdotseq\frac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2}.$$

б) $f(t)=e^{-\alpha t}\operatorname{ch}\beta t$.

Врахуємо, що $\operatorname{ch}\beta t\risingdotseq\dfrac{p}{p^2-\beta^2}$. Тоді

$$e^{-\alpha t}\operatorname{ch}\beta t\risingdotseq\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2-\beta^2}.\ ◄$$

Приклад 6. Знайти зображення заданих функцій.

а) $f(t)=e^{-4t}\sin 3t\cos 2t$; б) $f(t)=\operatorname{sh}t\cos 2t\sin 3t$;

в) $f(t)=\operatorname{ch}3t\sin^2 t$.

► У цьому прикладі кожна з функцій оригіналів перетворюється до такого вигляду, щоб можна було застосувати формули 7 – 10 таблиці основних зображень.

а) $f(t)=e^{-4t}\sin 3t\cos 2t$.

$$e^{-4t}\sin 3t\cos 2t=\frac{1}{2}e^{-4t}(\sin 5t+\sin t)=\frac{1}{2}e^{-4t}\sin 5t+\frac{1}{2}e^{-4t}\sin t\risingdotseq$$

$$\risingdotseq\frac{1}{2}\frac{5}{(p+4)^2+25}+\frac{1}{2}\frac{1}{(p+4)^2+1}.$$

б) $f(t)=\operatorname{sh}t\cos 2t\sin 3t$.

$$\operatorname{sh}t\cos 2t\sin 3t=\frac{1}{2}\operatorname{sh}t(\sin 5t+\sin t)=\frac{1}{2}\frac{e^t-e^{-t}}{2}(\sin 5t+\sin t)=$$

$$=\frac{1}{4}e^t\sin 5t+\frac{1}{4}e^t\sin t-\frac{1}{4}e^{-t}\sin 5t-\frac{1}{4}e^{-t}\sin t\risingdotseq\frac{1}{4}\frac{5}{(p-1)^2+25}+$$

$$+\frac{1}{4}\frac{1}{(p-1)^2+1}-\frac{1}{4}\frac{5}{(p+1)^2+25}-\frac{1}{4}\frac{1}{(p+1)^2+1}.$$

в) $f(t)=\operatorname{ch}3t\sin^2 t$.

$$\operatorname{ch}3t\sin^2 t=\frac{e^{3t}+e^{-3t}}{2}\,\frac{1-\cos 2t}{2}=\frac{1}{4}(e^{3t}+e^{-3t}-e^{3t}\cos 2t-e^{-3t}\cos 2t)\risingdotseq$$

$$\risingdotseq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{p-3}+\frac{1}{p+3}-\frac{p-3}{(p-3)^2+4}-\frac{p+3}{(p+3)^2+4}\right).\ ◄$$

Приклад 7. Використовуючи теорему диференціювання зображення, знайти зображення заданих функцій.

а) $f(t)=t\sin\alpha t$; б) $f(t)=t\operatorname{sh}\alpha t$; в) $f(t)=t\sin\alpha t\operatorname{sh}\alpha t$.

► У цьому прикладі застосовується теорема про диференціювання зображення, згідно з якою

$$t^n f(t) \risingdotseq (-1)^n F^{(n)}(p) , \qquad (1)$$

за умови, що $f(t) \risingdotseq F(p)$.

а) $f(t) = t\sin\alpha t$.

Скористаємось тим, що $\sin\alpha t \risingdotseq \dfrac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$. Тоді згідно з формулою (1), при $n=1$ маємо

$$t\sin\alpha t \risingdotseq -\left(\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}\right)' = \frac{2p\alpha}{(p^2+\alpha^2)^2} .$$

б) $f(t) = t\,\mathrm{sh}\,\alpha t$.

Скористаємось тим, що $\mathrm{sh}\,\alpha t \risingdotseq \dfrac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$. Тоді згідно з формулою (1), при $n=1$ маємо

$$t\,\mathrm{sh}\,\alpha t \risingdotseq -\left(\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}\right)' = \frac{2p\alpha}{(p^2-\alpha^2)^2} .$$

в) $f(t) = t\sin\alpha t\,\mathrm{sh}\,\alpha t$.

$$t\sin\alpha t\,\mathrm{sh}\,\alpha t = t\,\frac{e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}}{2}\sin\alpha t = t\left(\frac{e^{\alpha t}\sin\alpha t}{2} - \frac{e^{-\alpha t}\sin\alpha t}{2}\right).$$

Згідно з теоремою про диференціювання зображення, якщо

$$\frac{e^{\alpha t}\sin\alpha t}{2} - \frac{e^{-\alpha t}\sin\alpha t}{2} \risingdotseq F(p) ,$$

то

$$\frac{t\,e^{\alpha t}\sin\alpha t}{2} - \frac{t\,e^{-\alpha t}\sin\alpha t}{2} \risingdotseq -F'(p) .$$

Тоді

$$F(p) = \frac{\alpha}{2((p-\alpha)^2+\alpha^2)} - \frac{\alpha}{2((p+\alpha)^2+\alpha^2)} ;$$

$$F'(p) = \frac{-2(p-\alpha)\alpha}{2((p-\alpha)^2+\alpha^2)^2} + \frac{2(p+\alpha)\alpha}{2((p+\alpha)^2+\alpha^2)^2} = \frac{-(p-\alpha)\alpha}{((p-\alpha)^2+\alpha^2)^2} +$$

$$+\frac{(p+\alpha)\alpha}{((p+\alpha)^2+\alpha^2)^2} .$$

Отже,

$$t\sin\alpha t\,\mathrm{sh}\,\alpha t \risingdotseq \frac{(p-\alpha)\alpha}{((p-\alpha)^2+\alpha^2)^2} - \frac{(p+\alpha)\alpha}{((p+\alpha)^2+\alpha^2)^2} .$$ ◄

Приклад 8. Знайти зображення заданих функцій.

а) $f(t) = \dfrac{e^{-at}\sin t}{t}$; б) $f(t) = \dfrac{\mathrm{ch}\,at - \mathrm{ch}\,bt}{t}$;

в) $f(t) = \dfrac{\cos bt - \cos at}{t}$; г) $f(t) = \dfrac{e^{-at}\sin^2 bt}{t}$.

► У цьому прикладі скористаємось теоремою про інтегрування зображення, згідно з якою

$$\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int_p^{+\infty} F(p)\,dp$$

за умови, що $F(p) \risingdotseq f(t)$ і $\int_p^{+\infty} F(p)\,dp$ збігається.

а) $f(t) = \dfrac{e^{-at}\sin t}{t}$.

Скористаємось тим, що $e^{-\alpha t}\sin t \risingdotseq \dfrac{1}{(p+\alpha)^2+1}$. Тоді за теоремою інтегрування зображення маємо

$$\frac{e^{-\alpha t}\sin t}{t} \risingdotseq \int_p^{+\infty} \frac{dp}{(p+\alpha)^2+1} .$$

Далі обчислюємо невласний інтеграл.

$$\int_p^{+\infty} \frac{dp}{(p+\alpha)^2+1} = \lim_{B\to+\infty}\int_p^{B} \frac{dp}{(p+\alpha)^2+1} = \lim_{B\to+\infty} \mathrm{arctg}(p+\alpha)\Big|_p^B =$$

$$= \lim_{B\to+\infty} (\mathrm{arctg}(B+\alpha) - \mathrm{arctg}(p+\alpha)) = \lim_{B\to+\infty} \mathrm{arctg}\,\frac{B+\alpha-p-\alpha}{1+(B+\alpha)(p+\alpha)} =$$

$$= \lim_{B\to+\infty} \mathrm{arctg}\,\frac{B-p}{1+(B+\alpha)(p+\alpha)} = \lim_{B\to+\infty} \mathrm{arctg}\,\frac{1-\frac{p}{B}}{\frac{1}{B}+\left(1+\frac{\alpha}{B}\right)(p+\alpha)} = \mathrm{arctg}\frac{1}{p+\alpha} .$$

Отже, $\dfrac{e^{-\alpha t}\sin t}{t}$ J $\mathrm{arctg}\dfrac{1}{p+\alpha}$.

б) $f(t)=\dfrac{\operatorname{ch}at-\operatorname{ch}bt}{t}$.

Скористаємось тим, що $\operatorname{ch}at-\operatorname{ch}bt \doteqdot \dfrac{p}{p^2-a^2}-\dfrac{p}{p^2-b^2}$. Тоді за теоремою інтегрування зображення маємо

$$\frac{\operatorname{ch}at-\operatorname{ch}bt}{t}\doteqdot\int_p^{+\infty}\left(\frac{p}{p^2-a^2}-\frac{p}{p^2-b^2}\right)dp.$$

Далі обчислюємо невласний інтеграл.

$$\int_p^{+\infty}\left(\frac{p}{p^2-a^2}-\frac{p}{p^2-b^2}\right)dp=\lim_{B\to+\infty}\int_p^{B}\left(\frac{p}{p^2-a^2}-\frac{p}{p^2-b^2}\right)dp=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{B\to+\infty}(\ln(p^2-a^2)-\ln(p^2-b^2))\Big|_p^B=\frac{1}{2}\lim_{B\to+\infty}\left(\ln\frac{p^2-a^2}{p^2-b^2}\right)\Big|_p^B=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{B\to+\infty}\left(\ln\frac{B^2-a^2}{B^2-b^2}-\ln\frac{p^2-a^2}{p^2-b^2}\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{p^2-a^2}{p^2-b^2}.$$

Отже, $\dfrac{\operatorname{ch}at-\operatorname{ch}bt}{t}\doteqdot\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{p^2-a^2}{p^2-b^2}$.

в) $f(t)=\dfrac{\cos bt-\cos at}{t}$.

Скористаємось тим, що $\cos bt-\cos at \doteqdot \dfrac{p}{p^2+b^2}-\dfrac{p}{p^2+a^2}$. Тоді за теоремою інтегрування зображення маємо

$$\frac{\cos bt-\cos at}{t}\doteqdot\int_p^{+\infty}\left(\frac{p}{p^2+b^2}-\frac{p}{p^2+a^2}\right)dp.$$

Далі обчислюємо невласний інтеграл.

$$\int_p^{+\infty}\left(\frac{p}{p^2+b^2}-\frac{p}{p^2+a^2}\right)dp=\lim_{B\to+\infty}\int_p^{B}\left(\frac{p}{p^2+b^2}-\frac{p}{p^2+a^2}\right)dp=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{B\to+\infty}(\ln(p^2+b^2)-\ln(p^2+a^2))\Big|_p^B=\frac{1}{2}\lim_{B\to+\infty}\left(\ln\frac{p^2+b^2}{p^2+a^2}\right)\Big|_p^B=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{B\to+\infty}\left(\ln\frac{B^2+b^2}{B^2+a^2}-\ln\frac{p^2+b^2}{p^2+a^2}\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{p^2+b^2}{p^2+a^2}.$$

Отже, $\dfrac{\cos bt-\cos at}{t}\doteqdot\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{p^2+b^2}{p^2+a^2}$.

г) $f(t)=\dfrac{e^{-at}\sin^2 bt}{t}$.

Скористаємось тим, що $e^{-at}-e^{-at}\cos 2bt\doteqdot\dfrac{1}{p+a}-\dfrac{p+a}{(p+a)^2+4b^2}$.

Тоді за теоремою інтегрування зображення маємо

$$\frac{e^{-at}\sin^2 bt}{t}=\frac{1}{2}\,\frac{e^{-at}-e^{-at}\cos 2bt}{t}\doteqdot\frac{1}{2}\int_p^{+\infty}\left(\frac{1}{p+a}-\frac{p+a}{(p+a)^2+4b^2}\right)dp.$$

Далі обчислюємо невласний інтеграл.

$$\frac{1}{2}\int_p^{+\infty}\left(\frac{1}{p+a}-\frac{p+a}{(p+a)^2+4b^2}\right)dp=\frac{1}{2}\lim_{B\to+\infty}\int_p^{B}\left(\frac{1}{p+a}-\frac{p+a}{(p+a)^2+4b^2}\right)dp=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{B\to+\infty}\left(\ln(p+a)-\frac{1}{2}\ln((p+a)^2+4b^2)\right)\Big|_p^B=\frac{1}{4}\lim_{B\to+\infty}\left(\ln\frac{(p+a)^2}{(p+a)^2+4b^2}\right)\Big|_p^B=$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{B\to+\infty}\left(\ln\frac{(B+a)^2}{(B+a)^2+4b^2}-\ln\frac{(p+a)^2}{(p+a)^2+4b^2}\right)=\frac{1}{4}\ln\frac{(p+a)^2+4b^2}{(p+a)^2}.$$

Отже, $\dfrac{e^{-at}\sin^2 bt}{t}\doteqdot\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{(p+a)^2+4b^2}{(p+a)^2}$. ◄

Приклад 9. Знайти згортку заданих функцій.

а) $\sin t*\operatorname{sh}t$; б) $\sqrt{1+t}*1$;

в) e^t*e^t; г) $\cos^2 t*t+t*\sin^2 t$;

д) $(1-\sqrt{t})*\sin t+(1+\sqrt{t})*\cos t+(1-\sqrt{t})*\cos t+(1+\sqrt{t})*\sin t$.

► Згортка функцій визначається формулою

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau. \qquad (1)$$

а) $\sin t*\operatorname{sh}t$.

$$\sin t*\operatorname{sh}t=\int_0^t\sin(t-\tau)\operatorname{sh}\tau\, d\tau=\int_0^t\sin(t-\tau)\,\frac{e^{\tau}-e^{-\tau}}{2}\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t\sin(t-\tau)e^{\tau}d\tau-\frac{1}{2}\int_0^t\sin(t-\tau)e^{-\tau}d\tau=\frac{1}{2}I_1-\frac{1}{2}I_2. \qquad (2)$$

Для обчислення інтегралів I_1, I_2 скористаємось формулою

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+C.$$

Нагадуємо, що для одержання формули застосовується інтегрування частинами двічі.

$$I_1=\int_0^t \sin(t-\tau)e^{\tau}d\tau=-\int_0^t e^{\tau}\sin(\tau-t)\,d\tau=-\frac{e^{\tau}}{2}(\sin(\tau-t)-\cos(\tau-t))\Big|_0^t=$$

$$=-\frac{e^t}{2}(\sin 0-\cos 0)+\frac{1}{2}(\sin(-t)-\cos(-t))=\frac{e^t}{2}-\frac{1}{2}(\sin t+\cos t).$$

$$I_2=\int_0^t \sin(t-\tau)e^{-\tau}d\tau=-\int_0^t e^{-\tau}\sin(\tau-t)\,d\tau=-\frac{e^{-\tau}}{2}(-\sin(\tau-t)-\cos(\tau-t))\Big|_0^t=$$

$$=-\frac{e^{-t}}{2}(-\sin 0-\cos 0)+\frac{1}{2}(\sin t-\cos t)=\frac{e^{-t}}{2}+\frac{1}{2}(\sin t-\cos t).$$

Підставимо знайдені значення інтегралів у формулу (2).

$$\sin t*\operatorname{sh}t=\frac{1}{2}I_1-\frac{1}{2}I_2=\frac{1}{2}\left(\frac{e^t}{2}-\frac{1}{2}(\sin t+\cos t)\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{e^{-t}}{2}+\frac{1}{2}(\sin t-\cos t)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}-\sin t\right)=\frac{1}{2}(\operatorname{sh}t-\sin t).$$

Отже, $\sin t*\operatorname{sh}t=\frac{1}{2}(\operatorname{sh}t-\sin t)$.

б) $\sqrt{1+t}*1$.

$$\sqrt{1+t}*1=\int_0^t\sqrt{1+t-\tau}\cdot 1\,d\tau=-\int_0^t\sqrt{1+t-\tau}\;d(1+t-\tau)=\frac{-2(1+t-\tau)^{3/2}}{3}\Bigg|_0^t=$$

$$=-\frac{2}{3}\left(1-(1+t)^{3/2}\right)=\frac{2}{3}\left((1+t)^{3/2}-1\right).$$

Отже, $\sqrt{1+t}*1=\frac{2}{3}\left((1+t)^{3/2}-1\right)$.

в) e^t*e^t.

$$e^t*e^t=\int_0^t e^{t-\tau}e^{\tau}d\tau=\int_0^t e^t d\tau=e^t\tau\Big|_0^t=te^t.$$

Отже, $e^t*e^t=te^t$.

г) $\cos^2 t*t+t*\sin^2 t$.

Перетворимо заданий вираз.

$$\cos^2 t*t+t*\sin^2 t=t*\cos^2 t+t*\sin^2 t=t*(\cos^2 t+\sin^2 t)=t*1.$$

Тоді

$$t*1=\int_0^t(t-\tau)\cdot 1\,d\tau=\left(t\tau-\frac{\tau^2}{2}\right)\Bigg|_0^t=t^2-\frac{t^2}{2}=\frac{t^2}{2}.$$

Отже, $\cos^2 t*t+t*\sin^2 t=\frac{t^2}{2}$.

д) $(1-\sqrt{t})*\sin t+(1+\sqrt{t})*\cos t+(1-\sqrt{t})*\cos t+(1+\sqrt{t})*\sin t$.

Перетворимо заданий вираз.

$$(1-\sqrt{t})*\sin t+(1+\sqrt{t})*\cos t+(1-\sqrt{t})*\cos t+(1+\sqrt{t})*\sin t=$$

$$=1*\sin t-\sqrt{t}*\sin t+1*\cos t+\sqrt{t}*\cos t+1*\cos t-\sqrt{t}*\cos t+1*\sin t+$$

$$+\sqrt{t}*\sin t=2(1*\sin t)+2(1*\cos t)=2(1*(\sin t+\cos t)).$$

Тоді

$$2(1*(\sin t+\cos t))=2\int_0^t(\sin\tau+\cos\tau)\,d\tau=2(\sin\tau-\cos\tau)\big|_0^t=2(\sin t-\cos t+1).$$

Отже,

$$(1-\sqrt{t})*\sin t+(1+\sqrt{t})*\cos t+(1-\sqrt{t})*\cos t+(1+\sqrt{t})*\sin t=$$

$$=2(\sin t-\cos t+1).$$ ◄

Знаходження оригіналів функцій за їх зображенням

Приклад 10. Знайти оригінал $f(t)$ за його зображенням $F(p)$.

а) $F(p)=\dfrac{1}{p^2+2p+5}$; б) $F(p)=\dfrac{p}{p^2-2p+5}$;

в) $F(p)=\dfrac{1}{p^3-8}$; г) $F(p)=\dfrac{1}{p(p-1)(p^2+4)}$.

► а) $F(p)=\dfrac{1}{p^2+2p+5}$.

Виділяючи повний квадрат у знаменнику та використовуючи табличне зображення функції $e^{-\alpha t}\sin\beta t$ (формула 7 таблиці основних зображень), маємо

$$F(p)=\frac{1}{p^2+2p+5}=\frac{1}{(p+2)^2+4}=\frac{1}{2}\frac{2}{(p+1)^2+2^2}\risingdotseq\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t\,.$$

б) $F(p)=\dfrac{p}{p^2-2p+5}$.

Виділяємо повний квадрат у знаменнику та розкладаємо дріб на суму таких дробів, оригінали яких відомі.

$$F(p)=\frac{p}{p^2-2p+5}=\frac{p-1+1}{(p-1)^2+4}=\frac{p-1}{(p-1)^2+4}+\frac{1}{(p-1)^2+4}=$$
$$=\frac{p-1}{(p-1)^2+2^2}+\frac{1}{2}\frac{2}{(p-1)^2+2^2}\,.$$

За формулами 8 та 7 таблиці основних зображень маємо

$$\frac{p-1}{(p-1)^2+2^2}\risingdotseq e^t\cos 2t\,;\quad \frac{2}{(p-1)^2+2^2}\risingdotseq e^t\sin 2t\,.$$

Отже,

$$\frac{p}{p^2-2p+5}\risingdotseq e^t\cos 2t+\frac{1}{2}e^t\sin 2t\,.$$

в) $F(p)=\dfrac{1}{p^3-8}$.

Записуємо $F(p)$ у вигляді суми найпростіших дробів і перетворюємо другий з них, виділивши повний квадрат у знаменнику.

$$F(p)=\frac{1}{p^3-8}=\frac{1}{(p-2)(p^2+2p+4)}=\frac{1}{12}\frac{1}{p-2}-\frac{1}{12}\frac{p+4}{p^2+2p+4}=$$
$$=\frac{1}{12}\frac{1}{p-2}-\frac{1}{12}\left(\frac{p+1}{(p+1)^2+(\sqrt{3})^2}+\frac{3}{(p+1)^2+(\sqrt{3})^2}\right)=\frac{1}{12}\frac{1}{p-2}-$$
$$-\frac{1}{12}\frac{p+1}{(p+1)^2+(\sqrt{3})^2}-\frac{\sqrt{3}}{12}\frac{\sqrt{3}}{(p+1)^2+(\sqrt{3})^2}\risingdotseq\frac{1}{12}e^{2t}-\frac{1}{12}e^{-t}\cos\sqrt{3}\,t-$$
$$-\frac{\sqrt{3}}{12}e^{-t}\sin\sqrt{3}\,t\,.$$

Тут використано формули 2, 8 та 7 таблиці основних зображень.

Отже,

$$\frac{1}{p^3-8}\risingdotseq\frac{1}{12}e^{2t}-\frac{1}{12}e^{-t}\cos\sqrt{3}\,t-\frac{\sqrt{3}}{12}e^{-t}\sin\sqrt{3}\,t\,.$$

г) $F(p)=\dfrac{1}{p(p-1)(p^2+4)}$.

Розкладаємо $F(p)$ на суму найпростіших дробів.

$$F(p)=\frac{1}{p(p-1)(p^2+4)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p-1}+\frac{Cp+D}{p^2+4}\,.$$

Знайшовши коефіцієнти A,B,C,D, маємо

$$F(p)=-\frac{1}{p}+\frac{1}{5}\frac{1}{p-1}+\frac{1}{5}\frac{4p-1}{p^2+4}\,.$$

Далі перетворюємо отриманий вираз на суму таких дробів, оригінали яких відомі.

$$F(p)=-\frac{1}{p}+\frac{1}{5}\frac{1}{p-1}+\frac{4}{5}\frac{p}{p^2+2^2}-\frac{1}{10}\frac{2}{p^2+2^2}\risingdotseq-1+\frac{1}{5}e^t+\frac{4}{5}\cos 2t-$$
$$-\frac{1}{10}\sin 2t\,.$$

Тут використано формули 1, 2, 4, 3 таблиці основних зображень. ◄

Приклад 11. Знайти оригінал $f(t)$ за його зображенням $F(p)$.

а) $F(p)=\dfrac{1}{(p+1)(p+2)^2}$; б) $F(p)=\dfrac{p}{(p-1)(p^2+4)}$;

в) $F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+1)^2}$.

► У цьому прикладі застосовуємо теорему множення:

$$F_1(p)\cdot F_2(p)\risingdotseq f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(t-\tau)\,f_2(\tau)\,d\tau\,,$$

де $F_1(p)\risingdotseq f_1(t)$, $F_2(p)\risingdotseq f_2(t)$.

а) $F(p)=\dfrac{1}{(p+1)(p+2)^2}$.

Врахуємо, що $\dfrac{1}{p+1}\risingdotseq e^{-t}$, $\dfrac{1}{(p+2)^2}\risingdotseq t\,e^{-2t}$.

Тоді за теоремою множення маємо

$$\frac{1}{(p+1)(p+2)^2}\risingdotseq e^{-t}*t\,e^{-2t}=\int_0^t e^{-(t-\tau)}\tau e^{-2\tau}\,d\tau=e^{-t}\int_0^t\tau e^{-\tau}\,d\tau=$$
$$=\left|\begin{array}{ll} u=\tau, & du=d\tau\\ dv=e^{-\tau}d\tau, & v=-e^{-\tau}\end{array}\right|=e^{-t}\left(-\tau e^{-\tau}\Big|_0^t+\int_0^t e^{-\tau}d\tau\right)=e^{-t}\left(-t\,e^{-t}-e^{-\tau}\Big|_0^t\right)=$$

$$= e^{-t}(-te^{-t} - e^{-t} + 1) = e^{-t} - e^{-2t}(t+1).$$

Отже,

$$\frac{1}{(p+1)(p+2)^2} \risingdotseq e^{-t} - e^{-2t}(t+1).$$

б) $F(p) = \dfrac{p}{(p-1)(p^2+4)}$.

Врахуємо, що $\dfrac{1}{p-1} \risingdotseq e^t$, $\dfrac{p}{p^2+4} \risingdotseq \cos 2t$.

Тоді за теоремою множення маємо

$$\frac{p}{(p-1)(p^2+4)} \risingdotseq e^t * \cos 2t = \int_0^t e^{t-\tau}\cos 2\tau\, d\tau = e^t \int_0^t e^{-\tau}\cos 2\tau\, d\tau.$$

Далі скористаємось формулою

$$\int e^{ax}\cos bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx + a\cos bx) + C,$$

яка отримується інтегруванням частинами двічі.

Тоді

$$e^t * \cos 2t = e^t \int e^{-\tau}\cos 2\tau\, d\tau = \frac{e^t}{2^2+1} e^{-\tau}(2\sin 2\tau - \cos 2\tau)\Big|_0^t =$$

$$= \frac{e^t}{5}(e^{-t}(2\sin 2t - \cos 2t) + 1) = \frac{1}{5}(2\sin 2t - \cos 2t + e^t).$$

Отже,

$$\frac{p}{(p-1)(p^2+4)} \risingdotseq \frac{1}{5}(2\sin 2t - \cos 2t + e^t).$$

в) $F(p) = \dfrac{p^2}{(p^2+1)^2}$.

Перетворимо задане зображення.

$$F(p) = \frac{p^2}{(p^2+1)^2} = \frac{p}{p^2+1}\cdot\frac{p}{p^2+1}.$$

Врахуємо, що $\dfrac{p}{p^2+1} \risingdotseq \cos t$.

Тоді за теоремою множення маємо

$$F(p) = \frac{p^2}{(p^2+1)^2} = \frac{p}{p^2+1}\cdot\frac{p}{p^2+1} \risingdotseq \cos t * \cos t = \int_0^t \cos(t-\tau)\cos\tau\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t (\cos t + \cos(t-2\tau))\, d\tau = \frac{1}{2}\left(\cos t\cdot\tau\big|_0^t - \frac{1}{2}\sin(t-2\tau)\Big|_0^t\right) = \frac{t}{2}\cos t +$$

$$+ \frac{1}{4}\sin t + \frac{1}{4}\sin t = \frac{t}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t = \frac{1}{2}(\sin t + t\cos t).$$

Отже,

$$\frac{p^2}{(p^2+1)^2} \risingdotseq \frac{1}{2}(\sin t + t\cos t). \blacktriangleleft$$

Приклад 12. Знайти оригінал $f(t)$ за його зображенням $F(p)$, використовуючи теорему запізнювання.

а) $F(p) = \dfrac{e^{-p}}{p+1}$; б) $F(p) = \dfrac{p^2 e^{-2p}}{p^3+1}$;

в) $F(p) = \dfrac{e^{-2p}}{(p^2+1)^2}$.

► У цьому прикладі використовуємо теорему запізнювання, згідно з якою

$$\eta(t-\tau)f(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau}F(p),$$

за умови, що $f(t) \risingdotseq F(p)$, $\tau > 0$.

а) $F(p) = \dfrac{e^{-p}}{p+1}$.

Тут $\tau = 1$, $\dfrac{1}{p+1} \risingdotseq e^{-t}$. Тому

$$F(p) = \frac{e^{-p}}{p+1} \risingdotseq e^{-(t-1)}\eta(t-1).$$

б) $F(p) = \dfrac{p^2 e^{-2p}}{p^3+1}$.

Знайдемо оригінал для дробу $\dfrac{p^2}{p^3+1}$, попередньо розклавши його на суму найпростіших дробів.

$$\frac{p^2}{p^3+1} = \frac{p^2}{(p+1)(p^2-p+1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{p+1} + \frac{2p-1}{p^2-p+1}\right) =$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{p+1}+2\frac{p-\frac{1}{2}}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right)\risingdotseq\frac{1}{3}\left(e^{-t}+2e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

Далі за теоремою запізнювання при $\tau=2$ маємо

$$\frac{p^2e^{-2p}}{p^3+1}\risingdotseq\frac{1}{3}\left(e^{-(t-2)}+2e^{\frac{t-2}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(t-2)\right)\eta(t-2).$$

в) $F(p)=\dfrac{e^{-2p}}{(p^2+1)^2}$.

Знайдемо оригінал для дробу $\dfrac{1}{(p^2+1)^2}$, використовуючи теорему множення. Врахуємо, що $\dfrac{1}{p^2+1}\risingdotseq\sin t$. Тоді

$$\frac{1}{(p^2+1)^2}=\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p^2+1}\risingdotseq\sin t*\sin t.$$

Обчислюємо згортку.

$$\sin t*\sin t=\int_0^t\sin(t-\tau)\sin\tau\,d\tau=\frac{1}{2}t\cos t-\frac{1}{2}\sin t.$$

Отже,

$$\frac{1}{(p^2+1)^2}\risingdotseq\frac{1}{2}t\cos t-\frac{1}{2}\sin t.$$

Тоді за теоремою запізнювання при $\tau=2$ маємо

$$\frac{e^{-2p}}{(p^2+1)^2}\risingdotseq\frac{1}{2}\left((t-2)\cos(t-2)-\frac{1}{2}\sin(t-2)\right)\eta(t-2).\ ◄$$

Приклад 13. Знайти оригінал $f(t)$ за його зображенням $F(p)$, використовуючи теорему розкладання.

а) $F(p)=\dfrac{p^2+p+1}{(p-1)(p+1)^2}$; б) $F(p)=\dfrac{p}{(p^2-1)^2}$;

в) $F(p)=\dfrac{1}{p^4-1}$.

► У цьому прикладі використовується друга теорема розкладання, згідно з якою

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}[F(p)e^{pt},p_k],\qquad(1)$$

де $F(p)$ – однозначна функція, яка має скінченне число особливих точок $p_1,p_2,\ldots,p_n$.

У випадку, коли всі полюси прості, а $F(p)=\dfrac{P_m(p)}{Q_n(p)}$, $m<n$, маємо:

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{P_m(p_k)}{Q_n'(p_k)}e^{p_kt}.\qquad(2)$$

а) $F(p)=\dfrac{p^2+p+1}{(p-1)(p+1)^2}$.

Знаходимо особливі точки функції $F(p)$. Вона має два полюси: $p=1$ – полюс першого порядку, $p=-1$ – полюс другого порядку.

Знаходимо лишки функції $F(p)e^{pt}$ у цих точках.

$$\operatorname*{res}_{p=1}\left[\frac{p^2+p+1}{(p-1)(p+1)^2}e^{pt}\right]=\lim_{p\to1}\left[\frac{(p^2+p+1)(p-1)}{(p-1)(p+1)^2}e^{pt}\right]=\frac{3}{4}e^t.$$

$$\operatorname*{res}_{p=-1}\left[\frac{p^2+p+1}{(p-1)(p+1)^2}e^{pt}\right]=\lim_{p\to-1}\frac{d}{dp}\left[\frac{(p^2+p+1)(p+1)^2}{(p-1)(p+1)^2}e^{pt}\right]=$$

$$=\lim_{p\to-1}\frac{d}{dp}\left[\frac{p^2+p+1}{p-1}e^{pt}\right]=$$

$$=\lim_{p\to-1}\frac{[(2p+1)e^{pt}+te^{pt}(p^2+p+1)](p-1)-(p^2+p+1)e^{pt}}{(p-1)^2}=\frac{e^{-t}}{4}-\frac{te^{-t}}{2}.$$

Тоді за формулою (1)

$$f(t)=\operatorname*{res}_{p=1}\left[F(p)e^{pt}\right]+\operatorname*{res}_{p=-1}\left[F(p)e^{pt}\right].$$

Отже,

$$\frac{e^{-2p}}{(p^2+1)^2}\risingdotseq\frac{3e^t}{4}+\frac{e^{-t}}{4}-\frac{te^{-t}}{2}.$$

б) $F(p)=\dfrac{p}{(p^2-1)^2}$.

Функція $F(p)$ має два полюси $p_1=1$, $p_2=-1$, кожний другого порядку.

Знаходимо лишки функції $F(p)e^{pt}$ у цих точках.

$$\operatorname*{res}_{p=1}\left[\frac{p}{(p^2-1)^2}e^{pt}\right]=\lim_{p\to1}\frac{d}{dp}\left[\frac{p(p-1)^2}{(p-1)^2(p+1)^2}e^{pt}\right]=\lim_{p\to1}\frac{d}{dp}\left[\frac{pe^{pt}}{(p+1)^2}\right]=$$

$$=\lim_{p\to1}\frac{(e^{pt}+pte^{pt})(p+1)^2-pe^{pt}\cdot2(p+1)}{(p+1)^4}=\lim_{p\to1}\frac{e^{pt}[(1+pt)(p+1)-2p]}{(p+1)^3}=$$

$$=\frac{e^t[(1+t)\cdot2-2]}{2^3}=\frac{2te^t}{8}=\frac{te^t}{4}.$$

$$\operatorname*{res}_{p=-1}\left[\frac{p}{(p^2-1)^2}e^{pt}\right]=\lim_{p\to-1}\frac{d}{dp}\left[\frac{p(p+1)^2}{(p-1)^2(p+1)^2}e^{pt}\right]=$$

$$=\lim_{p\to-1}\frac{d}{dp}\left(\frac{pe^{pt}}{(p-1)^2}\right)=\lim_{p\to-1}\frac{(e^{pt}+pte^{pt})(p-1)^2-pe^{pt}\cdot2(p-1)}{(p-1)^4}=$$

$$=\lim_{p\to-1}\frac{e^{pt}[(1+pt)(p-1)-2p]}{(p-1)^3}=\frac{e^{-t}[(1-t)(-2)+2]}{(-2)^3}=\frac{2te^{-t}}{-8}=-\frac{te^{-t}}{4}.$$

Тоді за формулою (1) маємо

$$f(t)=\operatorname*{res}_{p=1}\left[\frac{p}{(p^2-1)^2}e^{pt}\right]+\operatorname*{res}_{p=-1}\left[\frac{p}{(p^2-1)^2}e^{pt}\right]=\frac{te^t}{4}-\frac{te^{-t}}{4}=$$

$$=\frac{t}{2}\frac{e^t-e^{-t}}{2}=\frac{t}{2}\operatorname{sh}t.$$

Отже,

$$\frac{p}{(p^2-1)^2}\risingdotseq\frac{t}{2}\operatorname{sh}t.$$

в) $F(p)=\dfrac{1}{p^4-1}$.

Знаменник дробу має тільки прості корені $p_{1,2}=\pm1,\ p_{3,4}=\pm i$, що є простими полюсами функції $F(p)$. Тому зручно користуватись формулою (2):

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{P_m(p_k)}{Q_n'(p_k)}e^{p_kt}.$$

Тут $P_m(p)=1,\ Q_n(p)=p^4-1,\ Q_n'(p)=4p^3,\ p_1=1, p_2=-1, p_3=i, p_4=-i$.

Тому формула (2) приймає вигляд:

$$f(t)=\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{4p_k^3}e^{p_kt}=\frac{1}{4}\left(e^t-e^{-t}+\frac{e^{it}}{i^3}+\frac{e^{-it}}{(-i)^3}\right)=\frac{1}{2}\frac{e^t-e^{-t}}{2}-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}=\frac{1}{2}(\operatorname{sh}t-\sin t).$$

Отже,

$$\frac{1}{p^4-1}\risingdotseq\frac{1}{2}(\operatorname{sh}t-\sin t). \blacktriangleleft$$

IV. Задачі для практичних занять

Знаходження зображення функцій за їх оригіналами

4.1. Знайти зображення заданих функцій, користуючись означенням.

а) $f(t)=t$; б) $f(t)=\sin3t$; в) $f(t)=te^t$.

4.2. Знайти зображення заданих функцій, використовуючи властивість лінійності.

а) $f(t)=1+t$; б) $f(t)=2\sin t-\cos t$; в) $f(t)=t+\dfrac{1}{2}e^{-t}$.

4.3. Знайти зображення заданих функцій, використовуючи теорему подібності.

а) $f(t)=e^{at}$; б) $f(t)=\sin4t$;

в) $f(t)=\cos\omega t$; г) $f(t)=\operatorname{sh}3t$.

4.4. Знайти зображення заданих функцій.

а) $f(t)=\sin^2t$; б) $f(t)=\cos^3t$; в) $f(t)=\sin^4t$;

г) $f(t)=\sin mt\cos nt$; д) $f(t)=\sin mt\sin nt$.

4.5. Знайти зображення заданих функцій, використовуючи теорему зміщення.

а) $f(t)=e^{2t}\sin t$; б) $f(t)=e^t\cos nt$; в) $f(t)=e^{-t}t^3$;

г) $f(t)=e^t\operatorname{sh}t$; д) $f(t)=e^{3t}\sin^2t$;

е) $f(t)=e^{-\alpha t}\cos^2\beta t$.

4.6. Знайти зображення заданих функцій, використовуючи теорему запізнювання.

а) $f(t)=\sin(t-b)\eta(t-b)$; б) $f(t)=\cos^2(t-b)\eta(t-b)$;

в) $f(t)=e^{t-2}\eta(t-2)$.

4.7. Користуючись теоремою про диференціювання оригіналу, знайти зображення заданих функцій.

а) $f(t)=\cos^2 t$; б) $f(t)=\sin^3 t$;

в) $f(t)=t\sin\omega t$; г) $f(t)=t\cos\omega t$; д) $f(t)=te^{4t}$.

4.8. Користуючись теоремою про диференціювання зображення, знайти зображення заданих функцій.

а) $f(t)=t^2\cos t$; б) $f(t)=t(e^t+\operatorname{ch} t)$;

в) $f(t)=(t+1)\sin 2t$.

4.9. Знайти зображення заданих функцій, користуючись теоремою про інтегрування оригіналу.

а) $f(t)=\int\limits_0^t \sin\tau\, d\tau$; б) $f(t)=\int\limits_0^t (\tau+1)\cos\omega\tau\, d\tau$;

в) $f(t)=\int\limits_0^t \tau \operatorname{sh} 2\tau\, d\tau$.

4.10. Знайти зображення заданих функцій, користуючись теоремою про інтегрування зображення.

а) $f(t)=\dfrac{e^t-1}{t}$; б) $f(t)=\dfrac{1-e^{-t}}{t}$; в) $f(t)=\dfrac{\sin^2 t}{t}$;

г) $f(t)=\dfrac{1-\cos t}{t}$; д) $f(t)=\dfrac{\cos t-\cos 2t}{t}$.

4.11. Знайти зображення заданих функцій, використовуючи теорему множення.

а) $f(t)=e^t * \sin t$; б) $f(t)=\cos t * e^{2t}$;

в) $f(t)=t^2 * \operatorname{ch} t$; г) $f(t)=e^{-2t} * t^2$.

Знаходження оригіналів функцій за їх зображенням

У задачах 4.12 – 4.30 знайти оригінали за їх зображеннями.

4.12. $F(p)=\dfrac{1}{p^2+4p+5}$. **4.13.** $F(p)=\dfrac{1}{p^2+4p+3}$.

4.14. $F(p)=\dfrac{1}{(p^2+1)^2}$. **4.15.** $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+1)^2}$.

4.16. $F(p)=\dfrac{1}{p+2p^2+p^3}$. **4.17.** $F(p)=\dfrac{1}{7-p+p^2}$.

4.18. $F(p)=\dfrac{2p^3+p^2+2p+2}{p^5+2p^4+2p^3}$.

4.19. $F(p)=\dfrac{1}{p^2(p^2+1)}$.

4.20. $F(p)=\dfrac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}$.

4.21. $F(p)=\dfrac{p}{p^3+1}$. **4.22.** $F(p)=\dfrac{2p+3}{p^3+4p^2+5p}$.

4.23. $F(p)=\dfrac{1}{(p-1)^2(p+2)}$. **4.24.** $F(p)=\dfrac{3p^2}{(p^2-1)^2}$.

4.25. $F(p)=\dfrac{p^2+2p-1}{p^3+3p^2+3p+1}$. **4.26.** $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p^2+1}$.

4.27. $F(p)=\dfrac{e^{-3p}}{(p+1)^2}$. **4.28.** $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p(p-1)}$.

4.29. $F(p)=\dfrac{pe^{-4p}}{p^2+1}$. **4.30.** $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p^2-1}+\dfrac{pe^{-2p}}{p^2-4}$.

§2. Застосування операційного числення

I. Короткі теоретичні відомості

Розв'язання задачі Коші для лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Постановка задачі Коші така:

знайти розв'язок $x=x(t)$ лінійного диференціального рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$a_n x^{(n)}+a_{n-1}x^{(n-1)}+\ldots+a_1x'+a_0x=f(t), \tag{4.2}$$

який задовольняє початкові умови

$$x(0)=x_0\,,\ x'(0)=x_0'\,,\ \ldots,\ x^{(n-1)}(0)=x_0^{(n-1)}\,. \qquad (4.3)$$

Тут $f(t)$ – задана функція-оригінал, a_i, $i=\overline{0,n}$, та $x_0, x_0', \ldots, x_0^{(n-1)}$ – задані числа.

Застосуємо перетворення Лапласа до обох частин рівняння (4.2), поклавши $f(t) \risingdotseq F(p)$, $x(t) \risingdotseq X(p)$.

Згідно з теоремою про диференціювання оригіналу матимемо

$$\begin{aligned} &x'(t) \risingdotseq pX(p)-x(0),\\ &x''(t) \risingdotseq p^2X(p)-px(0)-x'(0), \qquad (4.4)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &x^{(n)}(t) \risingdotseq p^nX(p)-p^{n-1}x(0)-\ldots-x^{(n-1)}(0). \end{aligned}$$

Тоді, враховуючи властивість лінійності та формули (4.4), матимемо, що ліва частина рівняння (4.2) має таке зображення

$$a_nx^{(n)}+a_{n-1}x^{(n-1)}+\ldots+a_1x'+a_0x \risingdotseq (a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_1p+a_0)X(p)-$$
$$-p^{n-1}x_0-p^{n-2}x_0'-\ldots-x_0^{(n-1)}.$$

Права частина рівняння (4.2): $f(t) \risingdotseq F(p)$.

Отже, отримуємо операторне рівняння

$$(a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_1p+a_0)X(p)=F(p)+p^{n-1}x_0+p^{n-2}x_0'+\ldots+x_0^{(n-1)}\,. \qquad (4.5)$$

Далі розв'язуємо операторне рівняння (4.5) відносно $X(p)$.

За знайденим зображенням $X(p)$ знаходимо оригінал $x(t)$, тобто $X(p) \risingdotseq x(t)$. Це і є шуканий розв'язок $x(t)$.

Розв'язання задачі Коші для лінійних систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Розв'язання задачі Коші для лінійної системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами виконується за тією ж схемою, що і для одного диференціального рівняння.

Задача Коші для *системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку зі сталими коефіцієнтами* ставиться так:

знайти розв'язок системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}+\sum\limits_{k=1}^{n}a_{1k}x_k=f_1(t),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \dfrac{dx_n}{dt}+\sum\limits_{k=1}^{n}a_{nk}x_k=f_n(t), \end{cases} \qquad (4.6)$$

який задовольняє задані початкові умови

$$x_1(0)=x_1^0\,,\ x_2(0)=x_2^0\,,\ \ldots,\ x_n(0)=x_n^0\,. \qquad (4.7)$$

Тут a_{ik}, x_k^0, $i,k=\overline{1,n}$ – сталі числа, $f_k(t)$, $k=\overline{1,n}$ – задані функції.

Припустимо, що похідні $\dfrac{dx_k}{dt}$ і функції $f_k(t)$, $k=\overline{1,n}$ є оригіналами. Тоді і функції $x_k(t)$, $k=\overline{1,n}$ – оригінали.

Нехай

$$x_k(t) \risingdotseq X_k(p), \quad f_k(t) \risingdotseq F_k(p),$$
$$x_k'(t) \risingdotseq pX_k(p)-x_k(0)=pX_k(p)-x_k^0\,. \qquad (4.8)$$

Тоді операторна система рівнянь приймає вигляд:

$$\begin{cases} pX_1(p)+\sum\limits_{k=1}^{n}a_{1k}X_k(p)=F_1(p)+x_1^0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ pX_n(p)+\sum\limits_{k=1}^{n}a_{nk}X_n(p)=F_n(p)+x_n^0\,. \end{cases} \qquad (4.9)$$

Розв'язуючи цю лінійну систему (4.9) алгебраїчних (відносно $X_k(p)$) рівнянь, знайдемо $X_k(p)$, $k=\overline{1,n}$. Далі знаходячи відповідні оригінали $x_k(t)$, $k=\overline{1,n}$, отримаємо шуканий розв'язок задачі Коші для системи (4.6).

Розглянемо також випадок *системи лінійних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами*.

Задача Коші для такої системи ставиться так:

знайти розв'язок системи

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_{ik}\frac{d^2x_k}{dt^2}+b_{ik}\frac{dx_k}{dt}+c_{ik}x_k\right)=f_i(t),\ i=\overline{1,n}, \qquad (4.10)$$

який задовольняє задані початкові умови

$$x_k(0)=\alpha_k\,,\ x_k'(0)=\beta_k\,,\quad k=\overline{1,n}\,. \qquad (4.11)$$

Тут a_{ik}, b_{ik}, c_{ik}, α_k, β_k, $i,k=\overline{1,n}$ – сталі числа, $f_i(t)$, $i=\overline{1,n}$ – задані функції-оригінали.

Нехай $f_i(t) \risingdotseq F_i(p)$, $x_k(t) \risingdotseq X_k(p)$.

Тоді

$$x_k'(t) \risingdotseq pX_k(p)-x_k(0)=pX_k(p)-\alpha_k\,,$$
$$x_k''(t) \risingdotseq p^2X_k(p)-px_k(0)-x_k'(0)=p^2X_k(p)-p\alpha_k-\beta_k\,. \qquad (4.12)$$

Переходимо до операторної системи рівнянь:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}p^2+b_{ik}p+c_{ik})X_k(p)=$$

$$=F_i(p)+\sum_{k=1}^{n}[\,a_{ik}(p\alpha_k+\beta_k)+b_{ik}\alpha_k\,]\,,\ \ i=\overline{1,n}\,. \qquad (4.13)$$

Розв'язуючи систему (4.13) як лінійну алгебраїчну систему відносно $X_k(p)$, знайдемо $X_k(p),\ k=\overline{1,n}$. Далі знаходимо їх оригінали $x_k(t),\ k=\overline{1,n}$. Це й буде розв'язок задачі Коші для системи (4.10).

Викладений метод розв'язання задачі Коші будемо називати *операційним методом*

II. Контрольні питання та завдання

1. Як ставиться задача Коші для лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами?
2. Що таке операторне рівняння? Які теореми застосовуються для одержання цього рівняння?
3. У чому полягає метод розв'язання задачі Коші для лінійного диференціального рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами з використанням операційного числення?
4. Сформулюйте задачу Коші для лінійної системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами першого порядку; другого порядку.
5. Як використовується операційне числення для розв'язання задачі Коші для системи лінійних диференціальних рівнянь? До чого зводиться розв'язання такої задачі?

III. Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Розв'язати задачі Коші для заданих диференціальних рівнянь першого порядку операційним методом.

а) $x'+x=e^{-t},\ x(0)=1$; б) $x'+2x=\sin t,\ x(0)=0$.

► а) $x'+x=e^{-t},\ x(0)=1$.

Нехай $x(t)\risingdotseq X(p)$. Тоді

$$x'(t)\risingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p)-1\,.$$

За таблицею основних зображень знаходимо зображення правої частини заданого диференціального рівняння: $e^{-t}\risingdotseq\dfrac{1}{p+1}$.

Складаємо операторне рівняння і розв'язуємо його.

$$(p+1)X(p)=\frac{1}{p+1}+1\,,$$

$$X(p)=\frac{1}{(p+1)^2}+\frac{1}{p+1}\,.$$

За знайденим зображенням знаходимо оригінал – розв'язок заданого диференціального рівняння.

$$x(t)=t\,e^{-t}+e^{-t}\,,$$

$$x(t)=e^{-t}(t+1)\,.$$

Можна перевірити правильність розв'язку, підставивши $x(t)$ в задане диференціальне рівняння, а також безпосередньо перевірити, що $x(0)=1$.

б) $x'+2x=\sin t,\ x(0)=0$.

Нехай $x(t)\risingdotseq X(p)$. Тоді

$$x'(t)\risingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p)\,.$$

Зображення правої частини заданого диференціального рівняння:

$$\sin t\risingdotseq\frac{1}{p^2+1}\,.$$

Складаємо операторне рівняння і розв'язуємо його.

$$pX(p)+2X(p)=\frac{1}{p^2+1}\,,$$

$$(p+2)X(p)=\frac{1}{p^2+1}\,,$$

$$X(p)=\frac{1}{(p^2+1)(p+2)}\,.$$

Знайдемо оригінал. Розкладемо $X(p)$ на суму найпростіших дробів.

$$\frac{1}{(p^2+1)(p+2)}=\frac{Ap+B}{p^2+1}+\frac{C}{p+2}\,,$$

$$(Ap+B)(p+2)+C(p^2+1)=1\,.$$

$$\begin{array}{c|l} p^2 & A+C=0 \\ p^1 & 2A+B=0 \\ p^0 & 2B+C=1 \end{array} \quad\Rightarrow\quad A=-\frac{1}{5}\,,\ B=\frac{2}{5}\,,\ C=\frac{1}{5}\,.$$

Отже,

$$\frac{1}{(p^2+1)(p+2)}=-\frac{1}{5}\frac{p}{p^2+1}+\frac{2}{5}\frac{1}{p^2+1}+\frac{1}{5}\frac{1}{p+2}.$$

Таким чином, розв'язок заданого диференціального рівняння

$$x(t)=-\frac{1}{5}\cos t+\frac{2}{5}\sin t+\frac{1}{5}e^{-2t}=\frac{1}{5}(e^{-2t}-\cos t+2\sin t). \blacktriangleleft$$

Приклад 2. Розв'язати задачі Коші для заданих диференціальних рівнянь другого порядку операційним методом.

а) $x''+x'=1,\ x(0)=0,\ x'(0)=1$;

б) $x''+2x'-3x=e^{-t},\ x(0)=0,\ x'(0)=1$;

в) $x''-2x'+x=e^{t},\ x(0)=0,\ x'(0)=1$.

► а) $x''+x'=1,\ x(0)=0,\ x'(0)=1$.

Нехай $x(t)\risingdotseq X(p)$. Тоді

$x'(t)\risingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p)$,

$x''(t)\risingdotseq p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)-1$.

Зображення правої частини заданого рівняння: $1\risingdotseq\frac{1}{p}$.

Складаємо операторне рівняння і розв'язуємо його.

$$p^2X(p)-1+pX(p)=\frac{1}{p},$$

$$p(p+1)X(p)=\frac{1}{p}+1,$$

$$X(p)=\frac{p+1}{p^2(p+1)},$$

$$X(p)=\frac{1}{p^2}.$$

Знаходимо оригінал – розв'язок диференціального рівняння:

$$x(t)=t.$$

б) $x''+2x'-3x=e^{-t},\ x(0)=0,\ x'(0)=1$.

Нехай $x(t)\risingdotseq X(p)$. Тоді

$x'(t)\risingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p)$,

$x''(t)\risingdotseq p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)-1$.

Зображення правої частини заданого рівняння: $e^{-t}\risingdotseq\frac{1}{p+1}$.

Складаємо операторне рівняння і розв'язуємо його.

$$p^2X(p)-1+2pX(p)-3X(p)=\frac{1}{p+1},$$

$$(p^2+2p-3)X(p)=\frac{1}{p+1}+1,$$

$$(p+3)(p-1)X(p)=\frac{p+2}{p+1},$$

$$X(p)=\frac{p+2}{(p+1)(p-1)(p+3)}.$$

Знайдемо оригінал. Розкладемо $X(p)$ на суму найпростіших дробів.

$$\frac{p+2}{(p+1)(p-1)(p+3)}=\frac{A}{p+1}+\frac{B}{p-1}+\frac{C}{p+3},$$

$$p+2=A(p-1)(p+3)+B(p+1)(p+3)+C(p+1)(p-1).$$

$$\begin{array}{r|l}
p=-1 & 1=A\cdot(-4)\Rightarrow A=-\frac{1}{4} \\
p=\ \ 1 & 3=B\cdot 8\quad\ \Rightarrow B=\ \ \frac{3}{8} \\
p=\ \ 3 & -1=C\cdot 8\quad \Rightarrow C=-\frac{1}{8}
\end{array}$$

Отже,

$$X(p)=-\frac{1}{4}\frac{1}{p+1}+\frac{3}{8}\frac{1}{p-1}-\frac{1}{8}\frac{1}{p+3}.$$

Тоді оригінал

$$x(t)=-\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{3}{8}e^{t}-\frac{1}{8}e^{-3t}=\frac{1}{8}(3e^{t}-2e^{-t}-e^{-3t}).$$

в) $x''-2x'+x=e^{t},\ x(0)=0,\ x'(0)=1$.

Нехай $x(t)\risingdotseq X(p)$. Тоді

$x'(t)\risingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p)$,

$x''(t)\risingdotseq p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)-1$.

Зображення правої частини заданого рівняння: $e^{t}\risingdotseq\frac{1}{p-1}$.

Складаємо операторне рівняння і розв'язуємо його.

$$p^2X(p)-1-2pX(p)+X(p)=\frac{1}{p-1},$$

$$(p^2-2p+1)X(p)=\frac{1}{p-1}+1,$$

$$(p-1)^2X(p)=\frac{1}{p-1}+1,$$

$$X(p)=\frac{1}{(p-1)^3}+\frac{1}{(p-1)^2}.$$

Запишемо $X(p)$ у такому вигляді, щоб були відомі оригінали доданків.

$$X(p)=\frac{1}{2}\frac{2!}{(p-1)^{2+1}}+\frac{1}{(p-1)^{1+1}}.$$

Знаходимо оригінал, скориставшись формулами 11, 12 таблиці основних зображень. Отже,

$$x(t)=\frac{1}{2}t^2e^t+te^t=\frac{te^t}{2}(t+2).\ ◄$$

Приклад 3. Розв'язати задачі Коші для систем диференціальних рівнянь першого порядку операційним методом.

а) $\begin{cases} x'+y=0,\\ y'+x=0,\end{cases}$ $x(0)=1,\ y(0)=-1.$

б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x+2y,\\ \dfrac{dy}{dt}=2x+y+1,\end{cases}$ $x(0)=0,\ y(0)=5.$

► а) $\begin{cases} x'+y=0,\\ y'+x=0,\end{cases}$ $x(0)=1,\ y(0)=-1.$

Нехай $x(t)\risingdotseq X(p)$, $y(t)\risingdotseq Y(p)$. Тоді

$$x'(t)\risingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p)-1,$$

$$y'(t)\risingdotseq pY(p)-y(0)=pY(p)+1.$$

Переходимо до операторної системи рівнянь:

$$\begin{cases} pX(p)-1+Y(p)=0,\\ pY(p)+1+X(p)=0\end{cases}$$

або

$$\begin{cases} pX(p)+\ \ Y(p)=\ \ 1,\\ \ X(p)+pY(p)=-1.\end{cases}$$

Розв'язуємо цю систему за формулами Крамера.

$$\Delta=\begin{vmatrix} p & 1\\ 1 & p\end{vmatrix}=p^2-1;\quad \Delta_1=\begin{vmatrix} 1 & 1\\ -1 & p\end{vmatrix}=p+1;\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} p & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-p-1.$$

Тоді

$$X(p)=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{p+1}{p^2-1}=\frac{1}{p-1},\qquad Y(p)=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-p-1}{p^2-1}=-\frac{1}{p-1}.$$

Звідси розв'язком системи є пара функцій

$$x(t)=e^t,\quad y(t)=-e^t.$$

Безпосередня перевірка показує правильність отриманого розв'язку.

б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x+2y,\\ \dfrac{dy}{dt}=2x+y+1,\end{cases}$ $x(0)=0,\ y(0)=5.$

Нехай $x(t)\risingdotseq X(p)$, $y(t)\risingdotseq Y(p)$. Тоді

$$x'(t)\risingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p),$$

$$y'(t)\risingdotseq pY(p)-y(0)=pY(p)-5.$$

Врахуємо, що $1\risingdotseq\dfrac{1}{p}$. Записуємо систему операторних рівнянь.

$$\begin{cases} pX(p)=X(p)+2Y(p),\\ pY(p)-5=2X(p)+Y(p)+\dfrac{1}{p}\end{cases}$$

або

$$\begin{cases} (p-1)X(p)-2Y(p)=0,\\ -2X(p)+(p-1)Y(p)=5+\dfrac{1}{p}.\end{cases}\qquad (1)$$

Розв'язуємо цю систему відносно $X(p)$, $Y(p)$.

Домножимо перше рівняння на $\dfrac{p-1}{2}$ та додамо до другого рівняння:

$$X(p)\left(\frac{(p-1)^2}{2}-2\right)=5+\frac{1}{p}.$$

Звідси

$$X(p)=\frac{10p+2}{p(p+1)(p-3)}.$$

Підставляючи $X(p)$ в перше рівняння системи (1), після перетворень отримуємо

$$Y(p)=\frac{5p^2-4p-1}{p(p+1)(p-3)}.$$

Для знаходження оригіналів скористаємось другою теоремою розкладання. Враховуючи, що функції $X(p), Y(p)$ мають прості полюси $p_1=0$, $p_2=-1$, $p_3=3$, скористаємось формулою $f(t)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{P_m(p_k)}{Q_n'(p_k)}\,e^{p_k t}$.

Тут $Q_n(p)=p(p+1)(p-3)$, $Q_n'(p)=3p^2-4p-3$, $Q_n'(0)=-3$, $Q_n'(-1)=4$, $Q_n'(3)=12$.

Тоді

$$x(t)=-\frac{2}{3}e^{0\cdot t}-\frac{8}{4}e^{-t}+\frac{32}{12}e^{3t}=-\frac{2}{3}-2e^{-t}+\frac{8}{3}e^{3t},$$

$$y(t)=\frac{-1}{-3}e^{0\cdot t}+\frac{8}{4}e^{-t}+\frac{32}{12}e^{3t}=\frac{1}{3}+2e^{-t}+\frac{8}{3}e^{3t}.$$

Отже, розв'язком системи є пара функцій

$$x(t)=-\frac{2}{3}-2e^{-t}+\frac{8}{3}e^{3t},$$

$$y(t)=\frac{1}{3}+2e^{-t}+\frac{8}{3}e^{3t}. \blacktriangleleft$$

Приклад 4. Розв'язати задачу Коші для системи диференціальних рівнянь другого порядку операційним методом.

$$\begin{cases} x''+x'+y''-y=e^t, \\ x'+2x-y'+y=e^{-t}, \end{cases}$$

$$x(0)=y(0)=y'(0)=0,\ x'(0)=1.$$

► Нехай $x(t)\risingdotseq X(p)$, $y(t)\risingdotseq Y(p)$. Тоді

$$x'(t)\risingdotseq pX(p),\ x''(t)\risingdotseq p^2X(p)-1,\ e^t\risingdotseq\frac{1}{p-1};$$

$$y'(t)\risingdotseq pY(p),\ y''(t)\risingdotseq p^2Y(p),\ e^{-t}\risingdotseq\frac{1}{p+1}.$$

Складаємо систему операторних рівнянь.

$$\begin{cases} p^2X(p)-1+pX(p)+p^2Y(p)-Y(p)=\dfrac{1}{p-1}, \\ pX(p)+2X(p)-pY(p)+Y(p)=\dfrac{1}{p+1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p(p+1)X(p)+(p^2-1)Y(p)=\dfrac{1}{p-1}+1, \\ (p+2)X(p)-\ (p-1)Y(p)=\dfrac{1}{p+1}. \end{cases}$$

Домножимо друге рівняння на $(p+1)$ й додамо до першого. Тоді

$$2(p+1)(p+1)X(p)=\frac{1}{p-1}+2,$$

$$X(p)=\frac{1}{2(p-1)(p+1)^2}+\frac{1}{(p+1)^2}.$$

Розкладемо дріб $\dfrac{1}{(p-1)(p+1)^2}$ на суму найпростіших дробів.

$$\frac{1}{(p-1)(p+1)^2}=\frac{A}{p-1}+\frac{B}{(p+1)^2}+\frac{C}{p+1},$$

$$1=A(p+1)^2+B(p-1)+C(p+1)(p-1).$$

$$\begin{array}{c|l} p=1 & 1=4A \quad\Rightarrow A=\dfrac{1}{4} \\ p=-1 & 3=B\cdot(-2)\Rightarrow B=-\dfrac{1}{2} \\ p^2 & 0=A+C \quad\Rightarrow C=-\dfrac{1}{4} \end{array}$$

Отже,

$$X(p)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\frac{1}{p-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{(p+1)^2}-\frac{1}{4}\frac{1}{p+1}\right)+\frac{1}{(p+1)^2}$$

або після перетворень

$$X(p)=\frac{1}{8}\frac{1}{p-1}+\frac{3}{4}\frac{1}{(p+1)^2}-\frac{1}{8}\frac{1}{p+1}.$$

Знайдемо оригінал.

$$x(t)=\frac{1}{8}e^t+\frac{3}{4}te^{-t}-\frac{1}{8}e^{-t}=\frac{\operatorname{sh}t}{4}+\frac{3}{4}te^{-t}.$$

Тепер підставимо значення $X(p)$ в друге рівняння системи.

$$(p-1)Y(p)=\frac{(p+2)(2p-1)}{2(p-1)(p+1)^2}-\frac{1}{p+1},$$

$$(p-1)Y(p)=\frac{2p^2+3p-2-2p^2+2}{2(p+1)^2(p-1)},$$

$$Y(p)=\frac{3p}{2(p+1)^2(p-1)^2},$$

$$Y(p)=\frac{3p}{2(p^2-1)^2}=\frac{3}{4}\frac{2p}{(p^2-1)^2}.$$

Скориставшись формулою 15 таблиці основних зображень, знайдемо оригінал

$$y(t)=\frac{3}{4}t\operatorname{sh}t.$$

Отже, розв'язок заданої системи

$$x(t)=\frac{\operatorname{sh}t}{4}+\frac{3}{4}te^{-t},\ y(t)=\frac{3}{4}t\operatorname{sh}t. ◄$$

Приклад 5. Розв'язати задачу Коші для системи диференціальних рівнянь другого порядку операційним методом.

$$\begin{cases} x''-x+y+z=0,\\ x+y''-y+z=0,\\ x+y+z''-z=0,\end{cases}$$

$$x(0)=1,\quad x'(0)=y(0)=y'(0)=z(0)=z'(0)=0.$$

► Нехай $x(t)\risingdotseq X(p)$, $y(t)\risingdotseq Y(p)$, $z(t)\risingdotseq Z(p)$. Тоді

$x'(t)\risingdotseq pX(p)-1$, $x''(t)\risingdotseq p^2X(p)-p$;

$y'(t)\risingdotseq pY(p)$, $y''(t)\risingdotseq p^2Y(p)$; $z'(t)\risingdotseq pZ(p)$, $z''(t)\risingdotseq p^2Z(p)$.

Складаємо систему операторних рівнянь.

$$\begin{cases} p^2X(p)-p-X(p)+Y(p)+Z(p)=0,\\ X(p)+p^2Y(p)-Y(p)+Z(p)=0,\\ X(p)+Y(p)+p^2Z(p)+Z(p)=0\end{cases}$$

або

$$\begin{cases} (p^2-1)X(p)+Y(p)+Z(p)=p,\\ X(p)+(p^2-1)Y(p)+Z(p)=0,\\ X(p)+Y(p)+(p^2-1)Z(p)=0.\end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему за формулами Крамера.

$$\Delta=\begin{vmatrix} p^2-1 & 1 & 1\\ 1 & p^2-1 & 1\\ 1 & 1 & p^2-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} p^2+1 & p^2+1 & p^2+1\\ 1 & p^2-1 & 1\\ 1 & 1 & p^2-1\end{vmatrix}=$$

$$=(p^2+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & p^2-1 & 1\\ 1 & 1 & p^2-1\end{vmatrix}=(p^2+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & p^2-2 & 0\\ 0 & 0 & p^2-2\end{vmatrix}=(p^2+1)(p^2-2)^2.$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} p & 1 & 1\\ 0 & p^2-1 & 1\\ 0 & 1 & p^2-1\end{vmatrix}=p((p^2-1)^2-1)=p(p^2-1-1)(p^2-1+1)=p^3(p^2-2).$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} p^2-1 & p & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & p^2-1\end{vmatrix}=-p(p^2-1-1)=-p(p^2-2).$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} p^2-1 & 1 & p\\ 1 & p^2-1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=p(1-p^2+1)=-p(p^2-2).$$

Тоді

$$X(p)=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{p^3(p^2-2)}{(p^2+1)(p^2-2)^2}=\frac{p^3}{(p^2+1)(p^2-2)},$$

$$Y(p)=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-p(p^2-2)}{(p^2+1)(p^2-2)^2}=\frac{-p}{(p^2+1)(p^2-2)},$$

$$Z(p)=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-p(p^2-2)}{(p^2+1)(p^2-2)^2}=\frac{-p}{(p^2+1)(p^2-2)}.$$

Знайдемо оригінали за їх зображеннями.

Представимо $X(p)$ у вигляді суми найпростіших дробів.

$$\frac{p^3}{(p^2-2)(p^2+1)}=\frac{Ap+B}{p^2-2}+\frac{Cp+D}{p^2+1},$$

$$p^3=(Ap+B)(p^2+1)+(Cp+D)(p^2-2).$$

$$\begin{array}{l|l} p^3 & A + \quad C = 1 \\ p^2 & B + \quad D = 0 \\ p^1 & A - 2C = 0 \\ p^0 & B - 2D = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{2}{3},\ B = 0,\ C = \frac{1}{3},\ D = 0.$$

Отже,

$$X(p) = \frac{2}{3}\frac{p}{p^2-2} + \frac{1}{3}\frac{p}{p^2+1}.$$

Аналогічно знаходимо представлення для $Y(p), Z(p)$.
Тоді маємо

$$\begin{cases} X(p) = \dfrac{1}{3}\dfrac{p}{p^2+1} + \dfrac{2}{3}\dfrac{p}{p^2-2}, \\ Y(p) = \dfrac{1}{3}\dfrac{p}{p^2+1} - \dfrac{1}{3}\dfrac{p}{p^2-2}, \\ Z(p) = \dfrac{1}{3}\dfrac{p}{p^2+1} - \dfrac{1}{3}\dfrac{p}{p^2-2}. \end{cases}$$

Переходимо до оригіналів, тобто до розв'язку заданої системи диференціальних рівнянь.

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{3}\cos t + \dfrac{2}{3}\mathrm{ch}\sqrt{2}\,t, \\ y(t) = \dfrac{1}{3}\cos t - \dfrac{1}{3}\mathrm{ch}\sqrt{2}\,t, \\ y(t) = \dfrac{1}{3}\cos t - \dfrac{1}{3}\mathrm{ch}\sqrt{2}\,t. \end{cases} \blacktriangleleft$$

IV. Задачі для практичних занять

У задачах 4.31 – 4.50 розв'язати задачі Коші для заданих диференціальних рівнянь операційним методом.

4.31. $x' - x = 1,\ x(0) = -1$.

4.32. $x'' - 2x' = e^{2t},\ x(0) = x'(0) = 0$.

4.33. $x'' + 2x' + x = \sin t,\ x(0) = 0,\ x'(0) = -1$.

4.34. $x'' - 2x' + 2x = 1,\ x(0) = x'(0) = 0$.

4.35. $x'' + x' = \cos t,\ x(0) = 2,\ x'(0) = 0$.

4.36. $x'' + 2x' + 5x = 3,\ x(0) = 1,\ x'(0) = 0$.

4.37. $x'' - 2x' + 5x = 1 - t,\ x(0) = x'(0) = 0$.

4.38. $x'' + x = 2\sin t,\ x(0) = 1,\ x'(0) = -1$.

4.39. $x'' - x' = te^t,\ x(0) = x'(0) = 0$.

4.40. $x'' + 2x' + x = t,\ x(0) = x'(0) = 0$.

4.41. $x'' - 2x' + x = t - \sin t,\ x(0) = x'(0) = 0$.

4.42. $x'' + 2x' + x = 2\cos^2 t,\ x(0) = x'(0) = 0$.

4.43. $x'' + x = te^t + 4\sin t,\ x(0) = x'(0) = 0$.

4.44. $x''' - x'' = \sin t,\ x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.

4.45. $x''' + x' = t,\ x(0) = 0,\ x'(0) = -1,\ x''(0) = 0$.

4.46. $x^{IV} - x'' = \cos t,\ x(0) = 0,\ x'(0) = -1,\ x''(0) = x'''(0) = 0$.

4.47. $x''' + x = 0,\ x(0) = 0,\ x'(0) = -1,\ x''(0) = 2$.

4.48. $x''' + x' = e^t,\ x(0) = 0,\ x'(0) = 2,\ x''(0) = 0$.

4.49. $x''' + x' = e^{2t},\ x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.

4.50. $x''' - 2x'' + x' = 4,\ x(0) = 1,\ x'(0) = 2,\ x''(0) = -2$.

У задачах 4.51 – 4.61 розв'язати задані задачі Коші для систем диференціальних рівнянь операційним методом.

4.51. $\begin{cases} x' + y = 0, \\ y' + x = 0, \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = -1$.

4.52. $\begin{cases} x' = -y, \\ y' = 2x + 2y, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 1$.

4.53. $\begin{cases} x + x' = y + e^t, \\ y + y' = x + e^t, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 1$.

4.54. $\begin{cases} 3x' + 2x + y' = 1, \\ x' + 4y' + 3y = 0, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 0$.

4.55. $\begin{cases} x' - x - 2y = t, \\ -2x + y' - y = t, \end{cases}$ $x(0) = 2,\ y(0) = 4$.

4.56. $\begin{cases} x'' - 3x' + 2x + y' - y = 0, \\ -x' + x + y'' - 5y' + 4y = 0, \end{cases}$ $x(0) = x'(0) = y'(0) = 0,\ \ y(0) = 1$.

4.57. $\begin{cases} 2x'' - x' + 9x - y'' - y' - 3y = 0, \\ 2x'' + x' + 7x - y'' + y' - 5y = 0, \end{cases}$
$x(0) = x'(0) = 1, \;\; y(0) = y'(0) = 0.$

4.58. $\begin{cases} x' - y' - 2x + 2y = 1 - 2t, \\ x'' + 2y' + x = 0, \end{cases}$
$x(0) = x'(0) = y(0) = 0.$

4.59. $\begin{cases} x' = -y - z, \\ y' = -x - z, \\ z' = -x - y, \quad x(0) = -1, \;\; y(0) = 0, \;\; z(0) = 1. \end{cases}$

4.60. $\begin{cases} x' = y + z, \\ y' = 3x + z, \\ z' = 3x + y, \quad x(0) = 0, \;\; y(0) = z(0) = 1. \end{cases}$

4.61. $\begin{cases} x' = 2x - y + z, \\ y' = x + z, \\ z' = -3x + y - 2z, \quad x(0) = y(0) = 1, \;\; z(0) = 0. \end{cases}$

ГЛАВА 5. ***ТИПОВІ РОЗРАХУНКОВІ ЗАВДАННЯ***

§1. Індивідуальне завдання 1.

Диференціальні рівняння

Задача 1. [*гл.1, § 1, приклади 3 –14*]
Розв’язати задані диференціальні рівняння першого порядку.

Варіанти завдань

1. а) $(1+x^2)\,dy + x(1+y^2)\,dx = 0$; б) $y' = \dfrac{y}{x} + \sin\dfrac{y}{x}$;
в) $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \dfrac{1}{\cos x}$; г) $dy = (y^2 e^x - y)\,dx$;
д) $(10xy - 8y + 1)\,dx + (5x^2 - 8x + 3)\,dy = 0$.

2. а) $e^{x+3y}dy = x\,dx$; б) $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$;
в) $y' - \dfrac{y}{x} = x^2$; г) $xy' + y = y^2 \ln x$;
д) $3x^2 e^y dx + (x^3 e^y - 1)\,dy = 0$.

3. а) $y' = (2x-1)\,\mathrm{ctg}\,y$; б) $y - xy' = \dfrac{x}{\cos\dfrac{y}{x}}$;
в) $(x^2+1)\,y' + 4xy = 3$; г) $y' + y = x\sqrt{y}$;
д) $\left(3x^2 + \dfrac{2}{y}\cos\dfrac{2x}{y}\right)dx - \dfrac{2x}{y^2}\cos\dfrac{2x}{y}\,dy = 0$.

4. а) $\dfrac{\mathrm{tg}\,y}{\cos^2 x}\,dx + \dfrac{\mathrm{tg}\,x}{\cos^2 y}\,dy = 0$; б) $(x-y)\,dx + (x+y)\,dy = 0$;
в) $(1-x)(y'+y) = e^{-x}$; г) $y' + 2y = y^2 e^x$;
д) $(3x^2 + 4y^2)dx + (8xy + e^y)dy = 0$.

5. а) $(1+e^x)\,y\,dy - e^y dx = 0$; б) $(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0$;
в) $xy' - 2y = 2x^4$; г) $y' = y^4 \cos x + y\,\mathrm{tg}\,x$;
д) $\left(2x - 1 - \dfrac{y}{x^2}\right)dx - \left(2y - \dfrac{1}{x}\right)dy = 0$.

6. а) $(y^2+3)\,dx-\frac{e^x}{x}y\,dy=0$; б) $y^2+x^2y'=xyy'$;

в) $y'=2x(x^2+y)$; г) $xy\,dy=(y^2+x)\,dx$;

д) $\left(y^2+\frac{y}{\cos^2 x}\right)dx+(2xy+\mathrm{tg}x)\,dy=0$.

7. а) $\sin y\cos x\,dy=\cos y\sin x\,dx$; б) $xy'-y=x\,\mathrm{tg}\frac{y}{x}$;

в) $y'-y=e^x$; г) $y'+y=xy^2$;

д) $(3x^2y+2y+3)\,dx+(x^3+2x+3y^2)\,dy=0$.

8. а) $y'=(2y+1)\,\mathrm{tg}\,x$; б) $xy'=y-xe^{y/x}$;

в) $xy'+y+xe^{-x^2}=0$; г) $y'x^3\sin y=xy'-2y$;

д) $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)dx+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\right)dy=0$.

9. а) $(\sin(x+y)+\sin(x-y))\,dx+\frac{dy}{\cos y}=0$;

б) $xy'-y=(x+y)\ln\frac{x+y}{x}$; в) $\cos y\,dx=(x+2\cos y)\sin y\,dy$;

г) $(2x^2y\ln y-x)\,y'=y$;

д) $(\sin 2x-2\cos(x+y))\,dx-2\cos(x+y)\,dy=0$.

10. а) $(1+e^x)\,yy'=e^x$; б) $xy'=y\cos\ln\frac{y}{x}$;

в) $x^2y'+xy+1=0$; г) $2y'-\frac{x}{y}=\frac{xy}{x^2-1}$;

д) $\left(xy^2+\frac{x}{y^2}\right)dx+\left(x^2y-\frac{x^2}{y^3}\right)dy=0$.

11. а) $\sin x\,\mathrm{tg}\,y\,dx-\frac{dy}{\sin x}=0$; б) $(y+\sqrt{xy})\,dx=x\,dy$;

в) $x'y+x=4y^3+3y^2$; г) $xy'-2x^2\sqrt{y}=4y$;

д) $\left(\frac{1}{x^2}+\frac{3y^2}{x^4}\right)dx-\frac{2y}{x^3}\,dy=0$.

12. а) $3e^x\sin y\,dx+(1-e^x)\cos y\,dy=0$; б) $xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y$;

в) $(2x+y)dy=y\,dx+4\ln y\,dy$; г) $xy^2y'=x^2+y^3$;

д) $\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}\,dx-\left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}+2y\right)dy=0$.

13. а) $y'=\frac{e^{2x}}{\ln y}$; б) $y=x(y'-e^{y/x})$;

в) $y'=\frac{y}{3x-y^2}$; г) $(x+1)(y'+y^2)=-y$;

д) $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y\right)dx+\left(x+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy=0$.

14. а) $3^{x^2+y}\,dy+x\,dx=0$; б) $y'=\frac{y}{x}-1$;

в) $(1-2xy)\,y'=y(y-1)$; г) $xy'+y=-xy^2$;

д) $\frac{1+xy}{x^2y}\,dx+\frac{1-xy}{xy^2}\,dy=0$.

15. а) $(\cos(x-2y)+\cos(x+2y))\,y'=\frac{1}{\cos x}$;

б) $xy'+x+y=0$; в) $x(y'-y)=e^x$;

г) $y'-xy=-y^3e^{-x^2}$; д) $\frac{2x}{y}dx-\frac{x^2+y^2}{y^2}dy=0$.

16. а) $y'=e^{x^2}x(1+y^2)$; б) $y\,dx+(2\sqrt{xy}-x)\,dy=0$;

в) $y=x(y'-x\cos x)$; г) $xy'-2\sqrt{x^3y}=y$;

д) $\frac{y}{x^2}\,dx-\frac{xy+1}{x}\,dy=0$.

17. а) $\mathrm{ctg}\,x\cos^2 y\,dx+\sin^2 x\,\mathrm{tg}\,y\,dy=0$;

б) $y'=\frac{x+y-2}{2x-2}$; в) $(xy'-1)\ln x=2y$;

г) $y'+xy=x^3y^3$; д) $\left(xe^x+\frac{y}{x^2}\right)dx-\frac{1}{x}dy=0$.

18. а) $y'\sin x=y\cos x+2\cos x$; б) $y'=\frac{2y-2}{x+y-2}$;

в) $(2e^y - x)\,y' = 1$; г) $y' = \frac{x}{y}\,e^{2x} + y$;

д) $\left(10xy - \frac{1}{\sin y}\right)dx + \left(5x^2 + \frac{x\cos y}{\sin^2 y} - y^2\sin y^3\right)dy = 0$.

19. а) $1 + (1 + y')e^y = 0$; б) $y' = \frac{2x + y - 3}{x - 1}$;

в) $xy' + (x+1)\,y = 3x^2 e^{-x}$; г) $x'y + x = -x^2 y$;

д) $\left(\frac{y}{x^2 + y^2} + e^x\right)dx - \frac{x}{x^2 + y^2}\,dy = 0$.

20. а) $y'\operatorname{ctg} x + y = 2$; б) $y' = \frac{x + 8y - 9}{10x - y - 9}$;

в) $(x + y^2)\,dy = y\,dx$; г) $x(x-1)\,y' + y^3 = xy$;

д) $e^y dx + (\cos y + xe^y)\,dy = 0$.

21. а) $\frac{e^{-x^2}}{x}dy + \frac{dx}{\cos^2 y} = 0$; б) $y' = \frac{x - 2y + 3}{-2x + 2}$;

в) $(\sin^2 y + x\operatorname{ctg} y)\,y' = 1$; г) $2x^3yy' + 3x^2y^2 + 1 = 0$;

д) $(y^3 + \cos x)\,dx + (3xy^2 + e^y)\,dy = 0$.

22. а) $e^x \sin y\,dx + \operatorname{tg} y\,dy = 0$; б) $x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$;

в) $(x+1)\,y' + y = x^3 + x^2$; г) $\frac{dx}{x} = \left(\frac{1}{y} - 2x\right)dy$;

д) $xe^{y^2}dx + (x^2 ye^{y^2} + \operatorname{tg}^2 y)\,dy = 0$.

23. а) $(1 + e^{3y})\,x\,dx = e^{3y}dy$; б) $(x - y)\,y\,dx - x^2 dy = 0$;

в) $xy' - 2y + x^2 = 0$; г) $y' + x\sqrt[3]{y} = 3y$;

д) $(5xy^2 - x^3)\,dx + (5x^2y - y)\,dy = 0$.

24. а) $(\sin(2x + y) - \sin(2x - y))\,dx = \frac{dy}{\sin y}$;

б) $xy + y^2 = (2x^2 + xy)\,y'$; в) $xy' + y = \sin x$;

г) $y' + \frac{y}{x} = -xy^2$;

д) $(\cos(x + y^2) + \sin x)\,dx + 2y\cos(x + y^2)\,dy = 0$.

25. а) $\cos y\,dx = 2\sqrt{1 + x^2}\,dy + \cos y\sqrt{1 + x^2}\,dy$;

б) $(x^2 - 2xy)\,y' = xy - y^2$; в) $(x^2 - 1)\,y' - xy = x^3 - x$;

г) $x\,dx = \left(\frac{x^2}{y} - y^3\right)dy$;

д) $(x^2 - 4xy - 2y^2)\,dx + (y^2 - 4xy - 2x^2)\,dy = 0$.

26. а) $y'\sqrt{1 - x^2} - \cos^2 y = 0$; б) $(2\sqrt{xy} - y)\,dx + x\,dy = 0$;

в) $(1 - x^2)\,y' + xy = 1$; г) $y' + 2xy = 2x^3y^3$;

д) $\left(\sin y + y\sin x + \frac{1}{x}\right)dx + \left(x\cos y - \cos x + \frac{1}{y}\right)dy = 0$.

27. а) $e^x\operatorname{tg} y\,dx = \frac{1 - e^x}{\cos^2 y}\,dy$; б) $xy' + y\left(\ln\frac{y}{x} - 1\right) = 0$;

в) $y'\operatorname{ctg} x - y = 2\cos^2 x\operatorname{ctg} x$; г) $y' + y = \frac{x}{y^2}$;

д) $\left(1 + \frac{1}{y}e^{x/y}\right)dx + \left(1 - \frac{x}{y^2}e^{x/y}\right)dy = 0$.

28. а) $y' + \sin(x + y) = \sin(x - y)$; б) $(y^2 - 2xy)\,dx - x^2 dy = 0$;

в) $x^2 y' = 2xy + 3$; г) $y' - y\operatorname{tg} x + y^2\cos x = 0$;

д) $\frac{(x - y)\,dx + (x + y)\,dy}{x^2 + y^2} = 0$.

29. а) $y'\cos^3 y - \cos(2x + y) = \cos(2x - y)$;

б) $y' = \frac{x + 2y - 3}{2x - 2}$; в) $y' - 3x^2 y - x^2 e^{x^3} = 0$;

г) $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$;

д) $2(3xy^2 + 2x^3)\,dx + 3(2x^2 y + y^2)\,dy = 0$.

30. а) $3^{y^2 - x^2} = \frac{yy'}{x}$; б) $2x^3 y' = y(2x^2 - y^2)$;

в) $xy' + y = \ln x + 1$; г) $y' - y + y^2\cos x = 0$;

д) $(3x^3 + 6x^2 y + 3xy^2)\,dx + (2x^3 + 3x^2 y)\,dy = 0$.

31. а) $\sqrt{3 + y^2} + \sqrt{1 - x^2}\,yy' = 0$; б) $y' = \frac{x + 7y - 8}{9x - y - 8}$;

в) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$; г) $y' = x\sqrt{y} + \dfrac{xy}{x^2 - 1}$;

д) $xy^2dx + y(x^2 + y^2)dy = 0$.

Задача 2. [*гл.1, § 1, приклади 18 – 20*]
Розв'язати задану геометричну задачу.

Варіанти завдань

У варіантах 1 – 3 знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $A(x_0, y_0)$, якщо довжина відрізка півосі абсцис, що відтинається її дотичною, дорівнює квадрату абсциси точки дотику.

1. $A\left(\dfrac{1}{2}; -1\right)$. 2. $A\left(\dfrac{1}{2}; -2\right)$. 3. $A(-1;\ 3)$.

У варіантах 4 – 6 знайти рівняння кривої, що проходить через точку $A(x_0, y_0)$, якщо відомо, що кутовий коефіцієнт дотичної в кожній її точці в n разів більше кутового коефіцієнта прямої, яка з'єднує цю точку з початком координат.

4. $A(1;\ 4)$, $n = 6$.
5. $A(3; -1)$, $n = 8$.
6. $A(-8; -2)$, $n = 3$.

У варіантах 7 – 9 знайти лінію, яка проходить через точку $A_0(x_0, y_0)$ і має таку властивість: в кожній точці $A(x, y)$ нормальний вектор $\overrightarrow{AB}$ з кінцевою точкою на осі Oy має довжину a і утворює гострий кут з додатним напрямком осі Oy.

7. $A_0(15;\ 1)$, $a = 25$.
8. $A_0(12;\ 2)$, $a = 20$.
9. $A_0(3;\ 5)$, $a = 5$.

У варіантах 10 – 12 знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $A(x_0, y_0)$, якщо її піддотична вдвічі більше абсциси точки дотику.

10. $A(1;\ 2)$. 11. $A(-1;\ 3)$. 12. $A(4;\ -1)$.

У варіантах 13 – 15 знайти лінію, яка проходить через точку $A(x_0, y_0)$, якщо відрізок кожної її дотичної, що міститься між осями координат, ділиться в точці дотику в співвідношенні $a:b$ (відраховуючи від осі Oy).

13. $A(2;\ 2)$, $a:b = 1:1$.
14. $A(1;\ 2)$, $a:b = 3:1$.
15. $A(1;\ -1)$, $a:b = 1:3$.

У варіантах 16 – 18 записати рівняння кривої, що проходить через точку $A(x_0, y_0)$ і має таку властивість: довжина перпендикуляра, який опущений з початку координат на дотичну до кривої, дорівнює абсцисі точки дотику.

16. $A(5;\ 3)$. 17. $A(-1;\ 4)$. 18. $A(5;\ 0)$.

У варіантах 19 – 21 знайти рівняння кривої, яка проходить через початок координат, якщо середина відрізка її нормалі від довільної точки кривої до осі Ox лежить на параболі $ay^2 = 2px$.

19. $a = 2,\quad p = 4$. 20. $a = 1,\quad p = \dfrac{3}{4}$. 21. $a = 3,\quad p = 2$.

У варіантах 22 – 24 записати рівняння кривої, яка проходить через точку $A(x_0, y_0)$, якщо відомо, що відрізок, який відтинає дотична в довільній точці кривої на осі Oy, дорівнює півсумі координат точки дотику.

22. $A(10; -1)$. 23. $A(12; -2)$. 24. $A(1; -9)$.

У варіантах 25 – 27 знайти лінію, яка проходить через точку $A_0(x_0, y_0)$ і має таку властивість: в кожній її точці $A(x, y)$ дотичний вектор $\overrightarrow{AB}$ з кінцевою точкою на осі Oy має проекцію на вісь Oy, що дорівнює a.

25. $A_0(1;\ 4)$, $a = 2$.
26. $A_0(-1;\ 5)$, $a = 1$.
27. $A_0(1;\ 6)$, $a = 3$.

У варіантах 28 – 29 знайти рівняння кривої, що проходить через точку $A(x_0, y_0)$, якщо площа криволінійної трапеції, яка обмежена дугою цієї кривої, в n разів більше довжини відповідної дуги.

28. $A(0;\ 2)$, $n = 2$.
29. $A(0; -1)$, $n = 4$.

У варіантах 30 – 31 знайти лінію, яка проходить через точку $A(x_0, y_0)$ і має таку властивість: відрізок дотичної між точкою дотику і віссю ординат має сталу довжину a.

30. $A(2; 0)$, $a = 2$.
31. $A(-1; 4)$, $a = 3$.

Задача 3. [*гл.1, § 2, приклади 3 – 9*]
Розв'язати задані диференціальні рівняння, що допускають зниження порядку.

У п.а) знайти загальний розв'язок.

У п.б) розв'язати задачу Коші.

Варіанти завдань

1. а) $y'' = x + \sin x$; б) $4y^3y'' = y^4 - 1,\ y(0) = \sqrt{2},\ y'(0) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.
2. а) $2xy'y'' = y'^2 - 1$; б) $y'^2 + 2yy'' = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$.
3. а) $x^3y'' + x^2y' = 1$; б) $yy'' + y'^2 = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$.
4. а) $yy'' + y'^3 = y'^2$; б) $y'' = xe^x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.
5. а) $y''x\ln x = y'$; б) $y''\operatorname{tg} y = 2y'^2,\ y(1) = \frac{\pi}{2},\ y'(1) = 2$.
6. а) $y'' + y'\operatorname{tg} x = \sin 2x$; б) $y''' = \frac{\ln x}{x^2},\ y(1) = 0,\ y'(1) = 1,\ y''(1) = 2$.
7. а) $y^{IV} = \frac{1}{x}$; б) $y'' = e^{2y},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.
8. а) $x^2y'' + xy' = 1$; б) $y'' = -\frac{1}{2y^3},\ y(0) = \frac{1}{2},\ y'(0) = \sqrt{2}$.
9. а) $(1+x^2)y'' = 2xy'$; б) $y'' = \frac{1}{\sqrt{y}},\ y(0) = y'(0) = 0$.
10. а) $y''' = y''^2$; б) $yy'' - y'^2 = y^2,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.
11. а) $y'' = y' + x$; б) $2yy'' - y'^2 + 1 = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1$.
12. а) $2xy'y'' = y'^2 + 1$; б) $(1+y)y'' = 5y'^2,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.
13. а) $xy''' + y'' = 1$; б) $y^3y'' + 4 = 0,\ y(0) = -1,\ y'(0) = -2$.
14. а) $xy''' + y'' - x - 1 = 0$; б) $2yy'' + y^2 - y'^2 = 0,\ y(0) = y'(0) = 1$.
15. а) $y''\operatorname{tg} y = 2y'^2$; б) $y'' = 2xy'^2,\ y(2) = 2,\ y'(2) = 0{,}5$.
16. а) $y'' + 2xy'^2 = 0$; б) $y'' + \frac{2}{1-y}y'^2 = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.
17. а) $xy'' = y'\ln\frac{y'}{x}$; б) $y'' = 2y^3,\ y(-1) = 1,\ y'(-1) = 1$.
18. а) $xy''' + y'' + x = 0$; б) $y''y^3 + 9 = 0,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 3$.
19. а) $xy'' + y' + x = 0$; б) $\frac{y''}{y'} = \frac{2yy'}{1+y^2},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.
20. а) $yy'' - 2yy'\ln y - y'^2 = 0$; б) $(y-1)y'' = 2y'^2,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 2$.

21. а) $y'''\operatorname{cth} 2x = 2y''$; б) $y^3y'' = y^4 - 16,\ y(0) = 2\sqrt{2},\ y'(0) = \sqrt{2}$.
22. а) $xy'' - y' - x\sin\frac{y'}{x} = 0$; б) $y'' = 50\sin^3 y \cdot \cos y,\ y(1) = \frac{\pi}{2},\ y'(1) = 5$.
23. а) $y'' - 2y'\operatorname{ctg} x = \sin^3 x$; б) $y'' = 32y^3,\ y(4) = 1,\ y'(4) = 4$.
24. а) $y'''\operatorname{tg} x = 2y''$; б) $y'' + 32\sin y \cdot \cos^3 y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 4$.
25. а) $y'' + y' = \sin x$; б) $y''(x^2+1) = 2xy',\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3$.
26. а) $(1+e^x)y'' + y' = 0$; б) $(1+y)y'' = y'^2 + y',\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.
27. а) $y'' + 4y' = \cos 2x$; б) $yy'' - y'^2 = y^2\ln y,\ y(0) = y'(0) = 1$.
28. а) $x\ln x\, y''' = y''$; б) $y'' = 1 + y'^2,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1$.
29. а) $(1+x^2)y'' + 2xy' = x^3$; б) $yy'' - 2yy'\ln y = y'^2,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.
30. а) $y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1)$; б) $(2y+3)y'' - 2y'^2 = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 3$.
31. а) $y''' + y''\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$; б) $4y''^2 = 1 + y'^2,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

Задача 4. [*гл.1, § 2, приклади 12 – 14*]
Знайти загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Варіанти завдань

1. а) $y'' - 2y' + 2y = 0$; б) $4y^{IV} + 3y''' = 0$.
2. а) $y'' + 6y' + 25y = 0$; б) $y''' - y'' - y' + y = 0$.
3. а) $y'' + 2y' + y = 0$; б) $y''' + 3y'' + 2y' = 0$.
4. а) $y'' + 4y' = 0$; б) $y''' - 13y'' + 12y' = 0$.
5. а) $4y'' + 4y' + y = 0$; б) $y''' - y'' = 0$.
6. а) $9y'' - 6y' + y = 0$; б) $y''' + y = 0$.
7. а) $y'' - 4y' + 4y = 0$; б) $y^{IV} - y''' = 0$.
8. а) $y'' - 6y' + 10y = 0$; б) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.
9. а) $y'' - 10y' + 25y = 0$; б) $y''' - 4y'' + 3y' = 0$.
10. а) $4y'' + 8y' - 5y = 0$; б) $3y^{IV} + y''' = 0$.
11. а) $y'' + 9y' = 0$; б) $9y''' - 6y'' + y' = 0$.

12. а) $y'' + y' - 2y = 0$; б) $7y''' - y'' = 0$.
13. а) $y'' - 4y' + 5y = 0$; б) $y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = 0$.
14. а) $y'' + 12y' + 37y = 0$; б) $y^{V} - y^{IV} = 0$.
15. а) $y'' + 4y' + 5y = 0$; б) $y''' + 3y'' + 2y' = 0$.
16. а) $y'' - 6y' = 0$; б) $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = 0$.
17. а) $y'' - 3y' = 0$; б) $y^{IV} - 6y''' + 9y'' = 0$.
18. а) $y'' - 2y' - 15y = 0$; б) $y^{IV} + 2y''' + y'' = 0$.
19. а) $y'' - 3y' - 10y = 0$; б) $y''' + 5y'' + 7y' + 3y = 0$.
20. а) $y'' - 7y' + 8y = 0$; б) $y^{IV} - 2y''' + y'' = 0$.
21. а) $y'' - 4y' - 21y = 0$; б) $y^{V} - 3y^{IV} + y''' = 0$.
22. а) $y'' - 2y' + 2y = 0$; б) $y^{IV} + 4y''' + 4y'' = 0$.
23. а) $9y'' + 6y' + y = 0$; б) $y^{IV} + y' = 0$.
24. а) $y'' - 7y' - 8y = 0$; б) $y''' - y = 0$.
25. а) $2y'' + 3y' + y = 0$; б) $y''' + 4y'' + 5y' + 2y = 0$.
26. а) $y'' + 4y' + 13y = 0$; б) $y^{IV} - 6y'' + 9y = 0$.
27. а) $y'' - 6y' + 9y = 0$; б) $y''' - 5y'' + 7y' - 3y = 0$.
28. а) $y'' - 3y' - 4y = 0$; б) $y''' - y'' - 9y' + 9y = 0$.
29. а) $y'' - 10y' + 21y = 0$; б) $y^{IV} - 4y'' = 0$.
30. а) $y'' - 3y' - 18y = 0$; б) $y''' + y'' + 6y' = 0$.
31. а) $y'' + 6y' = 0$; б) $y^{V} + 8y'' = 0$.

Задача 5. [*гл.1, § 2, приклади 15 – 21*]

Знайти частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами, що задовольняє задані початкові умови.

Варіанти завдань

1. $y'' - 2y' = (2x^2 + 1)e^x$, $y(1) = -1$, $y'(1) = 0$.
2. $y'' - 9y = e^{3x}\cos x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.
3. $y'' + 8y' + 16y = 16x^2 - 16x + 66$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$.

4. $y'' - 6y' + 25y = 2\sin x + 3\cos x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
5. $y'' + 2y' + 5y = -8e^{-x}\sin 2x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 6$.
6. $y'' - 2y = 2xe^x(\cos x - \sin x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
7. $y'' - 2y' + 2y = 4e^x\cos x$, $y(\pi) = \pi e^{\pi}$, $y'(\pi) = e^{\pi}$.
8. $y'' - 4y' + 20y = 16xe^{2x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.
9. $y'' + y = 4x\cos x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.
10. $y'' + 25y = e^x(\cos 5x - 10\sin 5x)$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.
11. $y'' + 5y' = 72xe^x$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$.
12. $y'' + 4y = x^2e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.
13. $y'' - 12y' + 36y = 32\cos 2x + 24\sin 2x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$.
14. $y'' - 4y' + 4y = \sin 2x + 2e^x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.
15. $4y'' - 5y' + y = (4x + 2)e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.
16. $5y'' + 9y' - 2y = x^3 - 2x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.
17. $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x}\cos 2x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.
18. $y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 5$.
19. $y'' + 2y' - 2y = 2x^2 + 8x + 6$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$.
20. $y'' - 6y' + 25y = 9\sin 4x - 24\cos 4x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$.
21. $y'' - 7y' + 12y = xe^{3x} + 2e^x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.
22. $y'' + 8y' = 18x + 60x^2 - 32x^3$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 1$.
23. $y'' + 5y' + 6y = 52\sin 2x$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 4$.
24. $y'' - 8y' + 16y = 2xe^{4x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
25. $y'' + y' - 2y = (2x - 1)e^{-x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$.
26. $y'' + y' - 12y = e^{4x}(8x + 11)$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$.
27. $y'' - y = (14 - 16x)e^{-x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.
28. $y'' + y = x^3 - 4x^2 + 7x - 10$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 6$.
29. $y'' - 9y' + 18y = 26\cos x - 4\sin x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 8$.
30. $y'' - 2y' + 37y = 36e^x\cos 6x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 6$.
31. $y'' - 4y' + 20y = 16xe^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Задача 6. [*гл.1, § 2, приклади 22, 23*]

Розв'язати задане неоднорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами, застосувавши метод варіації довільної сталої.

Варіанти завдань

1. $y'' + y = \operatorname{tg} x$.
2. $y'' + y = \operatorname{ctg} x$.
3. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$.
4. $y'' - 2y' + 2y = \dfrac{e^x}{\sin x}$.
5. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$.
6. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$.
7. $y'' - y' = e^x \sin x$.
8. $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{1+x}$.
9. $y'' - 2y = 4x^2 e^{-x\sqrt{2}}$.
10. $y'' - 4y' + 4y = \operatorname{sh} 2x$.
11. $y'' - 3y' + 2y = 3x + 5\sin 2x$.
12. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin 2x}$.
13. $y'' + 2y' + y = xe^x$.
14. $y'' + 2y' + 5y = \dfrac{e^{-x}}{\sin 2x}$.
15. $y'' - 2y' + 10y = \sin 3x + e^x$.
16. $y'' - y = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$.
17. $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{x^2}$.
18. $y'' + y = \operatorname{tg}^2 x$.
19. $y'' - 4y' = 16\operatorname{ch} 4x$.
20. $y'' - 3y' = 2\operatorname{ch} 3x$.
21. $y'' + 9y = \dfrac{9}{\cos 3x}$.
22. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{3 + e^{-x}}$.
23. $y'' + \dfrac{y}{4} = \dfrac{1}{4}\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$.
24. $y'' + 9y = \dfrac{9}{\sin 3x}$.
25. $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}\operatorname{ctg} x$.
26. $y'' + 6y' + 8y = \dfrac{4}{2 + e^{-2x}}$.
27. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^x}{1 + e^{-x}}$.
28. $y'' - y' = e^{2x}\sin(e^x)$.
29. $y'' - y' = e^{2x}\cos(e^x)$.
30. $y'' - 3y' = \dfrac{9e^{-3x}}{3 + e^{-3x}}$.
31. $y'' + \pi^2 y = \dfrac{\pi^2}{\sin \pi x}$.

Задача 7. [*гл.1, § 3, приклади 12 – 15*]

Розв'язати задану систему диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами двома способами:

а) методом виключення,

б) методом Ейлера.

Варіанти завдань

1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 4y. \end{cases}$
2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 4y. \end{cases}$
3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 7y. \end{cases}$
4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y. \end{cases}$
5. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y. \end{cases}$
6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 3y. \end{cases}$
7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - 4y. \end{cases}$
8. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 7y. \end{cases}$
9. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 6y. \end{cases}$
10. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$
11. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 6y. \end{cases}$
12. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$
13. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 7x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 5y. \end{cases}$
14. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - y. \end{cases}$
15. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y. \end{cases}$
16. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 10x - 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 7y. \end{cases}$
17. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 6y. \end{cases}$
18. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 6y. \end{cases}$
19. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x + 4y. \end{cases}$
20. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - 6y. \end{cases}$
21. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 8y. \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$ 23. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 6y. \end{cases}$ 24. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + y. \end{cases}$

25. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 4y. \end{cases}$ 26. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 3y. \end{cases}$ 27. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 8x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y. \end{cases}$

28. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 7y. \end{cases}$ 29. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 5y. \end{cases}$ 30. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$

31. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y. \end{cases}$

§2. Індивідуальне завдання 2.

Ряди

Задача 1. [*гл.2, § 1, приклади 1, 2*]
Довести збіжність заданого ряду та знайти його суму.

Варіанти завдань

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{4n^2-9}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. 4. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{2n+1}{n(n^2-1)}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4^n-3^n}{12^n}$. 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n+5^n}{15^n}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$. 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{4n^2+8n+3}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n+2^n}{6^n}$. 10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. 12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{24}{9n^2-12n-5}$.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{7}{49n^2+7n-12}$. 14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+6}{n(n+2)(n+3)}$.

15. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{3n-5}{n(n^2-1)}$. 16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n+5^n}{10^n}$.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+2)(n+3)}$. 18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3-n}{n(n+1)(n+3)}$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n+2}{n(n+2)(n+1)}$. 20. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{5n-2}{(n-1)n(n+2)}$.

21. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{8n-10}{(n-1)(n+1)(n-2)}$. 22. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{n+5}{(n+2)(n^2-1)}$.

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5n+9}{n(n+1)(n+3)}$. 24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n-1}{n(n+1)(n+2)}$.

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2-n}{n(n+1)(n+2)}$. 26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+6}{n(n+1)(n+2)}$.

27. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+n-2}$. 28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4-n}{n(n+1)(n+2)}$.

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4}{4n^2+4n-3}$. 30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{9}{9n^2+3n-20}$.

31. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{3n-1}{n(n^2-1)}$.

Задача 2. [*гл.2, § 1, приклад 3*]
Дослідити на збіжність задані числові ряди з додатними членами.

Варіанти завдань

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+5}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n-1}{2n+1}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^2}$.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n^2+4n+5)}$.

3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3\cdot 5\ldots(2n+1)}{1\cdot 4\ldots(3n-2)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

4. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{5^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n^2+1)\ln^2 n}$.

5. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2^{2n}(n-1)!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^3(n+1)}$.

6. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{9^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{1}{n}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2n+1}}{n!}$.

7. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot5\cdot8\ldots(3n-1)}{1\cdot5\cdot9\ldots(4n-3)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{(n-1)!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2+3}$.

8. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+1)!}{8^n n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$; в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$.

9. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(2n-1)^{n-1}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{4n-3}\right)^{2n}$.

10. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot11\ldots(10n-9)}{2n-1}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2}}{9^n}$.

11. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{7^n n(n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{4n}\right)^{3n}$; в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^2\ln n}$.

12. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n+1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+2}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}$.

13. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5^n(2n-1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)^n}{(4n-1)^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5+n}{25+n^2}$.

14. а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot5\cdot6\ldots(n+3)}{5\cdot7\cdot9\ldots(2n+3)}$.

15. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)\ln^2(n+9)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arccos\frac{1}{n^2+3}$.

16. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{(3n-2)^{n+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+2)\sqrt{\ln(n+3)}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{n^3+1}}{\arcsin\frac{1}{n\sqrt{n}}}$.

17. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\frac{n}{3}\ln^2(n+5)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+2}}{(2n^2+1)^{n/2}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1}{n+3}$.

18. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+2)!\cdot5^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^2+1)\arcsin\frac{1}{n^4+n+3}$; в) $\sum\limits_{n=7}^{\infty}\frac{1}{(n-5)\ln^2(n-5)}$.

19. а) $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\frac{n+1}{(n^2+1)\ln(n-2)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{\pi}{5n+1}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n(n+1)}$.

20. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n+2)!}{n^5}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{n^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{n-1}}$.

21. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3n-1)\sin\frac{\pi}{4^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2-n-1}{7n^2+3n+4}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\arccos\frac{1}{n}}$.

22. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{8}\right)^n\left(\frac{1}{n}\right)^7$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{1}{3n}\right)^{2n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n$.

23. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{3n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{3n}\right)^{n^2}$; в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{(4n+5)^3}}$.

24. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot4\ldots(3n+1)}{2^n\cdot n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^{n^2}$; в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n-1)}$.

25. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot5\ldots(2n+1)}{2\cdot5\ldots(3n+2)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{4n+1}\right)^{n^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3+8n)\ln^3(3+8n)}$.

26. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^3\operatorname{tg}\frac{2\pi}{5^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^{n^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2+n}{n^2-n+4}$.

27. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n(n+3)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n+1}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3+n}{n^2-2n+9}$.

28. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}+1}\operatorname{arctg}\frac{n+1}{n^2+6}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+2)!}$; в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{3n+1}{(2n-1)^2\ln^2 n}$.

29. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6^{2n}}{(2n+1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{n+3}{2n+5}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n^3}{(n^4-2)\ln^2 n}$.

30. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n)!}\operatorname{tg}\frac{1}{5^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2\ln^2 n}$; в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^7 n}$.

31. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(e^{1/n^2}-1\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{3^n \cdot n!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln(n+2)}$.

Задача 3. [*гл.2, § 1, приклад 4*]
Дослідити задані ряди на абсолютну та умовну збіжність.

Варіанти завдань

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{1}{3n-1}$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \left(\dfrac{2n-1}{3n+2}\right)^n$.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)}{3\cdot 5\cdot 7\ldots(2n+1)}$.
4. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^{n} \dfrac{\ln n}{n}$.
5. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n(\ln n)^2}$.
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{1}{n^2}$.
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{n^2}{2^n}$.
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{2n+1}{5n(n+1)}$.
9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 5^n}$.
10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$.
11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{3^n}{2n+2}$.
12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{2^n}{n^4}$.
13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)(n+4)}$.
14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{2n-1}{3n}$.
15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{2n+1}{n(n+2)}$.
16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)2^{2n+1}}$.
17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$.
18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \dfrac{3^n}{2n+2}$.
19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \dfrac{n}{12^n}$.
20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)2^{2n+1}}$.
21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin\dfrac{\pi}{8^n}$.
22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{1}{(n+1)^{3/2}}$.
23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{(n+1)\left(\dfrac{3}{2}\right)^n}$.
24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \dfrac{n}{n^2+1}$.

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}(1+(0{,}1)^n)$.
26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \dfrac{1}{2^n}$.
27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{3n-2}{3n-1}$.
28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1+\dfrac{n}{10^n}\right)$.
29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{n+1}{n^2+n+1}$.
30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \dfrac{n^2+1}{n^3}$.
31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{2n+1}{n(n+2)}$.

Задача 4. [*гл.2, § 2, приклад 1*]
Знайти області збіжності заданих функціональних рядів.

Варіанти завдань

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{3^n n(x+2)^n}$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!(x+3)^n}$.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(x+5)^n}$.
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-x}$.
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{x}$.
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(x^n + \dfrac{1}{n\cdot 2^n x^n}\right)$.
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n\sqrt{n}}$.
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{e^{nx}}$.
9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln^n x}{n}$.
10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg}\dfrac{x}{2^n}$.
11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}$.
12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{(x-2)^n}$.
13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(x+1)^n}$.
14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n\,2^n}{(x-3)^{2n}}$.
15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\, e^{-nx}$.
16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} e^{-nx^2}$.
17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\, e^{nx}$.
18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^n$.
19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+2}}{16^n(2n+1)}$.
20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{x^n}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$.
21. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n-3)(2n-2)}$.
22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)x^{n+1}}$.
23. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\sin^n x}{n(n-1)}$.
24. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$.
25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{-nx}}{n}$.
26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{4^n(2n-1)}$.
27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+x)^n}{n^n}$.

28. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n(n-1)}$. 29. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}$.

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n(2n-1)}$. 31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)x^n$.

Задача 5. [*гл.2, § 2, приклад 3*]
Визначити область збіжності заданих степеневих рядів.

Варіанти завдань

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^n x^n}{n^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^2 2^n}$.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,x^n}{n^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n\cdot 2^n\sqrt{3n+1}}$.

3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{5^{n+1}n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(x-2)^{2n}}{n}$.

4. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-4)^{2n}}{n\cdot 3^n}$.

5. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(0{,}1)^n x^{2n}}{n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n\ln(n+1)}$.

6. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{(2n+1)^2\sqrt{3^n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1}$.

7. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$.

8. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{\sqrt{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{n^2}}{(n+1)^n}$.

9. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}x^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n(x-5)^n}{(3n+1)^{10}}$.

10. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\frac{x^n}{5^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{3n}}{n^2}$.

11. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\operatorname{tg}\frac{1}{n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{n\sqrt[3]{n}}$.

12. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{6^n\sqrt[3]{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2+x)^n$.

13. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2 x^n}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n-1}}{2n\cdot 4^n}$.

14. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{\sqrt{2n-1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^n(x+1)^n}{2^{n-1}n^n}$.

15. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n\sqrt{3n-1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^2}$.

16. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}$.

17. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{2n-1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(x-2)^n}{\sqrt{n\cdot 2^n}}$.

18. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{8^n(n^2+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3n+2)(x+1)^n$.

19. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-5)^n}{(2n+1)4^n}$.

20. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!\,x^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^{2n}}{(n+1)4^n}$.

21. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^{n-1}\sqrt{3n+4}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5(x+2)^{2n+1}}{(n+1)!}$.

22. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n\,x^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{2n}}{(n+1)\ln(n+1)}$.

23. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n\,x^n}{3n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(2n-1)2^n}$.

24. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n x^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n\cdot 9^n}$.

25. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{n!}x^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^{2n}}{2n}$.

26. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-2)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$.

27. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!\, x^n}{(2n)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 5^n}$.

28. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\, x^n}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-5)^n}{n \cdot 3^n}$.

29. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (nx)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n (n+3)}$.

30. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n/2} x^n}{(n+1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+8)^n}{n^2}$.

31. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n \sqrt{2n+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2}$.

Задача 6. [*гл.2, § 2, приклади 5 – 7*]

Розкласти задану функцію $f(x)$ у степеневий ряд Тейлора (Маклорена) в околі вказаної точки a. Знайти область збіжності отриманого ряду до цієї функції.

Варіанти завдань

1. $f(x) = e^{-x^2}$, $a = 0$. 2. $f(x) = \ln x$, $a = 1$.

3. $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = 2$. 4. $f(x) = \sin^2 x$, $a = 0$.

5. $f(x) = 3^x$, $a = 0$. 6. $f(x) = e^{-2x}$, $a = 1$.

7. $f(x) = \frac{1}{2x+5}$, $a = 3$. 8. $f(x) = \cos^2 x$, $a = 0$.

9. $f(x) = \sin\frac{\pi x}{4}$, $a = 2$. 10. $f(x) = \frac{x}{3+4x}$, $a = 0$.

11. $f(x) = \sqrt[3]{27-x}$, $a = 0$. 12. $f(x) = (1-x)e^{-2x}$, $a = 0$.

13. $f(x) = \sin 2x + 2x\cos 2x$, $a = 0$. 14. $f(x) = \ln(1+x-2x^2)$, $a = 0$.

15. $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $a = 2$. 16. $f(x) = \frac{x}{x^2-6x+5}$, $a = 3$.

17. $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$, $a = -4$. 18. $f(x) = e^{x^2-4x+1}$, $a = 2$.

19. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$, $a = 2$. 20. $f(x) = \sin(x^2+4x)$, $a = -2$.

21. $f(x) = \operatorname{sh} x$, $a = 0$. 22. $f(x) = 2x\cos^2\frac{x}{2}$, $a = 0$.

23. $f(x) = \frac{7}{12+x-x^2}$, $a = 0$. 24. $f(x) = \cos\frac{2x^3}{3}$, $a = 0$.

25. $f(x) = (x-1)\operatorname{sh} x$, $a = 0$. 26. $f(x) = \frac{5}{6+x-x^2}$, $a = 0$.

27. $f(x) = e^{2x-x^2}$, $a = 1$. 28. $f(x) = \sin 3x - 3x\cos 3x$, $a = 0$.

29. $f(x) = \ln(5x+3)$, $a = 1$. 30. $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$, $a = 0$.

31. $f(x) = \sqrt[3]{1+x^2}$, $a = 0$.

Задача 7. [*гл.2, § 2, приклади 8 – 11*]

Обчислити задані визначені інтеграли з точністю до 0,001, використовуючи відповідні розклади елементарних функцій в степеневі ряди.

Варіанти завдань

1. $\int\limits_0^{0,5} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^2} dx$. 2. $\int\limits_0^{1} \cos\frac{x^2}{4} dx$. 3. $\int\limits_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$.

4. $\int\limits_0^{1} \sqrt{x}\sin x\, dx$. 5. $\int\limits_0^{0,8} \frac{1-\cos x}{x} dx$. 6. $\int\limits_0^{0,1} e^{-6x^2} dx$.

7. $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$. 8. $\int\limits_0^{0,1} \frac{1-e^{-2x}}{x} dx$. 9. $\int\limits_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}$.

10. $\int\limits_0^{0,4} \cos\left(\frac{5x}{2}\right)^2 dx$. 11. $\int\limits_0^{0,4} \frac{1-e^{-x/2}}{x} dx$. 12. $\int\limits_0^{0,4} e^{-\frac{3x^2}{4}} dx$.

13. $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{8+x^3}}$. 14. $\int\limits_0^{0,4} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)}{x} dx$. 15. $\int\limits_0^{1} e^{-x^2} dx$.

16. $\int\limits_0^{0,5} \frac{1-\cos x}{x^2} dx$. 17. $\int\limits_0^{0,2} \frac{\sin x}{x} dx$. 18. $\int\limits_0^{0,1} \frac{e^x-1}{x} dx$.

19. $\int\limits_0^{0,5} x\ln(1+x^2)\,dx$. 20. $\int\limits_0^{0,5} \ln(1+x^2)\,dx$. 21. $\int\limits_0^{0,5} \frac{\sin x^2}{x}dx$.

22. $\int\limits_0^{1} e^{-x^2/2}dx$. 23. $\int\limits_0^{0,5} \sqrt{1+x^3}\,dx$. 24. $\int\limits_0^{1} \frac{\ln(1+x)}{x}dx$.

25. $\int\limits_0^{0,5} \ln(1+x^3)\,dx$. 26. $\int\limits_0^{0,2} \sqrt{x}\cos x\,dx$. 27. $\int\limits_0^{0,5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}dx$.

28. $\int\limits_0^{1} \operatorname{arctg}\frac{x^2}{2}\,dx$. 29. $\int\limits_0^{0,25} \ln(1+\sqrt{x})\,dx$. 30. $\int\limits_0^{0,8} x^{10}\sin x\,dx$.

31. $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4}$.

Задача 8. [*гл.2, § 2, приклад 12*]

Знайти k перших членів розкладу в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння при вказаних початкових умовах.

Варіанти завдань

1. $y' = 2x+\cos y$, $y(0)=0$; $k=7$.
2. $y'' = 2yy'$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$; $k=6$.
3. $y''' = ye^x - xy'^2$, $y(0)=1$, $y'(0)=y''(0)=1$; $k=7$.
4. $y' = x+y^2$, $y(0)=1$; $k=5$.
5. $y' = y\cos x + x^2$, $y(0)=0$; $k=5$.
6. $(1-x)y''+y=0$, $y(0)=y'(0)=1$; $k=6$.
7. $y' = 2x^2+y^3$, $y(1)=1$; $k=5$.
8. $y' = \frac{1-x^2}{y}+1$, $y(0)=1$; $k=6$.
9. $y''+y=0$, $y(0)=y'(0)=1$; $k=5$.
10. $y' = x^2+e^y$, $y(0)=0$; $k=6$.
11. $y' = 2\sin x + xy$, $y(0)=0$; $k=7$.
12. $y' = xe^x + 2y^2$, $y(0)=0$; $k=6$.

13. $y''' = y''+y'^2+y^3+x$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$, $y''(0)=0,5$; $k=6$.
14. $y'' = \frac{y'}{y}-\frac{1}{x}$, $y(1)=1$, $y'(1)=0$; $k=5$.
15. $y'' = y'^2+xy$, $y(0)=4$, $y'(0)=-2$; $k=6$.
16. $y'' = x^2+y^2$, $y(-1)=2$, $y'(-1)=0,5$; $k=5$.
17. $y' = x^2+xy+e^{-x}$, $y(0)=0$; $k=5$.
18. $y' = 4y+2xy^2-e^{3x}$, $y(0)=2$; $k=5$.
19. $4x^2y''+y=0$, $y(1)=1$, $y'(1)=0,5$; $k=6$.
20. $y' = e^{3x}+2xy^2$, $y(0)=1$; $k=5$.
21. $y' = xy+x^2+y^2$, $y(0)=1$; $k=6$.
22. $y' = x\sin x - y^2$, $y(0)=1$; $k=5$.
23. $y'' = xyy'$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$; $k=7$.
24. $y''-2y'+2y=2x$, $y(0)=2$, $y'(0)=0$; $k=5$.
25. $y''+y=\cos x$, $y(0)=0$, $y'(0)=2$; $k=6$.
26. $y''+4y=\sin x$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$; $k=6$.
27. $y''-y'+y=x^3+6$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$; $k=6$.
28. $y''-7y'+6y=\sin x$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$; $k=6$.
29. $2y''+5y'=29\cos x$, $y(0)=3$, $y'(0)=0$; $k=7$.
30. $y''-4y'=6x^2+1$, $y(0)=2$, $y'(0)=3$; $k=7$.
31. $y' = y\cos x + 2\cos y$, $y(0)=0$; $k=6$.

Задача 9. [*гл.2, § 3, приклади 1 – 5*]

Розкласти в ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на відрізку $[-\pi, \pi]$.

Варіанти завдань

1. $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi\le x<0, \\ 4x-3, & 0\le x\le\pi. \end{cases}$ 2. $f(x)=\begin{cases} 5-x, & -\pi\le x\le 0, \\ 0, & 0<x\le\pi. \end{cases}$

3. $f(x)=|\cos x|$, $-\pi\le x\le\pi$. 4. $f(x)=\begin{cases} 2x-1, & -\pi\le x\le 0, \\ 0, & 0<x\le\pi. \end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0,\\ x^2, & 0<x\le\pi.\end{cases}$ 6. $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x\le 0,\\ x, & 0<x\le\pi.\end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ 3-x, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$ 8. $f(x)=\begin{cases}3x+2, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0<x\le\pi.\end{cases}$

9. $f(x)=|\sin x|,\ -\pi\le x\le\pi$. 10. $f(x)=2x,\ -\pi\le x\le\pi$.

11. $f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi\le x\le 0,\\ 1, & 0<x\le\pi.\end{cases}$ 12. $f(x)=5-x,\ -\pi\le x\le\pi$.

13. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ 6x-5, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$ 14. $f(x)=\begin{cases}7-3x, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0<x\le\pi.\end{cases}$

15. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0,\\ 3-8x, & 0<x\le\pi.\end{cases}$ 16. $f(x)=\begin{cases}x, & -\pi\le x\le 0,\\ 2-x, & 0<x\le\pi.\end{cases}$

17. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ \dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$ 18. $f(x)=\begin{cases}7x-1, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0<x\le\pi.\end{cases}$

19. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ \dfrac{x}{5}-2, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$ 20. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ 4-9x, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

21. $f(x)=\begin{cases}-x-1, & -\pi\le x\le 0,\\ 1, & 0<x\le\pi.\end{cases}$ 22. $f(x)=\begin{cases}3+x, & -\pi\le x\le 0,\\ 2, & 0<x\le\pi.\end{cases}$

23. $f(x)=\begin{cases}\sin x, & -\pi\le x<0,\\ \dfrac{1}{2}, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$ 24. $f(x)=\begin{cases}\sin x, & -\pi\le x<0,\\ 1, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

25. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{3}-3, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & 0<x\le\pi.\end{cases}$ 26. $f(x)=\begin{cases}x, & -\pi\le x<0,\\ 4-x, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

27. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ 10x-3, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$ 28. $f(x)=\operatorname{ch}x,\ -\pi\le x\le\pi$.

29. $f(x)=10-x,\ -\pi\le x\le\pi$. 30. $f(x)=\begin{cases}1, & -\pi\le x\le 0,\\ x, & 0<x\le\pi.\end{cases}$

31. $f(x)=\begin{cases}3-x, & -\pi\le x<0,\\ 0, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

§3. Індивідуальне завдання 3.

Функції комплексної змінної

Задача 1. [*гл.3, § 1, приклад 4*]

Для заданого комплексного числа знайти: модуль, головне значення аргументу, тригонометричну та показникову форму. Зобразити це число точкою на комплексній площині.

Варіанти завдань

1. $z=1+i\sqrt{3}$. 2. $z=\dfrac{7}{2}-i\,\dfrac{7\sqrt{3}}{2}$. 3. $z=2-2i$.

4. $z=-1-i\sqrt{3}$. 5. $z=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{i}{\sqrt{2}}$. 6. $z=\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{i}{\sqrt{2}}$.

7. $z=\sqrt{3}-i$. 8. $z=2+5i$. 9. $z=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{i}{\sqrt{2}}$.

10. $z=-1+i$. 11. $z=2-5i$. 12. $z=-2+i\,2\sqrt{3}$.

13. $z=-1-i$. 14. $z=-2+5i$. 15. $z=-2-i\,2\sqrt{3}$.

16. $z=-2-2i$. 17. $z=-2-5i$. 18. $z=2-i\,2\sqrt{3}$.

19. $z=2\sqrt{3}+2i$. 20. $z=-2+2i$. 21. $z=\dfrac{1}{2}-i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

22. $z=-1+i\sqrt{3}$. 23. $z=-\dfrac{1}{2}+i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 24. $z=-\dfrac{1}{2}-i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

25. $z=2\sqrt{3}-2i$. 26. $z=\dfrac{1}{2}+i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 27. $z=1-i\sqrt{3}$.

28. $z=\sqrt{3}+i$. 29. $z=-\dfrac{7}{2}-i\,\dfrac{7\sqrt{3}}{2}$. 30. $z=-\dfrac{7}{2}+i\,\dfrac{7\sqrt{3}}{2}$.

31. $z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{i}{2}$.

Задача 2. [*гл.3, § 1, приклади 8, 9*]

Знайти всі корені заданого рівняння та зобразити їх на комплексній площині.

Варіанти завдань

1. $32z^5+1=0$.
2. $32z^5-i=0$.
3. $64z^6+1=0$.
4. $125z^3-1=0$.
5. $625z^4+1=0$.
6. $27z^3-i=0$.
7. $27z^3+1=0$.
8. $256z^4-1=0$.
9. $256z^4+1=0$.
10. $343z^3+1=0$.
11. $(z+1)^4+16=0$.
12. $(z+2)^3-8i=0$.
13. $z^4+16=0$.
14. $z^6-729=0$.
15. $z^4+16=0$.
16. $z^4-16i=0$.
17. $z^6+729=0$.
18. $z^4-16i=0$.
19. $(z+1)^3-8=0$.
20. $(z+1)^3+8=0$.
21. $z^4+16i=0$.
22. $(z-1)^4-16i=0$.
23. $(z+2)^4-81=0$.
24. $(z+1)^4-16=0$.
25. $z^6-64i=0$.
26. $z^6+64=0$.
27. $z^5-32i=0$.
28. $z^7-128=0$.
29. $z^7+128=0$.
30. $z^3+i=0$.
31. $8z^3-i=0$.

Задача 3. [*гл.3, § 5, приклад 8*]

Знайти всі розклади в ряд Лорана заданої функції $f(z)$ за степенями $z-z_0$, в залежності від її особливих точок.

Варіанти завдань

1. $f(z)=\dfrac{1}{(z+2)(z-1)^2}$, $z_0=1$.
2. $f(z)=\dfrac{1}{(z+3)(z-2)^2}$, $z_0=2$.
3. $f(z)=\dfrac{1}{(z+4)(z-3)^2}$, $z_0=3$.
4. $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z+1)^2}$, $z_0=-1$.
5. $f(z)=\dfrac{1}{(z-3)(z+2)^2}$, $z_0=-2$.
6. $f(z)=\dfrac{1}{(z-4)(z+3)^2}$, $z_0=-3$.
7. $f(z)=\dfrac{z}{(z+2)(z-1)^2}$, $z_0=1$.
8. $f(z)=\dfrac{z}{(z+3)(z-2)^2}$, $z_0=2$.
9. $f(z)=\dfrac{z}{(z+4)(z-3)^2}$, $z_0=3$.
10. $f(z)=\dfrac{z}{(z-2)(z+1)^2}$, $z_0=-1$.
11. $f(z)=\dfrac{z}{(z-3)(z+2)^2}$, $z_0=-2$.
12. $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z+3)^2}$, $z_0=-3$.

13. $f(z)=\dfrac{z+3}{(z-2)(z-3)}$, $z_0=\dfrac{7}{2}$.
14. $f(z)=\dfrac{z+2}{(z-2)(z-3)}$, $z_0=\dfrac{7}{2}$.
15. $f(z)=\dfrac{z+1}{(z-4)(z+2)}$, $z_0=3$.
16. $f(z)=\dfrac{z-1}{(z+4)(z-3)}$, $z_0=2$.
17. $f(z)=\dfrac{z-2}{(z+4)(z+2)}$, $z_0=-3$.
18. $f(z)=\dfrac{z-3}{(z+2)(z+3)}$, $z_0=-\dfrac{5}{2}$.
19. $f(z)=\dfrac{z-4}{(z-5)(z-2)}$, $z_0=3$.
20. $f(z)=\dfrac{z+4}{(z+5)(z+2)}$, $z_0=-5$.
21. $f(z)=\dfrac{2z-1}{(z-2)(z-3)}$, $z_0=\dfrac{5}{2}$.
22. $f(z)=\dfrac{2z+1}{(z+2)(z+3)}$, $z_0=-\dfrac{5}{2}$.
23. $f(z)=\dfrac{3z-1}{(z-3)(z+4)}$, $z_0=2$.
24. $f(z)=\dfrac{3z+1}{(z+3)(z+4)}$, $z_0=-\dfrac{7}{2}$.
25. $f(z)=\dfrac{3z-2}{(z-3)(z+4)}$, $z_0=2$.
26. $f(z)=\dfrac{3z+3}{(z+3)(z-4)}$, $z_0=2$.
27. $f(z)=\dfrac{3z+2}{(z-3)(z-4)}$, $z_0=\dfrac{7}{2}$.
28. $f(z)=\dfrac{3z-3}{(z+3)(z-4)}$, $z_0=2$.
29. $f(z)=\dfrac{3z-4}{(z-2)(z+2)}$, $z_0=1$.
30. $f(z)=\dfrac{3z+4}{(z-3)(z+3)}$, $z_0=2$.
31. $f(z)=\dfrac{1}{z(z+1)}$, $z_0=1$.

Задача 4. [*гл.3, § 4, приклади 8 – 10, § 6, приклади 4 – 6*]

Обчислити задані інтеграли вздовж вказаних контурів, використовуючи: а) інтегральну формулу Коші; б) лишки функцій.

Варіанти завдань

1. $\int\limits_C \dfrac{dz}{z(z^2+4)}$, $C:|z-i|=\dfrac{3}{2}$.
2. $\int\limits_C \dfrac{\operatorname{tg} z}{z^2+1}dz$, $C:|z|=2$.
3. $\int\limits_C \dfrac{e^z}{\operatorname{sh} iz}dz$, $C:|z-3|=\dfrac{1}{2}$.
4. $\int\limits_C \dfrac{\operatorname{sh} 2z}{z^2-4}dz$, $C:|z-2i|=2$.
5. $\int\limits_C \dfrac{ze^z}{\operatorname{sh} iz}dz$, $C:|z-1|=3$.
6. $\int\limits_C \dfrac{\operatorname{ch} 2z}{z^2+4}dz$, $C:|z-2|=2$.

7. $\int\limits_C \frac{e^z+1}{z(z-1)}dz$, $C:\left|z-\frac{1}{2}\right|=1$.

8. $\int\limits_C \frac{\mathrm{ch}\,2z+3}{z^2+9}dz$, $C:|z-2|=3$.

9. $\int\limits_C \frac{e^z}{z^2+2z}dz$, $C:|z|=1$.

10. $\int\limits_C \frac{\mathrm{ch}\,2z-3}{z^2+4}dz$, $C:|z+2i|=2$.

11. $\int\limits_C \frac{e^{iz}}{z^2+1}dz$, $C:|z-i|=1$.

12. $\int\limits_C \frac{\ln(e^z+3)}{z^2+1}dz$, $C:|z-1|=1$.

13. $\int\limits_C \frac{e^z}{z^2+2z}dz$, $C:|z|=1$.

14. $\int\limits_C \frac{\ln(e^z-4)}{z(z^2-1)}dz$, $C:\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{4}$.

15. $\int\limits_C \frac{\cos^2 z}{z^2+\pi^2}dz$, $C:|z-2|=3$.

16. $\int\limits_C \frac{\mathrm{th}\,z}{z(z^2+9)}dz$, $C:|z-2|=2$.

17. $\int\limits_C \frac{\ln(z+2)}{z(z-2)}dz$, $C:|z-1|=\frac{3}{2}$.

18. $\int\limits_C \frac{\mathrm{cth} z}{(z^2+2)(z-1)}dz$, $C:|z|=3$.

19. $\int\limits_C \frac{\ln(e+z)}{z\left(z+\frac{\pi}{4}\right)}dz$, $C:|z|=\frac{1}{4}$.

20. $\int\limits_C \frac{\mathrm{cth} z^2}{(z^2+2)(z+2)}dz$, $C:|z|=3$.

21. $\int\limits_C \frac{\sin 3z}{(z^2+9)(z+9)}dz$, $C:|z|=4$.

22. $\int\limits_C \frac{\mathrm{cth} z}{(z-1)(z^2-9)}dz$, $C:|z|=4$.

23. $\int\limits_C \frac{\cos(z+\pi i)}{z(z+2)}dz$, $C:|z|=3$.

24. $\int\limits_C \frac{\mathrm{th} 3z}{(z-2)(z^2+9)}dz$, $C:|z-2|=2$.

25. $\int\limits_C \frac{e^{3z}}{z^2+16}dz$, $C:|z|=5$.

26. $\int\limits_C \frac{\mathrm{th} 3z}{(z+1)(z^2+16)}dz$, $C:|z-3|=3$.

27. $\int\limits_C \frac{\mathrm{cth}\,2z}{(z^2+4)(z+3)}dz$, $C:|z-4|=3$.

28. $\int\limits_C \frac{\mathrm{cth}\,2z}{(z+2)(z^2+3)}dz$, $C:|z-3|=3$.

29. $\int\limits_C \frac{e^{2z}}{(z^2+z+1)}dz$, $C:|z-2|=2$.

30. $\int\limits_C \frac{e^z}{(z+1)(z^2+5)}dz$, $C:|z-2|=3$.

31. $\int\limits_C \frac{z}{(z-1)(z-2)}dz$, $C:|z-2|=2$.

Задача 5. [*гл.3, § 6, приклад 10*]
Обчислити задані невласні інтеграли, використовуючи лишки функцій.

Варіанти завдань

1. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2+x)\cos x}{x^4+13x^2+36}dx$.

2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2+x)\sin x}{x^4+13x^2+36}dx$.

3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+1)^2}dx$.

4. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{(x^2+1)^2}dx$.

5. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^3+1)\sin x}{x^4+5x^2+4}dx$.

6. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2+x)\cos x}{x^4+5x^2+4}dx$.

7. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\cos x}{x^4+10x^2+9}dx$.

8. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2-x+1}dx$.

9. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2-x+1}dx$.

10. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{(x^2-x+1)^2}dx$.

11. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin\frac{x}{2}}{x^2+4}dx$.

12. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos\frac{x}{2}}{x^2+4}dx$.

13. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+10}dx$.

14. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2-2x+10}dx$.

15. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+16)(x^2+9)}dx$.

16. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2+16)(x^2+9)}dx$.

17. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}dx$.

18. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2+1)^2}dx$.

19. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{\left(x^2+\frac{1}{4}\right)^2}dx$.

20. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{\left(x^2+\frac{1}{4}\right)^2}dx$.

21. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{(x^2+1)^2}dx$.

22. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{(x^2+1)^2}dx$.

23. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2}dx$.

24. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)\cos 2x}{x^2+2x+2}dx$.

25. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4+5x^2+4} dx$.   26. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 \cos x}{x^4+5x^2+4} dx$.

27. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+1)^2} dx$.   28. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{(x^2+1)^2} dx$.

29. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 \cos x}{(x^2+1)^2} dx$.   30. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 \sin x}{(x^2+1)^2} dx$.

31. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2+1} dx$.

§4. Індивідуальне завдання 4.

Операційне числення

Задача 1. [*гл.4, § 1, приклади 10 – 13*]
Знайти оригінал $f(t)$ за заданим зображенням $F(p)$.

Варіанти завдань

1. $F(p)=\dfrac{2}{p^3+p^2+p}$.   2. $F(p)=\dfrac{4}{p^5+p^3}$.

3. $F(p)=\dfrac{6p+4}{(p+1)(p^2+4p+5)}$.   4. $F(p)=\dfrac{1}{p^3+8}$.

5. $F(p)=\dfrac{3}{p(p^3+1)}$.   6. $F(p)=\dfrac{2}{p^3-8}$.

7. $F(p)=\dfrac{2}{p^3(p^2-4)}$.   8. $F(p)=\dfrac{3p}{(p+1)(p^2+4p+5)}$.

9. $F(p)=\dfrac{2p+10}{(p+1)(p^2-2p+5)}$.   10. $F(p)=\dfrac{3p+9}{p^3+2p^2+3p}$.

11. $F(p)=\dfrac{2p}{(p^2+1)(p^2+4)}$.   12. $F(p)=\dfrac{2}{p(p^2+1)^2}$.

13. $F(p)=\dfrac{3p+12}{p^2+4p+5}$.   14. $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+4p+8)^2}$.

15. $F(p)=\dfrac{3p}{(p+1)(p^2+p+1)}$.   16. $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+1)(p^2+2)}$.

17. $F(p)=\dfrac{p}{(p+1)(p^2+2p+2)}$.   18. $F(p)=\dfrac{3}{p^3-1}$.

19. $F(p)=\dfrac{2p-4}{(p-1)(p^2-4p+5)}$.   20. $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+1)(p^2-2)}$.

21. $F(p)=\dfrac{3p-6}{p^3-2p^2+5p}$.   22. $F(p)=\dfrac{p-1}{p(p^2+3p+3)}$.

23. $F(p)=\dfrac{2p+3}{(p-1)(p^2-p+1)}$.   24. $F(p)=\dfrac{6p+3}{(p+1)(p^2+2p+3)}$.

25. $F(p)=\dfrac{3p}{(p^2+4p+8)^2}$.   26. $F(p)=\dfrac{3p-2}{(p-2)(p^2-4p+5)}$.

27. $F(p)=\dfrac{2}{(p-2)(p^2+2p+3)}$.   28. $F(p)=\dfrac{2p+5}{(p-1)(p^2-p+1)}$.

29. $F(p)=\dfrac{5p}{(p+2)(p^2-2p+2)}$.   30. $F(p)=\dfrac{16}{(p-1)(p^2+4p+5)}$.

31. $F(p)=\dfrac{p^2+p+1}{(p-1)(p+2)^2}$.

Задача 2. [*гл.4, § 2, приклад 2*]

Знайти розв'язок $x=x(t)$ задачі Коші для заданого диференціального рівняння другого порядку операційним методом.

Варіанти завдань

1. $x''-x'=t^2$, $x(0)=0$, $x'(0)=1$.
2. $x''+x'=\operatorname{sh} t$, $x(0)=2$, $x'(0)=1$.
3. $2x''-x'=\sin 3t$, $x(0)=2$, $x'(0)=1$.
4. $x''-x'=\cos t$, $x(0)=1$, $x'(0)=1$.
5. $x''+4x'+29x=e^{-2t}$, $x(0)=0$, $x'(0)=1$.
6. $x''+2x'=e^t+2$, $x(0)=1$, $x'(0)=2$.
7. $x''+x'+x=7e^{2t}$, $x(0)=1$, $x'(0)=4$.

8. $x'' + x = 6e^{-t}$, $x(0) = 3$, $x'(0) = 1$.

9. $x'' - 3x' + 2x = e^{t}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$.

10. $x'' + 2x' = \sin\frac{t}{2}$, $x(0) = -2$, $x'(0) = 4$.

11. $x'' + x' - 2x = -2t - 2$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$.

12. $x'' + x' = t^2 + 2t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -2$.

13. $x'' - 9x = \sin t - \cos t$, $x(0) = -3$, $x'(0) = 2$.

14. $x'' + 3x' - 10x = 3\cos 3t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

15. $x'' - x' = 4\sin t$, $x(0) = -1$, $x'(0) = -2$.

16. $x'' + x' + x = t^2 + t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = -3$.

17. $x'' + 4x' + 4x = e^{2t}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$.

18. $2x'' + 5x' = 29\cos t$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 0$.

19. $x'' + 4x' = 4e^{2t}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$.

20. $x'' + 2x' + 10x = 2e^{-t}\cos 3t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

21. $x'' + x' = 2\cos t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

22. $x'' + 4x' + 10x = 3\sin t$, $x(0) = -2$, $x'(0) = 3$.

23. $x'' - 2x' = e^{t}(t^2 + t - 3)$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 2$.

24. $x'' + 4x' = \sin 2t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

25. $x'' - x' - 6x = 2$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

26. $x'' - 3x' + 2x = 12e^{3t}$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 6$.

27. $x'' + x' - 2x = e^{-t}$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 0$.

28. $x'' - 2x' - 3x = 2t$, $x(0) = -2$, $x'(0) = 3$.

29. $x'' + 4x = 8\sin 2t$, $x(0) = 3$, $x'(0) = -1$.

30. $x'' + x' = t\cos 2t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

31. $x'' - 3x' + 2x = 2e^{3t}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 3$.

Задача 3. [*гл.4, § 2, приклад 3*]

Знайти розв'язок $x = x(t)$, $y = y(t)$ задачі Коші для заданої системи диференціальних рівнянь операційним методом.

Варіанти завдань

1. $\begin{cases} x' + 3x + y = 0 \\ y' + x + 2y = 0 \end{cases}$ $x(0) = 2$, $y(0) = 1$.

2. $\begin{cases} x' + 5x + 2y = 0 \\ y' + x + 4y = 0 \end{cases}$ $x(0) = 1$, $y(0) = 3$.

3. $\begin{cases} x' - 2x + y = 0 \\ y' + 2x + 4y = 0 \end{cases}$ $x(0) = 3$, $y(0) = 1$.

4. $\begin{cases} x' + 6x + 2y = 0 \\ y' + 2x + 2y = 0 \end{cases}$ $x(0) = 1$, $y(0) = 4$.

5. $\begin{cases} x' + 6x + 2y = 0 \\ y' - 2x + 8y = 0 \end{cases}$ $x(0) = 1$, $y(0) = 3$.

6. $\begin{cases} x' + x + 2y = 0 \\ y' + 2x + y = 0 \end{cases}$ $x(0) = 1$, $y(0) = 4$.

7. $\begin{cases} x' + 4x + 3y = 0 \\ y' + 3x + 4y = 0 \end{cases}$ $x(0) = 3$, $y(0) = 2$.

8. $\begin{cases} x' - 4x - 3y = 0 \\ y' - 3x - 4y = 0 \end{cases}$ $x(0) = 2$, $y(0) = 1$.

9. $\begin{cases} x' + x + y = 0 \\ y' + 4x + y = 0 \end{cases}$ $x(0) = 4$, $y(0) = 2$.

10. $\begin{cases} x' + 2x + 8y = 0 \\ y' + 2x + 2y = 0 \end{cases}$ $x(0) = 1$, $y(0) = 5$.

11. $\begin{cases} x' - 4x + 3y = 0 \\ y' - 3x - 4y = 0 \end{cases}$ $x(0) = 2$, $y(0) = 1$.

12. $\begin{cases} x' + 4x + 9y = 0 \\ y' - x + 4y = 0 \end{cases}$ $x(0) = 3$, $y(0) = 2$.

13. $\begin{cases} x' + 2x + y = 0 \\ y' - x + 2y = 0 \end{cases}$ $x(0) = 3$, $y(0) = 1$.

14. $\begin{cases} x' + 2x - y = 0 \\ y' + x + 2y = 0 \end{cases}$ $x(0) = 1$, $y(0) = 1$.

15. $\begin{cases} x' - 4x + y = 0 \\ y' - 4x - 4y = 0 \end{cases}$ $x(0) = 1$, $y(0) = 5$.

16. $\begin{cases} x' + 2x + y = 0 \\ y' + x + 3y = 0 \end{cases}$ $x(0) = 2$, $y(0) = 1$.

17. $\begin{cases} x' - 5x + y = 0 \\ y' + x + 2y = 0 \end{cases}$ $x(0) = 1$, $y(0) = 4$.

18. $\begin{cases} x' - 7x + y = 0 \\ y' - 3x - 2y = 0 \end{cases}$ $x(0) = 1$, $y(0) = 1$.

19. $\begin{cases} x' + 2x + 2y = 0 \\ y' + 3x + 3y = 0 \end{cases}$

$x(0) = 2,\ y(0) = 1.$

20. $\begin{cases} x' + 3x + 3y = 0 \\ y' - 7x - 7y = 0 \end{cases}$

$x(0) = 1,\ y(0) = 2.$

21. $\begin{cases} x' - 3x - 8y = 0 \\ y' + 2x - 3y = 0 \end{cases}$

$x(0) = 1,\ y(0) = 1.$

22. $\begin{cases} x' - 5x + 8y = 0 \\ y' - 2x - 5y = 0 \end{cases}$

$x(0) = 1,\ y(0) = 3.$

23. $\begin{cases} x' + 6x - y = 0 \\ y' + 4x + 6y = 0 \end{cases}$

$x(0) = 4,\ y(0) = 1.$

24. $\begin{cases} x' + 7x - 9y = 0 \\ y' + x + 7y = 0 \end{cases}$

$x(0) = 1,\ y(0) = 1.$

25. $\begin{cases} x' - 7x + 9y = 0 \\ y' - x - 7y = 0 \end{cases}$

$x(0) = 1,\ y(0) = 4.$

26. $\begin{cases} x' + 5x - 16y = 0 \\ y' + x + 5y = 0 \end{cases}$

$x(0) = 3,\ y(0) = 1.$

27. $\begin{cases} x' - 5x + 16y = 0 \\ y' - x - 5y = 0 \end{cases}$

$x(0) = 1,\ y(0) = 4.$

28. $\begin{cases} x' - 7x - 4y = 0 \\ y' + 4x - 7y = 0 \end{cases}$

$x(0) = 1,\ y(0) = 3.$

29. $\begin{cases} x' - 8x + y = 0 \\ y' - x - 8y = 0 \end{cases}$

$x(0) = 4,\ y(0) = 1.$

30. $\begin{cases} x' - 9x - y = 0 \\ y' + x - 9y = 0 \end{cases}$

$x(0) = 1,\ y(0) = 5.$

31. $\begin{cases} x' - 3x - 4y = 0 \\ y' - 4x + 3y = 0 \end{cases}$

$x(0) = 1,\ y(0) = 3.$

ГЛАВА 6. ДОВІДКОВИЙ МАТЕРІАЛ

§1. Диференціальні рівняння

Таблиця 1.1 – Диференціальні рівняння першого порядку

Назва диференціального рівняння та його вигляд	Підстановка або метод розв'язання
1	2
Рівняння з відокремленими змінними $f_1(x)\,dx = f_2(y)\,dy$	$\int f_1(x)\,dx = \int f_2(y)\,dy + C$
Рівняння з відокремлюваними змінними $f_1(x)\ g_1(y)\,dx = f_2(x)\,g_2(y)\,dy$	$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy + C$, $f_2(x) \neq 0,\ \ g_1(y) \neq 0$
Рівняння, звідні до рівнянь з відокремлюваними змінними а) $y' = f(ax + by + c)$; б) $y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right)$, де $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$	а) $z = ax + by + c$; б) $z = a_1 x + b_1 y$
Рівняння, однорідні відносно змінних $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$, де $M(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k\ M(x, y)$, $N(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k\ N(x, y)$ або $y' = f(x, y)$, де $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0\ f(x, y) = f(x, y)$	$y = ux,\quad u = u(x)$ $y' = u'x + u$

Продовження таблиці 1.1

1	2
Рівняння, звідні до рівнянь, однорідних відносно змінних $y' = f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$, де $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$	$x = x_1 + h, \quad y = y_1 + k$, де h і k – корені системи рівнянь $\begin{cases} a_1h + b_1k + c_1 = 0, \\ a_2h + b_2k + c_2 = 0. \end{cases}$
Лінійні рівняння	
Рівняння лінійні однорідні: $y' + P(x)y = 0$	Є рівнянням з відокремлюваними змінними. Загальний розв'язок: $y = C e^{-\int P(x)dx}$
Рівняння лінійні неоднорідні: $y' + P(x)y = f(x)$, $f(x) \neq 0$	1. Підстановка Бернуллі: $y = uv, \quad u = u(x), v = v(x)$; $y' = u'v + uv'$ 2. Метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа). Загальний розв'язок відшукується у вигляді: $y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$ 3. Метод інтегрувального множника (метод Ейлера). Обидві частини рівняння множаться на інтегрувальний множник: $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$
Рівняння Бернуллі $y' + P(x)y = y^{\alpha} f(x), \quad \alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha \neq 0, \ \alpha \neq 1$	$z = y^{1-\alpha}$ або $y = uv, \quad u = u(x), v = v(x)$
Рівняння Ріккаті $y' + P(x)y + Q(x)y^2 = f(x)$. Якщо 1) P, Q, f – сталі; 2) $Q(x) = 0$; 3) $f(x) = 0$; 4) відомий частинний розв'язок $y_1 = y_1(x)$	1) є рівнянням з відокремлюваними змінними; 2) є лінійним рівнянням; 3) є рівнянням Бернуллі; 4) зводиться до рівняння Бернуллі підстановкою $y = y_1 + z$

Продовження таблиці 1.1

1	2
Рівняння у повних диференціалах $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$, де $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = du$, тобто рівняння вигляду $du = 0$. Критерій того, що рівняння є рівнянням у повних диференціалах $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$	Загальний інтеграл $u(x,y) = C$
Рівняння, звідні до рівнянь у повних диференціалах $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$, $\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$	Обидві частини рівняння множаться на інтегрувальний множник $\mu(x,y)$ 1) $\dfrac{1}{Q}\left(\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}\right) = F(x)$, то $\mu = \mu(x)$ знаходиться з рівняння $\dfrac{d\ln\mu}{dx} = F(x)$; 2) $\dfrac{1}{P}\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right) = F_1(y)$, то $\mu = \mu(y)$ знаходиться з рівняння $\dfrac{d\ln\mu}{dy} = F_1(y)$
Рівняння, нерозв'язні відносно похідної а) $y = f(x, y')$; б) $x = f(y, y')$	а) $y' = p$; б) $y' = p$
Рівняння Лагранжа $y = x\varphi(y') + \psi(y')$	$y' = p$
Рівняння Клеро $y = x\,y' + \psi(y')$	$y' = p$

Таблиця 1.2 – Диференціальні рівняння вищих порядків

Назва диференціального рівняння та його вигляд	Підстановка або метод розв'язання
1	2
Диференціальні рівняння, які допускають зниження порядку	
1. $y^{(n)} = f(x)$	Загальний розв'язок отримується n-кратним послідовним інтегруванням
2. $F(x, y^{(n)}) = 0$ Рівняння зводиться до вигляду а) $y^{(n)} = f(x)$ або б) $x = f(y^{(n)})$	а) попередній випадок б) $y^{(n)} = t$
3. $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$	$y^{(k)} = p(x)$, $y^{(k+1)} = p'$, ... , $y^{(n)} = p^{(n-k)}$
4. $F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$	$y' = p(y)$, $y'' = \frac{dp}{dy} \cdot p$, $y''' = \frac{d^2 p}{dy^2} \cdot p^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 \cdot p, \ldots$
5. $F(x, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$, де $F(x, y', y'', \ldots, y^{(n)}) =$ $= \frac{d}{dx}\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$	Зводиться до рівняння, порядок якого на одиницю нижче $\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = C$
6. Рівняння *однорідне* відносно функції та її похідних $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, де $F(x, ty, ty', \ldots, ty^{(n)}) =$ $= t^k F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$	$y = e^{\int z\,dx}$ або $y' = zy$
Лінійні диференціальні рівняння n-го порядку	
Однорідні рівняння $y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = 0$	Загальний розв'язок $y = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i$, де $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ – фундаментальна система розв'язків цього рівняння, C_i, $i = \overline{1, n}$ – довільні сталі

Продовження таблиці 1.2

1	2		
Неоднорідні рівняння $y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = f(x)$	Загальний розв'язок $y(x) = y_0(x) + \tilde{y}(x)$, де $y_0(x)$ – загальний розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння, а $\tilde{y}(x)$ – деякий частинний розв'язок неоднорідного рівняння		
Лінійні однорідні диференціальні рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами			
Диференціальне рівняння	$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$		
Характеристичне рівняння	$k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0$		
Корені характеристичного рівняння	$k_1, k_2, \ldots, k_n$		
Різновиди коренів	k – дійсний корінь кратності r	$k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ – комплексно-спряжені корені кратності s	
Лінійно незалежні розв'язки	e^{kx}, $xe^{kx}, \ldots, x^{r-1} e^{kx}$	$e^{\alpha x}\cos\beta x$, $xe^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, x^{s-1} e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$, $xe^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, x^{s-1} e^{\alpha x}\sin\beta x$.	
Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами			
Диференціальне рівняння	$y'' + py' + qy = 0$		
Характеристичне рівняння	$k^2 + pk + q = 0$		
Корені характеристичного рівняння	k_1, k_2		
Різновиди коренів	$k_1 \neq k_2$	$k_1 = k_2 = k$	$k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$
Фундаментальна система розв'язків	$y_1 = e^{k_1 x}$ $y_2 = e^{k_2 x}$	$y_1 = e^{kx}$ $y_2 = xe^{kx}$	$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$
Загальний розв'язок	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{kx}$	$y = (C_1 \cos\beta x +$ $+ C_2 \sin\beta x) e^{\alpha x}$

Продовження таблиці 1.2

1	2	
Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами		
Диференціальне рівняння	$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x)$	
Відповідне однорідне рівняння	$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0$	
Характеристичне рівняння	$k^n+a_1k^{n-1}+\ldots+a_{n-1}k+a_n=0$	
Корені характеристичного рівняння	$k_1, k_2, \ldots, k_n$	
Вигляд правої частини	I. $f(x)=Q_s(x)e^{\alpha x}$, $Q_s(x)$ – многочлен степеня s	
Зв'язок α з коренями характеристичного рівняння	α не є коренем характеристичного рівняння	α – корінь характеристичного рівняння кратності r
Вигляд частинного розв'язку	$\tilde{y}=P_s(x)e^{\alpha x}$	$\tilde{y}=x^rP_s(x)e^{\alpha x}$
	$P_s(x)$ – многочлен степеня s	
Вигляд правої частини	II. $f(x)=e^{\alpha x}[Q_{s_1}(x)\cos\beta x+P_{s_2}(x)\sin\beta x]$, $Q_{s_1}(x), P_{s_2}(x)$ – многочлени степенів s_1, s_2, $\max(s_1,s_2)=s$	
Зв'язок $\alpha\pm i\beta$ з коренями характеристичного рівняння	$\alpha\pm i\beta$ не є коренем характеристичного рівняння	$\alpha\pm i\beta$ – корені характеристичного рівняння кратності r
Вигляд частинного розв'язку	$\tilde{y}=e^{\alpha x}[u_s(x)\cos\beta x+v_s(x)\sin\beta x]$	$\tilde{y}=x^re^{\alpha x}[u_s(x)\cos\beta x+v_s(x)\sin\beta x]$
	$u_s(x), v_s(x)$ – многочлени степеня s	
Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами		
Диференціальне рівняння	$y''+py'+qy=f(x)$	
Відповідне однорідне рівняння	$y''+py'+qy=0$	
Характеристичне рівняння	$k^2+pk+q=0$	

Продовження таблиці 1.2

1	2		
Корені характеристичного рівняння	k_1, k_2		
Вигляд правої частини	I. $f(x)=Q_s(x)e^{\alpha x}$, $Q_s(x)$ – многочлен степеня s		
Зв'язок α з коренями характеристичного рівняння	α не є коренем характеристичного рівняння $\alpha\ne k_1, \alpha\ne k_2$	α – однократний корінь характеристичного рівняння $\alpha=k_1, \alpha\ne k_2$ або $\alpha\ne k_1, \alpha=k_2$	α – двократний корінь характеристичного рівняння $\alpha=k_1=k_2$
Вигляд частинного розв'язку	$\tilde{y}=P_s(x)e^{\alpha x}$	$\tilde{y}=xP_s(x)e^{\alpha x}$	$\tilde{y}=x^2P_s(x)e^{\alpha x}$
	$P_s(x)$ – многочлен степеня s		
Вигляд правої частини	II. $f(x)=e^{\alpha x}[Q_{s_1}(x)\cos\beta x+P_{s_2}(x)\sin\beta x]$, $Q_{s_1}(x), P_{s_2}(x)$ – многочлени степенів s_1, s_2, $\max(s_1,s_2)=s$		
Зв'язок $\alpha\pm i\beta$ з коренями характеристичного рівняння	$\alpha\pm i\beta$ не є коренем характеристичного рівняння $\alpha\pm i\beta\ne k_1\ne k_2$	$\alpha\pm i\beta$ – корені характеристичного рівняння $\alpha+i\beta=k_1$ $\alpha-i\beta=k_2$	
Вигляд частинного розв'язку	$\tilde{y}=e^{\alpha x}[u_s(x)\cos\beta x+v_s(x)\sin\beta x]$	$\tilde{y}=xe^{\alpha x}[u_s(x)\cos\beta x+v_s(x)\sin\beta x]$	
	$u_s(x), v_s(x)$ – многочлени степеня s		
Неоднорідне рівняння Ейлера			
$x^ny^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}xy'+a_ny=f(x),\quad x\ne 0$ Підстановка $x=e^t$, якщо $x>0$, $x=e^{-t}$, якщо $x<0$.			
Однорідне рівняння Ейлера			
$x^ny^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}xy'+a_ny=0$ Підстановка $x=e^t$, якщо $x>0$, $x=e^{-t}$, якщо $x<0$ або $y=x^k$, $x>0$.			

Таблиця 1.3 – Системи диференціальних рівнянь

Лінійні системи диференціальних рівнянь	
Лінійні однорідні системи диференціальних рівнянь	
Вигляд системи	$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n, \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \ldots + a_{2n}(t)x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ldots + a_{nn}(t)x_n \end{cases}$
Матрична форма запису	$\frac{dX}{dt} = A(t)X(t)$, де $A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \ldots & a_{2n}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$, $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$, $\frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}$
Фундаментальна система розв'язків	$X_k(t) = (x_1^{(k)}(t), x_2^{(k)}(t), \ldots, x_n^{(k)}(t))^T$, $k = \overline{1, n}$, де $X_k(t)$ – лінійно незалежні розв'язки системи
Структура загального розв'язку однорідної системи	$X(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k X_k(t)$, де $X_k(t)$ – фундаментальна система розв'язків системи, C_k – довільні сталі, $k = \overline{1, n}$

Продовження таблиці 1.3

Лінійні неоднорідні системи диференціальних рівнянь	
Вигляд системи	$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t), \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \ldots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t), \end{cases}$
Матрична форма запису	$\frac{dX}{dt} = A(t)X(t) + F(t)$, де $F(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t))^T$
Відповідна однорідна система	$\frac{dX}{dt} = A(t)X(t)$
Структура загального розв'язку неоднорідної системи	$X(t) = X_0(t) + \widetilde{X}(t)$, де $X_0(t)$ – загальний розв'язок відповідної однорідної системи, $\widetilde{X}(t)$ – частинний розв'язок заданої неоднорідної системи
Лінійні однорідні системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами	
Вигляд системи	$\frac{dX}{dt} = A\,X(t)$, де $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$, $\frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}$

Продовження таблиці 1.3

Метод Ейлера	
Характеристичне рівняння	$\det(A-\lambda E)=0$
Корені характеристичного рівняння	$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$
Загальний розв'язок однорідної системи	$X(t)=\sum_{k=1}^{n} C_k X^{(\lambda_k)}(t)$
Формування $X^{(\lambda_k)}(t)$	
а) λ – дійсний корінь кратності 1	$X^{(\lambda)}(t)=Y^{(\lambda)}e^{\lambda t}=\begin{pmatrix} y_1^{(\lambda)} \\ y_2^{(\lambda)} \\ \vdots \\ y_n^{(\lambda)} \end{pmatrix} e^{\lambda t}$, де $AY^{(\lambda)}=\lambda Y^{(\lambda)}$, $Y^{(\lambda)}\neq 0$
б) λ – комплексний корінь кратності 1	$X_1^{(\lambda)}(t)=\mathrm{Re}\,X^{(\lambda)}(t)$, $X_2^{(\lambda)}(t)=\mathrm{Im}\,X^{(\lambda)}(t)$
в) λ – корінь кратності $r\geq 2$	$X^{(\lambda)}(t)=\begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)}+\alpha_1^{(2)}t+\ldots+\alpha_1^{(r)}t^{r-1} \\ \alpha_2^{(1)}+\alpha_2^{(2)}t+\ldots+\alpha_2^{(r)}t^{r-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n^{(1)}+\alpha_n^{(2)}t+\ldots+\alpha_n^{(r)}t^{r-1} \end{pmatrix} e^{\lambda t}$
Лінійні неоднорідні системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами	
Вигляд системи	$\frac{dX}{dt}=A\,X(t)+F(t)$, де A – матриця коефіцієнтів a_{ij} системи, a_{ij} – сталі, $i,j=\overline{1,n}$, $X(t)=(x_1(t), x_2(t),\ldots, x_n(t))^T$, $x_i(t)$ – шукані функції, $i=\overline{1,n}$, $F(t)=(f_1(t), f_2(t),\ldots, f_n(t))^T$, $f_i(t)$ – задані функції, $i=\overline{1,n}$

Продовження таблиці 1.3

Загальний розв'язок неоднорідної системи	$X(t)=X_0(t)+\widetilde{X}(t)$, де $X_0(t)$ – загальний розв'язок відповідної однорідної системи $\frac{dX}{dt}=A\,X(t)$, $\widetilde{X}(t)$ – деякий частинний розв'язок неоднорідної системи
Метод підбору частинного розв'язку	
Вигляд функцій $f_i(t)$ правої частини $(P(t)\cos\beta t+Q(t)\sin\beta t)\,e^{\alpha t}$	Вигляд частинного розв'язку (аналогічно неоднорідному диференціальному рівнянню n-го порядку – таблиця 1.2)

§2. Ряди

Таблиця 2.1 – Числові ряди

Поняття або співвідношення, що визначаються	Формула
1	2
Числовий ряд	$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots=\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$
n-а частинна сума ряду	$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$
Ряд збіжний	$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$
Необхідна умова збіжності ряду	Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ збігається, то $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.
Достатня умова розбіжності ряду	$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$
Геометричний ряд	$a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$, ряд збігається при $\lvert q\rvert<1$, $S=\dfrac{a}{1-q}$, ряд розбігається при $\lvert q\rvert\geq 1$.
Гармонічний ряд	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, ряд розбіжний
Узагальнений гармонічний ряд	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$, $p\in\mathbf{R}$, ряд збіжний при $p>1$, ряд розбіжний при $p\leq 1$.
Знакододатний ряд	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, $u_n>0$

Продовження таблиці 2.1

1	2
Ознаки порівняння для рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ (1), $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ (2), $u_n>0, v_n>0$	
а) $u_n\leq v_n$, $\forall n$ якщо ряд (2) збіжний, то ряд (1) збіжний, якщо ряд (1) розбіжний, то ряд (2) розбіжний. б) $\exists\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=l\neq 0$, то обидва ряди збіжні, або обидва розбіжні.	
Достатні ознаки збіжності для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, $u_n>0$	
Ознака Даламбера	$\exists\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=l$, $l<1$ – ряд збіжний, $l>1$ – ряд розбіжний, $l=1$ – потрібне додаткове дослідження.
Радикальна ознака Коші	$\exists\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$, $l<1$ – ряд збіжний, $l>1$ – ряд розбіжний, $l=1$ – потрібне додаткове дослідження.
Інтегральна ознака Коші	$u_1\geq u_2\geq u_3\geq\ldots$ $\exists$ функція $f(x)$ така, що $f(n)=u_n$, $\forall n$. Тоді інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}f(x)\,dx$ збіжний (або розбіжний) одночасно з заданим рядом.
Знакозмінний ряд	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, де u_n – задані числа, як додатні, так і від'ємні.
Знакопочережний ряд	$u_1-u_2+u_3-\ldots+(-1)^{n+1}u_n+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$, $u_n>0$

Продовження таблиці 2.1

1	2
Ознака Лейбніца	Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ збігається, якщо $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots$ та $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.
Ряди лейбніцевого типу	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots$. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}+\ldots$. Це умовно збіжні ряди
Достатня ознака збіжності	Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\lvert u_n\rvert$ збіжний, то збіжний і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$.
Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ абсолютно збіжний	Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\lvert u_n\rvert$ збіжний.
Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ умовно збіжний	Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ збіжний, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\lvert u_n\rvert$ розбіжний.

Таблиця 2.2 – Функціональні ряди. Степеневі ряди

Поняття або співвідношення, що визначаються	Формула
1	2
Функціональний ряд	$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$
n -а частинна сума ряду	$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$
Сума ряду	$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)$
n -й залишок ряду	$r_n(x)=S(x)-S_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)$
Степеневий ряд	$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ або $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$, де $a,\ a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots$ – дійсні числа.
Радіус збіжності степеневого ряду	$R=\lim_{n\to\infty}\left\lvert\frac{a_n}{a_{n+1}}\right\rvert$ або $R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\lvert a_n\rvert}}$
Ряд Тейлора для функції $f(x)$	$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$
Ряд Маклорена для функції $f(x)$	$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$
Формули розкладу елементарних функцій в ряд Маклорена	
$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad -\infty<x<+\infty$,	

Продовження таблиці 2.2

1	2

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < +\infty,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < +\infty,$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n + \ldots =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n, \quad -1 < x < 1,$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad -1 < x < 1,$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad -1 < x < 1,$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \ -1 < x \le 1,$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad -1 \le x \le 1,$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots =$$

$$= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad -1 < x < 1,$$

де $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$, $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n$.

Продовження таблиці 2.2

1	2
Рівняння та функції Бесселя	
Рівняння Бесселя	$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = 0, \quad \nu$ – const.
Загальний розв'язок а) ν – не ціле число б) ν – ціле число	а) $y = C_1 I_\nu(x) + C_2 I_{-\nu}(x)$ б) $y = C_1 I_\nu(x) + C_2 K_\nu(x)$
Функції Бесселя першого роду порядку ν і $-\nu$ відповідно	$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+\nu+1)}$, $I_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k-\nu+1)}$.
Функція Бесселя другого роду порядку ν	$K_\nu(x) = I_\nu(x) \ln x + x^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$
Гамма-функція Ейлера	$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{p-1} dx \quad (p > 0)$, $\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p)$, для цілих значень $p > 0$ $\Gamma(p+1) = p!$

Таблиця 2.3 – Ряди Фур'є

Поняття або співвідношення, що визначаються	Формула
1	2
Ряд Фур'є для періодичної функції $f(x)$ з періодом 2π	$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, де $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx$, $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$, $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$, $n=1,2,\ldots$
а) ряд Фур'є для парної функції	$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$, де $a_0=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\,dx$, $a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$.
б) ряд Фур'є для непарної функції	$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$, де $b_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$
Ряд Фур'є для періодичної функції $f(x)$ з періодом $2l$	$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\right)$, де $a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\,dx$, $a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}\,dx$, $b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}\,dx$, $n=1,2,\ldots$

Продовження таблиці 2.3

1	2
а) ряд Фур'є для парної функції	$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{l}$, де $a_0=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\,dx$, $a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}\,dx$.
б) ряд Фур'є для непарної функції	$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{\pi nx}{l}$, де $b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}\,dx$.
Ряд Фур'є в комплексній формі	
а) для періодичної функції $f(x)$ з періодом 2π	$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n e^{inx}$, де $C_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}\,dx$, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$
б) для періодичної функції $f(x)$ з періодом $2l$	$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n e^{\frac{\pi nx}{l}i}$, де $C_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)e^{-\frac{\pi nx}{l}i}\,dx$, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$
Інтеграл Фур'є:	$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt$
а) якщо $f(x)$ – парна,	$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{0}^{+\infty}f(t)\cos\alpha t\,dt\right]\cos\alpha x\,d\alpha$
б) якщо $f(x)$ – непарна,	$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{0}^{+\infty}f(t)\sin\alpha t\,dt\right]\sin\alpha x\,d\alpha$

Продовження таблиці 2.3

1	2
в) в комплексній формі	$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{-i\alpha t}\,dt\right)e^{i\alpha x}\,d\alpha$
Перетворення Фур'є	
а) косинус-перетворення	$F_C(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}f(t)\cos\alpha t\,dt$ (пряме), $f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}F_C(\alpha)\cos\alpha x\,d\alpha$ (обернене).
б) синус-перетворення	$F_S(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}f(t)\sin\alpha t\,dt$ (пряме), $f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}F_S(\alpha)\sin\alpha x\,d\alpha$ (обернене).
в) загального вигляду	$F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{-i\alpha t}\,dt$ (пряме), $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(\alpha)\,e^{i\alpha x}\,d\alpha$ (обернене).

§3. Функції комплексної змінної

Таблиця 3.1 – Комплексні числа

Поняття або співвідношення, що визначаються	Формула
1	2
Комплексне число	
Алгебраїчна форма Тригонометрична форма Показникова форма	$z=x+i\,y,\quad i^2=-1$ $z=r(\cos\varphi+i\,\sin\varphi)$ $z=re^{i\varphi}$
Модуль комплексного числа	$r=\lvert z\rvert=\sqrt{x^2+y^2}$
Головне значення аргументу $-\pi<\arg z\le\pi$	$\varphi=\arg z=\begin{cases}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & x>0, \quad (M(x,y)\in \text{I, IV чверті})\\ \pi+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & x<0,\ y\ge 0, \quad (M(x,y)\in \text{II чверті})\\ -\pi+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & x<0,\ y<0, \quad (M(x,y)\in \text{III чверті})\\ \frac{\pi}{2}, & x=0,\ y>0,\\ -\frac{\pi}{2}, & x=0,\ y<0.\end{cases}$
Дії над комплексними числами	
Алгебраїчна форма	1. $z_1+z_2=(x_1+i\,y_1)+(x_2+i\,y_2)=(x_1+x_2)+i\,(y_1+y_2)$ 2. $z_1-z_2=(x_1+i\,y_1)-(x_2+i\,y_2)=(x_1-x_2)+i\,(y_1-y_2)$. 3. $z_1\cdot z_2=(x_1+i\,y_1)\cdot(x_2+i\,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i\,(x_1y_2+x_2y_1)$ 4. $\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+i\,y_1}{x_2+i\,y_2}=\frac{z_1\cdot\bar z_2}{z_2\cdot\bar z_2}=\frac{(x_1+i\,y_1)(x_2-i\,y_2)}{(x_2+i\,y_2)(x_2-i\,y_2)}=$ $=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2},\quad z_2\ne 0$. 5. $z^n=\underbrace{z\cdot z\ldots\cdot z}_{n\text{ раз}},\quad n\in\mathbf{N}$. Тут $z_1=x_1+i\,y_1,\ z_2=x_2+i\,y_2,\ z=x+i\,y$.

Продовження таблиці 3.1

1	2
Тригонометрична форма	1. $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$. 2. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]$, $z_2 \neq 0$. 3. $z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$. 4. $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$, $k=\overline{0, n-1}$. Тут $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.
Показникова форма	1. $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$. 2. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$, $z_2 \neq 0$. 3. $z^n = r^n e^{in\varphi}$. 4. $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\, e^{\frac{i(\varphi+2k\pi)}{n}}$, $k = \overline{0, n-1}$. Тут $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, $z = r e^{i\varphi}$.

Таблиця 3.2 – Функції комплексної змінної

Основні елементарні функції	
Степенева функція	$z^n = (x+iy)^n$, $n \in \mathbf{N}$
Показникова функція	$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$
Тригонометричні функції	$\cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ $\mathrm{tg}\, z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$, $\mathrm{ctg}\, z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$
Гіперболічні функції	$\mathrm{ch}\, z = \dfrac{e^z+e^{-z}}{2}$, $\mathrm{sh}\, z = \dfrac{e^z-e^{-z}}{2}$ $\mathrm{th}\, z = \dfrac{\mathrm{sh}\, z}{\mathrm{ch}\, z}$, $\mathrm{cth}\, z = \dfrac{\mathrm{ch}\, z}{\mathrm{sh}\, z}$

Продовження таблиці 3.2

Логарифмічна функція	$\mathrm{Ln}\, z = \ln\lvert z\rvert + i(\arg z + 2k\pi)$, $z \neq 0$, де $\ln z = \ln\lvert z\rvert + i\arg z$; $\mathrm{Ln}\, z = \ln z + 2k\pi i$
Загальна степенева функція	$z^a = e^{a\,\mathrm{Ln}\, z}$, $a \in \mathbf{C}$
Загальна показникова функція	$a^z = e^{z\,\mathrm{Ln}\, a}$, $a \in \mathbf{C}$
Обернені тригонометричні функції	$\mathrm{Arcsin}\, z = -i\,\mathrm{Ln}(iz \pm \sqrt{1-z^2})$, $\mathrm{Arccos}\, z = -i\,\mathrm{Ln}(z \pm \sqrt{z^2-1})$, $\mathrm{Arctg}\, z = -\dfrac{i}{2}\,\mathrm{Ln}\dfrac{1+iz}{1-iz}$, $\mathrm{Arcctg}\, z = \dfrac{i}{2}\,\mathrm{Ln}\dfrac{z-i}{z+i}$.
Обернені гіперболічні функції	$\mathrm{Arsh}\, z = \mathrm{Ln}(z \pm \sqrt{z^2+1})$, $\mathrm{Arch}\, z = \mathrm{Ln}(z \pm \sqrt{z^2-1})$, $\mathrm{Arth}\, z = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\dfrac{1+z}{1-z}$, $\mathrm{Arcth}\, z = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\dfrac{z+1}{z-1}$.

Таблиця 3.3 – Диференціювання функцій комплексної змінної

Поняття або співвідношення, що визначаються	Формула
1	2
Похідна функції $w = f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$	$w' = f'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0}\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$
Умови Коші-Рімана	$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$
Формули для обчислення похідної	$f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} - i\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x} - i\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial y} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}$

Таблиця 3.4 – Інтегрування функцій комплексної змінної

Поняття або співвідношення, що визначаються	Формула
1	2
Інтеграл від функції $w = f(z)$ вздовж кривої C	$\int\limits_C f(z)\,dz$
Формули для обчислення інтегралів	
1. Зведення до обчислення криволінійних інтегралів другого роду.	$\int\limits_C f(z)\,dz = \int\limits_C (u + iv)(dx + i\,dy) =$ $= \int\limits_C u\,dx - v\,dy + i\int\limits_C u\,dy + v\,dx$, де $z = x + iy$, $f(z) = u + iv$.
2. Зведення до обчислення визначених інтегралів.	$\int\limits_C f(z)\,dz = \int\limits_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)\,dt$, де $C: x = x(t),\ y = y(t)$ або $z(t) = x(t) + i\,y(t)$, початковій та кінцевій точкам дуги C відповідають значення $t = \alpha$, $t = \beta$.
3. Формула Ньютона-Лейбніца.	$\int\limits_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz = \Phi(z)\big\|_{z_0}^{z_1} = \Phi(z_1) - \Phi(z_0)$, де функція $f(z)$ аналітична в області D, $z_0, z_1 \in D$, $\Phi(z)$ – первісна для функції $f(z)$.
4. Формула інтегрування частинами.	$\int\limits_{z_0}^{z_1} f(z)\varphi'(z)\,dz = [f(z)\varphi(z)]\big\|_{z_0}^{z_1} - \int\limits_{z_0}^{z_1} \varphi(z)f'(z)\,dz$, де функції $f(z)$, $\varphi(z)$ аналітичні в однозв'язній області D, $z_0, z_1 \in D$.
5. Формула заміни змінної.	$\int\limits_C f(z)\,dz = \int\limits_{C_1} f[\varphi(w)]\varphi'(w)\,dw$, де функція $w = f(z)$ така, що функція $z = \varphi(w)$ взаємно однозначно відображає контур C_1 в площині W на контур C в площині Z.

Продовження таблиці 3.4

1	2
Інтегральна формула Коші	$f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_C \dfrac{f(z)}{z - z_0}\,dz$, де функція $f(z)$ аналітична в області D, обмеженій кусково-гладким замкненим контуром C, і на самому контурі; $z_0 \in D$, контур C – додатно орієнтований.
Формула для обчислення інтегралів	$\int\limits_C \dfrac{f(z)}{z - z_0}\,dz = 2\pi i\, f(z_0)$
Формула для похідної n-го порядку	$f^{(n)}(z_0) = \dfrac{n!}{2\pi i}\int\limits_C \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,dz$
Формула для обчислення інтегралів	$\int\limits_C \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,dz = 2\pi i\,\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$
Основна теорема Коші. Якщо функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D, обмеженій контуром C і L – замкнений контур в D, то $\int\limits_L f(z)\,dz = 0$. Якщо функція $f(z)$ неперервна в замкненій області $\overline{D} = D + C$, то $\int\limits_C f(z)\,dz = 0$.	
Узагальнена теорема Коші. Якщо функція $f(z)$ аналітична в многозв'язній області D, обмеженій контуром C і внутрішніми по відношенню до нього контурами γ_1, $\gamma_2, \ldots, \gamma_k$, і неперервна в замкненій області $\overline{D} = D + C^+ + \gamma_1^- + \gamma_2^- + \ldots + \gamma_k^-$, де знаки верхніх індексів означають напрямки обходів, то $\int\limits_{C^+ + \sum_{i=1}^{k}\gamma_i^-} f(z)\,dz = 0$.	

Таблиця 3.5 – Комплексні ряди

Поняття або співвідношення, що визначаються	Формула
1	2
Числовий ряд	$z_1+z_2+\ldots+z_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, де $z_n=x_n+i\,y_n$.
Степеневий ряд	$c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots+c_nz^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty} c_nz^n$
Формули для обчислення радіуса збіжності	$R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\lvert c_n\rvert}{\lvert c_{n+1}\rvert}$, $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{\lvert c_n\rvert}}$
Ряд Тейлора для функції $f(z)$, однозначної і аналітичної в точці $z=z_0$	$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$, де $c_n=\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$, $n=0,1,2,\ldots$
Формули розкладу в ряд Тейлора елементарних функцій	
$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{n!}$, $\lvert z\rvert<+\infty$, $\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\lvert z\rvert<+\infty$, $\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^{2n}}{(2n)!}$, $\lvert z\rvert<+\infty$, $\operatorname{sh} z=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\lvert z\rvert<+\infty$, $\operatorname{ch} z=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^{2n}}{(2n)!}$, $\lvert z\rvert<+\infty$,	

Продовження таблиці 3.5

1	2
	$\ln(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{z^n}{n}$, $\lvert z\rvert<1$, $\ln(1-z)=-\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n}$, $\lvert z\rvert<1$, $\operatorname{arctg} z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^{2n+1}}{2n+1}$, $\lvert z\rvert<1$, $(1+z)^{\alpha}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}z^n$, $\lvert z\rvert<1$, $\dfrac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$, $\lvert z\rvert<1$, $\dfrac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $\lvert z\rvert<1$.
Ряд Лорана для функції $f(z)$, однозначної і аналітичної в кільці $r<\lvert z-z_0\rvert<R$	$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$, де $c_n=\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$

Таблиця 3.6 – Лишки функцій та їх застосування

Поняття або співвідношення, що визначаються	Формула
1	2
Лишок функції $f(z)$ в особливій точці z_0	$\operatorname{res} f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma} f(z)\,dz$, де контур γ – коло з центром у точці z_0 достатньо малого радіуса і такого, щоб коло не виходило за межі області аналітичності функції $f(z)$ і не містило всередині інших особливих точок функції $f(z)$.
Формула для обчислення лишку	$\operatorname{res} f(z_0)=c_{-1}$
Формули для обчислення лишку для різних типів особливих точок	
1. z_0 – усувна особлива точка	$\operatorname{res} f(z_0)=0$
2. z_0 – полюс n-го порядку	$\operatorname{res} f(z_0)=\frac{1}{(n-1)!}\lim\limits_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(f(z)(z-z_0)^n)$
3. z_0 – простий полюс	$\operatorname{res} f(z_0)=\lim\limits_{z\to z_0}(f(z)(z-z_0))$ або $\operatorname{res} f(z_0)=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$, якщо $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$
4. z_0 – істотно особлива точка	$\operatorname{res} f(z_0)=c_{-1}$
Основна теорема про лишки – теорема Коші	$\int\limits_C f(z)\,dz=2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname{res} f(z_k)$

§4. Операційне числення

Таблиця 4.1 – Таблиця зображень основних функцій

	Оригінал $f(t)$	Зображення $F(p)$
1	2	3
1	1	$\frac{1}{p}$
2	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$
3	$\sin\beta t$	$\frac{\beta}{p^2+\beta^2}$
4	$\cos\beta t$	$\frac{p}{p^2+\beta^2}$
5	$\operatorname{sh}\beta t$	$\frac{\beta}{p^2-\beta^2}$
6	$\operatorname{ch}\beta t$	$\frac{p}{p^2-\beta^2}$
7	$e^{-\alpha t}\sin\beta t$	$\frac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$
8	$e^{-\alpha t}\cos\beta t$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$
9	$e^{-\alpha t}\operatorname{sh}\beta t$	$\frac{\beta}{(p+\alpha)^2-\beta^2}$
10	$e^{-\alpha t}\operatorname{ch}\beta t$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2-\beta^2}$
11	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
12	$t^n e^{-\alpha t}$	$\frac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}}$
13	$t\sin at$	$\frac{2pa}{(p^2+a^2)^2}$
14	$t\cos at$	$\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$

Продовження таблиці 4.1

1	2	3
15	$t\,\mathrm{sh}\,at$	$\dfrac{2pa}{(p^2-a^2)^2}$
16	$t\,\mathrm{ch}\,at$	$\dfrac{p^2+a^2}{(p^2-a^2)^2}$
17	$\dfrac{1}{2a^3}(\sin at - at\cos at)$	$\dfrac{1}{(p^2+a^2)^2}$
Зображення похідних функції $f(t)$		
$f(t) \risingdotseq F(p)$, $f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0)$, $f''(t) \risingdotseq p^2F(p) - pf(0) - f'(0)$, $f'''(t) \risingdotseq p^3F(p) - p^2f(0) - pf'(0) - f''(0)$, ... $f^{(n)}(t) \risingdotseq p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$.		

§5. Границі. Неперервність

Таблиця 5.1

Поняття або співвідношення, що визначаються	Формула
1	2
Число e	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$
Границя суми, добутку, частки за умови: $\exists\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\exists\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\lim\limits_{x\to a} c\,f(x) = c\lim\limits_{x\to a} f(x),\ c = \mathrm{const}$; $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$; $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)$; $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)},\ \lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$
Перша важлива границя	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$
Наслідки з першої важливої границі	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}\,x}{x} = 1$
Друга важлива границя	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$
Наслідки з другої важливої границі	$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \dfrac{1}{\ln a}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ln a$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\mu}-1}{x} = \mu$

Продовження таблиці 5.1

1	2
Еквівалентні нескінченно малі	$x \sim \sin x \sim \mathrm{tg}\, x \sim \arcsin x \sim \mathrm{arctg}\, x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1$ $x \to 0$
	$u(x) \sim \sin u(x) \sim \mathrm{tg}\, u(x) \sim \arcsin u(x) \sim \mathrm{arctg}\, u(x) \sim$ $\sim \ln(1+u(x)) \sim e^{u(x)} - 1$, $u(x) \to 0$ при $x \to a$
	$a^x - 1 \sim x \ln a$, $\log_a(1+x) \sim \dfrac{x}{\ln a}$, $(1+x)^{\mu} - 1 \sim \mu x$ при $x \to 0$
Еквівалентні нескінченно великі	$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \sim a_0 x^n$ при $x \to \infty$
Таблиця визначеностей	1) $\dfrac{c}{0} = \infty$, $c \neq 0$; 2) $\dfrac{\infty}{0} = \infty$; 3) $\dfrac{c}{\infty} = 0$; 4) $\dfrac{0}{\infty} = 0$; 5) $c \cdot \infty = \infty$, $c \neq 0$; 6) $\infty \cdot \infty = \infty$; 7) $\infty + \infty = \infty$; 8) $0^{\infty} = 0$; 9) $\infty^{\infty} = \infty$.
Типи невизначеностей	$\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$, $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$, $\{0 \cdot \infty\}$, $\{\infty - \infty\}$, $\{1^{\infty}\}$, $\{\infty^0\}$, $\{0^0\}$
Неперервність функції в точці $x = a$	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(a) = 0$ $f(a+0) = f(a-0) = f(a)$
Розрив першого роду а) усувний б) стрибок	$\exists\, f(a+0)$, $f(a-0)$; $f(a+0) = f(a-0) \neq f(a)$ або $f(a+0) = f(a-0)$, якщо функція $f(x)$ невизначена при $x = a$; $f(a+0) \neq f(a-0)$
Розрив другого роду	Хоча б одна з границь $f(a+0)$, $f(a-0)$ не існує або дорівнює нескінченності.

§6. Основні формули диференціального числення

Таблиця 6.1 – Основні правила та формули диференціювання

Основні правила диференціювання
1. $C' = 0$.   2. $(Cu)' = Cu'$.   3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$.   4. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.   5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$, $v \neq 0$.   6. $\left(f(u)\right)'_x = f'_u \cdot u'_x$.   7. $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$, де $x = x(y)$ – обернена функція для функції $y = y(x)$.   Тут C – стала, $u = u(x)$, $v = v(x)$.   Правило диференціювання добутку n функцій $u = u(x)$, $v = v(x)$, $w = w(x), \ldots, z = z(x)$: $(u \cdot v \cdot w \ldots z)' = u' \cdot v \cdot w \ldots z + u \cdot v' \cdot w \ldots z + \ldots + u \cdot v \cdot w \ldots z'$.
Основні формули диференціювання
1. $(u^{\alpha})' = \alpha u^{\alpha - 1} \cdot u'$, $\alpha \in \mathbf{R}$.   2. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \ln a} \cdot u'$.   3. $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$.   4. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$.   5. $(e^u)' = e^u \cdot u'$.   6. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.   7. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.   8. $(\mathrm{tg}\, u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$.   9. $(\mathrm{ctg}\, u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$.

Продовження таблиці 6.1

10. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.
11. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.
12. $(\mathrm{arctg}\, u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$.
13. $(\mathrm{arcctg}\, u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$.
14. $(\mathrm{sh}\, u)' = \mathrm{ch}\, u \cdot u'$.
15. $(\mathrm{ch}\, u)' = \mathrm{sh}\, u \cdot u'$.
16. $(\mathrm{th}\, u)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 u} \cdot u'$.
17. $(\mathrm{cth}\, u)' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 u} \cdot u'$.
Тут $u = u(x)$. Якщо $u(x) = x$, то $u'(x) = x' = 1$.

Таблиця 6.2 – Основні поняття та формули

Поняття або співвідношення, що визначаються	Формула
1	2
Похідна	$y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$
Диференціал	$dy = y' \cdot \Delta x$ або $dy = y' \cdot dx$
Похідна n-го порядку	$\frac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$
Формула Лейбніца	$(u \cdot v)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$. Тут $u^{(0)} = u$, $v^{(0)} = v$, C_n^k – число комбінацій з n по k, $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

Продовження таблиці 6.2

1	2
Похідні від функції, заданої параметрично $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$	$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ $y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$
Диференціал n-го порядку	$dy = d(d^{n-1} y)$

Таблиця 6.3 – Застосування похідної

Поняття або співвідношення, що визначаються	Формула
1	2
Рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці (x_0, y_0)	$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$
Рівняння нормалі до кривої $y = f(x)$ у точці (x_0, y_0)	$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$
Кут між двома кривими $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$ у точці їх перетину (x_0, y_0)	$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0) \cdot f_2'(x_0)}$
При прямолінійному русі точки з законом руху $s = s(t)$: швидкість v прискорення a	$v = s'(t)$ $a = s''(t)$
Формула Коші (відношення скінчених приростів)	$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$, $c \in (a,b)$
Формула Лагранжа (формула скінчених приростів)	$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$, $c \in (a,b)$

Продовження таблиці 6.3

1	2
Правило Лопіталя розкриття невизначеностей	
Тип невизначеності	Правило розкриття невизначеності
$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$	Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$: 1) задовольняють умовам теореми Коші в околі точки $x=a$ (неперервні, диференційовні, $g'(x)\neq 0$); 2) $f(x),\ g(x)\to 0$ (або до $\pm\infty$) при $x\to a$; 3) $\exists \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (скінченна або нескінченна, рівна $+\infty$ або $-\infty$), то $\exists \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, причому $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$
$\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x)=\{0\cdot\infty\}$	$f(x)\to 0,\ \ g(x)\to\infty$ при $x\to a$ $f\cdot g=\dfrac{f}{1/g}\ \Rightarrow\ \left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ $f\cdot g=\dfrac{g}{1/f}\ \Rightarrow\ \left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$
$\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)-g(x)\right]=\{\infty-\infty\}$	$f(x)\to+\infty,\ \ g(x)\to+\infty$ при $x\to a$ $f-g=\dfrac{1}{\frac{1}{f}}-\dfrac{1}{\frac{1}{g}}=\dfrac{\frac{1}{g}-\frac{1}{f}}{\frac{1}{f}\cdot\frac{1}{g}}\ \Rightarrow\ \left\{\dfrac{0}{0}\right\}$
$\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}=\{1^{\infty}\}$, або $\{\infty^0\}$, або $\{0^0\}$	$f^{g}=e^{g\ln f}$; $\begin{cases} f\to 1, & g\to\infty, \text{ або}\\ f\to\infty, & g\to 0, \text{ або}\\ f\to 0, & g\to 0.\end{cases}$ $\lim\limits_{x\to a} f^{g}=\lim\limits_{x\to a} e^{g\ln f}=e^{\lim\limits_{x\to a} g\ln f}$ $\lim\limits_{x\to a} g\ln f=\{0\cdot\infty\}\ \Rightarrow\ \left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ або $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$

Продовження таблиці 6.3

1	2
Формула Тейлора для функції $f(x)$ з центром розкладу в точці $x=a$	$f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+R_n(x)$
Залишковий член у формі Лагранжа	$R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, $\xi=a+\theta(x-a)$, $0<\theta<1$
Залишковий член у формі Пеано	$R_n(x)=o((x-a)^n)$, $x\to a$
Формула Маклорена (Тейлора при $a=0$)	$f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+R_n(x)$
Основні розклади функцій за формулою Маклорена	
$e^x=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{x^k}{k!}+o(x^n)$; $\sin x=\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\dfrac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+o(x^{2n})$; $\cos x=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{k}\dfrac{x^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2n+1})$; $\ln(1+x)=\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\dfrac{x^k}{k}+o(x^n)$; $(1+x)^m=1+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{m(m-1)\ \dots\ (m-k+1)}{k!}x^k+o(x^n)$.	
Екстремуми функцій	
Необхідна умова локального екстремуму функції $f(x)$ в точці x_0	
$f'(x_0)=0$ або $f'(x_0)$ не існує	
Достатні умови локального екстремуму в точці x_0	
I правило. $f'(x)$ змінює знак з "+" на "–" в околі $O(x_0,\delta)\ \Rightarrow\ f(x_0)=y_{\max}$; $f'(x)$ змінює знак з "–" на "+" в околі $O(x_0,\delta)\ \Rightarrow\ f(x_0)=y_{\min}$; $f'(x)$ не змінює знаку в околі $O(x_0,\delta)\ \Rightarrow\ f(x_0)\neq y_{\max},\ f(x_0)\neq y_{\min}$. *II правило.* $f''(x_0)<0\ \Rightarrow\ f(x_0)=y_{\max}$; $f''(x_0)>0\ \Rightarrow\ f(x_0)=y_{\min}$; $f''(x_0)=0\ \Rightarrow$ потрібне додаткове дослідження.	

§7. Основні формули інтегрального числення

I. Невизначений інтеграл

Основна таблиця інтегралів

1. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $(\alpha \neq -1)$, $\int 1 \cdot dx = x + C$.
2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$, $(a > 0, a \neq 1)$.
4. $\int e^x dx = e^x + C$.
5. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$.
6. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$.
7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.
8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.
9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.
10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$.
11. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$.
12. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C$.
13. $\int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C$.

14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$.
15. $\int \dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2} + C$.
16. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left| \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} \right| + C$.
17. $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left| \operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) \right| + C$.
18. $\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln|\cos x| + C$.
19. $\int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln|\sin x| + C$.
20. $\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C$.
21. $\int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C$.
22. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$.
23. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$.

Заміна змінної

$$\int f(x)\,dx = \left| \begin{matrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)\,dt \end{matrix} \right| = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt .$$

Інтегрування частинами

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du .$$

Інтегрування найпростіших дробів

1) $\int \dfrac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C$.

2) $\int \dfrac{A}{(x-a)^k} dx = \dfrac{A}{1-k} \dfrac{1}{(x-a)^{k-1}} + C$.

3) $\int \dfrac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \dfrac{A}{2} \ln(x^2+px+q) + \dfrac{\left(B - A\dfrac{p}{2}\right)}{\sqrt{q - \dfrac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \dfrac{x + \dfrac{p}{2}}{\sqrt{q - \dfrac{p^2}{4}}} + C$.

4) $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \frac{A}{2}\,\frac{(t^2+a^2)^{-k+1}}{-k+1} + \left(B - A\frac{p}{2}\right) I_k$, де

$$I_k = \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \left| \begin{matrix} x = t - \frac{p}{2} \\ dx = dt \\ q - \frac{p^2}{4} = a^2 > 0 \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} =$$

$$= \frac{t}{2a^2(k-1)}\,\frac{1}{(t^2+a^2)^{k-1}} + \frac{1}{a^2}\,\frac{2k-3}{2k-2} I_{k-1},\ k>1 .$$

При $k=1$: $I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\frac{t}{a} + C$.

Інтегрування ірраціональних функцій

Інтеграл	Підстановка
$\int R\left(x, x^{\frac{r_1}{s_1}}, x^{\frac{r_2}{s_2}}, \ldots, x^{\frac{r_n}{s_n}}\right) dx$	$x = t^k$, де k – загальний знаменник дробів $\frac{r_i}{s_i}$, $i = \overline{1, n}$.
$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_1}{s_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_2}{s_2}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_n}{s_n}}\right) dx$	$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$, де k – загальний знаменник дробів $\frac{r_i}{s_i}$, $i = \overline{1, n}$.
$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$	Підстановки Ейлера: а) $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x\sqrt{a}$, $a>0$; б) $\sqrt{ax^2+bx+c} = x\,t \pm \sqrt{c}$, $c>0$; в) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} =$ $= t(x-x_1)$.

Диференціальний біном

$\int x^m (a+bx^n)^p\,dx$	
а) p – ціле число	а) $t = \sqrt[s]{x}$, де s – загальний знаменник дробів m і n

б) $\frac{m+1}{n}$ – ціле число	б) $a+bx^n = t^s$, де s – знаменник дробу p
в) $\frac{m+1}{n} + p$ – ціле число	в) $ax^{-n} + b = t^s$, де s – знаменник дробу p

Інтегрування тригонометричних функцій

$\int R(\sin x, \cos x)\,dx$	$t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$; $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
$\int R(\sin x, \cos x)\,dx$, де а) $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ б) $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ в) $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$	 $t = \cos x$ $t = \sin x$ $t = \mathrm{tg}\,x$
$\int R(\mathrm{tg}\,x)\,dx$	$t = \mathrm{tg}\,x$
$\int R(\sin^n x, \cos^m x)\,dx$, n, m – парні, хоча б одне з них від'ємне	$t = \mathrm{tg}\,x$; $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$; $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$
$\int R(\sin^n x, \cos^m x)\,dx$, $n = 2k$, $m = 2p$	$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$; $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$
$\int \cos mx \cos nx\,dx$	$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]$
$\int \sin mx \cos nx\,dx$	$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]$
$\int \sin mx \sin nx\,dx$	$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$

Тригонометричні підстановки

$\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right) dx$	$x = a\sin t$ або $x = a\cos t$
$\int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right) dx$	$x = a\ \mathrm{tg}\ t$ або $x = a\ \mathrm{ctg}\ t$
$\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right) dx$	$x = \frac{a}{\cos t}$

Інтегрування гіперболічних функцій
Аналогічно інтегруванню тригонометричних функцій з урахуванням формул: $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$; $\mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x = \mathrm{ch}\, 2x$; $2\,\mathrm{sh}\, x \cdot \mathrm{ch}\, x = \mathrm{sh}\, 2x$; $\mathrm{sh}^2 x = \frac{\mathrm{ch}\, 2x - 1}{2}$; $\mathrm{ch}^2 x = \frac{\mathrm{ch}\, 2x + 1}{2}$; $1 - \mathrm{th}^2 x = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$; $\mathrm{cth}^2 x - 1 = \frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$
II. Визначений інтеграл
Формула Ньютона-Лейбніца
$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\big\|_a^b = F(b) - F(a)$
Заміна змінної
$\int_a^b f(x)\,dx = \left\| \begin{matrix} x = \varphi(t),\ dx = \varphi'(t)\,dt \\ \varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b \end{matrix} \right\| = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt$
Інтегрування частинами
$\int_a^b u\,dv = uv\big\|_a^b - \int_a^b v\,du$
III. Застосування визначеного інтеграла

Площа плоскої фігури D	
Декартова система координат $D:\ y = f(x),\ f(x) \ge 0,$ $x = a,\ x = b,\ y = 0$.	$S = \int_a^b f(x)\,dx$
$D:\ y = f_1(x), y = f_2(x),$ $f_1(x) \le f_2(x),$ $x = a,\ x = b,\ a \le b$.	$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx$
Полярна система координат $D: \rho = \rho(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta$.	$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,d\varphi$

Параметричне задання $D:\ y = f(x),\ x \in [a,b],$ $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \alpha \le t \le \beta$.	$S = \int_a^b y(x)\,dx = \left\| \begin{matrix} x = x(t), \\ y = y(t), \\ dx = x'(t)dt, \\ x = a,\ t = \alpha, \\ x = b,\ t = \beta. \end{matrix} \right\| = \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)\,dt$
Довжина кривої L	
Декартова система координат $L:\ y = f(x),\ a \le x \le b$.	$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\ dx$
Полярна система координат $L: \rho = \rho(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta$.	$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\ d\varphi$
Параметричне задання $L \subset \mathbf{R}^2$ $L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \alpha \le t \le \beta$;	$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\ dt$
$L \subset \mathbf{R}^3$ $L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \alpha \le t \le \beta$.	$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\ dt$
Об'єм тіла за площами паралельних перерізів	
$S(x)$ – площа перерізу тіла площиною, перпендикулярною осі Ox, $a \le x \le b$	$V = \int_a^b S(x)\,dx$
Об'єм тіла обертання	
Декартова система координат $D: y = f(x), y = 0,\ x = a, x = b,$ вісь обертання – Ox	$V_x = \pi \int_a^b y^2(x)\,dx$
$D:\ y_1 = f_1(x),\ y_2 = f_2(x),$ $0 \le f_1(x) \le f_2(x),$ $x = a,\ x = b,$ вісь обертання – Ox	$V_x = \pi \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)]\,dx$
$D: x = \varphi(y),\ x = 0,\ y = c, y = d,$ вісь обертання – Oy	$V_y = \pi \int_c^d \varphi^2(y)\,dy$

$D: x_1 = \varphi_1(y),\ x_2 = \varphi_2(y),$ $0 \le \varphi_1(y) \le \varphi_2(y),$ $y = c,\ y = d,$ вісь обертання – Oy	$V_y = \pi\int_c^d [\varphi_2^2(y) - \varphi_1^2(y)]dy$
Полярна система координат $D: \rho = \rho(\varphi),$ $\varphi_1 = \alpha,\ \varphi_2 = \beta\ (\alpha < \beta)$	$V = \frac{2}{3}\pi\int_\alpha^\beta \rho^3(\varphi)\cdot\sin\varphi\, d\varphi$
Площа поверхні обертання	
Декартова система координат $l: y = f(x) \ge 0,\ a \le x \le b.$	$P_x = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$
Полярна система координат $l: \rho = \rho(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta.$	$P_x = 2\pi\int_\alpha^\beta \rho\sin\varphi\sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}\,d\varphi$
Параметричне задання $l: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \alpha \le t \le \beta;$	$P_x = 2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt$
Статичні моменти плоскої кривої l відносно координатних осей	
$l: y = f(x),\ a \le x \le b;$ відносно осі Ox	$M_x = \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$
$l: y = f(x),\ a \le x \le b;$ відносно осі Oy	$M_y = \int_a^b x\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$
Статичні моменти плоскої фігури D відносно координатних осей	
$D: y = f(x), y = 0,\ x = a, x = b;$ відносно осі Ox	$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\,dx$
$D: y = f(x), y = 0,\ x = a, x = b;$ відносно осі Oy	$M_y = \int_a^b x\cdot f(x)\,dx$
Моменти інерції плоскої кривої l відносно координатних осей	
$l: y = f(x),\ a \le x \le b;$ відносно осі Ox	$I_x = \int_a^b f^2(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$
$l: y = f(x),\ a \le x \le b;$ відносно осі Oy	$I_y = \int_a^b x^2\cdot\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$

Моменти інерції плоскої фігури D відносно координатних осей	
$D: y = f(x), y = 0,\ x = a, x = b;$ відносно осі Ox	$I_x = \frac{1}{3}\int_a^b f^3(x)\,dx$
$D: y = f(x), y = 0,\ x = a, x = b;$ відносно осі Oy	$I_y = \int_a^b x^2 f(x)\,dx$
Координати центра ваги плоскої кривої l	
$l: y = f(x),\ a \le x \le b$	$x_c = \frac{M_y}{M} = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}$ $y_c = \frac{M_x}{M} = \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}$
Координати центра ваги плоскої фігури D	
$D: y = f(x),\ y = 0,\ x = a,\ x = b$	$x_c = \frac{M_y}{M} = \frac{\int_a^b x f(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$ $y_c = \frac{M_x}{M} = \frac{\int_a^b f^2(x)\,dx}{2\int_a^b f(x)\,dx}$
Робота змінної сили $F = F(x)$	
$a \le x \le b$	$A = \int_a^b F(x)\,dx$

IV. Невласні інтеграли	
Невласні інтеграли I роду	
Типи	$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$; $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$; $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$, $c \in \mathbf{R}$
Означення	$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx$, інтеграл збігається за умови існування скінченної границі справа
Обчислення	$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = F(x)\Big\vert_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a)$, $F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$, $F(x)$ – первісна функції $f(x)$ на проміжку $[a, +\infty)$
Ознаки порівняння	$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ (1) $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ (2) 1) $0 \le f(x) \le g(x)$ $\forall x \in [a, +\infty)$ а) інтеграл (2) збіжний $\Rightarrow$ інтеграл (1) збіжний; б) інтеграл (1) розбіжний $\Rightarrow$ інтеграл (2) розбіжний; 2) $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ $\forall x \in [a, +\infty)$ $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A > 0$ $\Rightarrow$ інтеграли (1), (2) обидва збігаються або обидва розбігаються
Інтеграл для порівняння	$\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^p}$ – $\begin{cases}\text{збігається, якщо } p > 1,\\ \text{розбігається, якщо } p \le 1.\end{cases}$
$f(x)$ – знакозмінна функція на проміжку $[a, +\infty)$	
Достатня ознака порівняння	$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ (1) $\int\limits_a^{+\infty} \lvert f(x)\rvert\,dx$ (2) інтеграл (2) збігається $\Rightarrow$ інтеграл (1) збігається

Абсолютно збіжний інтеграл	$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ – абсолютно збіжний, якщо $\int\limits_a^{+\infty} \lvert f(x)\rvert\,dx$ – збіжний
Умовно збіжний інтеграл	$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ – умовно збіжний, якщо $\int\limits_a^{+\infty} \lvert f(x)\rvert\,dx$ – розбіжний, а $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ – збіжний
Невласні інтеграли II роду	
Типи	$\int\limits_a^b f(x)\,dx$, $x = a$ – особлива точка функції $f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$; $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, $x = b$ – особлива точка функції $f(x)$, $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \infty$; $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$, $x = c$, $a < c < b$ – особлива точка функції $f(x)$, $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$
Означення	$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$, де $x = a$ – особлива точка функції $f(x)$. Інтеграл збігається за умови існування скінченної границі справа
Обчислення	$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big\vert_{a+0}^b = F(b) - F(a+0)$, $F(a+0) = \lim\limits_{x\to a+0} F(x)$, $F(x)$ – первісна функції $f(x)$ на проміжку $(a, b]$, $x = a$ – особлива точка функції $f(x)$

Ознаки порівняння	$\int_a^b f(x)\,dx \quad (1) \qquad \int_a^b g(x)\,dx \quad (2)$, точка $x=a$ – особлива точка функцій $f(x)$ та $g(x)$ 1) $0 \le f(x) \le g(x) \quad \forall x \in (a,\, b]$ а) інтеграл (2) збіжний $\Rightarrow$ інтеграл (1) збіжний; б) інтеграл (1) розбіжний $\Rightarrow$ інтеграл (2) розбіжний; 2) $f(x) > 0, \quad g(x) > 0 \quad \forall x \in (a,\, b]$ $\exists \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A > 0 \;\Rightarrow$ інтеграли (1), (2) обидва збіжні або обидва розбіжні
Інтеграл для порівняння	$\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ – $\begin{cases} \text{збігається, якщо } p<1, \\ \text{розбігається, якщо } p \ge 1. \end{cases}$
$f(x)$ – знакозмінна функція на проміжку $(a,\, b]$, $x=a$ – особлива точка функції $f(x)$	
Достатня ознака збіжності	$\int_a^b f(x)\,dx \quad (1) \qquad \int_a^b \lvert f(x)\rvert\,dx \quad (2)$ інтеграл (2) збігається $\Rightarrow$ інтеграл (1) збігається
Абсолютно збіжний інтеграл	$\int_a^b f(x)\,dx$ – абсолютно збіжний, якщо $\int_a^b \lvert f(x)\rvert\,dx$ – збіжний
Умовно збіжний інтеграл	$\int_a^b f(x)\,dx$ – умовно збіжний, якщо $\int_a^b \lvert f(x)\rvert\,dx$ – розбіжний, а $\int_a^b f(x)\,dx$ – збіжний

§8. Основні формули елементарної математики

8.1 Алгебраїчні функції

8.1.1 Властивості степенів

Для будь-яких x, y та додатних a, b мають місце такі рівності:

$$a^0 = 1; \qquad (ab)^x = a^x b^x;$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}; \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x};$$

$$a^x : a^y = a^{x-y}; \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x}.$$

$$(a^x)^y = a^{xy};$$

8.1.2 Многочлени

Для будь-яких a, b, c мають місце такі рівності:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b);$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2);$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2);$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

де x_1, x_2 – корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, $\quad x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Для $n \in \mathbf{N}$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Якщо n – парне,

$$a^n - b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots + ab^{n-2} - b^{n-1}).$$

Якщо n – непарне,

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

8.1.3 Властивості арифметичних коренів

Для будь-яких натуральних n, k, більших одиниці, та будь-яких невід'ємних a, b мають місце такі рівності:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \ (a \ge 0);$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \ (b \ne 0); \qquad \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}, \text{ якщо } 0 \le a < b;$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}; \qquad \sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & \text{при } a \ge 0, \\ -a & \text{при } a < 0; \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[kn]{a}; \qquad \sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|;$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}; \qquad \sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a} \ (a \ge 0).$$

8.2 Тригонометричні функції

(У всіх формулах, наведених нижче, слід враховувати область припустимих значень лівої та правої частин формул)

8.2.1 Співвідношення між тригонометричними функціями одного і того ж аргументу

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \qquad \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1;$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}; \qquad 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}; \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

8.2.2 Формули додавання

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y;$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y;$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y;$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y;$$

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}; \qquad \operatorname{ctg}(x+y) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y - 1}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y};$$

$$\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}; \qquad \operatorname{ctg}(x-y) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y + 1}{\operatorname{ctg} y - \operatorname{ctg} x}.$$

8.2.3 Формули подвійного аргументу

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x;$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x;$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}; \qquad \operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg} x}.$$

8.2.4 Формули половинного аргументу

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}; \qquad \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2};$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}; \qquad \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x};$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}; \qquad \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{1 + \cos x}{\sin x}.$$

8.2.5 Формули зниження степеня

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}; \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

8.2.6 Формули перетворення суми в добуток

$$\sin x + \sin y = 2 \sin\frac{x+y}{2} \cos\frac{x-y}{2};$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos\frac{x+y}{2} \sin\frac{x-y}{2};$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2};$$

$$\cos x+\sin x=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right);$$

$$\cos x-\sin x=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right).$$

$$\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}; \qquad \operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg} y=\frac{\sin(x+y)}{\sin x\sin y};$$

$$\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y=\frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}; \qquad \operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg} y=-\frac{\sin(x-y)}{\sin x\sin y}.$$

8.2.7 Формули перетворення добутку в суму

$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y));$$

$$\cos x\cos y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y));$$

$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}(\sin(x-y)+\sin(x+y)).$$

8.2.8 Вираження тригонометричних функцій через тангенс половинного кута

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}; \qquad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}};$$

$$\operatorname{tg} x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}; \qquad \operatorname{ctg} x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}.$$

8.2.9 Формули зведення

Назва функції не змінюється				Назва функції змінюється на подібну			
u	$-\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
tg	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
ctg	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$

8.2.10 Значення тригонометричних функцій

Значення кута α		Функції			
град	рад	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
0^0	0	0	1	0	∞
30^0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
45^0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60^0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$
90^0	$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞	0
180^0	π	0	-1	0	∞
270^0	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	∞	0
360^0	2π	0	1	0	∞

8.2.11 Властивості обернених тригонометричних функцій

$\arcsin(-a)=-\arcsin a$, $|a|\le 1$;

$\arccos(-a)=\pi-\arccos a$, $|a|\le 1$;

$\operatorname{arctg}(-a)=-\operatorname{arctg} a$, $a\in\mathbf{R}$;

$\operatorname{arcctg}(-a)=\pi-\operatorname{arcctg} a$, $a\in\mathbf{R}$;

$\arcsin a+\arccos a=\frac{\pi}{2}$, $|a|\le 1$;

$\operatorname{arctg} a+\operatorname{arcctg} a=\frac{\pi}{2}$, $a\in\mathbf{R}$.

8.2.12 Розв'язки найпростіших тригонометричних рівнянь

Рівняння	Розв'язки рівняння
$\sin x = a, \quad \lvert a \rvert \le 1$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \; n \in \mathbf{Z}$
$\cos x = a, \quad \lvert a \rvert \le 1$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n, \; n \in \mathbf{Z}$
$\mathrm{tg}\, x = a, \quad a \in \mathbf{R}$	$x = \mathrm{arctg}\, a + \pi n, \; n \in \mathbf{Z}$
$\mathrm{ctg}\, x = a, \quad a \in \mathbf{R}$	$x = \mathrm{arcctg}\, a + \pi n, \; n \in \mathbf{Z}$

Окремі розв'язки тригонометричних рівнянь

$$\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pi n, \; n \in \mathbf{Z},$$

$$\sin x = \pm 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \; n \in \mathbf{Z},$$

$$\cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \; n \in \mathbf{Z},$$

$$\cos x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2\pi n, \; n \in \mathbf{Z},$$

$$\cos x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pi + 2\pi n, \; n \in \mathbf{Z}.$$

8.3 Властивості логарифмів

1^0. Основна логарифмічна тотожність :

$$x = a^{\log_a x}, \quad x > 0, \; a > 0, \; a \ne 1.$$

2^0. Логарифм основи дорівнює одиниці :

$$\log_a a = 1.$$

3^0. Логарифм одиниці дорівнює нулю :

$$\log_a 1 = 0.$$

4^0. Формула для логарифма добутку :

$$\log_a (x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2, \quad x_1 > 0, \; x_2 > 0.$$

5^0. Формула для логарифма частки :

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2, \quad x_1 > 0, \; x_2 > 0.$$

6^0. Формула для логарифма степеня :

$$\log_a x^p = p \log_a x, \quad x > 0, \; p \in \mathbf{R}.$$

7^0. Формула переходу до нової основи логарифма :

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \quad x > 0, \; b \in \mathbf{R}, \; b > 0, \; b \ne 1.$$

Зокрема,

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}; \qquad \log_a b \cdot \log_b a = 1.$$

8.4 Прогресії

Арифметична прогресія	Геометрична прогресія
$a_n = a_{n-1} + d, \quad n \ge 2$ де d – різниця прогресії	$b_n = b_{n-1} q, \quad n \ge 2$ де q – знаменник прогресії
Формула n-го члена	
$a_n = a_1 + (n-1)d$ $n = 1, 2, \ldots$	$b_n = b_1 q^{n-1}$ $n = 1, 2, \ldots$
Формула суми перших n членів	
$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$	$S_n = b_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}, \; q \ne 1$
Формула для різниці	Формула для знаменника
$d = a_n - a_{n-1}, \quad n \ge 2$	$q = \frac{b_n}{b_{n-1}}, \quad n \ge 2$
Сума натуральних чисел від 1 до n	Сума нескінченно спадної геометричної прогресії
$S = \frac{n(n+1)}{2}$	$S = \frac{b_1}{1-q}, \; \lvert q \rvert < 1$

8.5 Основні формули комбінаторики. Біном Ньютона

Число перестановок з n елементів знаходяться за формулою

$$\mathrm{P}_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) n = n!, \qquad 0! = 1.$$

Число розміщень з n елементів по m елементів знаходяться за формулою

$$\mathrm{A}_n^m = n(n-1)\ldots(n-(m-1)) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Число комбінацій з n елементів по m елементів знаходяться за формулою

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)\ldots(n-(m-1))}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m}$$

або

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}, \qquad C_n^n = C_n^0 = 1.$$

Властивості комбінацій:

$$C_n^m = C_n^{n-m}; \qquad C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}.$$

Формула бінома Ньютона має вигляд

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^{n-1} a\, b^{n-1} + C_n^n b^n,$$

де $C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$ – число комбінацій з n елементів по m елементів; $n \in \mathbf{N}$.

Сума біноміальних коефіцієнтів $\sum_{m=0}^{n} C_n^m = 2^n$.

8.6 Числові значення деяких величин

Позначення величини	Числове значення	Позначення величини	Числове значення
π	3,14159	e	2,71828
2π	6,28318	$1/e$	0,36788
$\pi/2$	1,57080	e^2	7,38906
$\pi/3$	1,04720	$\sqrt{e}$	1,64872
$\pi/4$	0,78540	$\lg e$	0,43429
$\pi/6$	0,52360	$\ln 10$	2,30258
$1/\pi$	0,31831	1 радіан	$57^\circ 17' 45''$
π^2	9,86960	1° (град)	0,0174 (рад)
$\sqrt{\pi}$	1,77245	$\sqrt{2}$	1,41421
$\sqrt[3]{\pi}$	1,46459	$\sqrt{3}$	1,73205

СЛОВНИК КЛЮЧОВИХ СЛІВ

Українською мовою	**Російською мовою**	**Англійською мовою**
абсолютний	абсолютный	absolute
абсциса	абсцисса	abscissa, x–coordinate
адитивність	аддитивность	additivity
аксіома	аксиома	axiom
алгебраїчний	алгебраический	algebraic
аналіз; математичний аналіз; гармонічний аналіз	анализ; математический анализ; гармонический анализ	analysis; calculus; harmonic analysis
аналізувати	анализировать	analyse
аналітичність	аналитичность	analyticity
аналітичний	аналитический	analytical
апліката	аппликата	z-coordinate
аргумент	аргумент	argument, independent variable
арксинус	арксинус	arcsine
арктангенс	арктангенс	arctangent
асимптота	асимптота	asymptote
астроїда	астроида	astroid
бета-функція	бета-функция	beta-function
біном	бином	binomial
біном Ньютона	бином Ньютона	binomial formula
будь-який, усякий	любой	any, arbitrary
варіація	вариация	variation
вгнутий	вогнутый	concavity
вгнутість	вогнутость	concave

Українською мовою	Російською мовою	Англійською мовою
Вейєрштрас	Вейерштрасс	Weierstrass
величина	величина	quantity, size
верхній	верхний	upper, top
верхня межа; верхня грань	верхняя граница; верхняя грань	upper bound; supremum
взагалі	вообще	in general, generally
взаємно однозначна відповідність	взаимно однозначное соответствие	one-to-one correspondence
вигляд; у вигляді; явний вигляд	вид; в виде; явный вид	aspect, form, view; in the form, as; explicit form
використання; повторне використання	использование; повторное использование	use, utilization; reuse, reusing
вимагати	требовать	is required
вимірність	размерность	dimension
вимірювання, вимір; число вимірів	измерение; число измерений	measurement, dimension; dimension
виняток; за винятком	исключение; за исключением	exclusion, exception; with the exception of
вираз	выражение	expression
висновок; робити висновок	вывод; делать вывод	conclusion; draw a conclusion
виходити; вихідний, початковий; вихідне рівняння; вихідні дані; вихідна формула; виходячи	исходить; исходный; исходное уравнение; исходные данные; исходная формула; исходя	come from, start from; initial, original, input; input equation; input data; assumption formula; starting from, beginning from

Українською мовою	Російською мовою	Англійською мовою
вищевикладений; вищевказаний; вищедоведений; вищезгаданий; вищенаведений; вищеописаний	вышеизложенный; вышеуказанный; вышедоказанный; вышеупомянутый; вышеприведенный; вышеописанный	stated above; above-mentioned; proved above; above-cited, above-mentioned; foregoing, above-mentioned; described above
вищий	высший	higher
від'ємний	отрицательный	negative
від'ємник; віднімання; віднімати; відняти	вычитаемое; вычитание; вычитать; вычесть	subtrahend; subtraction, deduction; subtract, deduct; subtract
відновити	восстановить	restore, reestablish
відношення	отношение	ratio, quotient, relation
відповідність; у відповідності	соответствие; в соответствии	correspondence; accordingly
відповідь	ответ	answer, reply, response
відрізок	отрезок	segment, closed interval
відстань	расстояние	distance, space
відтворювати	воспроизводить	reproduce
вісь	ось	axis
вказівка	указание	indication
включно	включительно	inclusively
власний	собственный	characteristic
внаслідок	вследствие	so that, on account of
вперше	впервые	first, for the first time
вправо, праворуч	вправо	to the right

Українською мовою	**Російською мовою**	**Англійською мовою**
враховувати	учитывать	consider
вронскіан	вронскиан	wronskian
всередині; рівномірно збігається всередині D	внутри; равномерно сходится внутри D	in, inside, subsets of; uniformly convergent on compact subsets of D
вступ	введение	introduction
гамма-функція	гамма-функция	gamma-function
гармонічний	гармонический	harmonic
геометричний	геометрический	geometric
гіперболічний	гиперболический	hyperbolic
гладкий	гладкий	smooth, differentiable
головний; головним чином; головна частина	главный; главным образом; главная часть	principal, essential, main; chiefly, mainly; principal part
градієнт	градиент	gradient
границя; граничний перехід	предел; предельный переход	limit; passage to the limit
громіздкий	громоздкий	cumbersome, bulky
груба помилка	грубая ошибка	gross error
давати	давать	give
Даламбер	Даламбер	d'Alembert
двічі	дважды	twice
двовимірний	двумерный	two-dimensional
двократний	двукратный	repeated, double
двопорожнинний	двуполостный	two-sheeted
Декарт	Декарт	Descartes
декартів	декартов	Cartesian

Українською мовою	**Російською мовою**	**Англійською мовою**
дивергенція	дивергенция	divergence
диференціал; диференціювання; диференціювати; диференційовність; диференційовний	дифференциал; дифференцирование; дифференцировать; дифференцируемость; дифференцируемый	differential; differentiation, derivation; differentiate, distinguish; differentiability; differentiable, differentiated
діагональ	диагональ	diagonal
діаметр	диаметр	diameter
дійсний	действительный	real, true
дійсно	действительно	really, in fact
ділене	делимое	dividend
ділення	деление	division
діло	дело	business, matter, case
дільник	делитель	divisor
Діріхле	Дирихле	Dirichlet
добування кореня	извлечение корня	taking the root
добуток	произведение	product, composition
доведемо; доведений; доведення; доводити	докажем; доказанный; доказательство; доказывать	we shell prove, let us prove; proved; proof, demonstration; prove, demonstrate
довизначити	доопределить	define, determine
довідковий	справочный	reference
довільний	произвольный	arbitrary
додавання	прибавление	addition, supplement
доданок	слагаемое	addend
додаток	приложение	application, supplement

Українською мовою	**Російською мовою**	**Англійською мовою**
доповнення до повного квадрата	дополнение до полного квадрата	completing the square
допоміжне твердження	вспомогательное утверждение	lemma
допоміжний	вспомогательный	auxiliary, subsidiary
дослідження	исследование	investigation, research
достатньо; достатність	достаточно; достаточность	sufficiently, enough; sufficiency
досягати	достигать	reach, achieve, attain
дріб; найпростіший дріб; похідна дробу; раціональний дріб; правильний дріб	дробь; простейшая дробь; производная дроби; рациональная дробь; правильная дробь	fraction, quotient; partial fraction; derivative of a quotient; rational fraction; proper fraction
дробово-раціональний	дробно-рациональный	rational, bilinear, linear fractional
другий	другой	second
дужка	скобка	parenthesis, brace
еліпс	эллипс	ellipse
еліпсоїд	эллипсоид	ellipsoid
єдиність	единственность	uniqueness
загальний; загальна сума	общий; общая сумма	common, general, total; sum total
задавати; завдання, задання; задання кривих у параметричній формі	задавать; задание; задание кривых в параметрической форме	set, assign, give; task, job, representation; parametric representation of curves
заданий; задамо	заданный; зададим	given, defined; let us give
задача	задача	problem, task

Українською мовою	**Російською мовою**	**Англійською мовою**
закінчувати	заканчивать	finish, complete
закривати	закрывать	close, shut
залежність	зависимость	dependence, relation
залишковий	остаточный	residual, remainder
залишковий член	остаточный член	remainder form
заміна; заміна змінних	замена; замена переменных	substitution, change; change of variables
замкнений	замкнутый	closed, isolated
занумерувати	занумеровать	number, index
запис	запись	notation, listing, writing
застосування	применение	application
застосування, додаток	приложение	application, supplement
зафіксувати	зафиксировать	fix, settle
збільшувати	увеличивать	increase
звичайний; звичайне диференціальне рівняння	обыкновенный; обыкновенное дифференциальное уравнение	ordinary, usual; ordinary differential equation
зводити; зводячи подібні члени	приводить; приводя подобные члены	reduce, bring, perform; collecting similar terms
згортка	свертка	convolution, fold
згрупувати	сгруппировать	group, arrange into group
зліва, ліворуч	слева	from the left
зменшуване	уменьшаемое	minuend
зменшувати	уменьшать	reduce
зміна	изменение	change, variation

Українською мовою	Російською мовою	Англійською мовою
змінна	переменная	variable, argument
зміст	содержание	contents
знакододатний	знакоположительный	of positive terms
знакододатний ряд	знакоположительный ряд	series of positive terms
знакозмінний	знакопеременный	with alternating signs
знакопочережний, знакопереміжний	знакочередующийся	alternating in sign
знакопочережний ряд	знакочередующийся ряд	alternating series
знакосталий	знакопостоянный	of constant signs
знаменник; загальний знаменник	знаменатель; общий знаменатель	denominator; common denominator
знаходження	нахождение	determination, finding
значення; мати значення; власне значення	значение; иметь значение; собственное значение	value, significance; to mean; eigenvalue
зображення	изображение	representation, transform
зображення Лапласа	изображение Лапласа	Laplase transform
зобразити	изобразить	represent
зростання; зростати; зростаючий	возрастание; возрастать; возрастающий	increase, rise, growth; increase, grow, ascend; increasing, growing, accelerating, ascending
інваріантність	инвариантность	invariance
індекс; верхній індекс; нижній індекс	индекс; верхний индекс; нижний индекс	index; superscript; subscript
індукція	индукция	induction, displacement

Українською мовою	Російською мовою	Англійською мовою
інтеграл; інтегрування; інтегрування частинами; інтегрувати; інтегровний; інтегровність	интеграл; интегрирование; интегрирование по частям; интегрировать; интегрируемый; интегрируемость	integral; integration; integration by parts; integrate; integrable; integrality
інтервал	интервал	interval
інтерпретувати	интерпретировать	interpret
ірраціональність	иррациональность	irrationality
істотно особлива точка	существенно особая точка	essential singularity
квадрант	квадрант	quadrant
квадрат; у квадраті; повний квадрат; квадратний; квадратне рівняння	квадрат; в квадрате; полный квадрат; квадратный; квадратное уравнение	square; squared; perfect square; square, quadratic; quadratic equation
кількість	количество	amount, quantity, number
класифікація	классификация	classification
коло	окружность	circle
комбінаторика	комбинаторика	combinatorial analysis
комбінація, сполучення	сочетание	combination, set
комплексний	комплексный	complex
корінь; знак кореня; квадратний корінь; кубічний корінь; корінь рівняння	корень; знак корня; квадратный корень; кубический корень; корень уравнения	root, radical; radical sign; square root; cube root; solution of an equation, root of an equation
коротко	коротко	briefly

Українською мовою	Російською мовою	Англійською мовою
кратний	кратный	multiple, divisible
кратність	кратность	multiplicity
крива	кривая	curve
криволінійний; криволінійний інтеграл	криволинейный; криволинейный интеграл	curvilinear; line integral
критерій	критерий	criterion
критичний	критический	critical
круг	круг	circle, disk
куля	шар	ball, solid sphere
кусково-гладкий	кусочно-гладкий	piecewise smooth
кусково-неперервний	кусочно-непрерывный	piecewise continuous
кусково-сталий; кусково-стала функція	кусочно-постоянный; кусочно-постоянная функция	piecewise constant; step function
кут	угол	angle, corner
Лагранж; теорема Лагранжа	Лагранж; теорема Лагранжа	Lagrange; Lagrange's theorem
ланцюгова лінія	цепная линия	catenary
лемніската	лемниската	lemniscate
лист; лист Мебіуса; декартів лист	лист; лист Мебиуса; декартов лист	sheet, leaf; Möbius band; folium of Descartes
лінійний	линейный	linear, arcwise
лінійно незалежний розв`язок	линейно независимое решение	linearly independent solution
лінія; лінія рівня	линия; линия уровня	line; level line, level curve

Українською мовою	Російською мовою	Англійською мовою
Ліувілль	Лиувилль	Liouville
логарифм; логарифмування	логарифм; логарифмирование	logarithm; taking the logarithm
локальний	локальный	local
Лопіталь	Лопиталь	L'Hospital
лишок	вычет	residue
мажорантний	мажорантный	majorizing, majorant
мажоровний	мажорируемый	majorized, majorizable
максимум	максимум	maximum, peak
мала; нескінченно мала	малая; бесконечно малая	small quantity; infinitesimal
математика; математичний	математика; математический	mathematics; mathematical
мати; мати справу; мати значення; мати місце; мати на увазі	иметь; иметь дело; иметь значение; иметь место; иметь в виду	have; deal, have to do(with); mean, have meaning; occur, take place; keep in mind
метод	метод	method
мінімум	минимум	minimum
мішаний	смешанный	mixed, compound
многочлен	многочлен	polynomial
множник; розкладання на множники	множитель; разложение на множители	factor, multiplier; factorization
монотонний	монотонный	monotone
наближений	приближенный	approximate
навколо	вокруг	around, round

Українською мовою	Російською мовою	Англійською мовою
надавати	придавать	add, attach, give
надавати значення	придавать значение	attach importance
найбільший	наибольший	greatest, largest
найменший	наименьший	least, smallest
належати	принадлежать	belong, belong to
напрям, напрямок; похідна за напрямом	направление; производная по направлению	direction; derivative in the direction
невизначений; невизначений інтеграл	неопределенный; неопределенный интеграл	indeterminate, indefinite; indefinite integral
невизначеність	неопределенность	indeterminacy, indefiniteness
невласний інтеграл	несобственный интеграл	improper integral
недиференційовність	недифференцируемость	nondifferentiable
недолік	недостаток	deficiency
недопустимий, неприпустимий	недопустимый	inadmissible
незалежний; незалежна величина	независимый; независимая величина	independent; independent variable
незростаюча	невозрастающий	nonincreasing
необмежений	неограниченный	unlimited, unbounded
необхідність	необходимость	necessity
непарний	нечетный	odd
нескінченний	бесконечный	infinite
нескінченність; до нескінченності	бесконечность; до бесконечности	infinity; ad infinitum

Українською мовою	Російською мовою	Англійською мовою
нескінченно	бесконечно	infinitely
нескінченно віддалена точка	бесконечно удаленная точка	point at infinite
нескінченно малі	бесконечно малые	infinitesimal
неспадаючий	неубывающий	nondecreasing
неявний	неявный	implicit
нижня грань	нижняя грань	lower bound, infimum
нуль	нуль	zero, origin
Ньютон	Ньютон	Newton
об`єм	объём	volume
обвідна	огибающая	envelope
обгрунтування	обоснование	proof, basis, justification
обернений, зворотний; обернене перетворення; обертатися; перетворюватися в нуль;	обратный; обратное преобразование; обращаться; обращаться в нуль;	inverse, reciprocal; inverse transformation; reduce to revert, turn; vanish;
обернення; формули обертання	обращение; формулы обращения	conversion, inversion; inversion formula
область; область визначення; область значень	область; область определения; область значений	domain, region, range; domain of definition; range of values
обмежений; обмежений зверху; обмежений знизу	ограниченный; ограниченный сверху; ограниченный снизу	bounded, limited; bounded above; bounded below
обчислення; обчислювати	вычисление; вычислять	calculation, computation; calculate, compute
одиниця	единица	unit, identity
одиничне коло	единичный круг	unit circle

Українською мовою	Російською мовою	Англійською мовою
однобічний, односторонній	односторонний	one-sided, unilateral
однозв'язний	односвязный	simply connected
однозначно	однозначно	identically, uniquely
одностороння поверхня	односторонняя поверхность	one-sided surface
ознака	признак	indication, sign, mark
означений, визначений;	определенный;	definite, defined, determinate, determined;
визначений інтеграл	определенный интеграл	definite integral
означення; за означенням	определение; по определению	definition, determination; by definition
окіл	окрестность	neighbourhood, vicinity
операційне числення	операционное исчисление	operational calculus
опуклість; опуклий	выпуклость; выпуклый	convexity; convex
ордината	ордината	ordinate
орієнтовний	ориентируемый	orientable, oriented
оригінал	оригинал	original
ортогональний	ортогональный	orthogonal
особлива точка	особая точка	singular point
особливий	особый	singular, particular
остаточний вираз	окончательное выражение	resultant expression
остаточно	окончательно	final, definitive
Остроградський	Остроградский	Ostrogradski
отже	следовательно	consequently, therefore

Українською мовою	Російською мовою	Англійською мовою
отримувати	получать	get, obtain, receive
парабола	парабола	parabola
параболоїд	параболоид	paraboloid
паралелепіпед	параллелепипед	parallelepiped
паралелограм	параллелограмм	parallelogram
параметр	параметр	parameter
параметричний	параметрический	parametric
парний	чётный	even
первісна	первообразная	primitive, antiderivative
перевірка	проверка	testing, test
перегин; точка перегину	перегиб; точка перегиба	inflection; point of inflection
перегрупування	перегруппировка	regrouping
перелік, перелічення	перечисление	enumeration, transfer
перелічення, перерахування	пересчет	recalculation, recount
перемноження	перемножение	multiplication
перепозначати	переобозначить	rename
перестановка	перестановка	permutation
перетворення; обернене перетворення; перетворення Фур'є	преобразование; обратное преобразование; преобразование Фурье	transformation; inverse transformation; Fourier transformation
перетин; точка перетину	пересечение; точка пересечения	intersection; point of intersection
перехід; перехід до границі	переход; переход к пределу	passage, transfer; passage to the limit
періодичний	периодический	periodic, recurrent

Українською мовою	Російською мовою	Англійською мовою
питання	вопрос	question, problem, issue
піввісь	полуось	semiaxis
півколо	полуокружность	semicircle
півкруг	полукруг	half-disk
півпряма	полупрямая	ray, half-line
півсума	полусумма	half-sum
півсфера	полусфера	hemisphere
підбір	подбор	selection, choice
підібрати	подобрать	select, pickout
підінтегральний вираз	подынтегральное выражение	integrand
підкореневий	подкоренной	subradical
підносити	возводить	raise, erect
підносити до квадрата	возводить в квадрат	square
підносити до третього степеня	возводить в третью степень	raise to the third power
підпослідовність	подпоследовательность	subsequence
підрахунок	подсчет	count, enumeration
підстановка	подстановка	substitution, permutation
підхід	подход	approach
площа	площадь	area, space
площина	плоскость	plane, flat, subspace
побудова	построение	structure, construction
поверхня	поверхность	surface
повторний; повторний інтеграл	повторный; повторный интеграл	repeated, iterated; iterated integral

Українською мовою	Російською мовою	Англійською мовою
поділити	разделить	divide, separate
по-друге	во-вторых	second, in the second place
позначення	обозначение	designation, notation
показник; показник степеня; показникова функція	показатель; показатель степени; показательная функция	index, exponent; exponent; exponential function
поле	поле	field
поліном	полином	polynomial
полюс	полюс	pole
помітити	заметить	notice, remark, note
по-перше	во-первых	in the first place
порівнювати	сравнивать	compare, equal
послідовність	последовательность	sequence, succession
постановка	постановка	statement, posing, formulation
потенціальний	потенциальный	potential
потік	поток	stream, flow, current, flux
потрійний	тройной	triple, threefold
похибка	погрешность	error, mistake
похідна; частинна похідна	производная; частная производная	derivative; partial derivative
почленно	почленно	termwise
пояснення	пояснение	explanation
правило	правило	rule, principle, law
правильна частина	правильная часть	principal part
приклад	пример	example, instance
припущення,допущення	допущение	assumption

Українською мовою	Російською мовою	Англійською мовою
прирівнювати	приравнивать	equate, set equal
приріст	приращение	increment, increase
прогресія	прогрессия	progression
продиференціювавши	продифференцировав	having differentiated, after differentiating
проінтегрувати	проинтегрировать	integrate
проінтегрувати за	проинтегрировать по	integrate over
прологарифмувати	прологарифмировать	take the logarithm
проміжний	промежуточный	intermediate
проміжок	промежуток	interval, space
пропорційний	пропорциональный	proportional
протилежний	противоположный	opposite, inverse
протиріччя	противоречие	contradiction
прямокутна система координат	прямоугольная система координат	Cartesian coordinate system
прямокутний трикутник	прямоугольный треугольник	right-angled triangle
прямокутник	прямоугольник	rectangle
прямувати, прагнути, наближатися	стремиться	strive, try
радіус	радиус	radius
раціональний	рациональный	rational
результат	результат	result
рекурентний	рекуррентный	recurrence, recurrent
рівний; рівність; знак рівності	равный; равенство; знак равенства	equal; equality; equality sign

Українською мовою	Російською мовою	Англійською мовою
рівнобедрений	равнобедренный	isosceles
рівномірний	равномерный	uniform
рівносильний	равносильный	equivalence
рівняння	уравнение	equation
рівняння у повних диференціалах	уравнение в полных дифференциалах	exact differential equation
різниця	разность	difference, remainder
робити	делать	make
робити висновок	делать вывод	conclude
розбіжний	расходящийся	divergent
розбіжність	расходимость	divergence
розв’язок, розв’язання, розв’язування	решение	solution, decision
розглядання	рассмотрение	examination, consideration
розкладання в ряд Фур’є	разложение в ряд Фурье	Fourier-series expansion
розкладання, розклад	разложение	expansion
розкладати	разлагать	expand, factor
розкриття	раскрытие	uncovering, opening
ротор	ротор	rotor, rotation
ряд	ряд	series, row
ряд Фур’є	ряд Фурье	Fourier series
середній	средний	middle, average
система	система	class, system
січна	секущая	secant, transversal
скінченний; скінченний приріст	конечный; конечное приращение	final, finite; finite increment

Українською мовою	Російською мовою	Англійською мовою
складна функція	сложная функция	composite function
складний	сложный	complicated, complex
скористатися	воспользоваться	take advantage of use
спадати	убывать	decrease
спадний	убывающий	decreasing
співвідношення	соотношение	relation
спосіб	способ	way, method
справа, праворуч	справа	from the right
спрощення	упрощение	simplification
спрощувати	упрощать	simplify
сталий; метод варіації сталих	постоянный; метод вариации постоянных	constant, fixed; method of variation
стаціонарний	стационарный	stationary
степеневий	степенной	power, degree
степеневий ряд	степенной ряд	power series
степінь	степень	power, degree, extent
сума; інтегральна сума	сумма; интегральная сумма	sum, union; Riemann sum
сфера	сфера	sphere
сферичний	сферический	spherical
теорема	теорема	theorem
точка; критична точка	точка; критическая точка	point, place; critical point
точний	точный	precise, exact, explicit
точність	точность	exactness, accuracy
трапеція	трапеция	trapezium

Українською мовою	Російською мовою	Англійською мовою
тривимірний	трехмерный	three-dimensional
трикратний	трехкратный	triple
трикутник	треугольник	triangle
тричлен	трехчлен	trinomial
трубка	трубка	tube
трубчастий, трубчатий	трубчатый	tubular, tube
у подальшому	впоследствии	afterwards, later on
узагальнення	обобщение	generalization, extension
указати	указать	indicate, find, determine
умова; достатня умова; необхідна умова	условие; достаточное условие; необходимое условие	condition; sufficient condition; necessary condition
умовний	условный	conditional
усувна особлива точка	устранимая особая точка	removable singularity
фігура	фигура	figure
функціональний; функціональний визначник; функціональний ряд	функциональный; функциональный определитель; функциональный ряд	functional; functional determinant; series of function
функція; обернена функція	функция; обратная функция	function; inverse function
характеристичний	характеристический	characteristic
циркуляція	циркуляция	circulation
ціле	целое	integer
частина; права частина; ліва частина	часть; правая часть; левая часть	part, side; right part; left part

Українською мовою	Російською мовою	Англійською мовою
частковий	частичный	partial
чисельник	числитель	numeration
число; натуральне число	число; натуральное число	number; natural number
числовий	числовой	numerical
чудовий, визначний	замечательный	remarkable, wonderful
шукане	искомое	unknown, desired, quantity
Якобі	Якоби	Jacobi
якобіан	якобиан	Jacobian

ВІДПОВІДІ

Г л а в а 1

1.1. а) Так; б) ні; в) так; г) ні. **1.2.** а) Так; б) так; в) так; г) ні.

1.4. а) $y(1+x)=1$; б) $y=2-3\cos x$. **1.5.** а) $x^2+y=xy'$; б) $xy'+y=0$; в) $y'=y\,\mathrm{th}\,x$; г) $2xyy'=x^2+y^2$. **1.6.** $y-b=y'(x-a)$.

1.7. $y-3=\frac{1}{2}(x+1)\,y'$. **1.9.** $1+y^2=C(1-x^2)$. **1.10.** $x^2+y^2=\ln Cx^2$.

1.11. $y=\sqrt[3]{C+3x-3x^2}$. **1.12.** $y=C\sin x-a$. **1.13.** $Cx=\frac{y-1}{y}$, $y=0$.

1.14. $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=C$, $y=\pm1$. **1.15.** $\sqrt{1-y^2}=\arcsin x+C$, $y=\pm1$.

1.16. $10^x+10^{-y}=C$. **1.17.** $y=C\sqrt{1+e^{2x}}$.

1.18. $e^x-\frac{1}{2}e^{2y}-2\ln|1+y|-\frac{(y-1)^2}{2}=C$, $y=-1$.

1.19. $\sqrt{y}+x(1-\ln x)=C$, $y=0$.

1.20. $\mathrm{tg}\frac{x+y}{2}-x=C$, $x+y=(2k+1)\pi$, $k\in Z$.

1.21. $(2x+C)\left(\mathrm{tg}\frac{y-x-1}{2}-1\right)=1$, $y-x-1=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in Z$.

1.22. $\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\frac{4x+y+1}{2}-x=C$. **1.23.** $4y-6x-7=Ce^{-2x}$. **1.24.** $y=e^{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}$.

1.25. $y=\frac{1+x}{1-x}$. **1.26.** $\cos x=\sqrt{2}\cos y$. **1.27.** $y=\frac{b+x}{1+bx}$.

1.28. $\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\ln\left|\frac{y}{x}\right|=1$. **1.29.** $y=\sin x$. **1.30.** Гіпербола $xy=6$.

1.31. Параболи $y^2=Cx$. **1.32.** Трактриса $y=\sqrt{4-x^2}+2\ln\left|\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}\right|$.

1.33. $y=\frac{Cx}{1-kx}$. **1.34.** $(x+C)^2+y^2=a^2$. **1.35.** $y=e^{\frac{x-a}{a}}$. **1.36.** $x=y^n$.

1.37. $y^2=\frac{x^2}{x^2+3}$. **1.38.** $\approx 2{,}7$ м/сек. **1.39.** 1,28 км/сек.

1.40. $H=\left(\sqrt{h}-\frac{\sqrt{2g}}{4S}qT\right)^2$. **1.41.** $y-2x=Cx^3(y+x)$.

1.42. $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln C\sqrt{x^2+y^2}$. **1.43.** $\ln|y|+\frac{x}{y}=C,\ y=0$.

1.44. $x^2+y^2=Cy,\ y=0$. **1.45.** $y=\pm x\sqrt{2\ln|Cx|}$. **1.46.** $x^2=C^2+2Cy$.

1.47. $y=xe^{1+Cx}$. **1.48.** $(x+y)^2=Cx^3e^{-\frac{x}{x+y}},\ x=0$.

1.49. $y=2x(\operatorname{arctg}Cx+\pi k)$, $y=(2k+1)\pi x,\ k\in\mathbf{Z}$.

1.50. $\ln\frac{y}{x}=2\operatorname{arctg}(\ln|x|+C)$, $y=xe^{2k\pi},\ k\in\mathbf{Z}$. **1.51.** $y=x\arcsin Cx$, $y=k\pi x,\ k\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}$. **1.52.** $x=Ce^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$. **1.53.** $(x+y-1)^3=C(x-y+3)$.

1.54. $x^2-xy+y^2+x-y=C$. **1.55.** $x-2y+\ln|x+y|=C$.

1.56. $e^{-2\operatorname{arctg}\frac{y+2}{x-3}}=C(y+2)$. **1.57.** $\sqrt{x^2+y^2}=e^{\frac{y}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$. **1.58.** $y^3=y^2-x^2$.

1.59. $y=-x$. **1.60.** $y^2=5\pm2\sqrt{5}x$. **1.61.** $\ln|y|+2\sqrt{\frac{x}{y}}=2$.

1.62. $y=\frac{1}{2}(x^2-1)$. **1.63.** $x=Ce^{\pm2\sqrt{\frac{y}{x}}}$. **1.64.** $y=y\ln|Cy|$.

1.65. $x^2=2Cy+C^2$. **1.66.** $x^2+y^2-Cy=0$. **1.67.** $y=Cx-x\ln|x|$.

1.68. $y=\pm x\sqrt{C^2x^2-1}$. **1.69.** $y=Ce^{-2x}+2x-1$. **1.70.** $y=Ce^{-2x}+\frac{1}{5}e^{3x}$.

1.71. $y=e^{-x^2}\left(C+\frac{x^2}{2}\right)$. **1.72.** $y=Cx^2e^{1/x}+x^2$. **1.73.** $y=(x+C)(1+x^2)$.

1.74. $y=Ce^{-x}+\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)$. **1.75.** $y^2-2x=Cy^3$.

1.76. $x=Ce^{2y}+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}$. **1.77.** $x=y\ln y+\frac{C}{y}$. **1.78.** $y=x^2+Cx^3$.

1.79. $y=(x+1)^2(e^x+C)$. **1.80.** $y=x\sin x+Cx$. **1.81.** $x=Cy+y^3,\ y=0$.

1.82. $y=\frac{x}{\cos x}$. **1.83.** $y=\frac{e^x+ab-e^a}{x}$. **1.84.** $y=\frac{x}{x+1}(x-1+\ln|x|)$.

1.85. $x=-t\operatorname{arctg}t$. **1.86.** $y=\sin x$. **1.87.** $y=e^{2x}-e^x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$.

1.88. $\frac{1}{y^2}=Ce^{2x^2}+x^2+\frac{1}{2},\ y=0$. **1.89.** $y=\frac{1}{(1+x)(C+\ln|1+x|)},\ y=0$.

1.90. $x^2=y^2(C-y^2)$. **1.91.** $y(1+\ln x+Cx)=1,\ y=0$.

1.92. $y(x+C)=\sec x,\ y=0$. **1.93.** $y=\frac{x^4}{4}\ln^2|Cx|,\ y=0$.

1.94. $y^3=\frac{1}{3-2e^{\cos x}}$. **1.95.** $x^2=\frac{1}{y+3y^2}$. **1.96.** $y=\frac{1}{(x+1)\cos x}$.

1.97. а) $y=\frac{1}{x}+\frac{1+x^2}{C-x}$; б) $xy\left(C+\int e^{-\frac{3}{2}x^2}dx\right)=e^{-\frac{2}{3}x^2}$;

в) $y\left(Ce^{2/x}-1\right)=x\left(Ce^{2/x}+1\right)$; г) $y=\frac{1}{Cx-x\ln x}-\frac{1}{x}$; д) $y=\frac{1-Cx^2}{C-x}$;

е) $y=\frac{Cx^2-x}{1-x}$. **1.98.** $y=Cx-x\ln|x|-2$. **1.99.** $xy=Cy^2+a^2$.

1.100. $y=Cx^2+\frac{2a^2}{3x}$. **1.101.** $y=\frac{C}{x}+1$. **1.102.** $y(2x-1)+Cy(x-1)^2=x^2$.

1.103. $v=\frac{k_1}{k_2}\left(t-\frac{m}{k_2}+\frac{m}{k_2}e^{-\frac{k_2t}{m}}\right)$. **1.104.** $v=(v_0+b)e^{-at^2}+b(at^2-1)$, де $a=\frac{k_1}{2m}$, $b=\frac{2k_2m}{k_1^2}$. **1.105.** $I(t)=\frac{E_0}{L(\omega^2+\alpha^2)}(\alpha\sin\omega t-\omega\cos\omega t+\omega e^{-\alpha t})$, $\alpha=\frac{R}{L}$. **1.106.** $\theta-\theta_0=e^{-kt}\int_0^t\varphi(t)e^{kt}dt$. **1.107.** $x^4-x^2y^2+y^4=C$.

1.108. $x+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=C$. **1.109.** $xe^y-y^2=C$. **1.110.** $x^y=C$.

1.111. $\sqrt{x^2+y^2}+\frac{y}{x}=C$. **1.112.** $\operatorname{tg}(xy)-\cos x-\cos y=C$.

1.113. $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2)^3}+x-\frac{1}{2}y^2=C$. **1.114.** $x^2-y^2=Cy^3$. **1.115.** $x-\frac{y}{x}=C$.

1.116. $x^2+\frac{2x}{y}=C$. **1.117.** $(x^2+y^2)e^x=C$. **1.118.** $\frac{y^2}{2}+\frac{\ln x}{y}=C$.

1.119. $(x\sin y+y\cos y-\sin y)e^x=C$. **1.120.** $\ln|x|-\frac{y^2}{x}=C$.

1.121. $\frac{x}{y}+\frac{x^2}{2}=C$. **1.123.** $\mu = y^{-n}e^{-(n-1)\int P(x)dx}$. **1.124.** $x=2t+6t^2+C$, $y=t^2+4t^3$; $y=0$ (особливий розв'язок). **1.125.** $x=e^t+C$, $y=(t-1)e^t$.
1.126. $y=Cx+\frac{1}{2}(C^2-x^2)$, $y=-x^2$ (особливий розв'язок).
1.127. $x=t^3-t+2$, $y=\frac{3}{4}t^4-\frac{t^2}{2}+C$. **1.128.** $x=t\cos t$, $y=t^2\cos t-t\sin t-\cos t+C$. **1.129.** $x=2t-\ln t$, $y=t^2-t+C$.
1.130. $x=Cy+C^2$, $x=-\frac{1}{4}y^2$ (особливий розв'язок). **1.131.** $y=Cx+C^2$, $x^2+4y=0$ (особливий розв'язок). **1.132.** $y=Cx-3C^3$, $9y\pm 2x\sqrt{x}=0$ (особливий розв'язок). **1.133.** $y=Cx+\frac{1}{C}$, $y^2=4x$ (особливий розв'язок).
1.134. $y=Cx+\sqrt{1+C^2}$, $x^2+y^2=1$ (особливий розв'язок).
1.135. $y=Cx-\ln C$, $y=\ln x+1$ (особливий розв'язок).
1.136. $y=(\sqrt{x+1}+C)^2$, $y=0$ (особливий розв'язок). **1.137.** $y=Cx^2+\frac{1}{C}$, $y^2-4x^2=0$ (особливий розв'язок). **1.138.** $2Cx=C^2-y^2$, особливого розв'язку нема. **1.139.** $x=Ce^{-t}+2(1-t)$, $y=x(1+t)+t^2$, особливого розв'язку нема. **1.140.** $y=Cx-e^C$, $y=x(\ln x-1)$ (особливий розв'язок).
1.141. $y=Cx+C+C^2$, $y=-\frac{1}{4}(x+1)^2$ (особливий розв'язок).
1.142. $(y-x-2a)^2=8ax$. **1.143.** Еліпси та гіперболи.
1.144. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$. **1.145.** Гіпербола $2xy=\pm a^2$; тривіальний розв'язок: будь-яка пряма сім'ї $y=\pm\frac{C^2}{2}x+aC$. **1.146.** а) $x^2+2y^2=C^2$, б) $y=Ce^{-\frac{x}{2}}$.
1.147. $y=C(x^2+y^2)$. **1.148.** $y=C/x^2$.
1.149. а) $2x^2+3y^2=C^2$, б) $x+y^2=C$. **1.150.** Лінійне, $y=uv$.
1.151. З відокремлюваними змінними. **1.152.** Рівняння Бернуллі, $y=uv$.
1.153. Лінійне відносно x , $x=uv$. **1.154.** Рівняння у повних диференціалах. **1.155.** Однорідне, $y=ux$ або $x=uy$. **1.156.** Рівняння Бернуллі відносно x , $x=uv$. **1.157.** Зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними, $u=y-x$. **1.158.** Лінійне відносно x, $x=uv$. **1.159.** Рівняння Бернуллі відносно x, $x=uv$. **1.160.** $x^2+2xy-y^2-4x+8y=C$.

1.161. $\frac{2x}{x-y}+\ln|x+y|+3\ln|y-x|=C$. **1.162.** $x+y=a\,\mathrm{tg}\left(C+\frac{y}{a}\right)$.
1.163. $y^3-3xy=C$. **1.164.** $x^2-y^2=Cy^3$. **1.165.** $3x^2y+x^3y^3=C$.
1.166. $y\left(x^2+\frac{1}{3}y^2\right)=Ce^{-x}$. **1.167.** $\ln|1+y|-\frac{1+y}{x}=C$.
1.168. $y^2-1+Cxy=0$. **1.169.** $\frac{xy}{x-y}+\ln\left|\frac{x}{y}\right|=C$.
1.170. $3\sqrt{y}=C\sqrt[4]{x^2-1}+x^2-1$. **1.171.** $y=\sin x+C\cos x$.
1.172. $y=\frac{2e^x}{C+e^x(\cos x+\sin x)}$. **1.173.** $\mathrm{tg}\,x-\frac{\sin y}{\sin x}=C$. **1.174.** $xe^{\sin\frac{y}{x}}=C$.
1.175. $xy\cos\frac{y}{x}=C$. **1.176.** $\sin y=x-1+Ce^{-x}$. **1.177.** $y=\frac{\mathrm{tg}\,x+\sec x}{C+\sin x}$.
1.178. $\ln|Cx|=-e^{-\frac{x^2+y^2}{x}}$. **1.179.** $x+ye^{x/y}=C$. **1.180.** $y=\frac{C-x^4}{4(x^2-1)^{3/2}}$.
1.181. $y=C\sin x-a$. **1.182.** $(y-Cx)(y^2-x^2+C)=0$.
1.183. $x^3+x^2y-xy^2-y^3=C$. **1.184.** $e^y=x^2\ln Cx$.
1.185. $x=Cy^2-y^2(y+1)e^{-y}$, $y=0$. **1.186.** $y=C^2+Cx-\frac{x^2}{4}$, $y=-\frac{x^2}{2}$ (особливий розв'язок). **1.187.** $y=\frac{1}{2k}[e^{kx+C}+e^{-(kx+C)}]$. **1.188.** $x^2+y^2=Cx$.
1.189. $(y-x)^2(x+2y)=1$. **1.190.** Параболи $y=x+Cx^2$.
1.191. $y=\pm\ln(x^2-1)$. **1.192.** 1) $y^2=4x$; 2) $xy^2=4$. **1.193.** $y=\pm\frac{x}{x-1}$.
1.194. 1) $y^2=4(x-1)$; 2) $\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{y^2}{8}=1$. **1.195.** $y=x\ln|Cx|$. **1.196.** За 40 хвилин. **1.197.** Через 1575 років. **1.198.** ≈ 50 с; ≈ 15 м. **1.199.** $t\approx 0{,}0011$ с. Рівняння має вигляд $m\frac{dv}{dt}=-kv^2$. **1.200.** а) $y'<x^2$; б) $y'>0$.

1.203. а) $y''=0$; б) $y''+y=0$; в) $y'''=0$. **1.204.** $y=\frac{x^3}{6}-\sin x+C_1x+C_2$.

1.205. $y=\frac{1}{2}(x^2-1)\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2}\ln(1+x^2)+C_1x+C_2$.

1.206. $y=\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{3}{2}\right)+C_1x+C_2$. **1.207.** $y=x^2\ln\sqrt{x}+C_1x^2+C_2x+C_3$.

1.208. $y=-\frac{1}{8}\sin 2x+C_1x^2+C_2x+C_3$.

1.209. $y=\frac{3}{2}x^2\ln|x|+\frac{x^3}{3}+C_1x^2+C_2x+C_3$.

1.210. $y=\frac{1}{3(x-3)}+C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4$.

1.211. $y=(C_1+\operatorname{arctg}x)x-\ln\sqrt{1+x^2}+C_2$. **1.212.** $y=C_1x^2+C_2$.

1.213. $y=C_1e^x+C_2-x-\frac{x^2}{2}$. **1.214.** $y=\frac{1}{3}x^3+C_1x^2+C_2$.

1.215. $y=(1+C_1^2)\ln|x+C_1|-C_1x+C_2$. **1.216.** $y=(C_1x-C_1^2)\ e^{\frac{x}{C_1}+1}+C_2$.

1.217. $y=\frac{1}{12}(x+C_1)^3+C_2$. **1.218.** $y=\frac{2}{3C_1}\sqrt{(C_1x-1)^3}+C_2$.

1.219. $y=-\frac{1}{3}\sin^3 x+C_1\left(\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right)+C_2$. **1.220.** $(x+C_2)^2=4C_1(y-C_1)$.

1.221. $y=C_1(x+C_2)^{2/3}$. **1.222.** $y=\frac{x+C_1}{x+C_2}$. **1.223.** $(x+C_2)^2-y^2=C_1$.

1.224. $y=C_1e^{C_2x}$. **1.225.** $y\cos^2(x+C_1)=C_2$. **1.226.** $(x+C_2)\ln y=x+C_1$.

1.227. $x=C_1+\cos C_2\ln\left|\operatorname{tg}\frac{y+C_2}{2}\right|$. **1.228.** $C_1x+C_2=\ln\left|\frac{y}{y+C_1}\right|$.

1.229. $y=C_1x(x-C_1)+C_2$, особливі розв'язки $y=\frac{x^3}{3}+C$.

1.230. $y=C_1x^2+C_2+e^x(x-1)$. **1.231.** $y=\frac{1}{x}+C_1\ln|x|+C_2$.

1.232. $2y=C_1\cos 2x+(1+2C_1)x^2+C_2x+C_3$.

1.233. $2y=C_1x^2-2C_1^2(x+C_1)\ln|x+C_1|+C_2x+C_3$.

1.234. $y=C_2\left(xe^{C_1x}-\frac{1}{C_1}e^{C_1x}\right)+C_3$. **1.235.** $y=C_2e^{\frac{1}{3}(x^2+C_1)^{3/2}}$.

1.236. $y=x^3+3x+1$. **1.237.** $x=2+\ln\frac{x^2}{4}$. **1.238.** $y=\frac{2\sqrt{2x}}{5}x^2-\frac{16}{5}$.

1.239. $y=\frac{4}{(x+4)^2}$. **1.240.** $y-x=2\ln|y|$. **1.241.** $y=\sqrt{2x-x^2}$.

1.242. $y=\sqrt{1+e^{2x}}$. **1.243.** $y=-\ln|1-x|$. **1.244.** $y=\frac{x+1}{x}$.

1.245. $y=2e^{\frac{x^2}{2}}-1$. **1.246.** $y=1-e^x$, $y=-1+e^{-x}$. **1.247.** $y=1-x$.

1.248. а) $y=C_1(4x^3-3x)+C_2\sqrt{1-x^2}\,(4x^2-1)$;

б) $y=C_1\sin x+C_2\left(1-\sin x\cdot\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|\right)$; в) $y=C_1\frac{\cos x}{x}+C_2\frac{\sin x}{x}$;

г) $y=C_1\left(\frac{1}{2}x\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-1\right)+C_2x$. **1.249.** $y=x^2-e^{x-1}$.

1.250. а) $y=C_1+C_2x^2+x^3$; б) $y=x(C_1+C_2\ln|x|)+x^3$;

в) $y=C_1e^x+C_2x-x^2-1$; г) $y=C_1x^3+C_2(x+1)-x$.

1.251. $y=2+3x+x\left(\frac{\pi}{2}+2\operatorname{arctg}x\right)+x^2$. **1.252.** $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$.

1.253. $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}$. **1.254.** $y=C_1e^{4x}+C_2$.

1.255. $y=C_1e^{(1+\sqrt{2})x}+C_2e^{(1-\sqrt{2})x}$. **1.256.** $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-\frac{4}{3}x}$.

1.257. $y=C_1\cos x+C_2\sin x$. **1.258.** $y=e^{-3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$.

1.259. $y=e^x(C_1\cos\frac{x}{2}+C_2\sin\frac{x}{2})$. **1.260.** $y=e^x(C_1+C_2x)$.

1.261. $x=e^{2,5t}(C_1+C_2t)$.

1.262. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+C_3\cos\sqrt{3}x+C_4\sin\sqrt{3}x$.

1.263. $y=C_1+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x+x(C_4\cos 2x+C_5\sin 2x)$.

1.264. $y=C_1+C_2x+C_3x^2+e^{3x}(C_4+C_5x)$.

1.265. $y=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3+e^{-x}(C_5+C_6x)$. **1.266.** $y=4e^x+2e^{3x}$.

1.267. $y=3e^{-2x}\sin 5x$. **1.268.** $y=e^{-\frac{x}{2}}(2+x)$. **1.269.** $y=(7-3x)e^{x-2}$.

1.270. $y=2+e^{-x}$. **1.271.** $y=\cos 3x-\frac{1}{3}\sin 3x$. **1.272.** $y=\operatorname{sh} x$.

1.273. $y=\frac{5}{2}e^x-\frac{1}{2}e^{3x}$. **1.274.** $(Ax^3+Bx^2)e^{4x}$. **1.275.** $(Ax^2+Bx)e^{4x}$.

1.276. Ax^3+Bx^2+Cx. **1.277.** $e^x((Ax+B)\cos 2x+(Cx+D)\sin 2x)$.

1.278. $xe^{2x}((Ax^2+Bx+C)\cos 3x+(Dx^2+Ex+F)\sin 3x)$.

1.279. $A\cos 2x+B\sin 2x$. **1.280.** $e^x(A\cos x+B\sin x)$.

1.281. $xe^x((Ax^2+Bx+C)\cos 2x+(Dx^2+Ex+F)\sin 2x)$.

1.282. $(Ax+B)\sin 2x+(Cx+D)\cos 2x$. **1.283.** $y=C_1e^{-x}+C_2e^{\frac{x}{2}}+e^x$.

1.284. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{e^x}{2}$.

1.285. $y=C_1e^{6x}+C_2e^x+\frac{5\sin x+7\cos x}{74}$.

1.286. $y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)-\frac{1}{2}\cos 2x-2\sin 2x$.

1.287. $y=(C_1+C_2x)e^{3x}+\frac{2}{9}x^2+\frac{5}{27}x+\frac{11}{27}$.

1.288. $y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)+x+1$. **1.289.** $y=C_1e^x+C_2e^{-5x}-0{,}2$.

1.290. $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\tilde{y}$, де 1) $\tilde{y}=\frac{5}{3}e^{-x}$; 2) $\tilde{y}=3xe^{2x}$;

3) $\tilde{y}=\frac{3}{5}\cos x+\frac{1}{5}\sin x$; 4) $\tilde{y}=x^3+\frac{9}{2}x^2+\frac{21}{2}x-\frac{15}{4}$;

5) $\tilde{y}=-\frac{8}{5}e^x\left(\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\right)$; 6) $\tilde{y}=e^x(2x^2+x)$; 7) $\tilde{y}=\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}-\frac{1}{12}e^{-2x}$;

8) $\tilde{y}=\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}(9+3\cos 2x-\sin 2x)$; 9) $\tilde{y}=-2xe^x-\frac{1}{12}e^{-2x}$;

10) $\tilde{y}=-\frac{1}{12}e^{-x}-\frac{1}{2}xe^x$. **1.291.** $y=C_1+C_2e^{-\frac{5}{2}x}+\tilde{y}$, де

1) $\tilde{y}=\left(-5x-\frac{16}{29}\right)\cos x-\left(2x-\frac{185}{29}\right)\sin x$;

2) $\tilde{y}=e^{-x}[(10x+18)\sin x-(20x+1)\cos x]$; 3) $\tilde{y}=\frac{1}{10}x+\frac{5}{164}\sin 2x-\frac{1}{41}\cos 2x$.

1.292. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}x\sin x$.

1.293. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-3x}+x\left(\frac{x}{10}-\frac{1}{25}\right)e^{2x}$.

1.294. $y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+\frac{x}{4}e^x\sin 2x$.

1.295. а) $y=e^x\left(C_1+C_2x+C_3x^2+\frac{x^3}{6}\right)$;

б) $y=(C_1+C_2x)e^x+C_3e^{-2x}+(x^2+x-1)e^{-x}$.

1.296. а) $y=C_1+C_2x+C_3\cos x+C_4\sin x+\frac{x^2}{12}(x^2+2x-12)$;

б) $y=(C_1+C_2x)\cos 2x+(C_3+C_4)\sin 2x+\frac{1}{9}\cos x$. **1.297.** $\tilde{y}=Ae^x+Be^{-2x}$.

1.298. $\tilde{y}=x(Ax+B)+Cxe^{-4x}$. **1.299.** $\tilde{y}=Ax+B+C\cos x+D\sin x$.

1.300. $\tilde{y}=Ae^x+xe^x(B\cos x+C\sin x)$. **1.301.** $\tilde{y}=Ax^2+Bxe^x$.

1.302. $\tilde{y}=Ae^{2x}+x(B\cos 2x+C\sin 2x)$. **1.303.** $\tilde{y}=Ax+B\cos 8x+C\sin 8x$.

1.304. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}-2x+1+e^x$.

1.305. $y=C_1+C_2e^{3x}-3x^2-2x+\cos x+3\sin x$.

1.306. $y=2+e^x(C_1+C_2x-\sin x)$. **1.307.** $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-\frac{x}{2}}+\frac{1}{4}(2xe^{2x}-5)$.

1.308. $y=C_1+C_2e^{-x}+\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{10}\cos 2x+\frac{1}{20}\sin 2x+\frac{x^3}{3}-x^2+2x$.

1.309. $y=e^{2x}(C_1+C_2x)+\tilde{y}$, де

1) $\tilde{y}=\frac{1}{169}\left(-\frac{5}{2}\sin 3x+6\cos 3x\right)-\frac{1}{50}(3\sin x+4\cos x)$;

2) $\tilde{y}=2x^2+4x+3+4x^2e^{2x}+\cos 2x$; 3) $\tilde{y}=\frac{1}{4}\left(x^2e^{2x}-\frac{1}{8}e^{-2x}\right)$;

4) $\tilde{y}=e^x-\frac{1}{2}e^{x-1}+\frac{1}{18}e^{1-x}$. **1.310.** $y=C_1+C_2x+(C_3+x)e^{-x}+x^3-3x^2$.

1.311. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\cos x\,\ln\left|\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$.

1.312. $y=(C_1+C_2x)e^x+xe^x\ln|x|$.

1.313. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x\sin x+\cos x\ln|\cos x|$.

1.314. $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+(e^x+e^{-x})\operatorname{arctg}e^x$.

1.315. $y=C_1e^x+C_2+(e^x+1)\ln(1+e^{-x})$.

1.316. $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\dfrac{\cos 2x}{2\cos x}$. **1.317.** $y=(1+x)e^{-\frac{3}{2}x}+2e^{-\frac{5}{2}x}$.

1.318. $y=e^x(0{,}16\cos 3x+0{,}28\sin 3x)+x^2+2{,}2x+0{,}84$.

1.319. $y=e^x+x^2$. **1.320.** $y=e^x(e^x-x^2-x+1)$.

1.321. $y=\dfrac{1}{3}\sin 2x-\dfrac{1}{3}\sin x-\cos x$. **1.322.** а) $y=x^3(C_1+C_2x^4)$;

б) $y=C_1\cos\ln|x|+C_2\sin\ln|x|$; в) $y=C_1+C_2x^2+C_3x^4$;

г) $y=C_1+C_2\ln|x|+C_3x^3$; д) $y=(2x+1)(C_1+C_2\ln|2x+1|)$.

1.323. $y=\dfrac{x}{2}+C_1\cos\ln|x|+C_2\sin\ln|x|$. **1.324.** $y=x(C_1+C_2\ln|x|+\ln^2|x|)$.

1.325. $y=x\ln|x|+C_1x+C_2x^2+x^3$. **1.326.** $y=C_1x^3+\dfrac{C_2}{x^2}-2\ln x+\dfrac{1}{3}$.

1.327. $y=C_1\cos(2\ln|x|)+C_2\sin(2\ln|x|)+2x$. **1.328.** $\dfrac{d^2s}{dt^2}=1{,}2t$,

$s=0{,}2t^3-t$. **1.329.** $m\dfrac{d^2s}{dt^2}=-km$, $s=\dfrac{v_0^2}{2k}$. **1.330.** $\dfrac{d^2x}{dt^2}=k^2t$, $x=ae^{kt}$.

1.332. $2e^{2-y}=x^2+(y-1)^2$. **1.333.** $2y^3+3y(x^2-1)-8=0$.

1.334. $y=x(1+\ln\sqrt{|x|})$. **1.335.** $(y-x)^2+x^2=1$.

1.336. $y=C_1x^{1+\sqrt2}+C_2x^{1-\sqrt2}$, $z=C_1(2+\sqrt2)x^{\sqrt2-1}+C_2(2-\sqrt2)x^{-\sqrt2-1}$.

1.337. $y=C_1+C_2x$, $z=\dfrac{C_1}{x}+2C_2$. **1.338.** $x=C_1t+\dfrac{C_2}{t}$, $y=-C_1t+\dfrac{C_2}{t}$.

1.339. $x=\dfrac{C_2}{t^2}$, $y=C_1e^t-\dfrac{C_2}{t^2}$. **1.340.** $x=C_1e^t+C_2e^{5t}$, $y=-C_1e^t+3C_2e^{5t}$.

1.341. $x=C_1e^t+C_2e^{2t}$, $y=C_1e^t+2C_2e^{2t}$. **1.342.** $x=3C_1e^{2t}+C_2e^{4t}$,
$y=C_1e^{2t}+C_2e^{4t}$; $x=3e^{2t}$, $y=e^{2t}$. **1.343.** $x=e^t(C_1\cos 3t+C_2\sin 3t)$,
$y=e^t(C_1\sin 3t-C_2\cos 3t)$. **1.344.** $x=e^{-6t}(C_1\cos t+C_2\sin t)$,

$y=e^{-6t}[(C_1+C_2)\cos t+(C_2-C_1)\sin t]$. **1.345.** $x=e^{-2t}(C_1\cos 3t+C_2\sin 3t)$,
$y=\dfrac{1}{5}e^{-2t}[(4C_1-3C_2)\cos 3t+(3C_1+4C_2)\sin 3t]$.

1.346. $x=e^{5t}(C_1\cos 2t+C_2\sin 2t)$,
$y=e^{5t}[(C_1-C_2)\sin 2t-(C_1+C_2)\cos 2t]$; $x=e^{5t}(\cos 2t-\sin 2t)$,
$y=2e^{5t}\sin 2t$. **1.347.** $y=(C_1-C_2-C_1x)\ e^{-2x}$, $z=(C_2+C_1x)e^{-2x}$.

1.348. $x=(2C_1t+2C_2+1)e^{-t}$, $y=(C_1t+C_2)e^{-t}$. **1.349.** $x=(C_1t+C_2)e^{-3t}$,
$y=\left(-C_1t+\dfrac{C_1}{2}-C_2\right)e^{-3t}$; $x=2te^{-3t}$, $y=(1-2t)e^{-3t}$.

1.350. $x=C_1e^{2t}+C_2e^{-t}$, $y=C_1e^{2t}+C_3e^{-t}$, $z=C_1e^{2t}-(C_2+C_3)e^{-t}$;
$x=e^{2t}+e^{-t}$, $y=e^{2t}+e^{-t}$, $z=e^{2t}-2e^{-t}$. **1.351.** $x=C_1e^t+C_2e^{2t}+C_3e^{-t}$,
$y=C_1e^t-3C_3e^{-t}$, $z=C_1e^t+C_2e^{2t}-5C_3e^{-t}$. **1.352.** $x=C_1+3C_2e^{2t}$,
$y=-2C_2e^{2t}+C_3e^{-t}$, $z=C_1+C_2e^{2t}-2C_3e^{-t}$.

1.353. $x=C_1e^t+C_2e^{2t}+C_3e^{5t}$, $y=C_1e^t-2C_2e^{2t}+C_3e^{5t}$,
$z=-C_1e^t-3C_2e^{2t}+3C_3e^{5t}$. **1.354.** $x=C_1e^{2t}+e^{3t}(C_2\cos t+C_3\sin t)$,
$y=e^{3t}[(C_2+C_3)\cos t+(C_3-C_2)\sin t]$,
$z=C_1e^{2t}+e^{3t}[(2C_2-C_3)\cos t+(C_2+2C_3)\sin t]$.

1.355. $x=C_1e^t+C_2e^{-t}+t\,\mathrm{sh}\,t$, $y=C_1e^t-C_2e^{-t}+\mathrm{sh}\,t+t\,\mathrm{ch}\,t$.

1.356. $x=C_1e^{-4t}+C_2e^{-7t}+\dfrac{7}{40}e^t+\dfrac{1}{5}e^{-2t}$,
$y=\dfrac{1}{2}C_1e^{-4t}-C_2e^{-7t}+\dfrac{1}{40}e^t+\dfrac{3}{10}e^{-2t}$.

1.357. $x=2C_1e^{2t}+C_2e^{-3t}-\dfrac{2}{3}t-\dfrac{5}{18}$, $y=C_1e^{2t}+3C_2e^{-3t}-\dfrac{t}{2}-\dfrac{1}{12}$.

1.358. $x=(C_1\cos t+C_2\sin t-1)e^t$, $y=(C_1\sin t-C_2\cos t)e^t$.

1.359. $x=\left(C_1+C_2t+\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t^3}{2}-3e^t\right)e^{2t}$, $y=\left(C_1-\dfrac{C_2}{3}+C_2t+\dfrac{t^3}{2}-2e^t\right)e^{2t}$.

1.360. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-3x}+x^2+x$, $z=-C_1e^{2x}+\dfrac{C_2}{4}e^{-3x}-\dfrac{1}{2}x^2$.

1.361. $y=C_1+C_2x+2\sin x$, $z=-2C_1-C_2(2x+1)-3\sin x-2\cos x$.

1.362. $x = 10e^{2t} - 8e^{3t} - e^t + 6t - 1$, $y = -20e^{2t} + 8e^{3t} + 3e^t + 12t + 10$.

1.363. $y = -(14+8x)e^{-x} - 6x + 14$, $z = (9+4x)e^{-x} + 5x - 9$.

1.364. $x = C_1\cos t + C_2\sin t - t\cos t$,
$y = (C_2 - C_1)\cos t - (C_1 + C_2)\sin t + t(\cos t + \sin t)$.

1.365. $x = C_1\cos t + C_2\sin t + \operatorname{tg} t$, $y = -C_1\sin t + C_2\cos t + 2$.

1.366. $y = C_1x^2 + \dfrac{C_2}{x} - \dfrac{x^2}{18}(3\ln^2 x - 2\ln x)$,
$z = 1 - 2C_1x + \dfrac{C_2}{x^2} + \dfrac{x}{9}(3\ln^2 x + \ln x - 1)$. **1.367.** $z = C_1y$, $zy^2 - \dfrac{3}{2}x^2 = C_2$.

1.368. $\dfrac{y}{x} = C_1$, $x^2 + y^2 + z^2 = C_2$. **1.369.** $y^2 - z^2 = C_1$, $yz - y^2 - x = C_2$.

1.370. $y = \dfrac{\sqrt{C_1 + x^2}}{\ln\left|\dfrac{C_2}{x + \sqrt{x^2 + C_1}}\right|}$, $z = \sqrt{C_1 + x^2}\cdot\ln\left|\dfrac{C_2}{x + \sqrt{x^2 + C_1}}\right|$.

1.371. $x^2 + y^2 + z^2 = C_1y$, $z = C_2y$.

1.372. $x = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3\cos t + C_4\sin t$,
$y = C_1e^t + C_2e^{-t} - C_3\cos t - C_4\sin t$.

1.373. $y = C_1e^{x\sqrt{2}} + C_2e^{-x\sqrt{2}} + C_3\cos x + C_4\sin x + e^x - 2x$,
$z = -C_1e^{x\sqrt{2}} - C_2e^{-x\sqrt{2}} - \dfrac{C_3}{4}\cos x - \dfrac{C_4}{4}\sin x - \dfrac{1}{2}e^x + x$.

Глава 2

2.1. а) $S_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$, $S = 1$; б) $S_n = \dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+3}\right)$,
$S = \dfrac{11}{18}$. **2.2.** а) $S_n = \dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{1}{3n+1}\right)$, $S = \dfrac{1}{3}$;
б) $S_n = \dfrac{1}{6}\left(1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+3} - \dfrac{1}{2n+5}\right)$, $S = \dfrac{23}{90}$.

2.3. а) $S_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}$, $S = 1$; б) $S_n = \dfrac{1}{8}\left(1 - \dfrac{1}{(2n+1)^2}\right)$, $S = \dfrac{1}{8}$.

2.4. а) $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^n} - \dfrac{1}{2\cdot 3^n}$, $S = \dfrac{3}{2}$; б) $S_n = 1 + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2^n} - \dfrac{1}{4\cdot 5^n}$, $S = \dfrac{5}{4}$.
2.11. а) Розбігається; б) збігається. **2.12.** а) Збігається; б) розбігається.
2.13. а) Збігається; б) розбігається. **2.14.** а) Збігається; б) розбігається.
2.15. а) Збігається; б) розбігається. **2.16.** а) Розбігається; б) збігається.
2.17. а) Збігається; б) розбігається. **2.18.** Збігається. **2.19.** Збігається.
2.20. Збігається. **2.21.** Збігається. **2.22.** Збігається. **2.23.** Розбігається.
2.24. Розбігається. **2.25.** Збігається. **2.26.** Збігається. **2.27.** Збігається.
2.28. Розбігається. **2.29.** Розбігається. **2.30.** Збігається. **2.31.** Збігається.
2.32. Розбігається. **2.33.** Збігається. **2.34.** Збігається. **2.35.** Розбігається.
2.36. Розбігається. **2.37.** Збігається. **2.38.** Збігається. **2.39.** Розбігається.
2.40. Збігається. **2.41.** Розбігається. **2.42.** Збігається. **2.43.** Розбігається.
2.44. Збігається. **2.45.** Збігається. **2.46.** Збігається. **2.47.** Розбігається.
2.48. Збігається. **2.49.** Збігається. **2.50.** Розбігається. **2.51.** Збігається.
2.52. Розбігається. **2.53.** Збігається. **2.54.** а) Збігається; б) збігається;
в) розбігається. **2.59.** Збігається умовно. **2.60.** Збігається абсолютно.
2.61. Розбігається. **2.62.** Розбігається. **2.63.** Збігається умовно.
2.64. Збігається абсолютно. **2.65.** Збігається абсолютно. **2.66.** Збігається абсолютно. **2.67.** Збігається умовно. **2.68.** Збігається умовно.
2.69. Збігається абсолютно. **2.70.** Розбігається. **2.71.** Збігається абсолютно.
2.72. Збігається абсолютно. **2.73.** Збігається абсолютно. **2.74.** Збігається абсолютно. **2.75.** Збігається абсолютно. **2.76.** Розбігається. **2.77.** Збігається абсолютно. **2.78.** Розбігається. **2.79.** Збігається абсолютно. **2.80.** Збігається абсолютно. **2.81.** $(-\infty, -1)\cup(1, +\infty)$. **2.82.** (e^{-1}, e). **2.83.** $(-\infty, +\infty)$.
2.84. $(-\infty, -1)\cup(1, +\infty)$. **2.85.** $x \ne \pm 1$. **2.86.** $(-2, 2)$. **2.87.** $(-\infty, +\infty)$.
2.88. $(-2, -\sqrt{2})\cup(\sqrt{2}, 2)$. **2.89.** $(-\infty, 2]\cup(4, +\infty)$. **2.90.** $\left(-\dfrac{1}{3}, 3\right)$.
2.91. $(-\infty, +\infty)$. **2.92.** $\left(-1, -\dfrac{1}{2}\right]\cup\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$. **2.100.** $\left(-\dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{10}\right)$. **2.101.** $(-1, 1]$.
2.102. $[-10, 10)$. **2.103.** $x = 0$. **2.104.** $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. **2.105.** $(-\infty, +\infty)$.
2.106. $[-1, 1]$. **2.107.** $(-1, 1)$. **2.108.** $\left(-\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e}\right)$. **2.109.** $\left(-\dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{5}\right)$.
2.110. $(-2, 2)$. **2.111.** $(-\infty, +\infty)$. **2.112.** $[-2, 2]$. **2.113.** $[-2, 4]$.
2.114. $[-2, 8]$. **2.115.** $(-2, 4)$. **2.116.** $[0, 4]$. **2.117.** $\left[-\dfrac{4}{3}, 0\right]$. **2.118.** $[3, 5]$.

2.119. $[-1,\ 0)$. **2.120.** $(-\infty,\ +\infty)$. **2.121.** $[-2,\ 0]$. **2.122.** $\left(-\frac{4}{\pi}-1,\ \frac{4}{\pi}-1\right)$.

2.123. $-\ln(1-x),\ \ [-1,\ 1)$. **2.124.** $\ln(1+x),\ \ (-1,\ 1]$. **2.125.** $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$,

$|x|<1$. **2.126.** $\operatorname{arctg} x$, $|x|\le 1$. **2.127.** $\frac{1}{(x-1)^2}$, $|x|<1$. **2.128.** $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$,

$|x|<1$. **2.129.** $\frac{2}{(1-x^3)^2}$, $|x|<1$. **2.130.** $\frac{x}{(1-x^2)^2}$, $|x|<1$.

2.131. $\frac{1}{(x-4)^2}$. **2.132.** $\frac{16}{(2-x)^3}$. **2.133.** $\ln\frac{3}{2}$. **2.134.** $\frac{1}{2}\ln\frac{5}{3}$. **2.135.** $\frac{\pi}{4}$.

2.136. $\ln\frac{5}{3}$. **2.137.** $\frac{1}{2}(1-\ln 2)$. **2.138.** $\frac{7}{2}$. **2.139.** 3. **2.140.** $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$.

2.141. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n},\ 0<x\le 2$. **2.142.** $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(x+1)^n,\ -2<x<0$.

2.143. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-3)^{n-1}}{3^n},\ 0<x\le 6$. **2.144.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n-2}\frac{(x-2)^{2n-2}}{(2n-2)!}$,

$(-\infty,+\infty)$. **2.145.** $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n-4)}{3^n\cdot n!}(x-1)^n,\ \ (-\infty,+\infty)$.

2.146. $e^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n!},\ \ (-\infty,+\infty)$. **2.147.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+2)^{2n}}{3^{n+1}}$,

$-2-\sqrt{3}<x<-2+\sqrt{3}$. **2.148.** $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^{n-1}}{(2n-1)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n-1},\ \ (-\infty,+\infty)$.

2.149. $-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n(x+2)^n,\ \ -\frac{8}{3}<x<-\frac{4}{3}$.

2.150. $\frac{1}{11}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{11}\right)^n(x-3)^n,\ \ -\frac{5}{2}<x<\frac{17}{2}$.

2.151. $\ln 8+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{5}{8}\right)^n(x-1)^n,\ \ -\frac{3}{5}<x\le\frac{13}{5}$.

2.152. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(x-1)^{2n},\ \ 0\le x\le 2$. **2.153.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!},\ \ (-\infty,+\infty)$.

2.154. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n-1)!},\ \ (-\infty,+\infty)$. **2.155.** $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2^n}\ \sin\frac{\pi n}{4}\,\frac{x^n}{n!},\ \ (-\infty,+\infty)$.

2.156. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1},\ \ (-1,\ 1)$. **2.157.** а) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n!},\ \ (-\infty,+\infty)$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2(n-1)}}{(n-1)!},\ \ (-\infty,+\infty)$; в) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n x^{n+1}}{n!},\ \ (-\infty,+\infty)$;

г) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{2^n\, n!},\ \ (-\infty,+\infty)$; д) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+3}}{n!},\ \ (-\infty,+\infty)$;

е) $1+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n-1}{n!}x^n,\ \ (-\infty,+\infty)$. **2.158.** а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{2^{2n-1}(2n-1)!},\ (-\infty,+\infty)$;

б) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ \ (-\infty,+\infty)$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}3^{2n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-2},\ \ (-\infty,+\infty)$;

г) $1-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!},\ \ (-\infty,+\infty)$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n\,x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ \ (-\infty,+\infty)$.

2.159. а) $1+\frac{x^2}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n-2)}\cdot\frac{x^{2n}}{2n},\ (-1,\ 1)$;

б) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n}}{2^{2n+1}},\ (-2,\ 2)$; в) $2-2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2\cdot 5\ldots(3n-4)}{3^n\cdot n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{3n},\ (-2,\ 2)$;

г) $1-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 4\ldots(3n-2)}{3^n\cdot n!}x^{3n},\ (-1,\ 1)$;

д) $x^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n+2},\ (-1,\ 1)$. **2.160.** $\frac{1}{3}$. **2.161.** 1. **2.162.** $\frac{1}{4}$.

2.163. $\frac{1}{6}$. **2.164.** 1. **2.165.** $\frac{2}{3}$. **2.166.** $\frac{1}{60}$. **2.167.** $\frac{1}{2}$. **2.168.** $\frac{1}{3}$. **2.169.** $\frac{1}{3}$.

2.170. $\frac{4}{3}$. **2.171.** 1,39; похибка 0,01. **2.172.** 0,3090; похибка 0,0001.

2.173. а) 7,389; б) 1,649; в) 0,3679. **2.174.** а) 0,0175; б) 1,000; в) 0,9848.
2.175. а) 3,107; б) 7,937; в) 3,0173. **2.176.** а) 1,0986; б) 0,2624; в) 0,6990.
2.177. 0,2014. **2.178.** 0,4636.

2.179. $1+2x+\frac{5}{2}x^2+\ldots+\left[2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}\right]x^{n-1}+\ldots$

2.180. $x-\frac{3}{2}x^2+\frac{11}{6}x^3-\ldots+(-1)^{n+1}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right]x^n+\ldots$

2.181. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}+C$, $(-\infty,+\infty)$;

б) $\ln|x|+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n(2n)!}+C$, $(-\infty,\ 0)\cup(0,+\infty)$.

2.182. а) $\ln|x|+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot n!}+C$, $(-\infty,\ 0)\cup(0,+\infty)$;

б) $-\frac{1}{x}+\ln|x|+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)!}+C$, $(-\infty,\ 0)\cup(0,+\infty)$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)\,(n-1)!}+C$, $(-\infty,+\infty)$.

2.183. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)^2}$, $[-1,1]$. **2.184.** а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\ldots(2n-3)}{2^{n-1}(n-1)!}\frac{x^{4n-3}}{4n-3}$, $[-1,1]$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot3\ldots(2n-5)}{2^{n-1}(n-1)!}\frac{x^{3n-2}}{3n-2}$, $[-1,1]$. **2.185.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{9n-8}}{9n-8}$, $[-1,1)$.

2.186. а) 0,3290; похибка 0,0001; б) 0,24488; похибка 0,00001; в) 3,518; похибка 0,001. **2.187.** а) 32,831; б) 0,245. **2.188.** а) 0,006; б) 0,005; в) 0,0323.
2.189. а) 0,494; б) 0,497. **2.190.** 0,487. **2.191.** 0,098.

2.192. $y=-2+2x-x^2+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{7x^5}{60}-\ldots$

2.193. $y=1+\frac{2x^4}{4!}-\frac{2x^5}{5!}+\frac{2x^6}{6!}-\frac{2x^7}{7!}+\frac{62x^8}{8!}-\ldots$

2.194. $y=\frac{x^2}{2}+\left[\frac{x^4}{4!}+\frac{3x^6}{6!}+\frac{5x^8}{8!}+\ldots+\frac{(2n-1)\,x^{2n+2}}{(2n+2)!}+\ldots\right]$

2.195. а) $y=C_1\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12}+\frac{x^5}{24}+\ldots\right)+C_2\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}+\frac{x^5}{30}+\ldots\right)$;

б) $y=C_1\left(1+\frac{x^4}{12}+\ldots\right)+C_2\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\ldots\right)$.

2.196. а) $y=\frac{(x-1)^2}{2}-\frac{(x-1)^3}{6}-\frac{(x-1)^4}{6}+\ldots$; б) $y=x+x^2-\frac{x^3}{6}+\ldots$;

в) $y=2+\frac{5}{2}x+\frac{13}{4}x^2+\ldots$ **2.197.** а) $y=\frac{(x+1)^2}{2}-\frac{(x+1)^3}{3}+\frac{(x+1)^4}{12}+\ldots$;

б) $y=2(x-2)+\frac{(x-2)^3}{3}+\frac{(x-2)^4}{2}+\ldots$. **2.198.** $y=x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{8}+\ldots$

2.199. а) $y=1+2x-\frac{x^2}{2}-\frac{5x^3}{3}-\frac{3x^4}{4}+\ldots$;

б) $y=1+\frac{x}{1!}+\frac{2x^2}{2!}+\frac{8x^3}{3!}+\frac{28x^4}{4!}+\ldots$; в) $y=4\left[1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots\right]$.

2.200. а) $y=1+x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{6}+\frac{x^6}{45}+\ldots$;

б) $y=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{5x^6}{6!}+\ldots$; в) $y=1+\frac{2x^4}{4!}-\frac{2x^5}{5!}+\frac{2x^6}{6!}-\frac{2x^7}{7!}+\ldots$.

2.201. $y=C_1I_{1/2}(x)+C_2I_{-1/2}(x)$. **2.202.** $y=C_1I_{3/2}(x)+C_2I_{-3/2}(x)$.

2.203. $y=C_1I_{2/3}(x)+C_2I_{-2/3}(x)$. **2.204.** $y=C_1I_{1/3}(2x)+C_2I_{-1/3}(2x)$.

2.205. $y=C_1I_0\left(\frac{x}{3}\right)+C_2K_0\left(\frac{x}{3}\right)$. **2.206.** $y=C_1I_0(2x)+C_2K_0(2x)$.

2.207. $y=x^{3/2}\left[C_1I_{5/4}(x^2)+C_2I_{-5/4}(x^2)\right]$.

2.208. $y=\sqrt[4]{x}\,\left[C_1I_{1/2}(\sqrt{x})+C_2I_{-1/2}(\sqrt{x})\right]$.

2.209. $y=\frac{1}{x^2}\left[C_1I_2(x)+C_2K_2(x)\right]$. **2.210.** $y=\frac{1}{x}\left[C_1I_1(2x)+C_2K_1(2x)\right]$.

2.211. $f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$, $S=\frac{\pi}{4}$. **2.212.** $f(x)=2+\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$.

2.213. $f(x)=-\pi+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$. **2.214.** $f(x)=\pi+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$.

2.215. $f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$, $S=\frac{\pi^2}{8}$.

2.216. а) $f(x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$;

б) $f(x)=\dfrac{4\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2}-4\pi\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$; $S_1=\dfrac{\pi^2}{6}$, $S_2=\dfrac{\pi^2}{12}$.

2.217. $f(x)=\dfrac{3\pi}{4}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{(-1)^{n+1}+1}{\pi n^2}\cos nx+\dfrac{(-1)^n}{n}\sin nx\right)$.

2.218. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$. **2.219.** $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{12}{n^3}-\dfrac{2\pi^2}{n}\right)\sin nx$.

2.220. $f(x)=\dfrac{e^{2\pi}-1}{\pi}\left[\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\cos nx}{1+n^2}-\dfrac{n\sin nx}{1+n^2}\right)\right]-1$.

2.221. $f(x)=\dfrac{2\sin\pi a}{\pi}\left(\dfrac{1}{2a}+\dfrac{a\cos x}{1-a^2}-\dfrac{a\cos 2x}{2^2-a^2}+\ldots\right)$.

2.222. $f(x)=\dfrac{2\sin\pi a}{\pi}\left(\dfrac{\sin x}{1-a^2}-\dfrac{2\sin 2x}{2^2-a^2}+\dfrac{3\sin 3x}{3^2-a^2}-\ldots\right)$.

2.223. $f(x)=\dfrac{8}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n\sin nx}{4n^2-1}$.

2.224. $f(x)=\dfrac{2\,\mathrm{sh}\,a\pi}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n\sin nx}{a^2+n^2}$. **2.225.** $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$.

2.226. $f(x)=\dfrac{2h}{\pi}\left[\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nh}{nh}\cos nx\right]$.

2.227. $f(x)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2(2n-1)x}{(2n-1)^2}$. **2.228.** $f(x)=\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{4n^2-1}$, $S=\dfrac{1}{2}$.

2.229. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin 2nx}{2n}$.

2.230. $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left[\dfrac{\pi^2}{n}+\dfrac{2}{n^3}((-1)^n-1)\right]\sin nx$.

2.231. $f(x)=\dfrac{8}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$, $S=\dfrac{\pi^3}{32}$. **2.232.** $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-(-1)^n}{n}\sin nx$.

2.233. $f(x)=\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)\sin(2n-1)x}{2^2-(2n-1)^2}$.

2.234. а) $y=\dfrac{\mathrm{sh}\,\pi}{\pi}\left[1+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\cos nx}{1+n^2}\right]$; б) $y=\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-(-1)^n\,\mathrm{ch}\,\pi}{1+n^2}\,n\sin nx$.

2.235. $f(x)=1-\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}\sin\dfrac{\pi(2n-1)x}{2}$.

2.236. $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\pi nx$.

2.237. $f(x)=1+\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}\sin\dfrac{\pi nx}{2}-\dfrac{8}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}\cos\dfrac{\pi(2n-1)x}{2}$.

2.238. $f(x)=\dfrac{8}{3}+\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos\dfrac{\pi nx}{2}$.

2.239. $f(x)=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{(2n-1)^2}\cos\pi(2n-1)x+\dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}\sin\pi nx$.

2.240. $f(x)=1-\dfrac{8}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}\cos\dfrac{\pi(2n-1)x}{2}$.

2.241. $f(x)=\mathrm{sh}\,2\left[\dfrac{1}{2}+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n\dfrac{2}{4+\pi^2n^2}\cos\dfrac{\pi nx}{2}-\dfrac{\pi n}{4+\pi^2n^2}\sin\dfrac{\pi nx}{2}\right)\right]$.

2.242. $f(x)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{\sin\dfrac{2\pi n}{3}}{n}-\dfrac{3\left(1-\cos\dfrac{2\pi n}{3}\right)}{2\pi n^2}\right]\cos\dfrac{2\pi nx}{3}$.

2.243. $f(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\pi(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.

2.244. $f(x)=\dfrac{32}{\pi^3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^3}\sin\dfrac{\pi(2n+1)x}{2}$.

2.245. а) $f(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{4}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)\pi x$;

б) $f(x)=\dfrac{8}{\pi^2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin\dfrac{(2k+1)\pi x}{2}$.

2.246. а) $f(x)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k^2}\cos\pi kx$;

б) $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}+\dfrac{2((-1)^k-1)}{k^3\pi^2}\right)\sin\pi kx$.

2.247. а) $f(x)=\frac{2l}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\sin\frac{k\pi x}{l}$;

б) $f(x)=\frac{l}{2}-\frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{l}$.

2.248. $f(x)=\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n\frac{e^{inx}}{1-in}$.

2.249. $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1-(-1)^n}{2\pi}\frac{1-in}{1+n^2}e^{inx}$. **2.250.** $f(x)=\frac{\pi^2}{3}+2\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}e^{inx}$.

2.251. $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n i}{n}e^{inx}$.

2.252. $f(x)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{i}{n}e^{-i\pi nx}$.

2.253. $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{i\pi n-1}{1+\pi^2n^2}\,\mathrm{sh}\,(1+i\pi n)-\frac{i}{\pi n}\,\mathrm{sh}\,(i\pi n)\right)e^{i\pi nx}$.

2.254. $f(x)=\frac{e^2-e^{-2}}{2}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n\frac{2+i\pi n}{4+\pi^2n^2}e^{\frac{i\pi nx}{2}}\right]$.

2.255. $f(x)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{i\pi n}{2}}-1}{n}e^{i\pi nx}$.

2.256. $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}\cos\alpha x\,d\alpha$. **2.257.** $f(x)=\frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty}\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\sin\alpha x}{\alpha}d\alpha$;

$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3 t}{t}dt=\frac{\pi}{4}$. **2.258.** $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{\alpha^2}{4}}\cos\alpha x\,d\alpha$.

2.259. $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha\pi}{1-\alpha^2}\sin\alpha x\,d\alpha$. **2.260.** $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos\frac{\alpha\pi}{2}\cdot\frac{\cos\alpha x}{1-\alpha^2}d\alpha$.

2.261. $f(x)=-\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\alpha}{\alpha}e^{i\alpha x}d\alpha$. **2.262.** $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\alpha x}}{4+\alpha^2}d\alpha$.

2.263. $f(x)=-\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\alpha e^{i\alpha x}}{(1+\alpha^2)^3}d\alpha$. **2.264.** $f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\alpha x}\frac{1-i\alpha}{1+\alpha^2}d\alpha$.

2.265. $F_C(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\alpha^2}$, $F_S(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha}{1+\alpha^2}$.

2.266. $F_C(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\alpha-\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha}$, $F_S(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\alpha}{\alpha}$.

2.267. $F_C(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1+\cos\alpha\pi}{1-\alpha^2}$, $F_S(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\alpha\pi}{1-\alpha^2}$.

2.268. $F_C(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin a\alpha}{\alpha}$, $F_S(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1-\cos a\alpha}{\alpha}$.

2.269. $F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{4}{1-4\alpha^2}\cos\pi\alpha$. **2.270.** $F(\alpha)=e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$.

2.271. $F(\alpha)=i\sqrt{\frac{8}{\pi}}\frac{\alpha}{(\alpha^2+1)^2}$. **2.272.** $F(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{k^2}{\alpha^2+k^2}$.

2.273. $F(\alpha)=\frac{2i}{\sqrt{2\pi}}\frac{ae-\sin\alpha-\alpha\cos\alpha}{e(1+\alpha^2)}$.

Глава 3

3.1. а) $7+3i$, $22+7i$; б) $2\sqrt{2}$, 5. **3.2.** а) $-0{,}4+2i$, $0{,}12+0{,}24i$; б) $-i$, $\frac{7}{6}-\frac{\sqrt{5}}{6}i$. **3.3.** а) 0; б) $-\frac{11}{17}$; в) 3. **3.4.** а) 0; б) $-2i$; в) 0; г) $-\frac{18}{25}+\frac{23}{50}i$. **3.5.** а) $6+11i$; б) $-4i$; в) $-29+22i$. **3.6.** а) $\frac{5}{17}-\frac{3}{17}i$; б) i; в) $\frac{14}{5}i$; г) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$. **3.7.** а) $-\frac{13}{4}+\frac{25}{4}i$; б) $\frac{9}{25}(4+3i)$. **3.8.** а) $x=1$, $y=-2$; б) $x=\frac{20}{17}$, $y=-\frac{36}{17}$; в) $x=\frac{1}{3}$, $y=\frac{1}{4}$; г) $x=-\frac{b}{a^2+b^2}$, $y=-\frac{a}{a^2+b^2}$. **3.9.** (4, 3), (5, 3), (4, 4), (5, 4). **3.10.** а) $(-2,-2)$, $(2,-2)$; б) $(-1,-4)$, $(1,-4)$.

3.11. а) $-4i$, $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $10-2i$, $-\frac{7}{4}-\frac{17}{4}i$. **3.14.** а) $-1-i$; б) 0, -1, $\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$. **3.15.** $z_1=1-i$, $z_2=i$. **3.16.** а) 1, $\frac{\pi}{2}$; б) 1, $-\frac{\pi}{6}$; в) 5, π;

г) $\sqrt{2}$, $-\frac{\pi}{4}$; д) 7, $-\frac{\pi}{3}$; е) 2, $-\frac{2\pi}{3}$; є) 1, $\frac{3\pi}{4}$; ж) $\sqrt{74}$, $-\operatorname{arctg}\frac{7}{5}$;

з) $\sqrt{7}$, $-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$; і) $\sqrt{10}$, $-\operatorname{arctg}3$; к) 1, $-\frac{6\pi}{7}$. **3.17.** а) $|z|=3$, $\operatorname{Arg} z=\pi+2k\pi$, $k\in Z$; б) $|z|=1$, $\operatorname{Arg} z=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$, $k\in \mathbf{Z}$; в) $|z|=1$, $\operatorname{Arg} z=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in \mathbf{Z}$. **3.18.** а) $\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$; б) $2(\cos\pi+i\sin\pi)$; в) $2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$; г) $2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$; д) $\cos\frac{6\pi}{7}+i\sin\frac{6\pi}{7}$; е) $\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$. **3.19.** а) -1728; б) $2^9(1-i\sqrt{3})$; в) $-2^{19}(1-i\sqrt{3})$; г) 0.

3.20. а) $1, -1$; б) 1, $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) 1, i, -1, $-i$.

3.21. а) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$; б) $\frac{1}{2}(\pm\sqrt{3}+i), -i$; в) $\pm\left(\cos\frac{\pi}{8}-i\sin\frac{\pi}{8}\right)$, $\pm\left(\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$; г) $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{9}k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{9}k\right)$, $k=\overline{0,8}$;

д) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i\sqrt{3})$; е) $\sqrt[3]{4}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}k\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}k\right)\right)$, $k=0,1,2$;

є) $\sqrt[10]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{5}k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{5}k\right)\right)$, $k=\overline{0,4}$. **3.22.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $2, 2i, -2, -2i$; в) ±1, $\pm i$, $\frac{\sqrt{2}}{2}(\pm1\pm i)$. **3.23.** а) $2e^{i\pi}$;

б) $1\cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$; в) $1\cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}$; г) $2e^{-\frac{2\pi}{3}i}$; д) $\sqrt{34}\,e^{i\operatorname{arctg}\frac{3}{5}}$; е) $e^{i\operatorname{arctg}\left(-\frac{12}{5}\right)}$;

є) $5e^{i\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+\pi\right)}$; ж) $\sqrt{5}\,e^{i\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)}$; з) $1\cdot e^{i\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}$. **3.24.** а) $24e^{-i\frac{\pi}{2}}$, $\frac{8}{3}$;

б) $16e^{i\frac{7\pi}{4}}$, $2e^{-i\frac{\pi}{2}}$. **3.25.** а) Коло радіуса R з центром у точці z_0; зовнішність круга, обмеженого цим колом; внутрішність того самого круга; б) при $2a>|z_1-z_2|$ – еліпс з фокусами в точках z_1 і z_2, велика піввісь якого дорівнює a; при $2a=|z_1-z_2|$ – відрізок, що сполучає точки z_1 і z_2; при $2a<|z_1-z_2|$ – пуста множина; в) гіпербола з фокусами в точках

z_1 і z_2, дійсна вісь якої дорівнює a. **3.26.** а) Вся комплексна площина, з якої вирізано круг радіуса 2 з центром у початку координат; б) круг радіуса 1 з центром у початку координат з виколотою точкою $z=0$.

3.27. а) Коло радіуса $r=8$ з центром у точці $z=5i$; б) круг разом з межею радіуса $r=4$ з центром у точці $z=1+i$. **3.28.** а) Сектор, обмежений променями $l_1: \arg z=0$, $l_2: \arg z=\frac{\pi}{4}$ (промінь l_1 не належить сектору);

б) частина кільця, обмеженого променями $\arg z=\frac{\pi}{4}$ та $\arg z=\frac{\pi}{2}$ і колами радіусів $r=1$, $r=2$ з центром у точці $z=-i$. **3.29.** а) Півплощина, що розташована нижче прямої $y=1$, включаючи цю пряму; б) круг радіуса 1 з центром у точці $z=0$, включаючи коло; в) внутрішня частина круга радіуса 2 з центром у точці $z=-i$, виключаючи його центр і саме коло.

3.30. а) Зовнішність кола радіуса 1 з центром у точці $(1, 0)$; б) півплощина, що знаходиться зліва від уявної осі; в) частина площини зовні параболи $y^2=1-2x$, якій належить точка $z=1$. **3.31.** а) Коло радіуса 1 з центром в точці $z=0$ з виколотою точкою $z=-1$; б) коло радіуса a з центром в точці $z=0$ з виколотою точкою $z=-a$; в) парабола $y^2=2x+1$.

3.32. а) Гіпербола $xy=1$; б) гіпербола $x^2-y^2=1$; в) коло $x^2+(y+1)^2=1$.

3.33. Гіпербола $x^2-y^2=\frac{1}{2}$. **3.34.** Коло $(x+1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$.

3.35. а) Коло $x^2+y^2=1$; б) пряма, перпендикулярна до відрізка z_1z_2, яка проходить через його середину; в) гіпербола $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-y^2=\frac{1}{4}$; г) парабола $y^2=2x+1$. **3.36.** а) $\bar z-z=0$ та $\bar z+z=0$; б) $z+\bar z+i(z-\bar z)=0$; в) $k(z+\bar z)+2b+i(z-\bar z)=0$. **3.37.** а) $z^2+\bar z^2=2a^2$; б) $z\cdot\bar z+z+\bar z=0$.

3.38. а) $\operatorname{Re} w=x+2xy$, $\operatorname{Im} w=y^2-x^2-y$; б) $\operatorname{Re} w=x^2-y^2$, $\operatorname{Im} w=1+2xy$; в) $\operatorname{Re} w=3xy^2-x^3$, $\operatorname{Im} w=1-3x^2y+y^3$; г) $\operatorname{Re} w=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $\operatorname{Im} w=-\frac{2xy}{x^2+y^2}$.

3.39. а) $w=z^2+2iz-1$; б) $w=z+\frac{1}{z}$; в) $w=\frac{4\bar z}{\bar z^2-z^2}$. **3.40.** а) $w=-1$; б) $w=-3-4i$; в) $w=\frac{1+i}{2}$; г) $w=-\frac{5+12i}{13}$. **3.41.** а) Коло $u^2+v^2=4$, що проходиться за годинниковою стрілкою; б) вісь Ov (виключаючи точку

O), що проходить так: спочатку від 0 до $+\infty$, потім від $-\infty$ до 0; в) промінь, що йде по бісектрисі третього координатного кута з $-\infty$ до 0.

3.42. а) Парабола $v^2 = 4C^2(C^2 - u)$; б) коло $|w| = R^2$, що проходиться двічі; в) промінь $\arg w = 2\alpha$. **3.43.** а) $\operatorname{Re} w = e^{-x}\cos y$, $\operatorname{Im} w = -e^{-x}\sin y$; б) $\operatorname{Re} w = e^{x^2-y^2}\cos 2xy$, $\operatorname{Im} w = -e^{x^2-y^2}\sin 2xy$; в) $\operatorname{Re} w = \sin x \operatorname{ch} y$, $\operatorname{Im} w = \cos x \operatorname{sh} y$; г) $\operatorname{Re} w = \operatorname{ch} x\cos(y-1)$, $\operatorname{Im} w = \operatorname{sh} x \sin(y-1)$; д) $\operatorname{Re} w = \operatorname{ch} x\cos y$, $\operatorname{Im} w = \operatorname{ch} x \sin y$. **3.44.** а) $|w| = \frac{3}{4}$, $\arg w = -\frac{\pi}{2}$; б) $|w| = \frac{4}{3}$, $\arg w = \frac{3\pi}{2}$. **3.45.** а) $|w| = \operatorname{ch} 1$, $\arg w = \frac{\pi}{2}$; б) $|w| = \cos^2(\ln 3)$, $\arg w = 0$. **3.46.** а) $|w| = \pi$, $\arg w = -\frac{\pi}{2}$; б) $|w| = \pi^2$, $\arg w = 0$.

3.47. а) $\operatorname{ch}1\cos 1 - i\operatorname{sh}1\sin 1$; б) $i\operatorname{sh}\pi$; в) $\operatorname{ch}\pi$. **3.48.** а) $\cos 1$; б) $-\operatorname{sh}2\cos 1 + i\operatorname{ch}2\sin 1$; в) i. **3.49.** а) $(2k+1)\pi i$, $k \in \mathbf{Z}$; б) $\frac{\pi i}{2}$; в) $\left(2k + \frac{1}{4}\right)\pi i$, $k \in \mathbf{Z}$. **3.50.** а) $i \operatorname{th}\frac{\pi}{2}$; б) $-i\operatorname{cth}\pi$; в) 0.

3.51. а) $\operatorname{Arcsin} i = 2k\pi - i\ln(\sqrt{2}-1)$, $\operatorname{Arcsin} i = (2k+1)\pi - i\ln(\sqrt{2}+1)$, $k \in \mathbf{Z}$; б) $\operatorname{Arccos} i = k\pi + \frac{i}{2}\ln 2$, $k \in \mathbf{Z}$; в) $\operatorname{Arctg}\frac{i}{3} = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi - i\ln(\sqrt{2}+1)$, $\operatorname{Arctg}\frac{i}{3} = \left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi - i\ln(\sqrt{2}-1)$, $k \in \mathbf{Z}$. **3.52.** а) $e^{-\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi}$, $k \in \mathbf{Z}$; б) $e^{\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi}$, $k \in \mathbf{Z}$; в) $e^{-2k\pi}$, $k \in \mathbf{Z}$; г) $e^{\sqrt{2}(2k+1)\pi i}$, $k \in \mathbf{Z}$. **3.53.** а) $e^{-\frac{3\pi}{4}(1+8k)}$, $k \in \mathbf{Z}$; б) $e^{-\left(4k+\frac{1}{2}\right)\pi}$, $k \in \mathbf{Z}$; в) $e^{(i-1)\left(2k+\frac{i}{6}\right)\pi}$, $k \in \mathbf{Z}$. **3.54.** $z_k = \left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi i$, $k \in \mathbf{Z}$. **3.55.** $z_k = (2k+1)\pi \pm i\ln 2$, $k \in \mathbf{Z}$. **3.56.** $z_k = \left(k - \frac{1}{2}\right)\pi i$, $k \in \mathbf{Z}$.

3.57. $x = 0$. **3.58.** $z_{2k} = 2k\pi i$, $z_{2k+1} = (2k+1)\pi i + \ln 3$, $k \in \mathbf{Z}$. **3.59.** а) $z = 1-i$; б) $z = -e + i$. **3.61.** -6. **3.62.** $1+i$. **3.63.** $-\pi$. **3.64.** 1. **3.65.** $-2i$. **3.66.** $\frac{2}{9}$.

3.67. ∞. **3.68.** ∞. **3.69.** 0. **3.71.** а) $1 \pm i$; б) $\pm 2i$; в) i, $3-i$. **3.72.** а) Ніде не диференційовна; б) у точці $z = 0$; в) у точці $z = 0$; г) ніде не диференційовна. **3.74.** а) Ні; б) так; в) ні; г) так; д) ні; е) ні; є) так.

3.75. $f(z) = z^3 + 2 + i$. **3.76.** $f(z) = \frac{1}{2}(2-i)z^2$. **3.77.** $f(z) = (2+i)z^3$.

3.78. $f(z) = \frac{1}{z}$. **3.79.** $f(z) = 2\operatorname{sh} z - z^2$. **3.80.** $f(z) = 4\operatorname{ch} z + z^2 - 1$.

3.81. $\Delta u \equiv 0$, $v(x,y) = 3x^2y - y^3 + C$, $f(z) = (x+iy)^3 + Ci = z^3 + Ci$.

3.82. $\Delta v \equiv 0$, $u(x,y) = 2e^x\cos y + C$, $f(z) = 2e^x(\cos y + i\sin y) + C = 2e^z + C$.

3.83. $\Delta u \equiv 0$, $v(x,y) = -x^2 + y^2 + C$, $f(z) = -i(x^2 - y^2 + 2ixy) + 3 + Ci = -iz^2 + 3 + Ci$. **3.84.** $\Delta u \equiv 0$, $v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} + 2x + C$, $f(z) = \frac{x - iy}{x^2+y^2} - 2y + 2ix + Ci = \frac{1}{z} + 2iz + Ci$.

3.85. $\Delta u \equiv 0$, $v(x,y) = -\frac{1}{2}(x^2 - y^2) + 2xy + C$, $f(z) = z^2 - \frac{i}{2}z^2 + Ci = \frac{2-i}{2}z^2 + Ci$. **3.86.** $\Delta v \equiv 0$, $u(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + C$, $f(z) = \frac{1}{2}z^2 + C$. **3.88.** а) Ні; б) так; в) ні. **3.89.** а) $r_1 = 2$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$; $r_2 = \frac{1}{e}$, $\varphi_2 = -\frac{\pi}{2}$; б) $r_1 = 1$, $\varphi_1 = 0$; $r_2 = \sqrt{\operatorname{ch}^2 1 - \sin^2 1}$, $\varphi_2 = -\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}1 \cdot \operatorname{th}1)$; в) $r_1 = 15$, $\varphi_1 = -\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$; $r_2 = 3\left(1 + \frac{\pi^2}{4}\right)$, $\varphi_2 = \pi - \operatorname{arctg}\frac{4\pi}{\pi^2 - 4}$.

3.90. -1. **3.91.** $-\frac{19}{3} + 9i$. **3.92.** $1+i$. **3.93.** $\frac{1}{4}(e^2-1)(1+i)$. **3.94.** 0. **3.95.** 0.

3.96. а) $2+i$; б) $6+2i$. **3.97.** $2\pi i$. **3.98.** $-2(1+i)$. **3.99.** -1. **3.100.** а) $\frac{3}{5}(i-1)$; б) $7 + 19i$. **3.101.** $\cos 1 - \sin 1 - ie^{-1}$. **3.102.** $1 - \cos 1 + i(\sin 1 - 1)$.

3.103. $\frac{1}{4}(1 - \cos(2+2i))$. **3.104.** $2(i-1)$. **3.105.** $\frac{\pi^4}{64}$.

3.106. $-\frac{1}{8}\left(\frac{\pi^2}{4} + 3\ln^2 2\right) + i\frac{\pi}{8}\ln 2$. **3.107.** $-\frac{\pi^2}{8}$. **3.108.** 0. **3.109.** πi.

3.110. $\frac{\pi\operatorname{ch}1}{2}i$. **3.111.** $i\pi\operatorname{sh}\pi$. **3.112.** 0. **3.113.** $i\frac{2}{3}\pi\operatorname{ch}\pi$. **3.114.** 0. **3.115.** $-\frac{\pi i}{45}$.

3.116. 0. **3.117.** $-\pi i$. **3.118.** πi. **3.119.** $-\frac{\pi(\pi+2)\sqrt{2}}{8}i$. **3.120.** 0. **3.121.** $-\frac{\pi i}{127}$.

3.122. $-\frac{\pi^2}{2}\operatorname{sh}1$. **3.123.** $-\frac{3\pi\sqrt{e}}{32}i$. **3.124.** $-2\pi i$. **3.125.** Розбігається.

3.126. Збігається. **3.127.** Збігається. **3.128.** Збігається. **3.129.** Розбігається.

3.130. Розбігається. **3.131.** $R=1$. **3.132.** $R=1$. **3.133.** $R=\sqrt{2}$.

3.134. $R=+\infty$. **3.135.** $R=1$. **3.136.** $R=1$. **3.137.** $R=1$. **3.138.** $R=+\infty$.

3.139. $-\frac{z}{3}+\frac{2}{3^2}z^2-\frac{7}{3^3}z^3+\ldots,\ R=1$. **3.140.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^n}{3^{n+1}}(z-3)^n,\ R=\frac{3}{2}$.

3.141. $-\sin 1+2(z+1)\cos 1+\frac{2^2}{2!}(z+1)^2\sin 1-\frac{2^3}{3!}(z+1)^3\cos 1-\ldots,\ R=+\infty$.

3.142. $\sqrt{e}\left[1+\frac{1}{2}(2z-1)+\frac{1}{2!2^2}(2z-1)^2+\frac{1}{3!2^3}(2z-1)^3+\ldots\right],\ R=+\infty$.

3.143. $-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{5^n}(z+2)^n,\ R=\frac{5}{3}$. **3.144.** $1+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!},\ R=+\infty$.

3.145. $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!},\ R=+\infty$. **3.146.** $\ln 2-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2\cdot 4}+\frac{z^3}{3\cdot 8}+\ldots\right),\ R=2$.

3.147. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}z+\frac{1}{3!2^3}z^3+\frac{3}{5!2^3}z^5+\ldots,\ R=\pi$.

3.148. $\frac{1}{6}+\frac{1}{6^2}z-\frac{4}{2!6^3}z^2+\frac{1}{3!6^3}z^3+\ldots,\ R=\sqrt{\ln^2 5+\pi^2}$.

3.149. $\ln 2-\frac{1}{2}z+\frac{1}{2!2^2}z^2-\frac{1}{4!2^3}z^4+\ldots,\ R=\pi$.

3.150. $-\frac{1}{2!}z^2+\frac{4}{4!}z^4+\frac{44}{6!}z^6+\ldots,\ R=\frac{\pi}{2}$.

3.151. $\ln 2-\frac{z^2}{4}+\frac{z^4}{3\cdot 2^4}+\frac{11}{90\cdot 2^6}z^6+\ldots,\ R=\pi$. **3.152.** $|z+i|>e$.

3.153. $|z|>\frac{1}{\sqrt{2}}$. **3.154.** $|z|>2$. **3.155.** $|z|>e^{-1}$. **3.156.** $|z|>e$.

3.157. $|z+1|>\frac{1}{4}$. **3.158.** $|z-2-i|>\frac{1}{2}$. **3.159.** $|z+2i|>3$. **3.160.** $|z+1-i|>1$.

3.161. $-\frac{1}{2}+z^2+\frac{1}{4!z^2}-\frac{1}{6!z^4}+\ldots$. **3.162.** $\frac{1}{z-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n$;

$\frac{1}{z-2}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n$. **3.163.** а) $\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z}{n!}$; б) $\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2!z}+\frac{1}{3!}+\frac{z}{4!}+\ldots$;

в) $z^3+z^2+\frac{z}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!z}+\ldots$. **3.164.** а) $\frac{1}{z}-\frac{z}{3!}+\frac{z^3}{5!}-\frac{z^5}{7!}+\ldots$;

б) $\frac{4}{2!}z-\frac{16}{4!}z^3+\frac{64}{6!}z^5-\ldots$; в) $\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+\frac{z^4}{6!}-\frac{z^6}{8!}+\ldots$. **3.165.** а) $\frac{1}{z}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$,

б) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+2}}$. **3.166.** а) Не розкладається;

б) $\frac{1}{5}\left(\frac{2^2+1}{z^3}-\frac{2^3+2}{z^4}+\frac{2^4-2}{z^5}-\frac{2^5-2}{z^6}+\ldots\right)$. **3.167.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n$.

3.168. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[n-\frac{(-1)^n}{2^n}\right]z^{n-1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n$;

в) $\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+(-2)^n}{2^{n+1}}z^n$. **3.169.** $-\frac{1}{12}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+2}}{4^n}-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{2n-1}}$.

3.170. а) $-\frac{i}{2(z-i)}+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2i)^n}(z-i)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 4^{n-1}}{(z+2)^{n+3}}$.

3.171. а) $f(z)=\frac{1}{z-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n,\ 0<|z-1|<1$;

$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(z-1)^{n+1}},\ 1<|z-1|<+\infty$; б) $f(z)=-\frac{1}{z-1}-2\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n$,

$0<|z-1|<1$; $f(z)=\frac{1}{z-1}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^{n+2}},\ 1<|z-1|<+\infty$. **3.172.** а) $z=-i$ – третього порядку, $z=i$ – третього порядку; б) $z=n\pi i$, $n\in\mathbf{Z}$ – прості.

3.173. а) $z=0$ – другого порядку, $z_{1,2}=\pm 2i$ – прості; б) $z=0$ – третього порядку, $z_n=n\pi$ $(n=\pm1,\pm2,\ldots)$ – прості. **3.174.** а) $z_n=(2n+1)\pi i$, $n\in\mathbf{Z}$ – другого порядку; б) $z_n=(4n+1)\frac{\pi}{2}i$, $n\in\mathbf{Z}$ – другого порядку.

3.175. а) $z_{1,2} = \pm\pi i$ – другого порядку, $z_n = (2n+1)\pi i$ $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ – прості; б) нулів немає. **3.176.** а) Другого порядку; б) третього порядку. **3.177.** а) Полюс третього порядку; б) полюс другого порядку. **3.178.** а) Полюс простий; б) полюс другого порядку. **3.179.** а) $z_n = (4n+1)\dfrac{\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$ – полюси другого порядку; б) $z = 0$ – істотно особлива точка. **3.180.** а) $z = 0$, $z = -1$ – полюси другого порядку; б) $z = 0$ – полюс другого порядку, $z_n = 2n\pi i$ $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ – прості полюси. **3.181.** а) $z = 0$ – усувна особлива точка; б) $z = 1$ – істотно особлива точка. **3.182.** Полюс простий. **3.183.** Полюс простий. **3.184.** Усувна особлива точка. **3.185.** $z = 0$ – полюс четвертого порядку; $z = -1$ – полюс простий. **3.186.** Усувна особлива точка. **3.187.** Істотно особлива точка. **3.188.** $\operatorname{res} f(-1) = -\dfrac{17}{54e}$, $\operatorname{res} f(2) = \dfrac{e^2}{27}$.

3.189. $\operatorname{res} f(0) = 0$, $\operatorname{res} f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{4}{\pi}$, $\operatorname{res} f\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi n\right) = -\dfrac{8}{\pi(2n+1)(4n+1)}$.

3.190. $\operatorname{res} f(-1) = \dfrac{2}{27}$, $\operatorname{res} f(2) = -\dfrac{1}{27}$. **3.191.** $\operatorname{res} f(0) = -\dfrac{1}{6}$.

3.192. $\operatorname{res} f(0) = 0$. **3.193.** $\operatorname{res} f(-i) = \dfrac{4}{9}\operatorname{sh} 2 \cdot i$, $\operatorname{res} f\left(\dfrac{i}{2}\right) = -\dfrac{4}{9}(e + 2e^{-1})i$.

3.194. $\operatorname{res} f(0) = -\dfrac{1}{6}$, $\operatorname{res} f(3) = \dfrac{2}{27}\sin^2\dfrac{3}{2}$. **3.195.** $\operatorname{res} f(-3) = \dfrac{e^{-3i}}{8}$, $\operatorname{res} f(-1) = \dfrac{e^i}{8}$, $\operatorname{res} f(1) = \dfrac{e^i}{8}$. **3.196.** $\operatorname{res} f(0) = -\dfrac{4}{\pi^2}$, $\operatorname{res} f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

3.197. $\operatorname{res} f(i) = -1$. **3.198.** $\operatorname{res} f(\pi n) = 0$, $n \in \mathbf{Z}$. **3.199.** $-4\pi i$. **3.200.** $\dfrac{\pi}{e}$.

3.201. 0. **3.202.** $2(1 - e^{-1})\pi i$. **3.203.** $-\dfrac{\pi i}{3}$. **3.204.** $-\dfrac{4\pi i}{3}\ln 3$. **3.205.** $2\pi i$.

3.206. πi. **3.207.** 0. **3.208.** $2\pi i\dfrac{e^2}{3}$. **3.209.** 0. **3.210.** $2\pi i$.

3.211. $\dfrac{\sin 1 - 4\cos 1}{12}\pi i$. **3.212.** 0. **3.213.** $3\pi i$. **3.214.** $\dfrac{2\pi ab}{(a^2 - b^2)^{3/2}}$.

3.215. $\dfrac{2\pi}{p^2(p^2-1)}$. **3.216.** 0. **3.217.** $\dfrac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$. **3.218.** $\dfrac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$. **3.219.** πi.

3.220. $\dfrac{\pi}{ab(a+b)}$. **3.221.** $2\pi\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$. **3.222.** $\dfrac{2}{3}\pi$. **3.223.** $\dfrac{\pi}{n \sin\dfrac{(2m+1)\pi}{n}}$.

3.224. $\dfrac{2}{3}\pi$. **3.225.** $\dfrac{\pi}{2}$. **3.226.** $\dfrac{\pi}{2}e^{-4}(2\cos 2 + \sin 2)$. **3.227.** $\dfrac{\pi}{12}e^{-2}(2e-1)$.

3.228. $\dfrac{\pi}{3}e^{-3}$. **3.229.** $\dfrac{\pi}{2a}e^{-a}$. **3.230.** $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\sin\dfrac{1}{2}$. **3.231.** $\dfrac{\pi}{4}e^{-a}(2-a)$. **3.232.** 0.

Глава 4

4.1. а) $\dfrac{1}{p^2}$; б) $\dfrac{3}{p^2+9}$; в) $\dfrac{1}{(p-1)^2}$. **4.2.** а) $\dfrac{p+1}{p^2}$; б) $\dfrac{2-p}{p^2+1}$; в) $\dfrac{p^2+2p+2}{2p^2(p+1)}$.
4.3. а) $\dfrac{1}{p-a}$; б) $\dfrac{4}{p^2+16}$; в) $\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$; г) $\dfrac{3}{p^2-9}$. **4.4.** а) $\dfrac{2}{p(p^2+4)}$;

б) $\dfrac{p^3+7p}{(p^2+9)(p^2+1)}$; в) $\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{3}{p} + \dfrac{p}{p^2+16} - \dfrac{4p}{p^2+4}\right)$; г) $\dfrac{m(p^2+m^2-n^2)}{(p^2+m^2+n^2)^2-4m^2n^2}$;

д) $\dfrac{2mnp}{(p^2+m^2+n^2)^2-4m^2n^2}$. **4.5.** а) $\dfrac{1}{(p-2)^2+1}$; б) $\dfrac{p-m}{(p-m)^2+n^2}$;

в) $\dfrac{3!}{(p+1)^4}$; г) $\dfrac{1}{(p-1)^2-1}$; д) $\dfrac{1}{2(p-3)} - \dfrac{1}{2}\dfrac{p-3}{(p-3)^2+4}$;

е) $\dfrac{1}{2(p+\alpha)} + \dfrac{p+\alpha}{2[(p+\alpha)^2+4\beta^2]}$. **4.6.** а) $\dfrac{e^{-bp}}{p^2+1}$; б) $\dfrac{e^{-bp}}{2p} + \dfrac{p\,e^{-bp}}{2(p^2+4)}$;

в) $\dfrac{e^{-2p}}{p-1}$. **4.7.** а) $\dfrac{p^2+2}{p(p^2+4)}$; б) $\dfrac{6}{(p^2+1)(p^2+9)}$; в) $\dfrac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$;

г) $\dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$; д) $\dfrac{1}{(p-1)^2}$. **4.8.** а) $\dfrac{2p^3-6p}{(p^2+1)^3}$; б) $\dfrac{2(p^2+p+1)}{(p^2-1)^2}$;

в) $\dfrac{2p^2+4p+8}{(p^2+4)^2}$. **4.9.** а) $\dfrac{1}{p(p^2+1)}$; б) $\dfrac{p^3+p^2+p\omega^2-\omega^2}{p(p^2+\omega^2)^2}$; в) $\dfrac{4}{(p^2-4)^2}$.

4.10. а) $\ln\dfrac{p}{p-1}$; б) $\ln\dfrac{p+1}{p}$; в) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt{p^2+4}}{p}$; г) $\ln\dfrac{\sqrt{p^2+1}}{p}$; д) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{p^2+4}{p^2+1}$.

4.11. а) $\dfrac{1}{(p-1)(p^2+1)}$; б) $\dfrac{p}{(p-2)(p^2+1)}$; в) $\dfrac{2}{p^2(p^2-1)}$; г) $\dfrac{2}{p^3(p+2)}$.

4.12. $e^{-2t}\sin t$. **4.13.** $\dfrac{1}{2}(e^{-t}-e^{-3t})$. **4.14.** $\dfrac{1}{2}(\sin t - t\cos t)$. **4.15.** $\dfrac{1}{2}\,t\sin t$.

4.16. $1-e^{-t}-t\,e^{-t}$. **4.17.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}e^{t/2}\sin\dfrac{3\sqrt{3}}{2}t$. **4.18.** $\dfrac{t^2}{2}+2e^{-t}\sin t$.

4.19. $t-\sin t$. **4.20.** $\dfrac{1}{6}e^{2t}-\dfrac{1}{15}e^{-t}-\dfrac{1}{10}\cos 2t-\dfrac{1}{5}\sin 2t$.

4.21. $\dfrac{1}{3}\,e^{t/2}\left(\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t+\sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)-\dfrac{1}{3}\,e^{-t}$. **4.22.** $\dfrac{3}{5}+\dfrac{e^{-2t}}{5}(4\sin t-3\cos t)$.

4.23. $\dfrac{1}{9}(e^{-2t}-e^{t}+3t\,e^{t})$. **4.24.** $\dfrac{1}{3}t\,e^{t}-\dfrac{1}{3}t\,e^{-t/2}\left(\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t+\sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$.

4.25. $e^{-t}(1-t^2)$. **4.26.** $\sin(t-1)\eta(t-1)$. **4.27.** $(t-3)e^{-(t-3)}\,\eta(t-3)$.

4.28. $e^{t-1}\eta(t-1)-\eta(t-1)$. **4.29.** $\cos(t-4)\eta(t-4)$.

4.30. $\operatorname{sh}(t-1)\eta(t-1)+\operatorname{ch}2(t-2)\eta(t-2)$. **4.31.** $x(t)=-1$.

4.32. $x(t)=\dfrac{1}{4}(1-e^{2t}+2t\,e^{2t})$. **4.33.** $x(t)=\dfrac{1}{2}(e^{-t}-t\,e^{-t}-\cos t)$.

4.34. $x(t)=\dfrac{1}{2}(1-e^{t}\cos t+e^{t}\sin t)$. **4.35.** $x(t)=2+\dfrac{1}{2}(e^{-t}-\cos t+\sin t)$.

4.36. $x(t)=\dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{5}\,e^{-t}\cos 2t+\dfrac{1}{5}e^{-t}\sin 2t$.

4.37. $x(t)=\dfrac{3}{25}-\dfrac{t}{5}-\dfrac{3}{25}\,e^{t}\cos 2t+\dfrac{4}{25}e^{t}\sin 2t$. **4.38.** $x(t)=\cos t-t\,\cos t$.

4.39. $x(t)=e^{t}\left(1-t+\dfrac{1}{2}t^2\right)-1$. **4.40.** $x(t)=2e^{-t}+t\,e^{-t}+t-2$.

4.41. $x(t)=2+t-\dfrac{1}{2}\cos t+\dfrac{1}{2}t\,e^{t}-\dfrac{3}{2}e^{t}$.

4.42. $x(t)=1-\dfrac{22}{25}\,e^{-t}-\dfrac{6}{5}t\,e^{-t}-\dfrac{3}{25}\cos 2t+\dfrac{4}{25}\sin 2t$.

4.43. $x(t)=t\,e^{t}-e^{t}+\cos t+2\sin t-2t\cos t$.

4.44. $x(t)=\dfrac{1}{2}\,e^{t}-t-1+\dfrac{1}{2}(\cos t+\sin t)$. **4.45.** $x(t)=\dfrac{1}{2}\,t^2-1+\cos t-\sin t$.

4.46. $x(t)=\dfrac{1}{2}(\cos t+\operatorname{ch}t)-t-1$.

4.47. $x(t)=e^{-t}-e^{t/2}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t+\dfrac{1}{\sqrt{3}}e^{t/2}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t$.

4.48. $x(t)=\dfrac{1}{2}\,e^{t}+\dfrac{3}{2}\sin t+\dfrac{1}{2}\cos t-1$. **4.49.** $x(t)=\dfrac{1}{10}\,e^{2t}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{5}(2\cos t-\sin t)$.

4.50. $x(t)=4t+3-2e^{t}$. **4.51.** $x(t)=e^{t}$, $y(t)=-e^{t}$. **4.52.** $x(t)=e^{t}(\cos t-2\sin t)$, $y(t)=e^{t}(\cos t+3\sin t)$. **4.53.** $x(t)=e^{t}$, $y(t)=e^{t}$.

4.54. $x(t)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{5}e^{-t}-\dfrac{3}{10}e^{-\frac{6}{11}t}$, $y(t)=\dfrac{1}{5}\left(e^{-t}-e^{-\frac{6}{11}t}\right)$.

4.55. $x(t)=\dfrac{28}{9}e^{3t}-e^{-t}-\dfrac{t}{3}-\dfrac{1}{9}$, $y(t)=\dfrac{28}{9}e^{3t}+e^{-t}-\dfrac{t}{3}-\dfrac{1}{9}$.

4.56. $x(t)=\dfrac{1}{4}(e^{t}-e^{3t}+2t\,e^{3t})$, $y(t)=\dfrac{1}{4}(5e^{t}-e^{3t}-2t\,e^{3t})$.

4.57. $x(t)=\dfrac{1}{3}(e^{t}+2\cos 2t+\sin 2t)$, $y(t)=\dfrac{2}{3}\left(e^{t}-\cos 2t-\dfrac{1}{2}\sin 2t\right)$.

4.58. $x(t)=2(1-e^{-t}-t\,e^{-t})$, $y(t)=2-t-2e^{-t}-2t\,e^{-t}$.

4.59. $x(t)=-e^{t}$, $y(t)=0$, $z(t)=e^{t}$. **4.60.** $x(t)=\dfrac{2}{5}(e^{3t}-e^{-2t})$,

$y(t)=\dfrac{1}{5}(3e^{3t}+2e^{-2t})$, $z(t)=\dfrac{1}{5}(3e^{3t}+2e^{-2t})$. **4.61.** $x(t)=2-e^{-t}$,

$y(t)=2-e^{-t}$, $z(t)=2e^{-t}-2$.

Предметний вказівник

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1985. – 446с.

2. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1981. – 448с.

3. *Вища* математика. Збірник задач. /За ред. В.П. Дубовика, І.І. Юрика. – К.: А.С.К., 2001. – 480с.

4. *Высшая* математика. Специальные разделы. /Под ред. А.И. Кириллова. – М.: Физматлит, 2001. – 400с.

5. *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах: Ч.2. – М.: Высш.шк., 1986. – 415с.

6. *Дубовик В.П., Юрик І.І.* Вища математика. – К.: Вища шк., 1993. – 648с.

7. *Задачи* и упражнения по математическому анализу для втузов. /Под ред. Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1970. – 472с.

8. *Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И.* Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1981. – 256с.

9. *Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. и др.* Вся высшая математика: В 6 т. – М.: Эдиториал УРСС, 2001. – Т.3 – 240с.; Т.4 – 265с.

10. *Кузнецов Л.А.* Сборник заданий по высшей математике. – М.: Высш.шк., 1983. –175с.

11. *Павлова Л.В., Редькіна О.І.* Теорія аналітичних функцій. Збірник вправ. – К.: Вища шк., 1980. – 216с.

12. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.2. – М.: Наука, 1985. – 576с.

13. *Сборник* задач и упражнений по специальным главам высшей математики. /Под ред. Г.И. Кручковича. – М.: Высш. шк., 1970. – 551с.

14. *Сборник* задач по математике для втузов. Ч.1. Линейная алгебра и основы математического анализа /Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1986. – 464с.

15. *Сборник* задач по математике для втузов. Ч.2. Специальные разделы математического анализа. /Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1986. – 368с.

16. *Сборник* индивидуальных заданий по высшей математике. /Под ред. А.П. Рябушко: В 3 ч. – Мн.: Выш. шк, 1991. – Ч.2 – 352с.; Ч.3 – 288с.

17. *Тевяшев А.Д., Литвин О.Г.* Вища математика. Загальний курс: Збірник задач та вправ. – Х.: Рубікон, 1999. – 320с.

18. *Фихтенгольц Г.М.* Основы математического анализа. Т.2. – М.: Наука, 1985. – 463с.

Навчальне видання

ТЕВЯШЕВ Андрій Дмитрович
ЛИТВИН Олександра Григорівна
КРИВОШЕЄВА Галина Миколаївна
ОБУХОВА Людмила Володимирівна
СЕРЕДА Олена Григорівна
ГОЛОВКО Ніна Олександрівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА У ПРИКЛАДАХ ТА ЗАДАЧАХ

Частина 3.
Диференціальні рівняння. Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення

Продюсер видавничого проекту С.М. Смоленський
Коректор

Підп. до друку Формат 60×84/16. Папір офсетний.
Друк офсетний. Умов. друк. арк. 00,0. Наклад 0000 прим.
Замовлення №

Віддруковано у

ДЛЯ НОТАТОК