А.Д. Тевяшев, О.Г. Литвин,
Г.М. Кривошеєва, Л.В. Обухова, О.Г. Середа

ВИЩА МАТЕМАТИКА У ПРИКЛАДАХ ТА ЗАДАЧАХ

Частина 2.
Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних

*Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів
вищих навчальних закладів*

Київ
Кондор
2005

УДК 517.2 (07) + 517.3 (07)

Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М. та ін.

Вища математика у прикладах та задачах. Ч.2. Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. 2-е вид. доп. і доопр. – К.: Кондор, 2005. – 460с.

Гриф надано Міністерством освіти і науки України. Лист № 14/18.2-1268 від 10.09.2001р.

ISBN

Навчальний посібник є другою частиною збірника “Вища математика у прикладах та задачах”, який складається з чотирьох частин.

Посібник відповідає програмі курсу “Вища математика” з розділів “Інтегральне числення функцій однієї змінної”, “Диференціальне числення функцій багатьох змінних” та “Інтегральне числення функцій багатьох змінних”. Структура посібника така, що сприяє розвитку і активізації самостійної роботи студентів. У кожному параграфі містяться короткі теоретичні відомості, питання для самоперевірки, велика кількість задач з розв’язаннями та призначених для практичних занять. Наведено також індивідуальні розрахункові завдання із зразками їх виконання. Довідковий матеріал з вказаних розділів та з елементарної математики складає окрему главу.

На відміну від традиційних, цей посібник можна використовувати як довідник, розв’язник та задачник із зазначених розділів курсу «Вища математика».

Для студентів та викладачів вищих навчальних закладів.

Іл.: 75. Бібл.: 13 назв.

Р е ц е н з е н т и : Л.В. Курпа, д-р техн. наук, проф. (НТУ ХПІ);
О.А. Молчанов, д-р техн. наук, проф. (НТУ КПІ).

ISBN

© А.Д. Тевяшев, О.Г. Литвин, Г.М. Кривошеєва, Л.В. Обухова, О.Г. Середа, 2002, 2005
© Кондор, оформлення, 2005

ЗМІСТ

Передмова 5
Основні позначення 9
Глава 1. Інтегральне числення функцій однієї змінної 11
§ 1. Невизначений інтеграл 11
Короткі теоретичні відомості 11
Контрольні питання та завдання 24
Приклади розв’язання задач ....**№ 1 – 29** 26
Задачі для практичних занять .....**№ 1.1 – 1 .210** 49
§ 2. Визначений інтеграл. Невласні інтеграли 59
Короткі теоретичні відомості 59
Контрольні питання та завдання 69
Приклади розв’язання задач ....**№ 1 – 18** 71
Задачі для практичних занять .....**№ 1.211 – 1.260** 77
§ 3. Застосування визначеного інтеграла 80
Короткі теоретичні відомості 80
Контрольні питання та завдання 85
Приклади розв’язання задач ....**№ 1 – 30** 86
Задачі для практичних занять .....**№ 1.261 – 1.352** 107
Глава 2. Диференціальне числення функцій багатьох змінних 118
§ 1. Функції багатьох змінних та їх диференціювання 118
Короткі теоретичні відомості 118
Контрольні питання та завдання 126
Приклади розв’язання задач ....**№ 1 – 21** 127
Задачі для практичних занять .....**№ 2.1 – 2.107** 140
§ 2. Застосування диференціального числення функцій багатьох змінних 148
Короткі теоретичні відомості 148
Контрольні питання та завдання 155
Приклади розв’язання задач ....**№ 1 – 8** 155
Задачі для практичних занять .....**№ 2.108 – 2.143** 165
Глава 3. Кратні інтеграли 168
§ 1. Подвійні інтеграли 168
Короткі теоретичні відомості 168
Контрольні питання та завдання 173
Приклади розв’язання задач ....**№ 1 – 8** 174
Задачі для практичних занять .....**№ 3.1 – 3.50** 178
§ 2. Потрійні інтеграли 183
Короткі теоретичні відомості 183
Контрольні питання та завдання 188
Приклади розв’язання задач ....**№ 1 – 4** 189
Задачі для практичних занять .....**№ 3.51 – 3.70** 193

§ 3. Застосування кратних інтегралів 196
Короткі теоретичні відомості 196
Контрольні питання та завдання 200
Приклади розв'язання задач ....**№ 1 – 13** 201
Задачі для практичних занять .....**№ 3.71 – 3.129** 212
Глава 4. Криволінійні інтеграли. Поверхневі інтеграли. Теорія поля 220
§ 1. Криволінійні інтеграли 220
Короткі теоретичні відомості 220
Контрольні питання та завдання 229
Приклади розв'язання задач ....**№ 1 – 14** 230
Задачі для практичних занять .....**№ 4.1 – 4.75** 238
§ 2. Поверхневі інтеграли 246
Короткі теоретичні відомості 246
Контрольні питання та завдання 251
Приклади розв'язання задач ....**№ 1 – 9** 252
Задачі для практичних занять .....**№ 4.76 – 4.122** 261
§ 3. Теорія поля 267
Короткі теоретичні відомості 267
Контрольні питання та завдання 274
Приклади розв'язання задач ....**№ 1 – 14** 275
Задачі для практичних занять .....**№ 4.123 – 4.183** 292
Глава 5. Типові розрахункові завдання 299
§ 1. Індивідуальне завдання 1. *Інтегральне числення функцій однієї змінної* 299
§ 2. Індивідуальне завдання 2. *Функції багатьох змінних* 320
§ 3. Індивідуальне завдання 3. *Кратні інтеграли* 327
§ 4. Індивідуальне завдання 4. *Криволінійні інтеграли. Поверхневі інтеграли. Теорія поля* 340
Глава 6. Довідковий матеріал 358
§ 1. Основні формули інтегрального числення функцій однієї змінної 358
§ 2. Диференціальне числення функцій багатьох змінних 369
§ 3. Кратні інтеграли 373
§ 4. Криволінійні інтеграли. Поверхневі інтеграли. Теорія поля 377
§ 5. Деякі важливі криві та поверхні 384
§ 6. Границі. Неперервність 393
§ 7. Основні формули диференціального числення функцій однієї змінної 395
§ 8. Основні формули елементарної математики 400
Словник ключових слів 408
Відповіді 429
Предметний вказівник 454
Список використаної та рекомендованої літератури 456

ПЕРЕДМОВА

Навчальний посібник призначено для студентів вищих навчальних закладів денної та заочної форм навчання. Він входить до збірника під назвою "Вища математика у прикладах та задачах", що складається з чотирьох частин:

Частина I. Алгебра і геометрія. Диференціальне числення функцій однієї змінної.

Частина II. Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних.

Частина III. Диференціальні рівняння. Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення.

Частина IV. Аудиторні контрольні роботи. Індивідуальні завдання.

Вказаний збірник відповідає програмі курсу "Вища математика", а розподіл його за частинами – розподілу викладання курсу за семестрами згідно з учбовим планом.

Даний посібник складається з шести глав, кожна з яких розбивається на параграфи. Матеріал кожного параграфа перших чотирьох глав розбивається на чотири пункти.

У п. I – "Короткі теоретичні відомості" – наводяться основні теоретичні відомості і формули, необхідні для розв'язання задач.

У п. II – "Контрольні питання та завдання" – містяться питання з теорії та прості завдання, що добре ілюструють як вузлові моменти, так і тонкощі теоретичних положень. Враховуючи, що основна робота над теорією ведеться студентами за підручником та конспектами лекцій, цей пункт включає питання для перевірки готовності студента до практичного заняття.

У п. III – "Приклади розв'язання задач" – наводяться докладні розв'язання типових задач з розглянутої теми. Велика увага приділяється не тільки розгляданню "технічних прийомів", але і дослідженню умов застосовності тієї чи іншої теореми або формули. Кількість розібраних прикладів змінюється в залежності від обсягу та важливості теми. Початок і кінець розв'язання задач відмічають відповідно знаками ► і ◄.

У п. IV – "Задачі для практичних занять" – міститься досить велика кількість різних за змістом задач, що призначені для практичних занять як аудиторних, так і домашніх. Наприкінці посібника наведено відповіді до цих задач. Нумерація задач проводиться у межах глави, тобто номер кожної задачі складається з номера глави та порядкового номера задачі у цій главі.

Зауважимо, що пункти I – IV кожного параграфа взаємопов'язані однаковою послідовністю викладення навчального матеріалу, тобто прослідковується лінія: теоретичний матеріал, *відповідні* контрольні питання, *відповідні* приклади з розв'язаннями, *відповідні* задачі для практичних занять. Це підкреслюється, по можливості, виділенням блоків у зазначених пунктах з однією назвою.

Враховуючи, що кожний параграф містить досить великий блок питань, така структура полегшує відшукання потрібних теоретичних відомостей або прикладів з розв'язаннями при самостійному розв'язанні практичних задач. При наявності великої кількості прикладів з розв'язаннями у п.III, наводиться розподіл цих прикладів за їх тематикою.

Глава 5 містить чотири параграфи, в яких наведено чотири індивідуальних розрахункових завдання, які відповідають розділам програми, викладеної в главах 1 – 4. Кожне індивідуальне завдання складається з певної кількості задач, представлених у 31 варіанті, тобто різні для усіх студентів групи. Задачі супроводжуються посиланнями на аналогічні приклади з розв'язаннями, які наведені у відповідних главах у п. III кожного параграфа. Посилання містить номер глави, номер параграфа та номери прикладів. Зауважимо **надзвичайну важливість** цих посилань, бо вони є **путівником** для відшукання **зразка виконання** даної задачі, а отже, **зразка виконання** індивідуального розрахункового завдання.

Глава 6 складається з восьми параграфів, які містять довідковий матеріал з усіх наведених розділів вищої математики, представлених у навчальному посібнику, а також основні формули диференціального числення функцій однієї змінної та основні формули елементарної математики.

Для зручності користування навчальним посібником у змісті до кожного параграфа у відповідних пунктах наведено номери прикладів задач з розв'язаннями та номери задач для практичних занять; введені також основні позначення та предметний вказівник.

У даному посібнику наведено словник ключових слів, що містить найбільш важливі терміни з вищої математики, які представлені українською, російською та англійською мовами.

З огляду на характеристику змісту цього посібника можна констатувати, що він може бути використаний як довідник, розв'язник і в той же час як задачник, що містить задачі для практичних занять та індивідуальні розрахункові завдання із зразками їх виконання. Це дуже зручно для студентів і надає їм широкі можливості для активної самостійної роботи – як аудиторної, так і домашньої.

При написанні навчального посібника автори використали багаторічний досвід викладання курсу "Вища математика" для технічних спеціальностей університетів.

У другому виданні, яке незначно відрізняється від першого, виправлено помічені друкарські помилки, уточнені формулювання та відповіді низки задач, розширено обсяг довідкового матеріалу.

Автори щиро дякують студентам, аспірантам та викладачам, які користувались навчальним посібником і допомогли у виявленні недоліків, що були виправлені у другому виданні.

Автори висловлюють вдячність співробітникам кафедри прикладної математики ХНУРЕ Акимовій Ю.Г. та Сергієнко Т.Є. за добросовісне виконання роботи по комп'ютерному набору та верстці навчального посібника.

Автори сподіваються, що даний посібник допоможе студентам оволодіти методикою розв'язання практичних задач з вищої математики, активізує їх самостійну роботу та буде сприяти підвищенню фундаментальної підготовки з розглянутих розділів вищої математики.

Автори з подякою сприймуть всі критичні зауваження, пропозиції та побажання, спрямовані на поліпшення змісту навчального посібника. Їх можна надсилати за адресою:
61166, Харків, пр. Леніна, 14, Харківський національний університет радіоелектроніки, кафедра Прикладної математики, тел. (0572) 7-021-436. E-mail: tevjashev@kture.kharkov.ua.

ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

N, Z, Q, R, C – множини натуральних, цілих, раціональних, дійсних, комплексних чисел відповідно.

$\mathbf{R}^n$ – арифметичний дійсний n-вимірний простір.

$k=\overline{1,n}$ – індекс k приймає всі натуральні значення від 1 до n.

$\int f(x)\,dx$ – невизначений інтеграл від функції $f(x)$.

$\int_a^b f(x)\,dx$ – визначений інтеграл від функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$.

$F(x)\Big|_a^b$ – подвійна підстановка.

$\vec{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ – точка n-вимірного простору.

$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=f(\vec{x})$ – функція багатьох змінних.

$\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x})$ – границя функції багатьох змінних.

Δx_k – приріст змінної x_k.

$\Delta_{x_k} f$ – частинний приріст функції f по змінній x_k.

$\dfrac{\partial f}{\partial x_k}=f'_{x_k}$ – частинна похідна функції f по змінній x_k.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}=f''_{x_i x_i}$ – частинна похідна другого порядку по змінній x_i.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}=f''_{x_i x_j}$ – мішана частинна похідна по змінних x_i, x_j.

du – повний диференціал функції u.

$d_{x_k}u$ – частинний диференціал функції u по змінній x_k.

$d^k u\Big|_{M_0}$ – значення k-го диференціала в точці M_0.

$\dfrac{\partial u}{\partial l}$ – похідна функції u за напрямом $\vec{l}$.

$\operatorname{grad} u$ – градієнт функції u.

$\iint\limits_D f(x,y)\,ds$ – подвійний інтеграл від функції $f(x,y)$ по області D.

$np_{xOy}\sigma = D$ – область D є проекцією поверхні σ на площину xOy.

$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dV$ – потрійний інтеграл від функції $f(x,y,z)$ по області G.

$\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl$ – криволінійний інтеграл першого роду від функції $f(x,y)$ по кривій AB.

$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ – криволінійний інтеграл другого роду від вектор-функції $P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\,\vec{j}$ по дузі AB.

$\oint\limits_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ – криволінійний інтеграл другого роду по замкненому контуру C.

$\iint\limits_\sigma f(x,y,z)\,d\sigma$ – поверхневий інтеграл першого роду від функції $f(x,y,z)$ по поверхні σ.

$\iint\limits_\sigma P(x,y,z)\,dydz + Q(x,y,z)\,dzdx + R(x,y,z)\,dxdy$ – поверхневий інтеграл другого роду від вектор-функції $P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ по вибраній стороні поверхні σ.

$\operatorname{grad} u = \nabla u$ – градієнт скалярного поля u.

$\operatorname{div}\vec{a} = \nabla\cdot\vec{a}$ – дивергенція векторного поля $\vec{a}$.

$\operatorname{rot}\vec{a} = \nabla\times\vec{a}$ – ротор векторного поля $\vec{a}$.

Δu – лапласіан функції u.

ГЛАВА 1. *ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ*

§1. Невизначений інтеграл

I. Короткі теоретичні відомості

Основні поняття. Функція $F(x)$ називається *первісною* для функції $f(x)$ на проміжку (a,b), якщо $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a,b)$.

Властивості первісних

1^0. Якщо $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$ на проміжку (a,b), то $F(x)+C$, де C – довільна стала, також первісна цієї функції на (a,b).

2^0. Якщо $F_1(x)$ та $F_2(x)$ будь-які первісні для функції $f(x)$ на проміжку (a,b), то $F_1(x) - F_2(x) = C$, $C = const$.

Невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ на проміжку (a,b) називається сукупність всіх первісних для цієї функції на цьому проміжку.

Позначення: $\int f(x)\,dx$.

Отже, за означенням

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C. \tag{1.1}$$

Із означення невизначеного інтеграла безпосередньо випливає, що

$$\int 0\cdot dx = C.$$

Властивості невизначеного інтеграла

1^0. $d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx$.

2^0. $\int dF(x) = F(x) + C, \quad C = const$.

3^0. $\int A\,f(x)\,dx = A\int f(x)\,dx, \quad$ де $A \in \mathbf{R}$.

4^0. $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$.

5^0. Якщо $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$, то

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C, \quad C = const.$$

6^0. Якщо $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ і $u = \varphi(x)$ – диференційовна функція, то

$$\int f(u)\,du = F(u) + C.$$

Основна таблиця інтегралів

1. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $(\alpha \neq -1)$, $\int 1 \cdot dx = \int dx = x + C$.
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $(a > 0, a \neq 1)$.
4. $\int e^x dx = e^x + C$.
5. $\int \cos x \; dx = \sin x + C$.
6. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$.
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$.
11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$.
12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$.
13. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$.
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$.
15. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2} + C$.
16. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$.

17. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$.
18. $\int \operatorname{tg} x \; dx = -\ln|\cos x| + C$.
19. $\int \operatorname{ctg} \; x \; dx = \ln|\sin x| + C$.
20. $\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C$.
21. $\int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C$.
22. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$.
23. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$.

Безпосереднє інтегрування. Обчислення невизначеного інтеграла з використанням таблиці інтегралів та властивостей інтегралів називають *безпосереднім інтегруванням*. Для обчислення невизначеного інтеграла, як правило, виконують *тотожні перетворення* підінтегральної функції, щоб звести інтеграл до табличного. Крім того, використовують *метод підведення під знак диференціала*, який основано на властивості 6^0 невизначених інтегралів. Ця властивість полягає в тому, що вигляд формули інтегрування залишається незмінним незалежно від того, чи є змінна інтегрування незалежною змінною, чи деякою диференційовною функцією (інваріантність формул інтегрування).

Отже, якщо

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

то

$$\int f(\varphi(x))\,d\,\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C. \tag{1.2}$$

Метод підведення під знак диференціала в багатьох випадках дозволяє зводити інтеграли до табличних.

Основні методи інтегрування

Метод заміни змінної (метод підстановки). Якщо функція $f(x)$ – неперервна і $x = \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ та $\varphi'(t)$ неперервні, то

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt. \tag{1.3}$$

Функцію $\varphi(t)$ підбирають таким чином, щоб права частина у записаній формулі мала вигляд, зручний для інтегрування. Після інтегрування слід повернутися до старої змінної.

Метод інтегрування частинами. Якщо $u = u(x)$ і $v = v(x)$ – диференційовні функції, то має місце формула

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du\,. \qquad (1.4)$$

Ця формула називається *формулою інтегрування частинами*. Застосовувати її доречно, коли інтеграл у правій частині формули більш простий для знаходження, ніж у лівій, або йому подібний.

Взагалі, інтегрування частинами застосовується для інтегрування деяких трансцендентних функцій (наприклад, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$, $\ln x$), а також добутків алгебраїчних і трансцендентних функцій.

Наприклад, $\int P_n(x)\cos\alpha x\,dx$, $\int P_n(x)\sin\alpha x\,dx$, $\int P_n(x)\,e^{\alpha x}\,dx$, $\int P_n(x)\operatorname{arctg} x\,dx$, $\int P_n(x)\arcsin x\,dx$, $\int P_n(x)\ln x\,dx$, $\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx$, $\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx$, тощо. Тут $P_n(x)$ – многочлен.

При цьому, як правило, за u береться така функція, яка при диференціюванні спрощується, а за dv – та частина підінтегрального виразу, інтеграл від якої відомий або може бути знайдений. Наведемо деякі рекомендації щодо вибору u. Якщо підінтегральна функція має вигляд:

а) $P_n(x)\cos\alpha x$, $P_n(x)\sin\alpha x$, $P_n(x)\,e^{\alpha x}$, то за u приймають многочлен $P_n(x)$;

б) $P_n(x)\ln x$, $P_n(x)\arcsin x$, $P_n(x)\operatorname{arctg} x$, то за u приймають відповідно функції $\ln x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$;

в) $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$, то немає різниці, що брати за u: чи $e^{\alpha x}$, чи $\cos\beta x$ або $\sin\beta x$. Зазначимо також, що для цього вигляду підінтегральної функції інтегрування частинами застосовується двічі, в результаті чого отримується рівняння відносно шуканого інтеграла.

Інтегрування основних класів елементарних функцій

Інтегрування раціональних дробів. *Раціональним дробом* називається дріб вигляду $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, де $P_m(x), Q_n(x)$ – многочлени степенів m і n відповідно.

Раціональний дріб називається *правильним*, якщо $m < n$, у противному разі, коли $m \ge n$, дріб називається *неправильним*.

Найпростішими дробами називаються правильні дроби такого вигляду:

$$1)\ \frac{A}{x-a}\,;\quad 2)\ \frac{A}{(x-a)^k}\,;\quad 3)\ \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,;\quad 4)\ \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\,,$$

де A, B, a, p, q – дійсні числа, $k \in \mathbf{N}$, $k > 1$, $\dfrac{p^2}{4} - q < 0$, тобто квадратний тричлен $x^2 + px + q$ має комплексні корені.

Кожний правильний дріб $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ може бути розкладеним на суму скінченного числа найпростіших дробів вказаних чотирьох типів. Це розкладання здійснюється таким чином.

Нехай знаменник

$$Q_n(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

має дійсні корені $a_1, a_2, \ldots, a_k$ кратностей $s_1, s_2, \ldots, s_k$ і комплексно-спряжені корені $\beta_1, \overline{\beta}_1, \ldots, \beta_l, \overline{\beta}_l$ кратностей $r_1, r_2, \ldots, r_l$. Тоді $Q_n(x)$ (при $b_n = 1$) представляється у вигляді

$$Q_n(x) = (x-a_1)^{s_1}\ldots(x-a_k)^{s_k}(x^2+p_1x+q_1)^{r_1}\ldots(x^2+p_lx+q_l)^{r_l}\,, \qquad (1.5)$$

де $s_1 + s_2 + \ldots + s_k + 2(r_1 + r_2 + \ldots + r_l) = n$,

$$x^2 + p_\gamma x + q_\gamma = (x-\beta_\gamma)(x-\overline{\beta}_\gamma),\quad \gamma = \overline{1, l}\,.$$

Тоді розклад дробу $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ на суму найпростіших дробів має вигляд:

$$\begin{aligned}\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = {} & \frac{A_1}{(x-a_1)^{s_1}} + \frac{A_2}{(x-a_1)^{s_1-1}} + \ldots + \frac{A_{s_1}}{x-a_1} + \\ & + \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ + \\ & + \frac{B_1}{(x-a_k)^{s_k}} + \frac{B_2}{(x-a_k)^{s_k-1}} + \ldots + \frac{B_{s_k}}{x-a_k} + \\ & + \frac{C_1x+D_1}{(x^2+p_1x+q_1)^{r_1}} + \frac{C_2x+D_2}{(x^2+p_1x+q_1)^{r_1-1}} + \ldots + \frac{C_{r_1}x+D_{r_1}}{x^2+p_1x+q_1} + \\ & + \ .\ + \\ & + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+p_lx+q_l)^{r_l}} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_lx+q_l)^{r_l-1}} + \ldots + \frac{M_{r_l}x+N_{r_l}}{x^2+p_lx+q_l}\,,\end{aligned} \qquad (1.6)$$

де коефіцієнти $A_i, \ldots, B_i, C_i, D_i, \ldots, M_i, N_i$ повинні бути обчислені. Для їх обчислення можуть бути застосовані такі методи:

– *метод невизначених коефіцієнтів*. Суть методу: призводимо рівність (1.6) до загального знаменника і отримуємо тотожність двох многочленів. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, приходимо до системи лінійних рівнянь відносно шуканих коефіцієнтів;

– *метод задання частинних значень*. В отриманій тотожності двох многочленів надаємо змінній x значення коренів знаменника. Це особливо зручно, якщо ці корені дійсні та різні.

Часто буває доцільно комбінувати обидва методи.

Процес інтегрування раціонального дробу складається з таких етапів:

а) якщо задано неправильний раціональний дріб, слід виділити з нього цілу частину, тобто представити його у вигляді

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = M_{m-n}(x) + \frac{R_r(x)}{Q_n(x)}, \tag{1.7}$$

де $M_{m-n}(x)$ – многочлен степеня $m-n \ge 0$, $R_r(x)$ – многочлен степеня $r < n$, тобто дріб $\dfrac{R_r(x)}{Q_n(x)}$ – правильний,

б) розкласти знаменник дробу на лінійні і квадратичні множники за формулою (1.5),

в) правильний раціональний дріб розкласти на найпростіші дроби за формулою (1.6),

г) обчислити невизначені коефіцієнти $A_i, \ldots, B_i, C_i, D_i, \ldots, M_i, N_i$ в розкладі (1.6), використовуючи метод невизначених коефіцієнтів або метод задання частинних значень, або комбінуючи ці методи.

Отже, інтегрування раціонального дробу зводиться до знаходження інтегралів від многочлена та від найпростіших дробів.

Розглянемо, як знаходяться інтеграли від найпростіших дробів.

1) $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C$.

2) $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = A\int (x-a)^{-k}\,d(x-a) = A\,\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C =$

$$= \frac{A}{1-k}\,\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C.$$

3) $$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{Ax+B}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}}\,dx = \left| \begin{array}{c} x+\frac{p}{2}=t \\ x=t-\frac{p}{2} \\ dx=dt \\ q-\frac{p^2}{4}=a^2>0 \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{A\left(t-\frac{p}{2}\right)+B}{t^2+a^2}\,dt = A\int \frac{t}{t^2+a^2}\,dt + \left(B - A\frac{p}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} =$$

$$= A\,\frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2} + \left(B - A\frac{p}{2}\right)\frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{a} = \frac{A}{2}\ln\left|t^2+a^2\right| +$$

$$+\left(B - A\frac{p}{2}\right)\frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{a} + C = \left| \begin{array}{c} t = x+\frac{p}{2} \\ t^2+a^2 = x^2+px+q \\ a=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}} \end{array} \right| = \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q) +$$

$$+\left(B - A\frac{p}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C.$$

4) $$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \int \frac{Ax+B}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right)^k}\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} x+\frac{p}{2}=t \\ x=t-\frac{p}{2} \\ dx=dt \\ q-\frac{p^2}{4}=a^2>0 \end{array} \right| = \int \frac{A\left(t-\frac{p}{2}\right)+B}{(t^2+a^2)^k}\,dt = A\int \frac{t}{(t^2+a^2)^k}\,dt +$$

$$+\left(B - A\frac{p}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{A}{2}\,\frac{(t^2+a^2)^{-k+1}}{-k+1} + \left(B - A\frac{p}{2}\right)I_k. \tag{1.8}$$

Тут позначено $I_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}$. (1.9)

Для обчислення I_k використовується інтегрування частинами, в результаті чого отримується рекурентна формула

$$I_k = \frac{t}{2a^2(k-1)}\frac{1}{(t^2+a^2)^{k-1}} + \frac{1}{a^2}\frac{2k-3}{2k-2}I_{k-1},\ k>1. \quad (1.10)$$

При $k=1$ маємо $I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C$. (1.11)

Формула (1.10) дозволяє після $(k-1)$ – кратного застосування звести інтеграл до табличного (1.11).

На практиці при невеликих n не використовують формулу (1.10), а поступово використовуючи інтегрування частинами, приходять до вигляду інтеграла (1.11). Проілюструємо цей прийом, поклавши в (1.9) $k=2$.

$$I_2 = \int\frac{dt}{(t^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int\frac{a^2+t^2-t^2}{(t^2+a^2)^2}dt = \frac{1}{a^2}\int\frac{dt}{t^2+a^2} - \frac{1}{a^2}\int\frac{t^2}{(t^2+a^2)^2}dt =$$

$$= \frac{1}{a^2}\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} - \frac{1}{a^2}I. \quad (1.12)$$

Тут

$$I = \int\frac{t^2}{(t^2+a^2)^2}dt = \left| \begin{array}{ll} u=t; & du=dt \\ dv = \frac{t}{(t^2+a^2)^2}dt; & v = \frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{t^2+a^2} \end{array} \right| =$$

$$= -t\frac{1}{2}\frac{1}{t^2+a^2} + \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{-t}{2(t^2+a^2)} + \frac{1}{2}\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C.$$

Після підстановки в (1.12) отримуємо

$$I_2 = \frac{1}{a^3}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} - \frac{1}{a^2}\left(-\frac{t}{2(t^2+a^2)} + \frac{1}{2a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + \frac{1}{a^2}\frac{t}{2(t^2+a^2)} + C.$$

Інтегрування деяких ірраціональних функцій. Умовимося, що запис $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ означає раціональну функцію від n аргументів. Підстановка, що призводить до інтеграла від раціональної функції, називається *раціоналізуючою*.

Розглянемо деякі типи інтегралів від ірраціональних функцій.

1) $I = \int R\left(x, x^{\frac{r_1}{s_1}}, x^{\frac{r_2}{s_2}}, \ldots, x^{\frac{r_n}{s_n}}\right)dx$.

Тут $\frac{r_i}{s_i}$ – дроби; позначимо k – загальний знаменник цих дробів.

Раціоналізуюча підстановка:

$$x = t^k. \quad (1.13)$$

2) $I = \int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_1}{s_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_2}{s_2}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_n}{s_n}}\right)dx$.

Тут $\frac{r_i}{s_i}$ – дроби; позначимо k – загальний знаменник цих дробів, a, b, c, d – задані числа, c і d одночасно не обертаються в нуль.

Раціоналізуюча підстановка:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k. \quad (1.14)$$

Зауважимо, що тип 1) є частинним випадком типу 2) при $a=1,\ b=0,\ c=0,\ d=1$.

3) $I = \int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx,\quad a \neq 0$.

Існує декілька підходів до обчислення такого типу інтегралів:

а) виділяємо повний квадрат у квадратному тричлені ax^2+bx+c:

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right).$$

Далі заміна змінної

$$x + \frac{b}{2a} = u \quad (1.15)$$

зводить вихідний інтеграл до одного з таких інтегралів:

$$\int R\left(u, \sqrt{l^2-u^2}\right)du,\ \int R\left(u, \sqrt{l^2+u^2}\right)du,\ \int R\left(u, \sqrt{u^2-l^2}\right)du,$$

які знаходяться за допомогою підстановок:

$$u = l\sin t\,,\ u = l\,\mathrm{tg}\,t\,,\ u = \frac{l}{\cos t}$$

відповідно;

б) застосовуємо три підстановки Ейлера:

– якщо квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ має комплексні корені $(a > 0)$, то має місце *перша підстановка Ейлера*

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm x\sqrt{a}\,; \tag{1.16}$$

– якщо $c > 0$, то застосовується *друга підстановка Ейлера*

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = x\,t \pm \sqrt{c}\,; \tag{1.17}$$

– якщо $ax^2 + bx + c = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$, де x_1 та x_2 – дійсні корені тричлена, то застосовується *третя підстановка Ейлера*

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t\,(x - x_1)\,. \tag{1.18}$$

4) Інтеграли від *диференціальних біномів*

$I = \int x^m\ (a + bx^n)^p\,dx$, де $m,\ n,\ p$ – раціональні числа, виражаються в елементарних функціях лише у трьох випадках. Наведемо ці випадки та відповідні підстановки:

а) p – ціле число. Підстановка

$$t = \sqrt[s]{x}\,, \tag{1.19}$$

де s – загальний знаменник дробів m і n, перетворює вихідний інтеграл в інтеграл від раціональної функції;

б) $\dfrac{m+1}{n}$ – ціле число. У цьому випадку раціоналізуюча підстановка

$$a + bx^n = t^s\,, \tag{1.20}$$

де s – знаменник дробу p;

в) $\dfrac{m+1}{n} + p$ – ціле число. Раціоналізація інтеграла здійснюється за допомогою підстановки

$$ax^{-n} + b = t^s\,, \tag{1.21}$$

де s – знаменник дробу p.

Інтегрування тригонометричних функцій

1. Інтеграл вигляду $I = \int R(\sin x,\cos x)\,dx$ раціоналізується за допомогою універсальної тригонометричної підстановки

$$t = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\,.$$

Дійсно,

$$I = \int R(\sin x,\,\cos x)\ dx\ = \left| \begin{array}{c} t = \mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2} \\ x = 2\ \mathrm{arctg}\ t \\ dx = \dfrac{2\ dt}{1+t^2} \\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2}\,.$$

2. Обчислення інтеграла $I = \int R(\sin x,\,\cos x)\,dx$ можна спростити у таких випадках:

а) підінтегральна функція змінює знак при зміні знака $\sin x$, тобто

$$R(-\sin x,\,\cos x) = -R(\sin x,\,\cos x)\,.$$

Раціоналізуюча підстановка

$$t = \cos x\,,$$

б) якщо $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x,\,\cos x)$, то раціоналізуюча підстановка

$$t = \sin x\,,$$

в) якщо $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x,\,\cos x)$, то раціоналізуюча підстановка

$$t = \mathrm{tg}\ x\,.$$

3. Раціоналізація інтегралів $\int R(\sin x)\,\cos x\,dx$, $\int R(\cos x)\,\sin x\,dx$, $\int R(\mathrm{tg}\ x)\,dx$ здійснюється так:

$$I = \int R(\sin x)\,\cos x\,dx = \left| \begin{array}{c} \sin x = t \\ \cos x\ dx = dt \end{array} \right| = \int R(t)\,dt\,;$$

$$I = \int R(\cos x)\,\sin x\,dx = \left| \begin{array}{c} \cos x = t \\ -\sin x\ dx = dt \end{array} \right| = -\int R(t)\,dt\,;$$

$$I = \int R(\mathrm{tg}\ x)\,dx = \left| \begin{array}{c} \mathrm{tg}\ x = t \\ x = \mathrm{arctg}\ t \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{R(t)\,dt}{1+t^2}\,.$$

4. Розглянемо інтеграл $I=\int R(\sin^n x,\ \cos^m x)\ dx$, де $n,\ m$ – парні. Тоді

$$I=\int R(\sin^n x, \cos^m x)\ dx = \left| \begin{array}{c} \operatorname{tg} x = t \\ x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \\ \sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2} \\ \cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int R\left[\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^{n/2}, \left(\frac{1}{1+t^2}\right)^{m/2}\right] \frac{dt}{1+t^2}.$$

5. Для інтеграла $I=\int R(\sin^n x\cdot\cos^m x)\ dx$, де $n,\ m$ – цілі числа, а *підінтегральна функція залежить від добутку* $\sin x\cdot\cos x$, розглянемо три випадки:

а) у інтегралі $\int \sin^n x \cos^m x\ dx$ *або* n, *або* m – *непарне*. Нехай $n=2p,\ m=2q+1$, тоді

$$\int \sin^{2p} x \cos^{2q+1} x\ dx = \int \sin^{2p} x\ (1-\sin^2 x)^q \cos x\ dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \sin x = t \\ \cos x\ dx = dt \end{array} \right| = \int t^n\, (1-t^2)^q\ dt;$$

б) нехай $n=2p,\ m=2q$. Застосовуючи формули пониження степеня $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2},\ \cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$, маємо

$$\int \sin^{2p} x \cos^{2q} x\ dx = \frac{1}{2^{p+q}} \int (1-\cos 2x)^p\ (1+\cos 2x)^q\ dx.$$

Підносячи до степеня, розкриваючи дужки, отримаємо члени, які містять $\cos 2x$ у парних і непарних степенях. Члени з непарними степенями інтегруються як у випадку а), для членів з парними степенями продовжуємо процес пониження степеня за вищенаведеними формулами;

в) якщо n, m – *парні, але хоча б один з цих показників від'ємний,* то застосовується підстановка: $\operatorname{tg} x = t$ або $\operatorname{ctg} x = t$;

6. Інтеграли вигляду:

$$\int \cos mx \cos nx\ dx,\ \int \sin mx \cos nx\ dx,\ \int \sin mx \sin nx\ dx$$

реалізуються за допомогою формул тригонометрії:

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x + \cos\,(m-n)x\right],$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x + \sin\,(m-n)x\right],$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x - \cos\,(m+n)x\right]$$

відповідно.

Інтегрування гіперболічних функцій

Інтегрування гіперболічних функцій аналогічно інтегруванню тригонометричних функцій. При цьому слід пам'ятати, що

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2};\quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2};\quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x};\quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x},\ x \neq 0;$$

формули 20 – 23 з основної таблиці інтегралів, а також, основні формули для гіперболічних функцій:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1;$$

$$\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x;$$

$$2\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} 2x;$$

$$\operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2};$$

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2};$$

$$1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$$

$$\operatorname{cth}^2 x - 1 = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Тригонометричні підстановки

Для інтегралів вигляду

$$I=\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx,\ I=\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx,\ I=\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$$

зручно застосувати тригонометричні функції для відповідних підстановок. Дійсно,

$$I=\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx = \left| \begin{array}{c} x = a\sin t \\ dx = a\cos t\,dt \end{array} \right| =$$

$$=\int R\left(a\sin t,\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\right)a\cos t\,dt=a\int R(a\sin t,\ a\cos t)\cos t\,dt;$$

$$I=\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx=\left|\begin{array}{c} x=a\,\mathrm{tg}\,t\\ dx=a\dfrac{dt}{\cos^2 t}\end{array}\right|=$$

$$=\int R\left(a\,\mathrm{tg}\,t,\sqrt{a^2+a^2\,\mathrm{tg}^2 t}\right)\frac{a\,dt}{\cos^2 t}=a\int R\left(a\,\mathrm{tg}\,t,\frac{a}{\cos t}\right)\frac{dt}{\cos^2 t};$$

$$I=\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx=\left|\begin{array}{c} x=\dfrac{a}{\cos t}\\ dx=\dfrac{a\sin t\,dt}{\cos^2 t}\end{array}\right|=$$

$$=\int R\left(\frac{a}{\cos t},\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t}-a^2}\right)\frac{a\sin t\,dt}{\cos^2 t}=a\int R\left(\frac{a}{\cos t},a\,\mathrm{tg}\,t\right)\frac{\sin t\,dt}{\cos^2 t}.$$

II. Контрольні питання та завдання

1. Наведіть означення первісної для функції $f(x)$ на проміжку $(a,\ b)$.

2. Наведіть кілька прикладів функцій, які мають первісні.

3. Чи кожна функція має первісну? Розглянути приклад:

$$f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ -2, & x\le 0.\end{cases}$$

4. Відомо, що дві первісні для функції $f(x)=e^x$ у точці $x=1$ відрізняються на 2. На скільки відрізняються ці ж первісні у точці $x=100$?

5. Графік якої первісної для функції $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ пройде через точку з координатами $(1,2\pi)$?

6. Поясніть зміст операції “підведення під знак диференціала”.

7. За яких умов формула заміни змінної буде вірною?

8. Запишіть формулу інтегрування частинами. За яких умов ця формула вірна?

9. Які класи функцій інтегруються частинами?

10. Дайте означення раціонального дробу.

11. Чи всякий раціональний дріб можна проінтегрувати в елементарних функціях?

12. Чому досліджується питання про інтегрування тільки правильного дробу?

13. Що означає термін “виділити цілу частину неправильного дробу”?

14. На які найпростіші множники можна розкласти многочлен з дійсними коефіцієнтами?

15. Відомо, що число $z_1=2-i$ є корінь многочлена з дійсними коефіцієнтами. Чи є вірним, що число $z_1=2+i$ також корінь того ж многочлена?

16. Наведіть типи найпростіших дробів.

17. Як інтегруються дроби першого типу, другого типу, третього типу?

18. На які найпростіші дроби розкладається дріб

$$\frac{x+1}{(x+1)^2(x^2+x+1)}?$$

19. Знайдіть методом задання частинних значень невизначені коефіцієнти у розкладі дробу $\dfrac{x}{(x+2)(x+3)}$ на суму найпростіших дробів.

20. Наведіть приклади інтегрування ірраціональних функцій вигляду $R\left(x,x^{\frac{r_1}{s_1}},x^{\frac{r_2}{s_2}},\ldots,x^{\frac{r_n}{s_n}}\right)$.

21. Які ви знаєте способи знаходження інтегралів вигляду $I=\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$?

22. Запишіть вираз для диференціального бінома.

23. Якими способами раціоналізуються інтеграли від диференціальних біномів?

24. Як раціоналізується інтеграл $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$? Чому підстановка $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ називається універсальною?

25. Як обчислюється інтеграл вигляду $\int \sin^n x \cdot \cos^m x\,dx$ в залежності від парності та непарності показників n і m?

26. Як обчислюється інтеграл вигляду $\int \sin mx \cdot \cos nx\,dx$?

27. За допомогою яких тригонометричних підстановок знаходять інтеграли:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx, \quad \int \sqrt{x^2-3}\,dx, \quad \int \sqrt{x^2+3}\,dx\ ?$$

III. Приклади розв'язання задач

У цьому пункті розглянуто 29 прикладів розв'язання задач, які за своєю тематикою розподілились так:

1. Безпосереднє інтегрування: *приклад 1*.
2. Метод підведення під знак диференціала: *приклад 2*.
3. Метод заміни змінної: *приклад 3*.
4. Інтегрування частинами: *приклади 4, 5*.
5. Метод виділення повного квадрата: *приклади 6, 7*.
6. Інтегрування раціональних дробів: *приклади 8 – 14*.
7. Інтегрування ірраціональних функцій: *приклади 15 – 21*.
8. Інтегрування тригонометричних функцій: *приклади 22 – 28*.
9. Тригонометричні підстановки: *приклад 29*.

Приклад 1. Обчислити безпосереднім інтегруванням:

$$\text{а)} \int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx; \quad \text{б)} \int \left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2 dx; \quad \text{в)} \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}.$$

► а) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right) dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C$;

б) $\int \left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2 dx = \int \left(\cos^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right) dx =$

$= \int (1+\sin x)\,dx = x - \cos x + C$;

в) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} =$

$= \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C$. ◄

Приклад 2. Знайти інтеграли, використовуючи властивість 6^0 про незалежність формули інтегрування від характеру змінної інтегрування *(метод підведення під знак диференціала)*:

$$\text{а)} \int \cos(3x+2)\,dx; \quad \text{б)} \int (x^4+1)\,x^3\,dx; \quad \text{в)} \int \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{1+x^2}\,dx.$$

► Для обчислення цих інтегралів використаємо формулу (1.2)

$$\int f(\varphi(x))\,d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C.$$

а) $I = \int \cos(3x+2)\,dx$.

Підводимо під знак диференціала вираз $(3x+2)$ і враховуючи, що $d(3x+2) = 3dx$, $dx = \frac{1}{3}\,d(3x+2)$, маємо

$$I = \int \cos(3x+2)\,dx = \frac{1}{3}\int \cos(3x+2)\,d(3x+2) = \frac{1}{3}\sin(3x+2) + C;$$

б) $I = \int (x^4+1)x^3\,dx$.

Підводимо під знак диференціала вираз x^4+1, і враховуючи, що $d(x^4+1) = 4x^3\,dx$, $x^3 dx = \frac{1}{4}d(x^4+1)$, маємо

$$I = \int (x^4+1)x^3\,dx = \frac{1}{4}\int (x^4+1)\,d(x^4+1) = \frac{1}{8}(x^4+1)^2 + C;$$

в) $I = \int \frac{(\mathrm{arctg}\, x)^2}{1+x^2}\, dx$.

Під знак диференціала підводимо функцію $\mathrm{arctg}\, x$, тоді $d(\mathrm{arctg}\, x) = \frac{dx}{1+x^2}$, отже,

$$I = \int \frac{(\mathrm{arctg}\, x)^2}{1+x^2}\, dx = \int (\mathrm{arctg}\, x)^2\, d(\mathrm{arctg}\, x) = \frac{(\mathrm{arctg}\, x)^3}{3} + C. \blacktriangleleft$$

Приклад 3. Використовуючи відповідні заміни змінних, обчислити інтеграли:

а) $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$; б) $\int \frac{(2\ln x + 3)^3}{x}\, dx$;

в) $\int \frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^x - 1}\, dx$; г) $\int \frac{\sqrt[3]{3+5\mathrm{ctg}\, x}}{\sin^2 x}\, dx$.

► Для обчислення інтегралів скористаємося формулою (1.3) заміни змінної

$$\int f(x)\, dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt.$$

а) $I = \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$.

У цьому прикладі покладемо $x = t^2$, тоді $dx = 2t\, dt$, отже

$$I = \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \left| \begin{array}{c} x = t^2 \\ dx = 2t\, dt \end{array} \right| = \int \frac{2t\, dt}{(1+t^2)t} = 2\int \frac{dt}{1+t^2} = 2\,\mathrm{arctg}\, t + C =$$

$$= \left| t = \sqrt{x} \right| = 2\,\mathrm{arctg}\, \sqrt{x} + C;$$

б) $$I = \int \frac{(2\ln x + 3)^3}{x}\, dx = \left| \begin{array}{c} 2\ln x + 3 = t \\ \frac{2dx}{x} = dt \\ \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} dt \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int t^3\, dt = \frac{1}{8} t^4 + C =$$

$$= \left| t = 2\ln x + 3 \right| = \frac{1}{8}(2\ln x + 3)^4 + C;$$

в) $$I = \int \frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^x - 1}\, dx = \left| \begin{array}{c} e^{\frac{x}{2}} = t \\ x = 2\ln t \\ dx = \frac{2\, dt}{t} \end{array} \right| = 2\int \frac{dt}{t^2 - 1} = \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C =$$

$$= \left| t = e^{\frac{x}{2}} \right| = \ln \left| \frac{e^{\frac{x}{2}} - 1}{e^{\frac{x}{2}} + 1} \right| + C;$$

г) $$I = \int \frac{\sqrt[3]{3+5\mathrm{ctg}\, x}}{\sin^2 x}\, dx = \left| \begin{array}{c} 3 + 5\,\mathrm{ctg}\, x = t \\ -\frac{5\, dx}{\sin^2 x} = dt \end{array} \right| = -\frac{1}{5}\int t^{\frac{1}{3}} dt = -\frac{1}{5}\frac{t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C =$$

$$= -\frac{3}{20} t^{\frac{4}{3}} + C = \left| t = 3 + 5\mathrm{ctg}\, x \right| = -\frac{3}{20}(3 + 5\mathrm{ctg}\, x)^{\frac{4}{3}} + C. \blacktriangleleft$$

Приклад 4. Інтегруванням частинами обчислити інтеграли:

а) $\int x \sin x\, dx$; б) $\int \ln x\, dx$; в) $\int x\, \mathrm{arctg}\, x\, dx$; г) $\int x^2 \sin x\, dx$.

► Інтеграли знаходять з використанням формули (1.4) інтегрування частинами

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du.$$

а) $$I = \int x \sin x\, dx = \left| \begin{array}{ll} u = x; & du = dx \\ dv = \sin x\, dx; & v = \int \sin x\, dx = -\cos x \end{array} \right| =$$

$$= -x\cos x + \int \cos x\, dx = -x\cos x + \sin x + C;$$

б) $$I = \int \ln x\, dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x; & du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx; & v = \int dx = x \end{array} \right| =$$

$$= x\ln x - \int x \frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C;$$

в) $$I = \int x\, \mathrm{arctg}\, x\, dx = \left| \begin{array}{ll} u = \mathrm{arctg}\, x; & du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = x\, dx; & v = \int x\, dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| =$$

$$=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2\,dx}{1+x^2}=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)-1}{1+x^2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x^2\operatorname{arctg}x-\int\frac{1+x^2}{1+x^2}dx+\int\frac{dx}{1+x^2}\right)=\frac{1}{2}(x^2\operatorname{arctg} x-x+\operatorname{arctg} x)+C=$$

$$=\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}x\,(x^2+1)-x)+C;$$

г) $I=\int x^2\sin x\,dx=\left|\begin{array}{ll} u=x^2; & du=2x\,dx \\ dv=\sin x\,dx; & v=\int\sin x\,dx=-\cos x\end{array}\right|=$

$$=-x^2\cos x+\int 2x\cos x\,dx.$$

Для обчислення початкового інтеграла формулу інтегрування частинами треба застосувати ще один раз до інтеграла у правій частині:

$$\int x\cos x\,dx=\left|\begin{array}{ll} u=x; & du=dx \\ dv=\cos x\,dx; & v=\int\cos x\,dx=\sin x\end{array}\right|=$$

$$=x\sin x-\int\sin x\,dx=x\sin x+\cos x+C.$$

Підставляючи, знаходимо

$$I=-x^2\cos x+2(x\sin x+\cos x)+C=(2-x^2)\cos x+2x\sin x+C. \blacktriangleleft$$

Приклад 5. Знайти інтеграл $I=\int e^x\sin 2x\,dx$.

► $I=\int e^x\sin 2x\,dx=\left|\begin{array}{ll} u=e^x; & du=e^x\,dx \\ dv=\sin 2x\,dx; & v=\int\sin 2x\,dx=-\dfrac{\cos 2x}{2}\end{array}\right|=$

$$=-\frac{e^x}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\int e^x\cos 2x\,dx=\left|\begin{array}{ll} u=e^x; & du=e^x\,dx \\ dv=\cos 2x\,dx; & v=\dfrac{\sin 2x}{2}\end{array}\right|=$$

$$=-\frac{e^x}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\left(e^x\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\int e^x\sin 2x\,dx\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}e^x\cos 2x+\frac{1}{4}e^x\sin 2x-\frac{1}{4}\int e^x\sin 2x\,dx.$$

Таким чином, у правій частині рівняння ми знову прийшли до початкового інтеграла з коефіцієнтом $-\frac{1}{4}$, тобто маємо таке рівняння відносно шуканого інтеграла:

$$I=-\frac{1}{2}e^x\cos 2x+\frac{1}{4}e^x\sin 2x-\frac{1}{4}I,$$

звідси $I=\int e^x\sin 2x\,dx=\frac{1}{5}e^x(\sin 2x-2\cos 2x)+C$.

Зауваження. Треба мати на увазі, що при повторному застосуванні формули інтегрування частинами треба зберігати вигляд для функції $u(x)$. У нашому прикладі $u(x)=e^x$. ◄

Приклад 6. Знайти інтеграли:

а) $I=\int\frac{dx}{x^2+4x+14}$; б) $I=\int\frac{dx}{5-4x-x^2}$.

► Застосуємо прийом *виділення повного квадрата* у знаменнику:

а) $I=\int\frac{dx}{x^2+4x+14}=\int\frac{dx}{(x+2)^2+10}=\int\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+10}=$

$$=\frac{1}{\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{10}}+C;$$

б) $I=\int\frac{dx}{5-4x-x^2}=\int\frac{dx}{9-(x^2+4x+4)}=\int\frac{dx}{9-(x+2)^2}=$

$$=\int\frac{d(x+2)}{9-(x+2)^2}=\frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{3+x+2}{3-x-2}\right|+C=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{5+x}{1-x}\right|+C. \blacktriangleleft$$

Приклад 7. Обчислити інтеграли:

а) $I=\int\frac{3x-2}{x^2+4x+13}dx$; б) $I=\int\frac{3x-1}{\sqrt{x^2-4x+8}}dx$.

► *Спосіб 1*. Для обчислення інтегралів *виділимо повний квадрат* у знаменнику. Застосувавши відповідну заміну, отримаємо:

а) $I=\int\frac{3x-2}{x^2+4x+13}dx=\int\frac{3x-2}{(x+2)^2+9}dx=\left|\begin{array}{l} x+2=t \\ x=t-2 \\ dx=dt\end{array}\right|=$

$$=\int\frac{3t-8}{t^2+9}dt=\frac{3}{2}\int\frac{2t}{t^2+9}dt-8\int\frac{dt}{t^2+9}=\frac{3}{2}\ln(t^2+9)-\frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3}+C=$$

$$=\big|t=x+2\big|=\frac{3}{2}\ln\left|x^2+4x+13\right|-\frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3}+C;$$

$$б)\ I=\int\frac{3x-1}{\sqrt{x^2-4x+8}}\,dx=\int\frac{3x-1}{\sqrt{(x-2)^2+4}}\,dx=\left|\begin{array}{c}x-2=t\\ x=t+2\\ dx=dt\end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{3t+5}{\sqrt{t^2+4}}\,dt=\frac{3}{2}\int\frac{2t\,dt}{\sqrt{t^2+4}}+5\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+4}}=3\sqrt{t^2+4}+5\ln\left|t+\sqrt{t^2+4}\right|+C=$$

$$=\left|t=x-2\right|=3\sqrt{x^2-4x+8}+5\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+8}\right|+C\,.$$

Спосіб 2. Для обчислення інтегралів *виділяємо у чисельнику похідну* квадратного тричлена, що стоїть в знаменнику:

$$а)\ \int\frac{3x-2}{x^2+4x+13}dx=\left|\begin{array}{c}(x^2+4x+13)'=2x+4\\ 3x-2=\frac{3}{2}(2x+4)-8\end{array}\right|=$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{2x+4}{x^2+4x+13}dx-8\int\frac{dx}{x^2+4x+13}=\frac{3}{2}\int\frac{d(x^2+4x+13)}{x^2+4x+13}-8\int\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+3^2}=$$

$$=\frac{3}{2}\ln|x^2+4x+13|-\frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3}+C\ ;$$

$$б)\ \int\frac{3x-1}{\sqrt{x^2-4x+8}}dx=\left|\begin{array}{c}(x^2-4x+8)'=2x-4\\ 3x-1=\frac{3}{2}(2x-4)+5\end{array}\right|=$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{2x-4}{\sqrt{x^2-4x+8}}dx+5\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+8}}=\frac{3}{2}\int\frac{d(x^2-4x+8)}{\sqrt{x^2-4x+8}}+5\int\frac{d(x-2)}{\sqrt{(x-2)^2+4}}=$$

$$=3\sqrt{x^2-4x+8}+5\ln|x-2+\sqrt{x^2-4x+8}|+C\ .◄$$

Приклад 8. Обчислити інтеграл $I=\int\frac{x^3+x+2}{(x-3)(x-4)}dx$.

► Підінтегральна функція є неправильним раціональним дробом. Виділимо його цілу частину. Для цього, розкривши дужки у знаменнику, ділимо чисельник на знаменник :

$$\frac{x^3+x+2}{(x-3)(x-4)}=\frac{x^3+x+2}{x^2-7x+12}\ ;$$

$$\begin{array}{r|l} x^3+x+2 & x^2-7x+12 \\ \underline{-\ x^3-7x^2+12x} & x+7 \\ 7x^2-11x+2 & \\ \underline{-\ 7x^2-49x+84} & \\ 38x-82 & \end{array}$$

Таким чином, $\frac{x^3+x+2}{x^2-7x+12}=x+7+\frac{38x-82}{(x-3)(x-4)}$.

Оскільки квадратний тричлен $x^2-7x+12$ *має два дійсних корені*, розклад дробу $\frac{38x-82}{(x-3)(x-4)}$ на найпростіші дроби *першого типу* має вигляд:

$$\frac{38x-82}{(x-3)(x-4)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-4}\,.$$

Зведемо дроби в обох частинах рівності до загального знаменника. Маємо рівність

$$38x-82=A(x-4)+B(x-3)\,.$$

Знайдемо коефіцієнти A і B. Застосуємо *метод задання частинних значень*, поклавши послідовно в отриманій тотожності $x=3;\ x=4$.

При $x=3$ маємо $38\cdot3-82=-A;\quad A=-32$.

При $x=4$ маємо $38\cdot4-82=B;\quad B=70$.

Отже,

$$I=\int\frac{x^3+x+2}{(x-3)(x-4)}\,dx=\int(x+7)\,dx+\int\frac{-32}{x-3}\,dx+\int\frac{70}{x-4}\,dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}+7x-32\ln\left|x-3\right|+70\ln\left|x-4\right|+C\,.◄$$

Приклад 9. Знайти інтеграл $I=\int\frac{x}{(x-1)(x+1)^2}dx$.

► Підінтегральна функція є правильним раціональним дробом, знаменник якого *має дійсні корені, серед яких є кратні*, отже розклад на найпростіші дроби включатиме найпростіші *дроби першого та другого типів*:

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{D}{(x+1)},$$

$$x=A(x+1)^2+B(x-1)+D(x^2-1).$$

Використаємо *метод задання частинних значень*:

при $x=1$ маємо $4A=1,\ A=\frac{1}{4}$;

при $x=-1$ маємо $-1=-2B,\ B=\frac{1}{2}$.

Далі використаємо *метод невизначених коефіцієнтів* для знаходження коефіцієнта D. Для цього прирівняємо у тотожності коефіцієнти, наприклад, при x^2. Отримаємо:

$$x^2\Big|\ 0=A+D,\quad D=-\frac{1}{4}.$$

Остаточно

$$\int\frac{x\,dx}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1)^2}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1}=$$

$$=\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{1}{4}\ln|x+1|+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2(x+1)}+C.\ ◄$$

Приклад 10. Знайти інтеграл $I=\int\frac{x}{(x-1)(x^2+1)}dx$.

► Підінтегральна функція є правильним раціональним дробом, знаменник якого *має дійсний та пару комлексно-спряжених коренів*. Тому в розкладі дробу на найпростіші будуть міститись найпростіші *дроби першого та третього типів*.

Тоді $\frac{x}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$.

Звідси $A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)=x$.

При $x=1$ отримаємо $1=2A,\ A=\frac{1}{2}$. Далі використаємо *метод невизначених коефіцієнтів*. Складемо систему рівнянь для знаходження коефіцієнтів B і C:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & A+B=0 \\ x^1 & C-B=1,\text{ звідси } B=-\frac{1}{2},\ C=\frac{1}{2}. \end{array}$$

Отже, $\frac{x}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}}{x^2+1}=\frac{1}{2(x-1)}+\frac{-x+1}{2(x^2+1)}$.

Остаточно маємо

$$I=\int\frac{x\,dx}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{2}\int\frac{1-x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\ln|x-1|+$$

$$+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{4}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+C.\ ◄$$

Приклад 11. Обчислити $I=\int\frac{dx}{(x^2+4)^2}$.

► Підінтегральна функція є найпростішим дробом *четвертого типу*. Маємо

$$I=\int\frac{dx}{(x^2+4)^2}=\frac{1}{4}\int\frac{4}{(x^2+4)^2}dx=\frac{1}{4}\int\frac{x^2+4-x^2}{(x^2+4)^2}dx=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\int\frac{dx}{x^2+4}-\int\frac{x^2\,dx}{(x^2+4)^2}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\int\frac{x^2\,dx}{(x^2+4)^2}.$$

Останній інтеграл знайдемо, використовуючи формулу (1.4) інтегрування частинами.

$$I_1=\int\frac{x^2}{(x^2+4)^2}dx=\int x\frac{x\,dx}{(x^2+4)^2}=$$

$$=\left|\begin{array}{ll} u=x; & du=dx \\ dv=\frac{x\,dx}{(x^2+4)^2}; & v=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+4)}{(x^2+4)^2}=-\frac{1}{2(x^2+4)} \end{array}\right|=$$

$$=-\frac{x}{2(x^2+4)}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+4}=\frac{-x}{2(x^2+4)}+\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$$

Отже,

$$I=\frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\left[-\frac{x}{2(x^2+4)}+\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right]+C=$$

$$=\frac{x}{8(x^2+4)}+\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.\ ◄$$

Приклад 12. Знайти інтеграл $I=\int \frac{dx}{(x^2+9)^3}$.

► Підінтегральна функція є найпростішим дробом *четвертого типу*. Знаменник дробу має три пари комплексно-спряжених коренів, $k=3$. Для обчислення цього інтеграла зручніше скористатись рекурентною формулою (1.10) для обчислення інтеграла вигляду $I_k=\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}$:

$$I_k=\frac{t}{2a^2(k-1)}\frac{1}{(t^2+a^2)^{k-1}}+\frac{1}{a^2}\frac{2k-3}{2k-2}I_{k-1}.$$

У нашому випадку: показник степеня $k=3$; $a^2=9$; $t=x$. Тому

$$I=I_3=\int\frac{dx}{(x^2+9)^3}=\frac{x}{2\cdot 9(3-1)}\cdot\frac{1}{(x^2+9)^{3-1}}+\frac{1}{9}\cdot\frac{2\cdot 3-3}{2\cdot 3-2}I_{3-1}=$$

$$=\frac{x}{36}\cdot\frac{1}{(x^2+9)^2}+\frac{1}{12}I_2,\quad \text{де } I_2=\int\frac{dx}{(x^2+9)^2}.$$

У свою чергу

$$I_2=\frac{x}{2\cdot 9}\cdot\frac{1}{x^2+9}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2}I_1,\quad \text{де } I_1=\int\frac{dx}{x^2+9}=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C.$$

Отже, $I_2=\frac{x}{18}\cdot\frac{1}{x^2+9}+\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C$.

Остаточно маємо

$$I=\int\frac{dx}{(x^2+9)^3}=\frac{x}{36}\cdot\frac{1}{(x^2+9)^2}+\frac{1}{12}\left(\frac{x}{18}\cdot\frac{1}{x^2+9}+\frac{1}{54}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\right)+C=$$

$$=\frac{x}{216(x^2+9)}+\frac{x}{36(x^2+9)^2}+\frac{1}{648}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C. \blacktriangleleft$$

Приклад 13. Знайти інтеграл $I=\int\frac{5x^2-12}{(x^2-6x+13)^2}dx$.

► Підінтегральна функція – правильний раціональний дріб. Знаменник дробу має *дві пари комплексно-спряжених коренів*, $k=2$. Отже розкладання підінтегрального дробу на найпростіші з невизначеними коефіцієнтами має вигляд

$$\frac{5x^2-12}{(x^2-6x+13)^2}=\frac{Ax+B}{(x^2-6x+13)^2}+\frac{Cx+D}{x^2-6x+13},$$

$$Ax+B+(Cx+D)(x^2-6x+13)=5x^2-12.$$

Для знаходження коефіцієнтів A, B, C, D утворимо систему

$$\begin{array}{l|l} x^3 & C=0 \\ x^2 & D-6C=5 \\ x^1 & A-6D+13C=0 \\ x^0 & B+13D=-12, \end{array}\quad \text{звідси } A=30,\ B=-77,\ C=0,\ D=5.$$

Тоді

$$I=\int\frac{5x^2-12}{(x^2-6x+13)^2}dx=\int\frac{30x-77}{(x^2-6x+13)^2}dx+\int\frac{5\,dx}{x^2-6x+13}=I_1+5I_2.$$

Розглянемо окремо два останніх інтеграли. Інтеграл I_2 знайдемо, виділивши у знаменнику повний квадрат:

$$I_2=\int\frac{dx}{x^2-6x+13}=\int\frac{dx}{(x-3)^2+4}=\int\frac{d(x-3)}{(x-3)^2+4}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2}+C.$$

$$I_1=\int\frac{30x-77}{(x^2-6x+13)^2}dx=\int\frac{30x-77}{((x-3)^2+4)^2}dx=\left|\begin{array}{c} x-3=t \\ x=t+3 \\ dx=dt \end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{30(t+3)-77}{(t^2+4)^2}dt=\int\frac{30t+13}{(t^2+4)^2}dt=30\int\frac{t}{(t^2+4)^2}dt+13\int\frac{dt}{(t^2+4)^2}=$$

$$=30I_3+13I_4.$$

$$I_3=\int\frac{t}{(t^2+4)^2}dt=\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+4)}{(t^2+4)^2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{t^2+4}+C.$$

Для обчислення інтеграла I_4 скористаємось результатом, отриманим у прикладі 11:

$$I_4=\int\frac{dt}{(t^2+4)^2}=\frac{t}{8(t^2+4)}+\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+C.$$

Отже,

$$I_1=30I_3+13I_4=30\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{t^2+4}+13\left(\frac{t}{8(t^2+4)}+\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}\right)+C=$$

$$=\left|t=x-3\right|=-\frac{15}{x^2-6x+13}+\frac{13}{8}\cdot\frac{x-3}{x^2-6x+13}+\frac{13}{16}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2}+C=$$

$$=\frac{13}{16}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2}+\frac{13x-159}{8\,(x^2-6x+13)}+C.$$

Остаточно, шуканий інтеграл має вигляд:

$$I = I_1 + 5I_2 = \frac{13}{16}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2} + \frac{13x-159}{8\,(x^2-6x+13)} + \frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2} + C =$$

$$= \frac{53}{16}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2} + \frac{13x-159}{8\,(x^2-6x+13)} + C\,. ◄$$

Приклад 14. Обчислити інтеграл

$$I = \int \frac{2x+3}{(x+1)(x^2+1)^2}\,dx\,.$$

► Підінтегральна функція – правильний раціональний дріб, знаменник якого має *один дійсний* і *комплексно-спряжену двократну пару коренів*. Тому у розкладі дробу на найпростіші будуть міститись дроби *першого, третього* та *четвертого типів*.

Тоді $\dfrac{2x+3}{(x+1)(x^2+1)^2} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{Bx+C}{(x^2+1)^2} + \dfrac{Dx+E}{x^2+1}$,

$$A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x+1) + (Dx+E)(x^2+1)(x+1) = 2x+3\,.$$

При $x=-1$ маємо $4A=1$, $A=\dfrac{1}{4}$.

Для знаходження коефіцієнтів B, C, D, E утворимо систему

$$\begin{array}{c|l} x^4 & A+D=0 \\ x^3 & E+D=0 \\ x^2 & 2A+B+D+E=0 \\ x^1 & B+C+D+E=2,\ \text{звідси}\ B=-\dfrac{1}{2},\ C=\dfrac{5}{2},\ D=-\dfrac{1}{4},\ E=\dfrac{1}{4}. \end{array}$$

Тоді

$$I = \int \frac{2x+3}{(x+1)(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{\frac{1}{4}}{x+1}\,dx + \int \frac{-\frac{x}{2}+\frac{5}{2}}{(x^2+1)^2}\,dx + \int \frac{-\frac{x}{4}+\frac{1}{4}}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\int \frac{x-5}{(x^2+1)^2}\,dx - \frac{1}{4}\int \frac{x-1}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\int \frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2} + \frac{5}{2}\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{8}\int \frac{2x\,dx}{x^2+1} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} + \frac{5}{2}\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{8}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} + \frac{1}{4}\operatorname{arctg} x =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\ln|x+1| + \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x\right] + \frac{5}{2}\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}\,.$$

Обчислимо останній інтеграл

$$I_1 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{dx}{x^2+1} - \int x\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} = \operatorname{arctg} x - I_2\,,$$

де

$$I_2 = \int x\,\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} = \left| \begin{array}{ll} u = x; & du = dx \\ dv = \dfrac{x\,dx}{(x^2+1)^2}; & v = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = -\frac{1}{2(x^2+1)} \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} = -\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C\,.$$

Тоді

$$I_1 = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(x^2+1)} + C = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{x}{x^2+1}\right) + C\,.$$

Остаточно шуканий інтеграл

$$I = \frac{1}{4}\left[\ln|x+1| + \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x\right] + \frac{5}{4}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{x}{x^2+1}\right) + C =$$

$$= \frac{3}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{8}\ln(x^2+1) + \frac{5x+1}{4(x^2+1)} + C\,. ◄$$

Приклад 15. Відповідною підстановкою раціоналізувати підінтегральну функцію та обчислити інтеграл $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$.

$$► \ I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}} = \left| \begin{array}{c} x = t^6 \\ dx = 6t^5\,dt \\ t = \sqrt[6]{x} \end{array} \right| = \int \frac{6t^5\,dt}{t^2+t^3} = 6\int \frac{t^3}{1+t}\,dt =$$

$$= 6\int \frac{t^3+1-1}{1+t}\,dt = 6\int\left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right)dt = 6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1|\right) + C =$$

$$= \left|\ t = \sqrt[6]{x}\ \right| = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(\sqrt[6]{x}+1) + C\,. ◄$$

Приклад 16. Знайти $\int \frac{1}{(x-1)^2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx$.

$$\blacktriangleright \int \frac{1}{(x-1)^2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx = \left| \begin{array}{c} \frac{x+1}{x-1}=t^3 \\ x=\frac{t^3+1}{t^3-1} \\ dx=-\frac{6t^2\,dt}{(t^3-1)^2} \\ x-1=\frac{2}{t^3-1} \end{array} \right| = \int \frac{(t^3-1)^2\,t(-6t^2)}{4(t^3-1)^2}\,dt =$$

$$= -\frac{3}{2}\int t^3\,dt = -\frac{3}{8}t^4 + C = \left| t = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{3}} \right| = -\frac{3}{8}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{4}{3}} + C . \blacktriangleleft$$

Приклад 17. Знайти $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

► Використаємо першу підстановку Ейлера (1.16):

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}} = \left| \begin{array}{c} \sqrt{x^2-x+1}=t-x \\ x=\frac{t^2-1}{2t-1} \\ dx=2\frac{t^2-t+1}{(2t-1)^2}dt \end{array} \right| = \int \frac{2t^2-2t+2}{t(2t-1)^2}\,dt =$$

$$= \int\left[\frac{2}{t}-\frac{3}{2t-1}+\frac{3}{(2t-1)^2}\right]dt = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2t-1}+2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|2t-1|+C =$$

$$= \left| t=\sqrt{x^2-x+1}+x \right| = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1} -$$

$$-\frac{3}{2}\ln\left|2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1\right| + 2\ln\left|x+\sqrt{x^2-x+1}\right| + C . \blacktriangleleft$$

Приклад 18. Знайти інтеграл

$$I = \int \frac{3x+2}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}\,dx .$$

$$\blacktriangleright \int \frac{3x+2}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}dx = \int \frac{3(x+1)-1}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}dx =$$

$$= 3\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+3}} - \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}} = 3I_1 - I_2 .$$

Розглянемо окремо обидва інтеграли:

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}} = \ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+3}\right| + C ,$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}} = \left| \begin{array}{c} x+1=\frac{1}{t} \\ x=\frac{1}{t}-1 \\ dx=-\frac{dt}{t^2} \end{array} \right| = -\int \frac{\frac{1}{t^2}\,dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2+3\left(\frac{1}{t}-1\right)+3}} =$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}} = -\ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+1}\right| + C =$$

$$= \left| t=\frac{1}{1+x} \right| = -\ln\left|\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{x^2+3x+3}}{x+1}\right| + C .$$

Остаточно

$$I = 3I_1 - I_2 =$$

$$= 3\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+3}\right| + \ln\left|\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{x^2+3x+3}}{x+1}\right| + C . \blacktriangleleft$$

Приклад 19. Проінтегрувати *диференціальний біном*

$$I = \int x^{-\frac{1}{2}} \left(x^{\frac{1}{3}} + 1 \right)^{-2} dx .$$

► Тут маємо, враховуючи вираз для диференціального бінома $x^m (a + bx^n)^p dx$, що $m = -\frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{3}$, $p = -2$, p – ціле число, тому використаємо підстановку (1.19): $x = t^s$, де s – загальний знаменник дробів $m = -\frac{1}{2}$ і $n = \frac{1}{3}$, тобто $s = 6$.

Отже,

$$I = \int x^{-\frac{1}{2}} \left(x^{\frac{1}{3}} + 1 \right)^{-2} dx = \left| \begin{array}{c} x = t^6 \\ dx = 6t^5\,dt \end{array} \right| = \int \frac{6t^5 dt}{t^3 (t^2+1)^2} = 6 \int \frac{t^2 dt}{(t^2+1)^2} =$$

$$= 6 \int \frac{t^2 + 1 - 1}{(t^2+1)^2} dt = 6 \int \frac{dt}{t^2+1} - 6 \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = 6 \operatorname{arctg} t - 6 \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} .$$

Обчислимо останній інтеграл:

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \int \frac{t^2 + 1 - t^2}{(t^2+1)^2} dt = \int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^2} dt - \int t \frac{t\,dt}{(t^2+1)^2} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2+1} - \int t \frac{t\,dt}{(t^2+1)^2} = \left| \begin{array}{ll} u = t; & du = dt \\ dv = \dfrac{t\,dt}{(t^2+1)^2}; & v = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int \frac{d(t^2+1)}{(t^2+1)^2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{t^2+1} \end{array} \right| =$$

$$= \operatorname{arctg} t + \frac{t}{2(t^2+1)} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + \frac{t}{2(t^2+1)} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + \frac{t}{2(t^2+1)} + C .$$

Остаточно маємо

$$I = 6 \operatorname{arctg} t - 6 \left(\frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t \right) + C = 3 \operatorname{arctg} t - \frac{3t}{t^2+1} + C =$$

$$= \left| \, t = \sqrt[6]{x} \, \right| = 3 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} - \frac{3 \sqrt[6]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} + C . ◄$$

Приклад 20. Знайти інтеграл $I = \int x^{-\frac{1}{2}} \left(1 + x^{\frac{1}{4}} \right)^{\frac{1}{3}} dx$.

► Маємо: $m = -\frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{4}$, $p = \frac{1}{3}$; p – не ціле число,

$\frac{m+1}{n} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}} = 2$, $\frac{m+1}{n}$ – ціле число, отже, використаємо підстановку (1.20): $a + bx^n = t^s$, де s – знаменник дробу p, тобто $s = 3$, а підстановка має вигляд

$$1 + x^{\frac{1}{4}} = t^3 .$$

Далі процес обчислення інтеграла можна організувати двома способами.

Спосіб 1.

$$I = \int x^{-\frac{1}{2}} \left(1 + x^{\frac{1}{4}} \right)^{\frac{1}{3}} dx = \left| \begin{array}{c} 1 + x^{\frac{1}{4}} = t^3 \\ x = (t^3-1)^4 \\ dx = 12t^2 (t^3-1)^3 dt \end{array} \right| = \int \frac{t \cdot 12t^2 (t^3-1)^3}{(t^3-1)^2} dt =$$

$$= 12 \int (t^6 - t^3) dt = \frac{12}{7} t^7 - 3t^4 + C, \quad \text{де } t = \left(1 + x^{\frac{1}{4}} \right)^{\frac{1}{3}} .$$

Спосіб 2. Врахуємо зазначену підстановку $1 + x^{\frac{1}{4}} = t^3$; $x^{\frac{1}{4}} = t^3 - 1$; $\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} dx = 3t^2\,dt$; $x^{-\frac{3}{4}} dx = 12t^2\,dt$ і виділемо в розглядуваному інтегралі вираз $x^{\frac{3}{4}} \cdot x^{-\frac{3}{4}}$, який не змінює значення інтеграла, бо дорівнює одиниці.

$$I = \int x^{-\frac{1}{2}} \left(1 + x^{\frac{1}{4}} \right)^{\frac{1}{3}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} \left(1 + x^{\frac{1}{4}} \right)^{\frac{1}{3}} x^{\frac{3}{4}} \cdot x^{-\frac{3}{4}} dx = \left| x^{-\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{3}{4}} = x^{\frac{1}{4}} \right| = .$$

$$= \int \left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{-\frac{3}{4}}\,dx = \left| \begin{array}{c} 1+x^{\frac{1}{4}} = t^3 \\ x^{\frac{1}{4}} = t^3 - 1 \\ \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}dx = 3t^2dt \\ x^{-\frac{3}{4}}dx = 12t^2dt \end{array} \right| = \int t\cdot(t^3-1)\cdot 12t^2dt =$$

$$= 12\int (t^6 - t^3)\,dt = \frac{12}{7}t^7 - 3t^4 + C, \text{ де } t = \left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}. \blacktriangleleft$$

Приклад 21. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{dx}{x^7\sqrt{1+x^4}}$.

► $I = \int \frac{dx}{x^7\sqrt{1+x^4}} = \int x^{-7}(1+x^4)^{-\frac{1}{2}}\,dx$.

Тут $m=-7$, $n=4$, $p=-\frac{1}{2}$; p – не ціле число, $\frac{m+1}{n} = \frac{-7+1}{4} = -\frac{3}{2}$ – не ціле число, $\frac{m+1}{n} + p = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = -2$, $\frac{m+1}{n}+p$ – ціле число, отже, використаємо підстановку (1.21): $ax^{-n}+b=t^s$, де $s=2$ – знаменник дробу p, а підстановка має вигляд: $1+x^{-4}=t^2$. Далі процес обчислення інтеграла можна організувати двома способами.

Спосіб 1.

$$I = \int x^{-7}(1+x^4)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \left| \begin{array}{c} 1+x^{-4} = t^2 \\ x = (t^2-1)^{-\frac{1}{4}} \\ dx = -\frac{t}{2}(t^2-1)^{-\frac{5}{4}}dt \end{array} \right| =$$

$$= \int (t^2-1)^{\frac{7}{4}}\left(1+(t^2-1)^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)(t^2-1)^{-\frac{5}{4}}\,t\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int (t^2-1)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)^{-\frac{1}{2}} t\,dt = -\frac{1}{2}\int (t^2-1)\,dt = -\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t + C =$$

$$= \left| t = \sqrt{1+x^{-4}} = \frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2} \right| = -\frac{1}{6x^6}\sqrt{(1+x^4)^3} + \frac{1}{2x^2}\sqrt{1+x^4} + C.$$

Спосіб 2. Врахуємо зазначену підстановку $1+x^{-4}=t^2$, $x^{-4}=t^2-1$, $-4x^{-5}dx = 2t\,dt$, $x^{-5}dx = -\frac{1}{2}t\,dt$. Далі представляємо $1+x^{-4} = \frac{1+x^4}{x^4}$ та виділяємо в зазначеному інтегралі множник з такою основою та вираз $x^{-5}dx$, ввівши під знак інтеграла добуток $x^5\cdot x^{-5}$, який не змінює значення інтеграла, бо дорівнює одиниці.

$$I = \int x^{-7}(1+x^4)^{-\frac{1}{2}}dx = \int x^{-7}\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot x^{-2}\cdot x^5 \cdot x^{-5}dx =$$

$$= \int \left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^{-\frac{1}{2}} x^{-4}x^{-5}dx = \left| \begin{array}{c} \frac{1+x^4}{x^4} = 1+x^{-4} = t^2 \\ x^{-4} = t^2-1 \\ -4x^{-5}dx = 2t\,dt \\ x^{-5}dx = -\frac{1}{2}t\,dt \end{array} \right| = \int t^{-1}\cdot(t^2-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)t\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int (t^2-1)\,dt = -\frac{1}{6}t^3 + \frac{t}{2} + C, \text{ де } t = (1+x^{-4})^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2}. \blacktriangleleft$$

Приклад 22. Знайти $I = \int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}$.

► Застосуємо універсальну підстановку:

$$I=\int\frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}=\left|\begin{array}{c}\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t\\ \frac{x}{2}=\mathrm{arctg}\,t\\ x=2\mathrm{arctg}\,t\\ dx=\frac{2}{1+t^2}dt\\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2}\\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}}{4\frac{2t}{1+t^2}+3\frac{1-t^2}{1+t^2}+5}dt=$$

$$=2\int\frac{dt}{2t^2+8t+8}=\int\frac{dt}{(t+2)^2}=-\frac{1}{t+2}+C=\left|\,t=\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\,\right|=-\frac{1}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}+2}+C\,.◄$$

Приклад 23. Знайти інтеграли:

а) $\int\sin^3 x\;dx$; б) $\int\cos^5 x\;dx$.

► Степені підінтегральних функцій *непарні*, тому, якщо відокремити перший степінь $\sin x$ (або $\cos x$), підвести його під знак диференціала, отримаємо:

а) $\int\sin^3 x\;dx=\int(1-\cos^2 x)\sin x\;dx=-\int(1-\cos^2 x)\;d(\cos x)=$

$$=-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}+C\,;$$

б) $\int\cos^5 x\;dx=\int(1-\sin^2 x)^2\cos x\;dx=\int(1-2\sin^2 x+\sin^4 x)\;d(\sin x)=$

$$=\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{\sin^5 x}{5}+C\,.◄$$

Приклад 24. Знайти інтеграли:

а) $\int\cos^2 x\;dx$; б) $\int\sin^4 x\;dx$.

► Степені підінтегральних функцій *парні*, тому застосуємо формули пониження степеня тригонометричних функцій:

а) $\int\cos^2 x\;dx=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2x)\;dx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$;

б) $\int\sin^4 x\;dx=\frac{1}{4}\int(1-\cos 2x)^2\;dx=\frac{1}{4}\int(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)\;dx=$

$$=\frac{x}{4}-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{1}{4}\int\cos^2 2x\;dx=\frac{x}{4}-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{1}{8}\int(1+\cos 4x)\;dx=$$

$$=\frac{x}{4}-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{x}{8}+\frac{\sin 4x}{32}+C=\frac{3x}{8}-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}+C\,.◄$$

Приклад 25. Знайти $I=\int\sin^4 x\cdot\cos^5 x\,dx$.

► $I=\int\sin^4 x\cdot\cos^5 x\;dx=\int\sin^4 x(1-\sin^2 x)^2\cos x\;dx=$

$$=\int\sin^4 x(1-2\sin^2 x+\sin^4 x)\;d(\sin x)=\frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{2}{7}\sin^7 x+\frac{1}{9}\sin^9 x+C\,.◄$$

Приклад 26. Обчислити інтеграл $I=\int\frac{dx}{\sin^4 x\cdot\cos^2 x}$.

► Показники степенів – парні, від'ємні, тому застосуємо підстановку: $\mathrm{tg}\;x=t$. Тут також правомірне застосування правила $R(-\sin\;x,-\cos\;x)=R(\sin\;x,\,\cos\;x)$, що веде до цієї ж підстановки.

$$I=\int\frac{dx}{\sin^4 x\cdot\cos^2 x}=\left|\begin{array}{c}\mathrm{tg}\;x=t\\ x=\mathrm{arctg}\;t\\ dx=\frac{1}{1+t^2}dt\\ \sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2}\\ \cos^2 x=\frac{1}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{(1+t^2)^2}{t^4}\;dt=$$

$$=\int\frac{1+2t^2+t^4}{t^4}\;dt=\int(t^{-4}+2t^{-2}+1)\;dt=-\frac{1}{3t^3}-\frac{2}{t}+t+C=\left|\;t=\mathrm{tg}\,x\;\right|=$$

$$=-\frac{1}{3}\,\mathrm{ctg}^3 x-2\;\mathrm{ctg}\,x+\mathrm{tg}\;x+C\,.◄$$

Приклад 27. Знайти $I=\int\sin 2x\cdot\cos 5x\,dx$.

► До підінтегральної функції застосуємо формулу тригонометрії

$$\sin mx\cdot\cos nx=\frac{1}{2}[\,\sin(m+n)x+\sin(m-n)x\,],$$

тобто

$$I=\int \sin 2x\cdot\cos 5x\,dx=\frac{1}{2}\int(\sin 7x-\sin 3x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{7}\cos 7x+\frac{1}{3}\cos 3x\right)+C\,.\ ◄$$

Приклад 28. Знайти $I=\int \sin 2x\cdot\cos 5x\cdot\sin 9x\,dx$.

► $I=\int \sin 2x\cdot\cos 5x\cdot\sin 9x\,dx=\frac{1}{2}\int(\sin 7x-\sin 3x)\sin 9x\,dx=$

$$=\frac{1}{2}\int(\sin 7x\cdot\sin 9x-\sin 3x\cdot\sin 9x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int(\cos 2x-\cos 16x-\cos 6x+\cos 12x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{\sin 2x}{2}-\frac{\sin 16x}{16}-\frac{\sin 6x}{6}+\frac{\sin 12x}{12}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{8}\left(\sin 2x-\frac{\sin 16x}{8}-\frac{\sin 6x}{3}+\frac{\sin 12x}{6}\right)+C\,.\ ◄$$

Приклад 29. Обчислити $I=\int\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,dx$.

► Для обчислення інтеграла застосуємо тригонометричну підстановку.

$$I=\int\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,dx=\left|\begin{array}{c}x=2\sin t\\ dx=2\cos t\,dt\end{array}\right|=\int\frac{\sqrt{4-4\sin^2 t}}{2\sin t}2\cos t\,dt=$$

$$=2\int\frac{\cos^2 t\,dt}{\sin t}=2\int\frac{1-\sin^2 t}{\sin t}dt=2\int\frac{dt}{\sin t}-2\int\sin t\,dt=2\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|+2\cos t+C\,,$$

де $t=\arcsin\frac{x}{2}$. ◄

IV. Задачі для практичних занять

У задачах 1.1 – 1.15 знайти невизначені інтеграли, використовуючи властивості та таблицю інтегралів.

1.1. $\int\sqrt{x}\,dx$.

1.2. $\int\sqrt[m]{x^n}\,dx$.

1.3. $\int\frac{dx}{2\sqrt{x}}$.

1.4. $\int\frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}dx$.

1.5. $\int(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)\,dx$.

1.6. $\int\left(\frac{1-z}{z}\right)^2dz$.

1.7. $\int\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}dx$.

1.8. $\int\frac{3\cdot 2^x-2\cdot 3^x}{2^x}dx$.

1.9. $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}dx$.

1.10. $\int\operatorname{tg}^2 x\,dx$.

1.11. $\int 2\sin^2\frac{x}{2}\,dx$.

1.12. $\int\frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}\,dx$.

1.13. $\int\frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx$.

1.14. $\int\frac{dx}{\cos 2x+\sin^2 x}$.

1.15. $\int(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)^2\,dx$.

У задачах 1.16 – 1.46 знайти інтеграли, використовуючи прийом введення під знак диференціала.

1.16. $\int\sin x\;d(\sin x)$.

1.17. $\int\operatorname{tg}^3 x\;d(\operatorname{tg}x)$.

1.18. $\int(x+1)^{15}dx$.

1.19. $\int\frac{dx}{(2x-3)^5}$.

1.20. $\int\sqrt[5]{(8-3x)^6}\,dx$.

1.21. $\int\sqrt{8-2x}\,dx$.

1.22. $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$.

1.23. $\int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

1.24. $\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^4+1}}dx$.

1.25. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$.

1.26. $\int \frac{d(1+\ln x)}{\cos^2(1+\ln x)}$.

1.27. $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^3\sqrt{1-x^2}}$.

1.28. $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{1+x^2}dx$.

1.29. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}$.

1.30. $\int \cos 3x \; d(3x)$.

1.31. $\int \cos 3x \; dx$.

1.32. $\int \sin(2x-3)dx$.

1.33. $\int \frac{1}{\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)}dx$.

1.34. $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+a^2}dx$.

1.35. $\int \frac{dx}{x\ln x}$.

1.36. $\int \frac{d\left(\frac{x}{3}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}$.

1.37. $\int \frac{dx}{1+9x^2}$.

1.38. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

1.39. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$.

1.40. $\int \frac{x}{x^4+1}dx$.

1.41. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}dx$.

1.42. $\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

1.43. $\int \frac{1+x-x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}}dx$.

1.44. $\int \frac{dx}{(x+\sqrt{x^2-1})^2}$.

1.45. $\int \frac{2x-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

1.46. $\int \frac{x+(\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}}dx$.

У задачах 1.47 – 1.58 знайти інтеграли, виділивши “цілу частину” підінтегрального дробу.

1.47. $\int \frac{x}{x+4}dx$.

1.48. $\int \frac{x}{2x+1}dx$.

1.49. $\int \frac{3+x}{3-x}dx$.

1.50. $\int \frac{2x-1}{x-2}dx$.

1.51. $\int \frac{(1+x)^2}{x^2+1}dx$.

1.52. $\int \frac{x^4}{1-x}dx$.

1.53. $\int \frac{x^5+1}{x^2+4}dx$.

1.54. $\int \frac{x^2+x+1}{x+1}dx$.

1.55. $\int \frac{x^3+3x}{x^2+2x+2}dx$.

1.56. $\int \frac{8x^3-1}{2x+1}dx$.

1.57. $\int \frac{x^4-2x^2-1}{x^2+1}dx$.

1.58. $\int \frac{2x^2+5}{x-7}dx$.

У задачах 1.59 – 1.76 знайти інтеграли, використавши прийом виділення “повного квадрата”.

1.59. $\int \frac{dx}{x^2-7x+10}$.

1.60. $\int \frac{dx}{x^2+3x-10}$.

1.61. $\int \frac{dx}{(x-1)^2+4}$.

1.62. $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$.

1.63. $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$.

1.64. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x+3)^2}}$.

1.65. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$.

1.66. $\int \frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}$.

1.67. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}$.

1.68. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$.

1.69. $\int \frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2-2}}$. **1.70.** $\int \frac{8x-11}{\sqrt{5+2x-x^2}}dx$.

1.71. $\int \frac{x+2}{x^2+2x+2}dx$. **1.72.** $\int \frac{3x-1}{4x^2-4x+17}dx$.

1.73. $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$. **1.74.** $\int \frac{x-2}{x^2-7x+12}dx$.

1.75. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+2}}dx$. **1.76.** $\int \frac{4-3x}{5x^2+6x+18}dx$.

У задачах 1.77 – 1.84 знайти інтеграли, застосовуючи вказані заміни змінної.

1.77. $\int \frac{dx}{e^x+1}$, $x=-\ln t$. **1.78.** $\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx$, $x=\ln t$.

1.79. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$, $x=t^2$. **1.80.** $\int \frac{x}{\sqrt{x}+1}dx$, $x+1=t^2$.

1.81. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$, $x=\frac{2}{t}$. **1.82.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$, $x=\frac{1}{t}$.

1.83. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^x+1}}dx$, $e^x+1=t^4$. **1.84.** $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dx$, $t=\sin x$.

У задачах 1.85 – 1.99 знайти інтеграли, застосовуючи відповідні заміни змінної.

1.85. $\int x(5x-1)^{19}dx$. **1.86.** $\int x(2x+5)^{10}dx$.

1.87. $\int \frac{x}{(3-x)^7}dx$. **1.88.** $\int \frac{4x+3}{(x-2)^3}dx$.

1.89. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^3}}$. **1.90.** $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}dx$.

1.91. $\int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin x \cdot \cos x}dx$. **1.92.** $\int \frac{x^5}{\sqrt{a^3-x^3}}dx$.

1.93. $\int \frac{x^5}{(x^2-4)^2}dx$. **1.94.** $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$.

1.95. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}$. **1.96.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

1.97. $\int \frac{\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\sin 2\sqrt{x}}dx$. **1.98.** $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\frac{dx}{x^2}$, $x=\frac{1}{z}$.

1.99. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$, $x=\sin^2 z$.

У задачах 1.100 – 1.119 знайти інтеграли інтегруванням частинами.

1.100. $\int x\sin 2x\, dx$. **1.101.** $\int x\cos x\, dx$.

1.102. $\int xe^{-x}dx$. **1.103.** $\int x\, 3^x dx$.

1.104. $\int x \operatorname{arctg} x\, dx$. **1.105.** $\int \ln x\, dx$.

1.106. $\int \operatorname{arctg} x\, dx$. **1.107.** $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\, dx$.

1.108. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}dx$. **1.109.** $\int \arccos x\, dx$.

1.110. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$. **1.111.** $\int x^2e^{-x}dx$.

1.112. $\int x^3e^x dx$. **1.113.** $\int x^2a^x dx$.

1.114. $\int (\arcsin x)^2 dx$.

1.115. а) $\int e^x \sin x\, dx$; б) $\int e^{ax}\cos nx\, dx$.

1.116. $\int e^{3x}(\sin 2x-\cos 2x)\, dx$.

1.117. а) $\int \sin \ln x \, dx$; б) $\int \cos \ln x \, dx$.

1.118. $\int \sin \sqrt{x} \, dx$. **1.119.** $\int x^2 e^x \sin x \, dx$.

У задачах 1.120 – 1.141 знайти інтеграли від дробово-раціональних функцій.

1.120. $\int \frac{dx}{x(x-1)}$. **1.121.** $\int \frac{x}{(x+1)(2x+1)} dx$.

1.122. $\int \frac{x}{2x^2-3x-2} dx$. **1.123.** $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)} dx$.

1.124. $\int \frac{dx}{6x^3-7x^2-3x}$. **1.125.** $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} dx$.

1.126. $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x} dx$.

1.127. $\int \frac{32x}{(2x-1)(4x^2-16x+15)} dx$.

1.128. а) $\int \frac{x^2+4x+4}{(x-1)^2 x} dx$. б) $\int \frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)} dx$.

1.129. а) $\int \frac{x^2+1}{x(x-1)^3} dx$. б) $\int \frac{x^3-6x^2+9x+7}{(x-2)^3(x-5)} dx$.

1.130. а) $\int \frac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4} dx$; б) $\int \frac{7x^3-9}{x^4-5x^3+6x^2} dx$.

1.131. $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2} dx$. **1.132.** $\int \frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2} dx$.

1.133. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$. **1.134.** $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$.

1.135. а) $\int \frac{dx}{1+x^3}$; б) $\int \frac{x}{x^3-1} dx$; в) $\int \frac{x^3+x+1}{x^4-1} dx$.

1.136. а) $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)} dx$; б) $\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1} dx$.

1.137. $\int \frac{dx}{(x^2+2)^2}$. **1.138.** $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2} dx$.

1.139. $\int \frac{2x}{(x+1)(1+x^2)^2} dx$. **1.140.** $\int \frac{dx}{x(4+x^2)^2(1+x^2)}$.

1.141. $\int \frac{x^9}{(x^4-1)^2} dx$.

У задачах 1.142 – 1.152 проінтегрувати ірраціональні функції.

1.142. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$; б) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}} dx$.

1.143. а) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}} dx$; б) $\int \frac{dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2})}$.

1.144. а) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}} dx$; б) $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

1.145. а) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}} dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$.

1.146. а) $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx$; б) $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx$; в) $\int \frac{1}{x}\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} dx$.

1.147. $\int \sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^4 dx$. **1.148.** $\int x^{-1}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-3} dx$.

1.149. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$. **1.150.** $\int x^5 \sqrt[3]{(1+x^3)^2}\,dx$.

1.151. а) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

1.152. а) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$; б) $\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$.

У задачах 1.153 – 1.157 знайти інтеграли від раціональних функцій від x та $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

1.153. а) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$; б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$.

1.154. а) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}$; б) $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+2x}}$.

1.155. а) $\int \frac{x-1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}\,dx$; б) $\int \frac{x-1}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}}\,dx$.

1.156. а) $\int \sqrt{x^2-2x-1}\,dx$; б) $\int \sqrt{1-4x-x^2}\,dx$.

1.157. а) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$; б) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

У задачах 1.158 – 1.178 знайти інтеграли від тригонометричних функцій.

1.158. а) $\int \cos x\cdot\sin 3x\,dx$; б) $\int \cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x\,dx$.

1.159. а) $\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx$; б) $\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx$.

1.160. а) $\int \sin^2 x\,dx$; б) $\int \sin^4 x\,dx$; в) $\int \cos^6 x\,dx$.

1.161. а) $\int \cos^3 x\,dx$; б) $\int \sin^5 x\,dx$; в) $\int \cos^9 x\,dx$.

1.162. а) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx$; б) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}\,dx$.

1.163. а) $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$; б) $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$.

1.164. а) $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$; б) $\int \frac{dx}{\sin^5 x}$.

1.165. а) $\int \frac{dx}{\cos^3 x\cdot\sin^3 x}$; б) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x}$.

1.166. а) $\int \mathrm{tg}^4 x\,dx$; б) $\int \mathrm{tg}^5 x\,dx$; в) $\int \frac{dx}{\mathrm{tg}^8 x}$; г) $\int \frac{dx}{1+\mathrm{tg}\,x}$.

1.167. $\int \frac{dx}{(\sin x+\cos x)^2}$. **1.168.** $\int \sin^3 x\cdot\cos^2 x\,dx$.

1.169. $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cdot\cos x}$. **1.170.** $\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^2}\,dx$.

1.171. $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$. **1.172.** $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}\,dx$.

1.173. $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$. **1.174.** $\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$.

1.175. $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$. **1.176.** $\int \frac{\sqrt{\mathrm{tg}\,x}}{\sin x\cdot\cos x}\,dx$.

1.177. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x\cdot\cos^5 x}}$. **1.178.** $\int \frac{\cos 2x-3}{\cos^4 x\cdot\sqrt{4-\mathrm{ctg}^2 x}}\,dx$.

У задачах 1.179 – 1.182 знайти інтеграли від гіперболічних функцій.

1.179. а) $\int \frac{e^x}{\mathrm{ch}x+\mathrm{sh}x}\,dx$; б) $\int (\mathrm{ch}^2 ax+\mathrm{sh}^2 ax)\,dx$.

1.180. а) $\int \mathrm{sh}^2 x\,dx$; б) $\int \mathrm{sh}^3 x\,dx$; в) $\int \mathrm{ch}^3 x\,dx$.

1.181. а) $\int \mathrm{th}^2 x\, dx$; б) $\int \mathrm{th}^4 x\, dx$; в) $\int \mathrm{cth}^2 x\, dx$.

1.182. а) $\int \mathrm{sh}^2 x\, \mathrm{ch}^3 x\, dx$; б) $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}x\, \mathrm{ch}x}$; в) $\int \frac{dx}{(1+\mathrm{ch}x)^2}$.

У задачах 1.183 – 1.186 знайти інтеграли, використовуючи тригонометричні або гіперболічні підстановки.

1.183. а) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}$; б) $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$.

1.184. а) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}dx$; б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$.

1.185. а) $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$; б) $\int \sqrt{2+x^2}\,dx$.

1.186. а) $\int \sqrt{x^2-4}\,dx$; б) $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}dx$.

У задачах 1.187 – 1.210 проінтегрувати різні функції.

1.187. а) $\int (x^2+3x+5)\cos 2x\, dx$; б) $\int e^{\sqrt[3]{x}}dx$.

1.188. а) $\int \frac{\sqrt{(1+x^2)^5}}{x^6}dx$; б) $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}}\,\frac{dx}{x}$.

1.189. а) $\int \frac{dx}{\sin 2x - 2\sin x}$; б) $\int x\ln(1+x^3)\,dx$.

1.190. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x\cdot \cos^5 x}}$; б) $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$.

1.191. $\int \frac{\mathrm{tg}\, x}{1+\mathrm{tg}\, x+\mathrm{tg}^2 x}dx$. **1.192.** $\int \frac{\mathrm{arctg}\, x}{x^4}dx$.

1.193. $\int \frac{dx}{(1-2^x)^4}$. **1.194.** $\int \sin^8 x\, dx$.

1.195. $\int \frac{x^2-8x+7}{(x^2-3x-10)^2}dx$. **1.196.** $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$.

1.197. $\int \frac{2e^{2x}-e^x-3}{e^{2x}-2e^x-3}dx$. **1.198.** $\int \sqrt{2^x-1}\,dx$.

1.199. $\int e^{2x}\sin(e^x)dx$. **1.200.** $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{2+5\mathrm{tg}^2 x}}$.

1.201. $\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$. **1.202.** $\int \sqrt{2x^2+5x+7}\,dx$.

1.203. $\int \frac{x^7+2}{(x^2+x+1)^2}dx$. **1.204.** $\int \frac{(x^2-1)^2}{(1+x)(1+x^2)^3}dx$.

1.205. $\int \frac{3x^4+4}{x^2(x^2+1)^3}dx$. **1.206.** $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$.

1.207. $\int \sqrt{1+\sin x}\,dx$. **1.208.** $\int \sqrt{\mathrm{tg}\, x}\,dx$.

1.209. $\int \frac{3x^2-5x}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$. **1.210.** $\int x\cdot\sqrt[3]{a+x}\;dx$.

§2. Визначений інтеграл. Невласні інтеграли

I. Короткі теоретичні відомості

Визначений інтеграл. Нехай на відрізку $[a, b]$ визначена функція $f(x)$. Розіб'ємо цей відрізок на n довільних частин точками:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

На кожному частинному відрізку $[x_{i-1}, x_i]$, $i=\overline{1, n}$ візьмемо довільну точку ξ_i і побудуємо суму

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i,$$

де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Сума I_n називається *інтегральною сумою* для функції $f(x)$. Інтегральна сума відповідає даному розбиттю відрізка $[a, b]$ і даному вибору проміжних точок ξ_i. Позначимо $\lambda = \max \Delta x_i$, $i = \overline{1, n}$.

Означення. Якщо існує скінченна границя інтегральної суми I_n при $\lambda \to 0$, яка не залежить від способу розбиття відрізка $[a, b]$ та вибору точок ξ_i, то ця границя називається *визначеним інтегралом* від функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ і позначається $\int_a^b f(x)\,dx$.

Отже, за означенням

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0} I_n = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i .$$

У випадку існування вказаної границі інтегральної суми функція $f(x)$ називається *інтегровною* на відрізку $[a, b]$. Числа a і b називаються відповідно *нижньою і верхньою межею інтегрування*, функція $f(x)$ – *підінтегральною функцією*.

Мають місце такі теореми.

Теорема 1. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то вона інтегровна на цьому відрізку.

Теорема 2. Якщо функція $f(x)$ обмежена і неперервна на відрізку $[a, b]$ і має на ньому скінченну кількість точок розриву, то вона інтегровна на цьому відрізку.

Геометрична інтерпретація. Якщо $f(x) \ge 0$ на $[a, b]$, то визначений інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ $(a < b)$ чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції – фігури, обмеженої лініями: $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (рис.1.1).

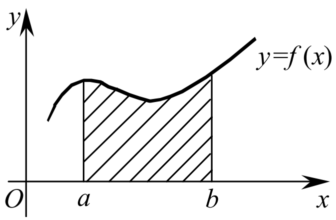


Рис.1.1

У загальному випадку визначений інтеграл дорівнює алгебраїчній сумі площ фігур, обмежених лініями: $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$, причому, площі, розташовані вище осі Ox, входять у цю суму зі знаком “+”, а площі, розташовані нижче осі Ox, – зі знаком “–”.

Основні властивості визначеного інтеграла

1^0. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

2^0. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.

3^0. Якщо $f(x) \ge 0$ на відрізку $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$$

(збереження знака підінтегральної функції визначеним інтегралом).

4^0. Якщо $f(x)$ і $g(x)$ інтегровні на $[a, b]$ і C_1, C_2 – сталі множники, то

$$\int_a^b [C_1 f(x) + C_2 g(x)]\,dx = C_1\int_a^b f(x)\,dx + C_2\int_a^b g(x)\,dx$$

(властивість лінійності інтеграла).

5^0. Якщо $f(x)$ інтегровна на $[a, c]$ і на $[c, b]$, то вона інтегровна і на $[a, b]$, причому

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

(властивість адитивності інтеграла).

Зауважимо, що точка c може бути довільно розташована відносно точок a, b.

6^0. Якщо $m \le f(x) \le M$ на $[a, b]$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a) .$$

7^0. Якщо $f(x)$ неперервна на $[a, b]$, то існує така точка $c \in [a, b]$, що

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

(теорема про середнє значення).

Значення $f(c)$ – середнє значення функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$.

Обчислення визначених інтегралів. Якщо $F(x)$ є будь-якою первісною для неперервної функції $f(x)$, $x \in [a, b]$, то має місце *формула Ньютона-Лейбніца*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\,. \tag{1.22}$$

Різницю $F(b) - F(a)$ умовно позначають $F(x)\big|_a^b$, а формула Ньютона-Лейбніца записується ще й так:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a)\,.$$

При обчисленні визначених інтегралів, як і невизначених, основними методами є метод заміни змінної (або метод підстановки) і метод інтегрування частинами.

Формула заміни змінної у визначеному інтегралі:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt\,,$$

де $x = \varphi(t)$ та її похідна $x' = \varphi'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha, \beta]$;

$\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, а $f[\varphi(t)]$ неперервна на $[\alpha, \beta]$.

Зауважимо, що якщо при обчисленні невизначеного інтеграла заміною $t = \psi(x)$ у первісній функції необхідно було від змінної t повернутися до змінної x, то при обчисленні визначеного інтеграла замість цього треба змінити лише межі інтегрування.

Формула інтегрування частинами у визначеному інтегралі має вигляд:

$$\int_a^b u\,dv = uv\big|_a^b - \int_a^b v\,du\,,$$

де $u(x)$ та $v(x)$ – неперервно-диференційовні на $[a, b]$ функції.

Зауважимо, що для інтегралів з симетричними межами інтегрування мають місце такі співвідношення:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx\,,$$

якщо $f(x)$ – парна функція;

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0\,,$$

якщо $f(x)$ – непарна функція.

Невласні інтеграли. *Невласними інтегралами* є:

1) інтеграли з нескінченними межами інтегрування (*невласні інтеграли першого роду*);

2) інтеграли від необмежених функцій (*невласні інтеграли другого роду*).

Невласний інтеграл першого роду позначається так:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx\,, \quad \text{або} \quad \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx\,, \quad \text{або} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx\,.$$

Означення невласного інтеграла здійснюється за допомогою граничного переходу:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx \tag{1.23}$$

або

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx\,. \tag{1.24}$$

Якщо існують скінченні границі справа в (1.23), (1.24), то відповідний невласний інтеграл *збігається*, в протилежному випадку – інтеграл *розбігається* (кажуть також, що інтеграл *збіжний* або *розбіжний*).

Геометрично невласний інтеграл першого роду

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

у випадку $f(x) > 0$ є площею фігури, що обмежена графіком функції $y = f(x)$, прямою $x = a$ та віссю Ox (асимптотою) (рис.1.2).

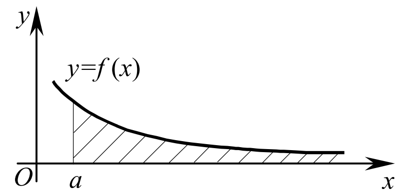


Рис.1.2

Аналогічно вводиться поняття невласного інтеграла по нескінченному проміжку:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{b\to+\infty \\ a\to-\infty}} \int_a^b f(x)\,dx\,, \tag{1.25}$$

де a та b прямують до своїх границь незалежно одне від одного. У цьому випадку, обравши будь-яке c, можна покласти

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx\,. \tag{1.26}$$

При цьому інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ збігається тоді і тільки тоді, коли обидва інтеграли, що стоять справа, збігаються.

Приклади обчислення невласних інтегралів першого роду:

а) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} (-\mathrm{arctg}\,a) = \frac{\pi}{2}$,

б) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} (-\mathrm{arctg}\,a) + \lim_{b\to+\infty} \mathrm{arctg}\,b =$

$\displaystyle= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$.

У цих прикладах інтеграл по скінченному проміжку обчислювався за допомогою первісної функції, а потім здійснювався граничний перехід. Ці два моменти можна поєднати, застосувавши основну формулу інтегрального числення.

Нехай функція $f(x)$ визначена у проміжку $[a,+\infty)$ та інтегровна у кожній його частині $[a,b]$. Якщо для $f(x)$ існує первісна $F(x)$ у всьому проміжку $[a,+\infty)$, то за формулою Ньютона-Лейбніца

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)\,.$$

Звідси зрозуміло, що невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ існує тільки у тому випадку, якщо існує скінченна границя

$$\lim_{b\to+\infty} F(b) = F(+\infty)\,,$$

і тоді

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a)\,.$$

Аналогічно

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{b}\,,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}\,.$$

Остання формула означає, що для збіжності невласного інтеграла повинні існувати обидві скінченні границі $F(+\infty)$ та $F(-\infty)$.

При розгляданні невласних інтегралів перш за все треба з'ясувати питання про збіжність невласного інтеграла. Більше того, у багатьох задачах, пов'язаних з невласними інтегралами, немає необхідності в їх обчисленні, а достатньо знати, збіжний інтеграл чи ні.

Для розв'язання питання про збіжність невласного інтеграла використовуються наступні ознаки збіжності.

Теорема 1 (*ознака порівняння*). Нехай при $a \le x < +\infty$ виконується умова:

$$0 \le f(x) \le g(x)\,.$$

Тоді:

якщо $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ збігається, то збігається і інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$;

якщо $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ розбігається, то розбігається і інтеграл $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$.

Теорема 2 (*гранична ознака порівняння*). Нехай при $a \le x < +\infty$ $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ і існує скінченна границя

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A > 0\,,$$

тоді інтеграли $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ та $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ збігаються або розбігаються одночасно.

Введені ознаки збіжності виконуються за умови, що підінтегральні функції *невід'ємні (додатні)*.

У випадку знакозмінної підінтегральної функції має місце така ознака збіжності.

Теорема 3 (*достатня ознака збіжності невласного інтеграла від знакозмінної функції*). Якщо збігається інтеграл $\int_a^{+\infty} |\,f(x)\,|\,dx$, то збігається і інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Невласний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ називається *абсолютно збіжним*, якщо збігається інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$.

Невласний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ називається *умовно збіжним*, якщо він збігається, а інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ розбігається.

На практиці при використанні ознак порівняння для вияснення питання про збіжність за інтеграл, з яким здійснюється порівняння, береться інтеграл вигляду $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$, $p \in \mathbf{R}$, для якого має місце твердження:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} - \begin{cases} \text{збігається, якщо } p > 1, \\ \text{розбігається, якщо } p \le 1. \end{cases}$$

Такі ж властивості має інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$, $a > 0$.

Інтеграли від необмежених функцій (невласні інтеграли другого роду). Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ у всіх точках, за виключенням їх скінченної кількості, у яких функція необмежена. Точка $c \in [a,b]$ називається *особливою точкою* функції $f(x)$, якщо ця функція необмежена в цій точці, тобто $f(x) \to \infty$ при $x \to c$.

Розглянемо випадки, коли особливою точкою функції $f(x)$ є точка $x = a$; $x = b$; $x = c$, $a < c < b$.

Нехай точка $x = a$ – особлива точка функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$, тобто $f(x)$ неперервна на інтервалі $(a,b]$ і $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$.

Тоді за означенням, невласний інтеграл другого роду

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx. \tag{1.27}$$

Якщо існує скінченна границя у правій частині формули (1.27), то невласний інтеграл називається *збіжним*. У протилежному випадку невласний інтеграл називається *розбіжним*.

Геометрично невласний інтеграл (1.27) у випадку $f(x) > 0$ є площею фігури, що обмежена графіком функції $y = f(x)$, прямою $x = b$ та вертикальною асимптотою $x = a$ (рис.1.3).

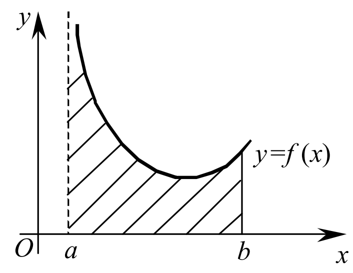


Рис.1.3

Аналогічно, якщо точка $x = b$ – особлива точка функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx. \tag{1.28}$$

Якщо точка $x = c$ – особлива точка функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$, $c \in (a,b)$, то за означенням покладають

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx. \tag{1.29}$$

Невласний інтеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ вважається збіжним, якщо збігаються обидва інтеграли, що стоять справа в (1.29).

Запишемо формули (1.27) – (1.29) з використанням первісної $F(x)$ для функції $f(x)$ на даному проміжку.

$x = a$ – особлива точка, тоді

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_{a+0}^b = F(b) - F(a+0). \tag{1.30}$$

$x = b$ – особлива точка, тоді

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^{b-0} = F(b-0) - F(a). \tag{1.31}$$

$x = c$, $c \in (a,b)$ – особлива точка, тоді

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^{c-0} + F(x)\Big|_{c+0}^b. \tag{1.32}$$

Для збіжності останнього інтеграла потрібне існування скінченних границь $F(c-0)$ та $F(c+0)$.

Ознаки збіжності та розбіжності невласних інтегралів другого роду аналогічні ознакам для невласних інтегралів першого роду.

Наведемо їх для випадку, коли точка $x=a$ – особлива точка розглядуваних функцій на відрізку $[a,b]$.

Теорема 1 (*ознака порівняння*). Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні на проміжку $(a,b]$, мають особливу точку $x=a$ і задовольняють умову $0 \le f(x) \le g(x)$, то із збіжності інтеграла $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ випливає збіжність інтеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, а із розбіжності інтеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ випливає розбіжність інтеграла $\int\limits_a^b g(x)\,dx$.

Теорема 2 (*гранична ознака порівняння*). Нехай $x=a$ – особлива точка функцій $f(x)$ і $g(x)$ на $[a,b]$ і $f(x)>0$, $g(x)>0$ на $(a,b]$. Тоді, якщо існує скінченна границя

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = A > 0,$$

то обидва інтеграли $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ та $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ збігаються або розбігаються одночасно.

Теорема 3 (*достатня ознака збіжності невласного інтеграла від знакозмінної функції*). Якщо $x=a$ – особлива точка функції $f(x)$ і інтеграл $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ збігається, то інтеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ також збігається.

Невласний інтеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ називається *абсолютно збіжним*, якщо збігається інтеграл $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$.

Невласний інтеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ називається *умовно збіжним*, якщо він збігається, а інтеграл $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ розбігається.

На практиці за інтеграл, що використовується для порівняння, часто береться інтеграл вигляду $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p}$, $p>0$, для якого має місце твердження:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p} - \begin{cases} \text{збігається, якщо } p<1, \\ \text{розбігається, якщо } p \ge 1. \end{cases}$$

Використовуються також інтеграли більш загального вигляду:

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^p} \text{ та } \int\limits_a^b \frac{dx}{(x-b)^p},\ p>0,$$

які збігаються при $p<1$ та розбігаються при $p \ge 1$.

II. Контрольні питання та завдання

1. Дайте означення інтегральної суми функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$.

2. Дайте означення визначеного інтеграла.

3. Яка функція називається інтегровною?

4. Чи інтегровна функція $f(x)=\frac{1}{x}$ на відрізку $[1,2]$; на відрізку $[-1, 1]$?

5. Назвіть відомі вам класи інтегровних функцій. Наведіть приклади функцій із цих класів.

6. Перелічіть властивості визначеного інтеграла.

7. Чи є сума двох функцій інтегровною, якщо один з доданків інтегровний, а другий – ні?

8. Відомо, що $\int\limits_a^b f(x)\,dx \ge 0$. Чи випливає з цього, що $f(x) \ge 0 \quad \forall x \in [a,b]$? Наведіть приклади.

9. Відомо, що $\int\limits_a^b f(x)\,dx > \int\limits_a^b g(x)\,dx$. Чи випливає з цього, що $f(x) > g(x) \quad \forall x \in [a,b]$? Наведіть приклади.

10. Запишіть формулу Ньютона-Лейбніца. За яких умов вона буде вірна?

11. Назвіть умови, при виконанні яких будуть вірні:

а) формула заміни змінної; б) формула інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

12. Доведіть, що:

а) якщо $f(x)$ – непарна функція, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$,

б) якщо $f(x)$ – парна функція, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx$, де $f(x)$ – неперервна на відрізку $[-a,a]$ функція.

13. Доведіть, що функція $F(x) = \int\limits_{a}^{x} f(t)\,dt$ є первісною для неперервної функції $f(x)$.

14. Які типи невласних інтегралів існують?

15. Дайте означення невласного інтеграла першого роду.

16. Наведіть геометричний зміст невласного інтеграла першого роду.

17. Дайте означення невласного інтеграла другого роду.

18. Наведіть геометричний зміст невласного інтеграла другого роду.

19. Який зв'язок невласного інтеграла першого роду з первісною для підінтегральної функції. Наведіть відповідні формули.

20. Який зв'язок невласного інтеграла першого роду з первісною для підінтегральної функції. Наведіть відповідні формули.

21. Сформулюйте ознаки збіжності невласних інтегралів першого роду.

22. Сформулюйте ознаки збіжності невласних інтегралів другого роду.

23. Наведіть приклади невласних інтегралів першого та другого роду.

III. Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \dfrac{dx}{\cos^2 x}$.

$$\blacktriangleright \int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}. \blacktriangleleft$$

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int\limits_{0}^{1} xe^{-x}\,dx$.

$$\blacktriangleright \int\limits_{0}^{1} xe^{-x}\,dx = \left| \begin{matrix} u = x; & du = dx \\ dv = e^{-x}\,dx; & v = -e^{-x} \end{matrix} \right| = -xe^{-x}\Big|_{0}^{1} + \int\limits_{0}^{1} e^{-x}\,dx =$$

$$= -e^{-1} - e^{-x}\Big|_{0}^{1} = -2e^{-1} + 1 = \frac{e-2}{e}. \blacktriangleleft$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\int\limits_{1}^{e} \dfrac{\ln^2 x}{x}\,dx$.

$$\blacktriangleright \int\limits_{1}^{e} \frac{\ln^2 x}{x}\,dx = \left| \begin{matrix} \ln x = t \\ \dfrac{dx}{x} = dt \\ x = 1,\ t = 0 \\ x = e,\ t = 1 \end{matrix} \right| = \int\limits_{0}^{1} t^2\,dt = \frac{1}{3}t^3\Big|_{0}^{1} = \frac{1}{3}(1^3 - 0^3) = \frac{1}{3}. \blacktriangleleft$$

Приклад 4. Обчислити інтеграл $\int\limits_{0}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$.

$$\blacktriangleright \int\limits_{0}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \left| \begin{matrix} x = r\sin t \\ dx = r\cos t\,dt \\ x = 0,\ t = 0 \\ x = r,\ t = \dfrac{\pi}{2} \end{matrix} \right| = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t} \cdot r\cos t\,dt =$$

$$= r^2 \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \frac{r^2}{2} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\,dt = \frac{r^2}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$=\frac{r^2}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi\right)-\left(0+\frac{1}{2}\sin 0\right)\right]=\frac{\pi r^2}{4}.\ ◄$$

Приклад 5. Обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3}\frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx$, б) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

► а) підінтегральна функція парна, межі інтегрування – симетричні, тому

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx=2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx=\left|\begin{array}{ll} u=x; & du=dx \\ dv=\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx; & v=\frac{1}{\cos x}\end{array}\right|=$$

$$=2\left[\frac{2\pi}{3}-\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}\right]=2\left(\frac{2\pi}{3}-\ln\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}\right);$$

б) підінтегральна функція непарна, межі інтегрування – симетричні, тому

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1+x^2}}dx=0.\ ◄$$

Приклад 6. Дослідити на збіжність інтеграл

$$I=\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^p},\ p\in\mathbf{R}.$$

► Розглянемо випадки $p=1$ та $p\neq 1$.

а) $p=1$; $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x}=\ln x\Big|_1^{+\infty}=+\infty$ – інтеграл розбігається;

б) $p\neq 1$; $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\int\limits_{1}^{+\infty}x^{-p}\,dx=\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_1^{+\infty}=\frac{1}{1-p}\frac{1}{x^{p-1}}\Big|_1^{+\infty}=$

$$=\frac{1}{1-p}\left[\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{p-1}}-1\right].$$

Далі розглядаємо випадки $p<1$; $p>1$.

$p<1$, $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=+\infty$ – інтеграл розбігається;

$p>1$, $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\frac{1}{p-1}$ – інтеграл збігається.

Отже, невласний інтеграл

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\begin{cases}\frac{1}{p-1}, & p>1,\ \text{збігається},\\ +\infty\ , & p\le 1,\ \text{розбігається},\end{cases}$$

Такі ж властивості має і інтеграл вигляду $\int\limits_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$, $a>0$.

Отже

$$I=\int\limits_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x^p}-\begin{cases}p>1-\text{збіжний},\\ p\le 1-\text{розбіжний}.\end{cases}\ ◄$$

Приклад 7. Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_{0}^{+\infty}xe^{-x^2}dx$.

► Застосовуючи формулу Ньютона-Лейбніца, маємо:

$$\int\limits_{0}^{+\infty}xe^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-x^2}d(-x^2)=-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^{+\infty}=0-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.\ ◄$$

Приклад 8. Знайти інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}$.

► Застосовуючи формулу Ньютона-Лейбніца, маємо:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x+2)^2+5}=\frac{1}{\sqrt5}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt5}\Big|_{-\infty}^{+\infty}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt5}\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{\pi}{\sqrt5}.\ ◄$$

Приклад 9. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^{10}}$.

► Підінтегральна функція $f(x)=\frac{1}{1+x^{10}}$ у проміжку інтегрування менша, ніж $g(x)=\frac{1}{x^{10}}$, тобто $\frac{1}{1+x^{10}}<\frac{1}{x^{10}}$, $x\in[1,+\infty)$ і інтеграл

$$I_1=\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{10}}=-\frac{1}{9}x^{-9}\Big|_1^{+\infty}=0-\left(-\frac{1}{9}\right)=\frac{1}{9},$$

тобто збіжний.

Тоді і інтеграл $I=\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^{10}}$ за ознакою порівняння теж збіжний, причому $I<I_1$. ◄

Приклад 10. Дослідити на збіжність інтеграл
$$\int_2^{+\infty} \frac{2+\sin x+\ln x}{\sqrt{x}}\,dx.$$

► Для порівняння з підінтегральною функцією
$$f(x)=\frac{2+\sin x+\ln x}{\sqrt{x}}$$
візьмемо функцію $g(x)=1/\sqrt{x}$.

Маємо $\dfrac{2+\sin x+\ln x}{\sqrt{x}} > \dfrac{1}{\sqrt{x}} > 0$, $x\in[2,+\infty)$,

а інтеграл $\int_2^{+\infty}\dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_2^{+\infty} = +\infty$ – розбігається, тоді і заданий інтеграл також розбігається. ◄

Приклад 11. Дослідити на збіжність інтеграл
$$\int_1^{+\infty} \ln\frac{x^2+2}{x^2+1}\,dx.$$

► Підінтегральну функцію $f(x)=\ln\dfrac{x^2+2}{x^2+1}$ порівняємо з функцією $g(x)=1/x^2$, тобто розглянемо
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\dfrac{x^2+2}{x^2+1}}{\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2+1}\right)}{\dfrac{1}{x^2}} = \left|\begin{array}{c}\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2+1}\right)\sim\dfrac{1}{x^2+1}\\ x\to+\infty,\ \dfrac{1}{x^2+1}\to 0\end{array}\right| =$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{x^2+1}}{\dfrac{1}{x^2}}=1.$$

Згідно з граничною ознакою порівняння маємо, що оскільки інтеграл $\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2}$ збігається, то заданий інтеграл теж збігається. ◄

Приклад 12. Дослідити на збіжність інтеграл
$$I=\int_0^1\frac{dx}{x^p},\ p\in\mathbf{R}.$$

► Якщо $p<0$, то інтеграл не є невласним.

Якщо $p>0$, то маємо невласний інтеграл другого роду; точка $x=0$ – особлива точка підінтегральної функції на проміжку інтегрування.

При $p=1$ маємо
$$\int_0^1\frac{dx}{x} = \ln x\,\Big|_{0+0}^{1} = 0-(-\infty)=+\infty$$ – інтеграл розбігається.

При $p\neq 1$ маємо
$$\int_0^1\frac{dx}{x^p} = \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_{0+0}^{1} = \frac{1}{1-p}\,\frac{1}{x^{p-1}}\Big|_{0+0}^{1} = \begin{cases}\infty, & p>1,\\ \dfrac{1}{1-p}, & p<1.\end{cases}$$

Отже,
$$\int_0^1\frac{dx}{x^p} - \begin{cases}\text{збігається при } p<1,\\ \text{розбігається при } p\geq 1.\end{cases}$$ ◄

Приклад 13. Знайти інтеграл $\int_0^1 \ln x\,dx$.

► Точка $x=0$ – особлива точка підінтегральної функції на проміжку $[0, 1]$.
$$\int_0^1\ln x\,dx = \left|\begin{array}{l} u=\ln x,\ du=\dfrac{dx}{x}\\ dv=dx,\quad v=x\end{array}\right| = x\cdot\ln x\,\Big|_{0+0}^{1} - \int_0^1 dx = 0-\lim_{x\to0+0}x\ln x-1=-1.$$

Тут враховано, що
$$\lim_{x\to0+0}x\cdot\ln x=\{0\cdot\infty\}=\lim_{x\to0+0}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to0+0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to0+0}x=0.$$ ◄

Приклад 14. Знайти інтеграл $\int_0^1\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

► Точка $x=1$ – особлива точка підінтегральної функції на проміжку $[0, 1]$.
$$\int_0^1\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int_0^1\arcsin x\ d(\arcsin x)=\frac{1}{2}(\arcsin x)^2\Big|_0^{1-0}=\frac{\pi^2}{8}-0=\frac{\pi^2}{8}.$$ ◄

Приклад 15. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_0^1\dfrac{dx}{e^{\sqrt[3]{x}}-1}$.

► Особлива точка $x=0$. При $x\to+0$ для знаменника підінтегральної функції маємо еквівалентну нескінченно малу:

$$e^{\sqrt[3]{x}}-1\sim\sqrt[3]{x}.$$

Інтеграл $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Big|_{0+0}^{1}=\frac{3}{2}$ збігається. Тоді і заданий інтеграл $\int\limits_0^1\frac{dx}{e^{\sqrt[3]{x}}-1}$ теж збігається. ◄

Приклад 16. Знайти інтеграл $\int\limits_{-1}^{1}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}}dx$ або встановити його розбіжність.

► На заданому проміжку інтегрування точка $x=0$ – особлива, функція $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}}$ у цій точці необмежена. Маємо невласний інтеграл другого роду:

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}}dx=\int\limits_{-1}^{0}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}}dx+\int\limits_{0}^{1}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}}dx.$$

Розглядаємо перший інтеграл:

$$\int\limits_{-1}^{0}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}}dx=\int\limits_{-1}^{0}\left(x^{-\frac{2}{3}}-x^{-\frac{5}{3}}\right)dx=\left(3x^{\frac{1}{3}}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\right)\Bigg|_{-1}^{0-0}=+\infty.$$

Цей інтеграл розбіжний. Отже і заданий інтеграл розбіжний. ◄

Приклад 17. Дослідити на збіжність інтеграл

$$\int\limits_0^1\frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}}dx.$$

► Особлива точка $x=1$. Представимо підінтегральну функцію у вигляді:

$$f(x)=\frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1+x}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}=\frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1+x}}\cdot\frac{1}{(1-x)^{1/3}}.$$

Порівняємо заданий інтеграл з інтегралом вигляду $\int\limits_0^1\frac{1}{(1-x)^{1/3}}dx$, який є збіжним, бо $p=\frac{1}{3}<1$. Згідно з граничною ознакою порівняння, вихідний інтеграл є також збіжним, бо

$$\lim_{x\to1}\frac{\frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1+x}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}}{\frac{1}{(1-x)^{1/3}}}=\frac{\cos^2 1}{\sqrt[3]{2}}>0.$$ ◄

Приклад 18. Дослідити на збіжність інтеграл

$$\int\limits_1^2\frac{\cos x}{\sqrt[3]{x-1}}dx.$$

► Особлива точка $x=1$. Заданий інтеграл є абсолютно збіжним, тому що $\left|\frac{\cos x}{\sqrt[3]{x-1}}\right|\le\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$ і інтеграл $\int\limits_1^2\frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}=\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}}\Big|_{1+0}^{2}=\frac{3}{2}$ збігається. ◄

IV. Задачі для практичних занять

У задачах 1.211 – 1.231 обчислити визначені інтеграли.

1.211. $\int\limits_0^1\sqrt{1+x}\,dx$.

1.212. $\int\limits_4^9\frac{y-1}{\sqrt{y}+1}dy$.

1.213. $\int\limits_0^1(e^x-1)^4e^xdx$.

1.214. $\int\limits_1^e\frac{1+\lg x}{x}dx$.

1.215. $\int\limits_0^2\frac{x}{(x^2+1)^2}dx$.

1.216. $\int\limits_1^2\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$.

1.217. $\int\limits_0^1xe^{-x}dx$.

1.218. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{x}{\sin^2 x}dx$.

1.219. $\int\limits_0^{\pi}x^3\sin x\,dx$.

1.220. $\int\limits_0^{e-1}\ln(x+1)\,dx$.

1.221. $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$. **1.222.** $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$.

1.223. $\int\limits_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx$. **1.224.** $\int\limits_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3}\,dx$.

1.225. $\int\limits_0^{1/2} \frac{x^3}{x^2-3x+2}dx$. **1.226.** $\int\limits_2^3 \frac{dx}{2x^2+3x-2}$.

1.227. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x+x^3}$. **1.228.** $\int\limits_0^{a/2} \frac{a}{(x-a)(x-2a)}dx$.

1.229. $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x}$. **1.230.** $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^5 x\cdot\sin 2x\,dx$.

1.231. $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,dx$.

У задачах 1.232 – 1.240 обчислити невласні інтеграли з нескінченними межами інтегрування (або встановити їх розбіжність).

1.232. а) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$; б) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

1.233. а) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}dx \quad (a>0)$; б) $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$.

1.234. а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{x^2+1}dx$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

1.235. а) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+x)}$; б) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^3}dx$.

1.236. а) $\int\limits_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; б) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

1.237. а) $\int\limits_0^{+\infty} x\sin x\,dx$; б) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\,dx$.

1.238. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1+x^2}{x^3}dx$. **1.239.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}dx$.

1.240. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

У задачах 1.241 – 1.245 дослідити на збіжність невласні інтеграли з нескінченними межами інтегрування.

1.241. а) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x}{x^3+1}dx$; б) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^4}dx$.

1.242. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{13}}{(x^5+x^3+1)^3}dx$. **1.243.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x}dx$.

1.244. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{1+x^4}}dx$. **1.245.** $\int\limits_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln\ln x}$.

У задачах 1.246 – 1.255 обчислити невласні інтеграли від необмежених функцій (або встановити їх розбіжність).

1.246. а) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$.

1.247. а) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$; б) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

1.248. $\int\limits_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$. **1.249.** $\int\limits_0^1 x\ln x\,dx$.

1.250. $\int\limits_3^5 \frac{x^2}{\sqrt{(x-3)(5-x)}}dx$. **1.251.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x^2+2\sqrt{1-x^2}}$.

1.252. $\int\limits_{-1}^{1}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$. **1.253.** $\int\limits_{-1}^{1}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}}dx$.

1.254. $\int\limits_{-1}^{0}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}dx$. **1.255.** $\int\limits_{0}^{1}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}dx$.

У задачах 1.256 – 1.260 дослідити на збіжність невласні інтеграли від необмежених функцій.

1.256. $\int\limits_{0}^{1}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}dx$. **1.257.** $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$.

1.258. $\int\limits_{0}^{1}\frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x}-1}dx$. **1.259.** $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{e^{x}-\cos x}$.

1.260. $\int\limits_{-1}^{1}\frac{\ln(2+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}dx$.

§3. Застосування визначеного інтеграла

I. Короткі теоретичні відомості

Застосування визначеного інтеграла в задачах геометрії

1. **Обчислення площ плоских фігур**

а) *декартова система координат.* Площу фігури, обмеженої лініями: $f(x)\ge 0,\ x=a,\ x=b,\ y=0$, знаходять за формулою

$$S=\int\limits_a^b f(x)\,dx. \qquad (1.33)$$

Якщо фігура обмежена кривими $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ $(f_2(x)\ge f_1(x))$, прямими $x=a$, $x=b$ (рис.1.4), то формула обчислення площі має вигляд:

$$S=\int\limits_a^b[f_2(x)-f_1(x)]\,dx. \qquad (1.34)$$

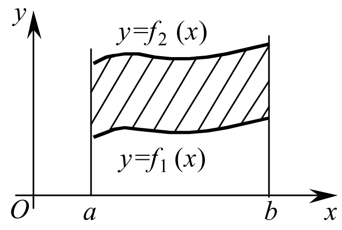


Рис.1.4

б) *полярна система координат.* Площа криволінійного сектора, обмеженого кривою, заданою у полярних координатах рівнянням $\rho=\rho(\varphi)$, і двома променями $\varphi=\alpha,\ \varphi=\beta\ (\alpha<\beta)$, обчислюється за формулою

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta\rho^2(\varphi)\,d\varphi. \qquad (1.35)$$

в) якщо крива $y=y(x),\quad x\in[a,b]$ задана *параметричними рівняннями*

$$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t), \quad \alpha\le t\le\beta,\end{cases}$$

причому $x(\alpha)=a$, $y(\beta)=b$, то площа криволінійної трапеції, обмеженої цією кривою, прямими $x=a$, $y=b$ і віссю Ox, виражається формулою

$$S=\int\limits_a^b y(x)\,dx=\left|\begin{array}{c}x=x(t),\\ y=y(t),\\ dx=x'(t)dt,\\ x=a,\ t=\alpha,\\ x=b,\ t=\beta.\end{array}\right|=\int\limits_\alpha^\beta y(t)x'(t)\,dt, \qquad (1.36)$$

де α і β визначаються з рівнянь $a=x(\alpha),\ b=x(\beta)$ $[y(t)\ge 0$ при $\alpha\le t\le\beta]$.

2. **Обчислення довжини l плоскої кривої**

а) крива задана у прямокутних координатах рівнянням $y=f(x)$, $a\le x\le b$:

$$l=\int\limits_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx; \qquad (1.37)$$

б) крива задана у полярних координатах рівнянням $\rho=\rho(\varphi)$, $\alpha\le\varphi\le\beta$:

$$l=\int\limits_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}\,dx;$$

в) при параметричному заданні кривої $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \ \alpha \le t \le \beta \end{cases}$:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt . \qquad (1.38)$$

Довжину дуги гладкої просторової кривої, заданої рівняннями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \ \alpha \le t \le \beta, \end{cases}$$

обчислюють за формулою, аналогічною формулі (1.38):

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt . \qquad (1.39)$$

3. **Обчислення об'ємів тіл**

а) *об'єм тіла за площами паралельних перерізів* обчислюється за формулою

$$V = \int_a^b S(x)\,dx , \qquad (1.40)$$

де $S(x)$ – площа перерізу тіла площиною, перпендикулярною осі Ox, $a \le x \le b$;

б) *об'єм тіл обертання.*

Об'єм тіла, отриманого від обертання криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x)$, прямими $x = a,\ x = b,\ y = 0$, *навколо осі* Ox, виражається формулою

$$V_x = \pi \int_a^b y^2(x)\,dx , \qquad (1.41)$$

а об'єм тіла, отриманого від обертання тієї ж криволінійної трапеції *навколо осі* Oy, обчислюється за формулою

$$V_y = 2\pi \int_a^b x\, y(x)\,dx .$$

Аналогічно об'єм тіла, отриманого від обертання криволінійної трапеції, обмеженої кривою $x = \varphi(y)$, прямими $y = c,\ y = d,\ x = 0$, *навколо осі* Oy, знаходять за формулою

$$V_y = \pi \int_c^d x^2(y)\,dy . \qquad (1.42)$$

Якщо фігура, обмежена кривими $y_1 = f_1(x)$ і $y_2 = f_2(x)$ $[0 \le f_1(x) \le f_2(x)]$ та прямими $x{=}a,\ x{=}b$, обертається *навколо осі* Ox, то об'єм тіла обертання

$$V_x = \pi \int_a^b [f_2^{\,2}(x) - f_1^{\,2}(x)]\,dx . \qquad (1.43)$$

Для фігури, обмеженої кривими $x_1 = \varphi_1(y)$ і $x_2 = \varphi_2(y)$ $[0 \le \varphi_1(y) \le \varphi_2(y)]$ та прямими $y{=}c,\ y{=}d$, яка обертається *навколо осі* Oy, формула об'єма тіла обертання має вигляд

$$V_y = \pi \int_c^d [\varphi_2^{\,2}(y) - \varphi_1^{\,2}(y)]\,dy .$$

Якщо криволінійний сектор, обмежений кривою $\rho = \rho(\varphi)$ і променями $\varphi_1 = \alpha,\ \varphi_2 = \beta$, обертається *навколо полярної осі*, то об'єм тіла обертання визначається так:

$$V = \frac{2}{3}\pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho^3 \sin\varphi\, d\varphi . \qquad (1.44)$$

4. **Обчислення площі поверхні обертання.** Нехай крива, задана неперервною функцією $y = f(x) \ge 0$, $a \le x \le b$, обертається навколо осі Ox. Тоді площа поверхні, утвореної обертанням кривої $y = f(x)$ навколо осі Ox, знаходиться за формулою

$$P_x = 2\pi \int_a^b y(x)\,dl , \qquad (1.45)$$

де dl – диференціал дуги кривої.

Для кривої, заданої у прямокутних координатах, формула (1.45) має вигляд

$$P_x = 2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1 + y'^2}\, dx ; \qquad (1.46)$$

– для полярної системи

$$P_x = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho \sin\varphi \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\, d\varphi ; \qquad (1.47)$$

– якщо крива задана параметрично, то

$$P_x = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt . \qquad (1.48)$$

Застосування визначеного інтеграла в задачах фізики

1. **Маса неоднорідного стрижня**, розташованого на відрізку $[a, b]$, якщо лінійна густина стрижня дорівнює $\rho(x)$, обчислюється за формулою

$$M = \int_a^b \rho(x)\,dx .$$

2. **Статичні моменти** M_x, M_y **та моменти інерції** I_x, I_y **плоскої кривої** $y = f(x)$ обчислюються за формулами:

а) відносно осі Ox: $M_x = \int_a^b y\,dl$, $I_x = \int_a^b y^2 dl$,

б) відносно осі Oy: $M_y = \int_a^b x\,dl$, $I_y = \int_a^b x^2 dl$,

де $dl = \sqrt{1 + y'^2}dx$ – диференціал дуги кривої.

3. **Статичні моменти та моменти інерції криволінійної трапеції**, обмеженої кривою $y = f(x)$, прямими: $y = 0,\ x = a,\ x = b$, обчислюються за формулами:

а) відносно осі Ox: $M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y\,dS = \frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx$, $\quad I_x = \frac{1}{3}\int_a^b y^3 dx$;

б) відносно осі Oy: $M_y = \int_a^b x\,dS = \int_a^b xy\,dx$, $\quad I_y = \int_a^b x^2 dS = \int_a^b x^2 y\,dx$.

У цих формулах $dS = y\,dx$ – диференціал площі криволінійної трапеції.

4. **Координати центра ваги**:

а) плоскої кривої $y = f(x)$ $\quad (a \le x \le b)$

$$x_c = \frac{1}{l}\int_a^b x\,dl, \qquad y_c = \frac{1}{l}\int_a^b y\,dl ,$$

де l – довжина кривої, dl – диференціал дуги кривої;

б) криволінійної трапеції

$$x_c = \frac{1}{S}\int_a^b x\,dS, \qquad y_c = \frac{1}{2S}\int_a^b y\,dS ,$$

де $dS = y\,dx$, S – площа фігури.

Мають місце такі теореми.

Теорема (*перша теорема Гульдіна*). Площа поверхні обертання, яка утворюється від обертання дуги AB навколо осі, що її не перетинає і розташована в площині дуги AB, дорівнює добутку довжини кола, яке отримується від обертання центра ваги дуги AB навколо цієї осі, на довжину l_{AB} дуги AB.

Якщо віссю обертання є вісь Ox, відповідна формула має вигляд:

$$P_x = 2\pi y_c\, l_{AB} .$$

Теорема (*друга теорема Гульдіна*). Об'єм тіла обертання, яке утворюється від обертання плоскої області D навколо осі, що її не перетинає і розташована в площині області D, дорівнює добутку довжини кола, яке отримується від обертання центра ваги області D навколо цієї осі, на площу S_D області D.

Якщо віссю обертання є вісь Ox, відповідна формула має вигляд:

$$V_x = 2\pi y_c\, S_D .$$

5. **Обчислення роботи.** Робота змінної сили $F = F(x)$, яка діє у напрямку осі Ox на відрізку $[a, b]$, визначається формулою

$$A = \int_a^b F(x)\,dx . \tag{1.49}$$

6. **Довжина шляху** S, який проходить матеріальна точка, що рухається зі швидкістю $v = v(t)$ за проміжок часу $[t_1, t_2]$, обчислюється за формулою

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt .$$

II. Контрольні питання та завдання

1. Як обчислити площу плоскої фігури при різних формах її задання?

2. Як обчислити довжину дуги кривої:

а) у декартовій системі координат?

б) у полярних координатах?

в) у випадку, коли крива задана параметричними рівняннями?

3. Наведіть формулу для обчислення об'єму тіла за площами його паралельних перерізів.

4. Наведіть формули для об’ємів тіл обертання: навколо осі Ox, навколо осі Oy.

5. Запишіть формулу для обчислення площі поверхні обертання.

6. Як знайти масу неоднорідного стрижня?

7. За якими формулами знаходяться координати центра ваги: а) плоскої кривої; б) криволінійної трапеції?

8. Запишіть формулу для обчислення роботи змінної сили $F(x)$.

III. Приклади розв’язання задач

У цьому пункті розглянуто 30 прикладів розв’язання задач, які за своєю тематикою розподілились так:

1. Обчислення площ: *приклади 1 – 6*.
2. Обчислення довжини дуг: *приклади 7 – 11*.
3. Обчислення об’ємів тіл за площами паралельних перерізів: *приклади 12, 13*.
4. Обчислення об’ємів тіл обертання: *приклади 14 – 17*.
5. Обчислення площі поверхні обертання: *приклади 18, 19*.
6. Обчислення статичних моментів, моментів інерції, координат центра ваги кривої та плоскої області: *приклади 20 – 23*.
7. Різні фізичні задачі: *приклади 24 – 30*.

Приклад 1. Обчислити площу області, обмеженої прямою $y = x$ та кривою $y = 2 - x^2$ (рис.1.5).

► Знайдемо абсциси точок перетину даних ліній: $\begin{cases} y = 2 - x^2, \\ y = x \end{cases}$.

З цієї системи дістанемо $x_1 = -2,\ x_2 = 1$. Це і є межі інтегрування. За формулою (1.34)

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$$

знаходимо площу $S = \int_{-2}^{1} [(2 - x^2) - x]dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-2}^{1} = \frac{9}{2}.$

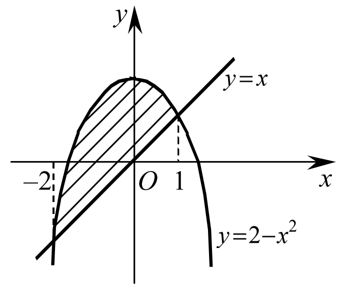


Рис.1.5 ◄

Приклад 2. Знайти площу області, обмеженої віссю Ox та кривою $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

► Знайдемо точки перетину заданої кривої з віссю Ox. Легко бачити, що одним з коренів рівняння $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ є $x_1 = 1$. Два інші корені знайдемо так: поділивши ліву частину рівняння на $x - 1$, отримаємо $x^2 - 5x + 6$. Прирівнюючи цей вираз нулю, маємо: $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

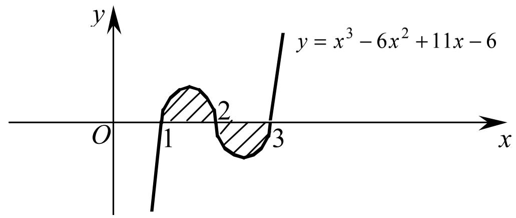


Рис.1.6

З графіка заданої функції (рис.1.6) видно, що на відрізку $[2; 3]$ область знаходиться під віссю Ox, тому

$$S = S_1 - S_2 = \int_1^2 (x^3 - 6x^2 + 11x - 6)\,dx - \int_2^3 (x^3 - 6x^2 + 11x - 6)\,dx =$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - 6\frac{x^3}{3} + 11\frac{x^2}{2} - 6x\right)\Big|_1^2 - \left(\frac{x^4}{4} - 6\frac{x^3}{3} + 11\frac{x^2}{2} - 6x\right)\Big|_2^3 = \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}. ◄$$

Приклад 3. Знайти площу фігури, обмеженої кривою $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ (лемніската Бернуллі).

► Крива задана у полярній системі координат (рис.1.7)

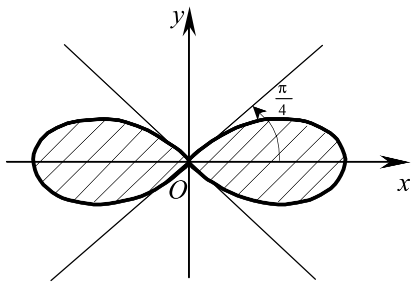


Рис.1.7

Має місце формула (1.35):

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\, d\varphi .$$

Оскільки фігура симетрична відносно обох осей, то шукана площа дорівнює почетвереній площі фігури, яка знаходиться у першій чверті.

При $\varphi_1 = 0$ $\rho = a$, при $\rho = 0$ $\varphi_2 = \frac{\pi}{4}$, тобто $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$.

Маємо

$$S = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} a^2 \cos 2\varphi\, d\varphi = 2a^2\int_0^{\pi/4}\cos 2\varphi\, d\varphi = 2a^2 \left.\frac{\sin 2\varphi}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2 . ◄$$

Приклад 4. Обчислити площу фігури, обмеженої петлею декартова листа, заданого рівнянням $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (рис.1.8).

► Перейдемо до полярної системи координат: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Маємо:

$$\rho^3(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi) - 3a\rho^2\cos\varphi\cdot\sin\varphi = 0 .$$

Звідси $\rho = \dfrac{3a\cos\varphi\cdot\sin\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}$.

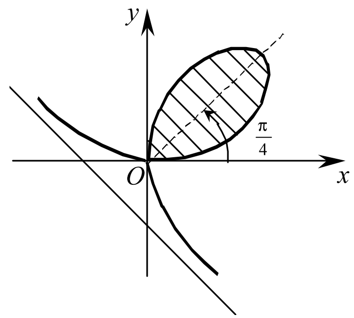


Рис.1.8

Крива симетрична відносно бісектриси першого координатного кута, тому що у рівнянні $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ координати x і y входять симетрично, тобто заміна x на y або y на x не змінюють рівняння. Тому можна обчислити половину шуканої площі, для якої з нерівності $\rho \ge 0$ знайдемо межі інтегрування:

$$3a\cos\varphi\cdot\sin\varphi \ge 0, \quad \sin 2\varphi \ge 0, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4} .$$

Тоді

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\left(\frac{3a\cos\varphi\cdot\sin\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}\right)^2 d\varphi = \frac{9}{2}a^2\int_0^{\pi/4}\frac{\cos^2\varphi\cdot\sin^2\varphi}{\cos^6\varphi + 2\cos^3\varphi\cdot\sin^3\varphi + \sin^6\varphi}\, d\varphi =$$

$$= \frac{9}{2}a^2\int_0^{\pi/4}\frac{\cos^4\varphi\cdot\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi(\cos^6\varphi + 2\cos^3\varphi\cdot\sin^3\varphi + \sin^6\varphi)} d\varphi =$$

$$= \frac{9}{2}a^2\int_0^{\pi/4}\frac{\dfrac{\cos^4\varphi\cdot\sin^2\varphi}{\cos^6\varphi}}{\cos^2\varphi\left(\dfrac{\cos^6\varphi}{\cos^6\varphi} + 2\dfrac{\cos^3\varphi\cdot\sin^3\varphi}{\cos^6\varphi} + \dfrac{\sin^6\varphi}{\cos^6\varphi}\right)} d\varphi =$$

$$= \frac{9}{2}a^2\int_0^{\pi/4}\frac{\mathrm{tg}^2\varphi}{\cos^2\varphi(1 + 2\,\mathrm{tg}^3\varphi + \mathrm{tg}^6\varphi)} d\varphi = \frac{9}{2}a^2\int_0^{\pi/4}\frac{\mathrm{tg}^2\varphi}{\cos^2\varphi(1+\mathrm{tg}^3\varphi)^2}\, d\varphi =$$

$$= \left|\begin{array}{c} \mathrm{tg}\,\varphi = z, \\ \varphi = 0,\ z = 0, \\ \varphi = \dfrac{\pi}{4},\ z = 1. \end{array}\right| = \frac{9}{2}a^2\int_0^1\frac{z^2 dz}{(1+z^3)^2} = \frac{9a^2}{2}\cdot\frac{1}{3}\int_0^1\frac{d(1+z^3)}{(1+z^3)^2} =$$

$$= -\frac{3a^2}{2}\cdot\frac{1}{1+z^3}\bigg|_0^1 = -\frac{3a^2}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right) = \frac{3}{4}a^2 .$$

Остаточно $S = 2\cdot\frac{3}{4}a^2 = \frac{3}{2}a^2$. ◄

Приклад 5. Знайти площу фігури, обмеженої еліпсом $x = a\cos t,\ \ y = b\sin t,\ \ 0 \le t \le 2\pi$.

► Крива задана параметрично, скористаємось формулою (1.36):

$$S = \int_a^b y(x)dx = \left| \begin{array}{l} x = x(t), \\ y = y(t), \\ dx = x'(t)dt, \\ x = a,\ t = \alpha, \\ x = b,\ t = \beta. \end{array} \right| = \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt .$$

Оскільки фігура симетрична відносно обох осей, то шукана площа дорівнює почетвереній площі фігури, розташованій у першій чверті.

Тому:

$$S = 4\int_0^a y(x)dx = \left| \begin{array}{l} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \\ dx = -a\sin t\,dt, \\ x = 0,\ \ t = \frac{\pi}{2}, \\ x = a,\ \ t = 0. \end{array} \right| = -4\int_{\pi/2}^{0} b\sin t\cdot a\sin t\ dt = -4ab\int_{\pi/2}^{0}\sin^2 t\,dt =$$

$$= 2ab\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)\,dt = 2ab\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab .$$ ◄

Приклад 6. Обчислити площу фігури, обмеженої петлею лінії: $x = 3t^2,\ \ y = t(3-t^2)$.

► З параметричних рівнянь видно, що крива симетрична відносно осі Ox, тому визначимо межі інтегрування для половини площі. При $t_1 = 0$: $x = 0$ і $y = 0$, при $t_2 = \sqrt{3}$: $x = 9$ і $y = 0$, тобто $0 \le t \le \sqrt{3}$. Отже

$$S = 2\int_0^{\sqrt{3}} t(3-t^2)6t\,dt = 12\int_0^{\sqrt{3}}(3t^2 - t^4)\,dt = 12\left(t^3 - \frac{t^5}{5}\right)\bigg|_0^{\sqrt{3}} = \frac{72}{5}\sqrt{3} .$$ ◄

Приклад 7. Знайти довжину кривої $y^2 = x^3\ \ (0 \le x \le 1)$, $y \ge 0$.

► Скористаємося формулою (1.37) для обчислення довжини кривої

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx .$$

Враховуючи, що $y = \sqrt{x^3}$, $y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$, маємо

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,dx = \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\bigg|_0^1 = \frac{8}{27}\left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27} = \frac{8}{27}\left(\frac{13}{8}\sqrt{13} - 1\right).$$ ◄

Приклад 8. Знайти довжину дуги кривої $y = \ln x$ від точки з абсцисою $x_1 = 1$ до точки з абсцисою $x_2 = \sqrt{3}$.

► Оскільки $y = \ln x,\ \ y' = \frac{1}{x}$, то

$$l = \int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\,dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx = \left| \begin{array}{l} x = \operatorname{tg} z, \\ dx = \frac{dz}{\cos^2 z}, \\ x = 1,\quad z = \frac{\pi}{4}, \\ x = \sqrt{3},\ \ z = \frac{\pi}{3}. \end{array} \right| =$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 z}}{\operatorname{tg} z}\,\frac{dz}{\cos^2 z} = \int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{dz}{\sin z\cdot\cos^2 z} = \int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{\sin^2 z + \cos^2 z}{\sin z\cdot\cos^2 z}dz =$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/3}\left(\frac{\sin z}{\cos^2 z} + \frac{1}{\sin z}\right)dz = \left(\frac{1}{\cos z} + \ln\left|\operatorname{tg}\frac{z}{2}\right|\right)\bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = 2 - \sqrt{2} + \ln\frac{1}{\sqrt{3}} - \ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} =$$

$$= 2 - \sqrt{2} - \frac{1}{2}\ln 3 - \ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} .$$ ◄

Приклад 9. Знайти довжину кардіоїди $\rho = a(1+\cos\varphi)$ (рис.1.9).

► Для обчислення довжини лінії, заданої у полярній системі координат, має місце формула

$$l=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi .$$

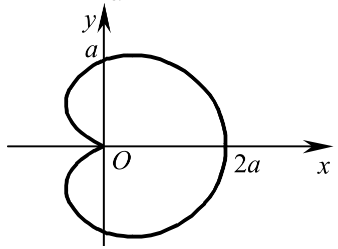


Рис.1.9

Змінюючи полярний кут від 0 до π, одержимо половину шуканої довжини. Отже:

$$l=2\int\limits_0^{\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=2a\int\limits_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos\varphi}\,d\varphi=$$

$$=4a\int\limits_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi=8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi}=8a\,.\blacktriangleleft$$

Приклад 10. Знайти довжину астроїди:

$x=R\cos^3\dfrac{t}{4}$, $y=R\sin^3\dfrac{t}{4}$ (рис.1.10).

► Для параметричного задання кривої: $l=\int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$.

Маємо:

$$x'^2+y'^2=\left(-\frac{3}{4}R\cos^2\frac{t}{4}\cdot\sin\frac{t}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}R\sin^2\frac{t}{4}\cdot\cos\frac{t}{4}\right)^2=\frac{9R^2}{16}\sin^2\frac{t}{4}\cos^2\frac{t}{4};$$

$$\sqrt{x'^2+y'^2}=\frac{3R}{4}\sin\frac{t}{4}\cos\frac{t}{4}=\frac{3R}{8}\sin\frac{t}{2}.$$

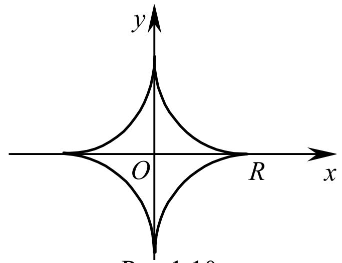


Рис.1.10

Довжину чверті астроїди знаходитемо від точки $A(R,\,0)$ до точки $B(0,\,R)$. Тоді

при $x_1=R$ маємо: $R=R\cos^3\dfrac{t}{4}$, $t_1=0$;

при $x_2=0$: $R\cos^3\dfrac{t}{4}=0$, $\dfrac{t}{4}=\dfrac{\pi}{2}$, $t_2=2\pi$.

Отже, $l=4\dfrac{3R}{8}\int\limits_0^{2\pi}\sin\dfrac{t}{2}dt=-3R\cos\dfrac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=-3R(-1-1)=6R$. ◄

Приклад 11. Знайти довжину гвинтової лінії:

$$x=a\cos t\,,\ y=a\sin t\,,\ z=ct\,.$$

► Скористаємось формулою (1.39) для просторового випадку:

$$l=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt\,.$$

Довжина лінії від точки $A\ (t=0)$ до точки M (t – будь-яке) буде

$$l=\int\limits_0^{t}\sqrt{a^2\sin^2t+a^2\cos^2t+c^2}\,dt=\int\limits_0^{t}\sqrt{a^2+c^2}\,dt=\sqrt{a^2+c^2}\,t\,.\blacktriangleleft$$

Приклад 12. Знайти об’єм еліпсоїда $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

► Скористаємось формулою (1.40):

$$V=\int\limits_a^b S(x)\,dx\,.$$

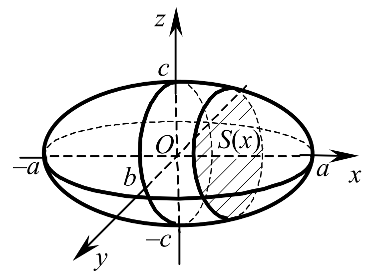


Рис.1.11

У перерізі еліпсоїда (рис.1.11) площиною, паралельною площині Oyz на відстані x від неї, утворюється еліпс ($x = \text{const}$)

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \quad \text{або} \quad \frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = 1$$

з півосями $b_1 = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, $\quad c_1 = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$.

Площа такого еліпса (приклад 5) дорівнює

$$S(x) = \pi b_1 c_1 = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Отже,

$$V = \pi bc \int_{-a}^{a}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx = 2\pi bc\int_{0}^{a}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx = 2\pi bc\left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_0^a = \frac{4}{3}\pi abc .$$

Зокрема, якщо $a = b = c = R$, то еліпсоїд перетворюється в кулю, об'єм якої $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. ◀

Приклад 13. Знайти об'єм тіла, обмеженого двома прямими круговими циліндрами: $x^2 + y^2 = R^2$ і $x^2 + z^2 = R^2$.

▶ У перерізі тіла площиною, перпендикулярною осі Ox , маємо квадрат, сторона якого дорівнює $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, площа якого

$$S(x) = y^2 = R^2 - x^2 .$$

На рис.1.12 зображена восьма частина тіла.

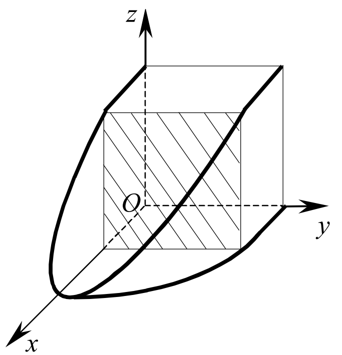


Рис.1.12

Маємо: $V = 8\int_0^R (R^2 - x^2)\,dx = 8\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^R = \frac{16}{3}R^3$. ◀

Приклад 14. Знайти об'єм тіла обертання, утвореного обертанням параболи $y = x^2$ на проміжку $1 \le x \le 2$ навколо: а) осі Ox , б) осі Oy .

▶ а) за формулою (1.41):

$$V_x = \pi\int_a^b y^2(x)\,dx \quad (\text{ у нашому випадку } y^2 = x^4)$$

знаходимо $V_x = \pi\int_1^2 x^4 dx = \pi\frac{x^5}{5}\Bigg|_1^2 = \frac{31\pi}{5}$;

б) за формулою (1.42): $V_y = \pi\int_c^d x^2(y)\,dy \quad (x(y) = \sqrt{y})$

маємо $V_y = \pi\int_1^4 y\,dy = \pi\frac{y^2}{2}\Bigg|_1^4 = \frac{15\pi}{2}$. ◀

Приклад 15. Фігура, обмежена кривими $y = \sqrt{2px}$ і $y = \frac{2}{\sqrt{p}}(x - p)^{3/2}$, обертається навколо осі Ox (рис.1.13). Знайти об'єм тіла обертання.

▶ Знайдемо точку перетину заданих кривих:

$$\sqrt{2px} = \frac{2}{\sqrt{p}}(x - p)^{3/2} \Rightarrow x = 2p,\ y = 2p .$$

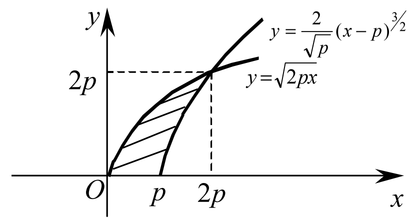


Рис.1.13

Шуканий об'єм

$$V = V_1 - V_2,$$

де V_1 – об'єм, отриманий обертанням криволінійної трапеції, обмеженої параболою $y=\sqrt{2px}$ $(0 \le x \le 2p)$,

V_2 – об'єм, отриманий обертанням криволінійної трапеції, обмеженої півкубічною параболою $y = \frac{2}{\sqrt{p}}(x-p)^{3/2}$ $(p \le x \le 2p)$.

Тоді

$$V = \pi\int_0^{2p} y_1^2 dx - \pi\int_p^{2p} y_2^2 dx = \pi\cdot 2p\int_0^{2p} x\,dx - \pi\frac{4}{p}\int_p^{2p}(x-p)^3 dx =$$

$$= 2\pi p\,\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{2p} - \frac{4\pi}{p}\cdot\frac{(x-p)^4}{4}\Bigg|_p^{2p} = 4\pi p^3 - \pi p^3 = 3\pi p^3. ◄$$

Приклад 16. Кардіоїда $\rho = a(1+\cos\varphi)$ обертається навколо полярної осі. Знайти об'єм тіла обертання.

► За формулою (1.44)

$$V = \frac{2}{3}\pi\int_\alpha^\beta \rho^3 \sin\varphi\, d\varphi$$

маємо

$$V = \frac{2}{3}\pi\int_0^\pi a^3(1+\cos\varphi)^3\sin\varphi\,d\varphi = -\frac{2}{3}\pi a^3\,\frac{(1+\cos\varphi)^4}{4}\Bigg|_0^\pi = \frac{8}{3}\pi a^3. ◄$$

Приклад 17. Знайти об'єм тіла обертання, отриманого обертанням однієї арки циклоїди:

$$x = a(t-\sin t),\; y = a(1-\cos t)$$

навколо своєї основи.

► Основа арки циклоїди співпадає з віссю Ox (рис.1.14).

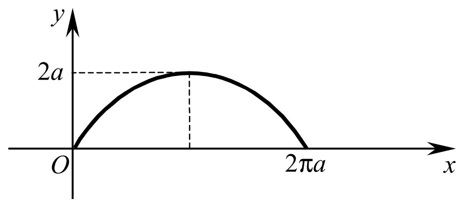


Рис.1.14

Отже,

$$V_x = \pi\int_0^{2\pi a} y^2 dx = \pi\int_{t_1}^{t_2} y^2(t)\,x'(t)\,dt = \left|\begin{array}{l} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \\ x'(t) = a(1-\cos t) \\ x = 0, \quad t = 0 \\ x = 2\pi a,\; t = 2\pi \end{array}\right| =$$

$$= \pi\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\cdot a(1-\cos t)\,dt = \pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3 dt =$$

$$= \pi a^3\int_0^{2\pi}(1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)\,dt =$$

$$= \pi a^3\int_0^{2\pi}\left(1 - 3\cos t + \frac{3}{2}(1+\cos 2t) - (1-\sin^2 t)\cos t\right)dt =$$

$$= \pi a^3\left[\left(t - 3\sin t + \frac{3}{2}t + \frac{3}{4}\sin 2t - \sin t\right)\Bigg|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\sin^2 t\; d(\sin t)\right] =$$

$$= \pi a^3\left(2\pi + 3\pi + \frac{\sin^3 t}{3}\Bigg|_0^{2\pi}\right) = 5\pi^2 a^3. ◄$$

Приклад 18. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням параболи $y^2 = 2px$ навколо осі Ox $(0 \le x \le x_0)$.

► За формулою (1.46)

$$P_x = 2\pi\int_a^b y(x)\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

при $y=\sqrt{2px}$ і $y' = \frac{p}{\sqrt{2px}}$ маємо:

$$P_x = 2\pi\int_0^{x_0}\sqrt{2px}\cdot\sqrt{1+\frac{p^2}{2px}}\,dx = 2\pi\sqrt{p}\int_0^{x_0}\sqrt{2x+p}\,dx =$$

$$= \pi\sqrt{p}\int_0^{x_0}\sqrt{2x+p}\,d(2x+p) = \frac{2\pi\sqrt{p}}{3}(2x+p)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{x_0} =$$

$$= \frac{2\pi\sqrt{p}}{3}\left[(2x_0+p)^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2\pi}{3}\left[(2x_0+p)\sqrt{2x_0p+p^2} - p^2\right]. ◄$$

Приклад 19. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням:

а) астроїди $x = a\cos^3 t,\ \ y = a\sin^3 t$ (рис.1.10) навколо осі Ox;

б) лемніскати Бернуллі $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$ (рис.1.7) навколо полярної осі.

► а) використовуючи формулу (1.48):

$$P_x = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt,$$

знайдемо $x'_t = -3a\cos^2 t\sin t$, $y'_t = 3a\sin^2 t\cos t$,

$$\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)} = \sqrt{9a^2(\cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t)} = 3a\sin t\cos t.$$

Шукана площа дорівнює подвоєній площі поверхні, описаної дугою астроїди, яка лежить у першому квадранті $\left(0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}\right)$:

$$P_x = 2\cdot 2\pi\int_0^{\pi/2} a\sin^3 t\cdot 3a\sin t\cdot\cos t\,dt = 12\pi a^2\int_0^{\pi/2}\sin^4 t\cdot\cos t\,dt =$$

$$= 12\pi a^2\frac{\sin^5 t}{5}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{12}{5}\pi a^2;$$

б) за формулою (1.47):

$$P_x = 2\pi\int_\alpha^\beta \rho\sin\varphi\sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}\,d\varphi,$$

маючи на увазі, що $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, $\rho' = -\dfrac{a\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$, знайдемо

$$P_x = 2\cdot 2\pi\int_0^{\pi/4} a\sqrt{\cos 2\varphi}\cdot\sin\varphi\cdot\sqrt{a^2\cos 2\varphi + \frac{a^2\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}}\,d\varphi =$$

$$= 2\cdot 2\pi\cdot a^2\int_0^{\pi/4}\sin\varphi\,d\varphi = 4\pi a^2(-\cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 4\pi a^2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right). ◄$$

Приклад 20. Для півкола, заданого рівнянням

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

знайти: а) статичний момент відносно осі Ox, б) момент інерції відносно осі Ox, в) координати центра ваги.

► Статичний момент M_x кривої та момент інерції I_x знаходимо за формулами

$$M_x = \int_a^b f(x)\,dl = \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx; \quad I_x = \int_a^b y^2\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Маємо: $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$, $\quad \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\dfrac{x^2}{r^2-x^2}} = \dfrac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}$.

а) статичний момент M_x обчислюємо так:

$$M_x = \int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx = r\int_{-r}^{r}dx = rx\Big|_{-r}^{r} = 2r^2;$$

б) момент інерції I_x обчислюємо так:

$$I_x = \int_a^b y^2\sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_{-r}^{r}(r^2-x^2)\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx = r\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx =$$

$$= 2r\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\,dx = \left|\begin{array}{c} x = r\sin t, \\ dx = r\cos t\,dt, \\ x = 0,\ t = 0, \\ x = r,\ t = \dfrac{\pi}{2}. \end{array}\right| = 2r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t}\cdot r\cos t\,dt =$$

$$= 2r^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt = r^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,dt = r^3\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi r^3}{2};$$

в) координати центра ваги кривої знайдемо за формулами:

$$x_c = \frac{1}{l}\int_a^b x\sqrt{1+y'^2}\,dx = \frac{1}{l}M_y, \quad y_c = \frac{1}{l}\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx = \frac{1}{l}M_x.$$

Оскільки $l = \pi r$ – довжина дуги півкола, $M_x = 2r^2$, центр ваги півкола знаходиться на осі Ox і $x_c = 0$, то

$$y_c = \frac{1}{\pi r}\cdot 2r^2 = \frac{2r}{\pi}. ◄$$

Приклад 21. Для фігури, розташованої у першій чверті та обмеженої дугою еліпса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ і осями координат, знайти: а) статичний момент відносно осі Oy, б) момент інерції відносно осі Oy, в) координати центра ваги.

► Розглядувана фігура має вигляд:

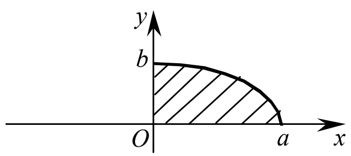


Рис.1.15

а) статичний момент M_y плоскої фігури знаходимо за формулою

$$M_y = \int_0^a xy\,dx = \left| \begin{array}{l} x = a\cos t \\ y = b\sin t \\ dx = -a\sin t\,dt \\ x = 0, \quad t = \frac{\pi}{2} \\ x = a, \quad t = 0 \end{array} \right| = \int_{\pi/2}^{0} a\cos t\cdot b\sin t(-a\sin t)\,dt =$$

$$= a^2 b\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cdot\cos t\,dt = a^2 b\left.\frac{\sin^3 t}{3}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2 b}{3};$$

б) момент інерції I_y відносно осі Oy знайдемо так:

$$I_y = \int_0^a x^2 y\,dx = \int_{\pi/2}^{0} a^2\cos^2 t\cdot b\sin t(-a\sin t)\,dt = a^3 b\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cdot\cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{a^3 b}{4}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t\,dt = \frac{a^3 b}{8}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4t)\,dt = \frac{a^3 b}{8}\left.\left(t - \frac{\sin 4t}{4}\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^3 b}{16};$$

в) координати центра ваги плоскої фігури обчислимо за формулами

$$x_c = \frac{1}{S}\int_0^a xy\,dx = \frac{1}{S}M_y, \qquad y_c = \frac{1}{2S}\int_0^a y^2\,dx = \frac{1}{S}M_x.$$

Оскільки площа чверті еліпса $S = \frac{\pi ab}{4}$, $M_y = \frac{a^2 b}{3}$, то

$$x_c = \frac{4a^2 b}{3\pi ab} = \frac{4a}{3\pi},$$

$$y_c = \frac{1}{2S}\int_0^a y^2\,dx = \frac{2}{\pi ab}\int_{\pi/2}^{0} b^2\sin^2 t(-a\sin t)\,dt =$$

$$= \frac{2ab^2}{\pi ab}\int_{\pi/2}^{0}(1-\cos^2 t)\,d(\cos t) = \frac{2b}{\pi}\left.\left(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3}\right)\right|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = \frac{4b}{3\pi}. ◄$$

Приклад 22. Знайти координати центра ваги C півкола AB $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, використовуючи першу теорему Гульдіна.

► Згідно з першою теоремою Гульдіна

$$P_x = 2\pi y_c\, l_{AB}.$$

Звідси

$$y_c = \frac{P_x}{2\pi l_{AB}}.$$

При обертанні півкола навколо осі Ox отримуємо сферу, площа поверхні якої

$$P_x = 2\pi\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2 - x^2}\cdot\sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)^2}\,dx = 4\pi\int_0^a a\,dx = 4\pi a^2.$$

Довжина півкола $l_{AB} = \pi a$. Тоді

$$y_c = \frac{4\pi a^2}{2\pi^2 a} = \frac{2a}{\pi}.$$

З симетрії півкола відносно осі Oy маємо, що $x_c = 0$.

Отже, $C\left(0, \dfrac{2a}{\pi}\right)$. ◄

Приклад 23. Застосовуючи другу теорему Гульдіна, знайти координати центра ваги C області D, що обмежена однією аркою циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$ і віссю Ox.

► Згідно з другою теоремою Гульдіна

$$V_x = 2\pi y_c S_D .$$

Звідси

$$y_c = \frac{V_x}{2\pi S_D} .$$

Об'єм тіла, яке утворено від обертання області навколо осі Ox, визначається так:

$$V_x = \pi \int_0^{2\pi a} y^2\, dx = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^3\, dt = 5\pi^2 a^3 \text{ (перевірте!).}$$

Площа області D визначається так:

$$S_D = \int_0^{2\pi a} y\, dx = a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2\, dt = 3\pi a^2 \text{ (перевірте!).}$$

Тоді

$$y_c = \frac{5\pi^2 a^3}{2\pi \cdot 3\pi a^2} = \frac{5a}{6} .$$

З симетрії області D відносно прямої $x = \pi a$ випливає, що $x_c = \pi a$.

Отже, $C\left(\pi a, \dfrac{5a}{6}\right)$. ◄

Приклад 24. Обчислити роботу, яку треба затратити, щоб тіло маси m підняти з поверхні Землі вертикально вверх на висоту h, якщо радіус Землі дорівнює R.

► Згідно з законом Ньютона сила F притягання тіла Землею дорівнює

$$F = \gamma \frac{mM}{x^2} ,$$

де M – маса Землі, $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \dfrac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{сек}^2}$ – гравітаційна стала, x – відстань від центра тіла до центра Землі.

Покладемо сталу $\gamma m M = k$, тоді $F(x) = \dfrac{k}{x^2}$, $R \le x \le R + h$. При $x = R$ сила $F(R)$ дорівнює вазі тіла $P = mg$, тобто

$$\frac{k}{R^2} = P ,$$

звідси $k = PR^2$ і $F(x) = \dfrac{PR^2}{x^2}$.

За формулою (1.49)

$$A = \int_a^b F(x)\, dx$$

маємо

$$A = PR^2 \int_R^{R+h} x^{-2} dx = -\frac{PR^2}{x}\Bigg|_R^{R+h} = \frac{PRh}{R+h} . ◄$$

Приклад 25. Знайти роботу, яку необхідно затратити, щоб викачати рідину з конічного резервуара, оберненого вершиною вниз, якщо висота резервуара дорівнює H, радіус основи R.

► Обчислимо вагу елементарного шару рідини, що знаходиться на глибині x (рис.1.16).

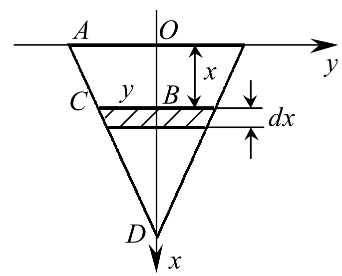


Рис.1.16

Висоту dx цього шару виберемо такою, щоб вважати цей шар циліндром радіуса $y = CB$. Тоді вага dP цього шару дорівнює

$$dP = \gamma g dV = \gamma g \pi y^2 dx ,$$

де γ – густина рідини, g – прискорення вільного падіння, dV – об'єм циліндра.

З подібності трикутників AOD і CBD знаходимо y:

$$\frac{R}{y}=\frac{H}{H-x},\ \ y=\frac{R}{H}(H-x).$$

Отже, $dP=\dfrac{\pi\gamma g R^2}{H^2}(H-x)^2\,dx$.

Елементарна робота, яку необхідно затратити для підняття цього шару рідини на висоту x, дорівнює

$$dA=x\cdot dP=x\frac{\pi\gamma g R^2}{H^2}(H-x)^2\,dx,$$

тому

$$A=\frac{\pi\gamma g R^2}{H^2}\int_0^H x(H-x)^2\,dx=\frac{\pi\gamma g R^2}{H^2}\left(H^2\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}Hx^3+\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^H=$$

$$=\frac{\pi\gamma g R^2 H^2}{12}.\ ◄$$

Приклад 26. Швидкість тіла задається формулою $v=\sqrt{1+t}$ м/сек. Знайти шлях, який пройде тіло за перші 10 сек з початку руху.

► Якщо $v=f(t)$ – швидкість руху матеріальної точки, то шлях S, який вона пройде за проміжок часу $[t_1,t_2]$, обчислюється за формулою

$$S=\int_{t_1}^{t_2}f(t)\,dt.$$

Згідно з цієї формулою маємо

$$S=\int_0^{10}\sqrt{1+t}\,dt=\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{10}=\frac{2}{3}\left((1+10)^{\frac{3}{2}}-1\right)\approx 23{,}7\text{ м}.\ ◄$$

Приклад 27. Обчислити кінетичну енергію однорідного кругового конуса, який обертається з кутовою швидкістю w навколо своєї осі, якщо задані радіус основи конуса R, висота H і густина γ.

► Врахуємо, що кінетична енергія тіла, яке обертається навколо нерухомої осі, обчислюється за формулою

$$K=\frac{1}{2}I\,w^2,$$

де w – кутова швидкість, I – момент інерції відносно осі обертання.

За елементарну масу dm візьмемо масу порожнього циліндра висотою h із внутрішнім радіусом r, товщиною стінок dr (рис.1.17).

Тоді $dm=2\pi rh\gamma\,dr$ $(0\le r\le R)$. Трикутники OCD та OAB подібні. Тому $\dfrac{r}{R}=\dfrac{H-h}{H}$, тобто $h=H\left(1-\dfrac{r}{R}\right)$.

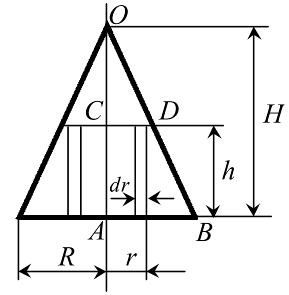


Рис.1.17

Маємо

$$dm=2\pi\gamma H\left(1-\frac{r}{R}\right)r\,dr,$$

елементарний момент інерції dI дорівнює

$$dI=r^2dm=2\pi\gamma H\left(1-\frac{r}{R}\right)r^3dr.$$

Отже, момент інерції всього конуса є

$$I=\int_0^R dI=\int_0^R 2\pi\gamma H\left(1-\frac{r}{R}\right)r^3dr=2\pi\gamma H\left(\frac{R^4}{4}-\frac{R^4}{5}\right)=\frac{1}{10}\pi\gamma HR^4.$$

Остаточно, кінетична енергія конуса дорівнює

$$K=\frac{1}{2}I\,w^2=\frac{1}{20}\pi\gamma HR^4w^2.\ ◄$$

Приклад 28. Знайти кількість тепла, що виділяється змінним струмом $I=I_0\cos wt$ за період $\dfrac{2\pi}{w}$ у провіднику з опором R.

► За законом Джоуля-Ленца кількість тепла, що виділяється постійним струмом за період t, дорівнює $Q=0{,}24I^2Rt$.

Елементарна кількість тепла, що виділяється за термін dt, обчислюється згідно з цією формулою так:

$$dQ=0{,}24I^2R\,dt=0{,}24I_0{}^2R\cos^2 wt\,dt.$$

$$Q = 0{,}24 I_0^2 R \int_0^{\frac{2\pi}{w}} \cos^2 wt\, dt = 0{,}24 I_0^2 R \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{2\pi}{w}} (1 + \cos 2wt)\, dt =$$

$$= 0{,}24 I_0^2 \frac{R}{2} \left(t + \frac{\sin 2wt}{2w} \right) \Bigg|_0^{\frac{2\pi}{w}} = \frac{0{,}24 I_0^2 R\pi}{w}. \blacktriangleleft$$

Приклад 29. Знайти силу тиску води на вертикальну стінку у формі півкруга, радіус якого $R = 3$ м і який знаходиться на поверхні води (рис.1.18).

► За законом Паскаля сила тиску рідини на площадку обчислюється за формулою

$$P = \rho g h S,$$

де ρ – густина рідини, g – прискорення сили тяжіння, h – глибина занурення, S – площа площадки.

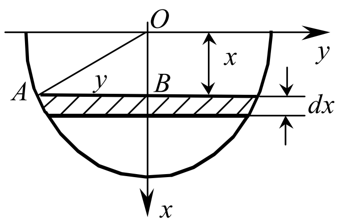


Рис.1.18

Позначимо глибину занурення через x. Елементарну площадку будемо вважати циліндром радіуса $y = AB$ і висотою dx. Із трикутника AOB маємо $y = \sqrt{AO^2 - OB^2} = \sqrt{9 - x^2}$. Тоді площа площадки дорівнює $S = 2y\,dx = 2\sqrt{9 - x^2}\,dx$.

Знайдемо диференціал тиску на елементарну площадку:

$$dP = \rho g x \cdot 2y\,dx = 2\rho g x \sqrt{9 - x^2}\,dx.$$

Отже,

$$P = 2\rho g \int_0^3 x\sqrt{9 - x^2}\,dx = -2\rho g \cdot \frac{1}{2} \int_0^3 \sqrt{9 - x^2}\,d(9 - x^2) =$$

$$= -\frac{2\rho g}{3} (9 - x^2)^{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^3 = 18\rho g \text{Н}. \blacktriangleleft$$

Приклад 30. У стінці резервуара, який заповнений водою, на глибині h є прямокутний $b \times h$ отвір, з якого вода витікає з швидкістю $v = \sqrt{2gh}$ (м/сек). Знайти об'єм води, що витікає за 1 сек.

► Врахуємо, що швидкість витікання рідини визначається за законом Торичеллі за формулою $v = \mu\sqrt{2gh}$, де h – висота стовпця рідини над отвором, g – прискорення сили тяжіння. Покладемо $\mu = 1$.

Елементарній смужці шириною dx на глибині x відповідає швидкість

$$v = \sqrt{2gx}.$$

За тим, що площа смужки дорівнює $b \cdot dx$, об'єм води, що витікає через цю смужку, дорівнює

$$dQ = \sqrt{2gx} \cdot b\,dx.$$

Тоді

$$Q = \sqrt{2g} \cdot b \int_0^h \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{2g}\, b h^{3/2}. \blacktriangleleft$$

IV. Задачі для практичних занять

Площа фігури

1.261. Обчислити площі фігур, що обмежені:

а) параболами $y = x^2$ та $y = \sqrt{x}$;

б) параболами $y = x^2$ та $y = \frac{x^3}{3}$.

1.262. Обчислити площу фігури, обмеженої параболами $y^2 + 8x = 16$ і $y^2 - 24x = 48$.

1.263. Круг, обмежений колом $x^2 + y^2 = 8$, поділений параболою $y = \frac{x^2}{2}$ на дві частини. Знайти площі обох частин.

1.264. Обчислити площі криволінійних фігур, утворених перетином еліпса $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ і гіперболи $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$.

1.265. Обчислити площу фігури, обмеженої віссю абсцис і лінією $y = x(x-1)^2$.

1.266. Знайти площу фігури, обмеженої віссю ординат і лінією $x = y^2(y-1)$.

1.267. Знайти площу петлі лінії $y^2 = x(x-1)^2$.

1.268. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = e^x$, $y = e^{-x}$ і прямою $x = 1$.

1.269. Обчислити площу фігури, що обмежена:

а) віссю ординат і лініями $y = \operatorname{tg} x$ та $y = \frac{2}{3}\cos x$;

б) віссю абсцис і лініями $y = \arcsin x$ та $y = \arccos x$.

1.270. Знайти площу фігури, обмеженої однією аркою циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ і віссю Ox.

1.271. Обчислити площу фігури, обмеженої астроїдою $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$.

1.272. Знайти площу фігури, обмеженої кардіоїдою $x = 2a\cos t - a\cos 2t,\ \ y = 2a\sin t - a\sin 2t$.

1.273. Знайти площу фігури, обмеженої лінією $x = 12\cos t + 5\sin t,\ \ y = 5\cos t - 12\sin t$.

1.274. Знайти площу петлі лінії:

а) $x = 3t^2$, $y = 3t - t^3$; б) $x = t^2 - 1$, $y = t^3 - t$.

1.275. Знайти площу фігури, обмеженої лінією $\rho = a\sin 2\varphi$ (двопелюсткова троянда).

1.276. Знайти площу фігури, обмеженої лінією $\rho = a\cos 5\varphi$.

1.277. Знайти площу загальної частини фігур, обмежених лініями $\rho = 3 + \cos 4\varphi$ і $\rho = 2 - \cos 4\varphi$.

1.278. Обчислити площу фігури, замкненої між лінією $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ та її асимптотою.

1.279. Знайти площу фігури, замкненої між лінією $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ та її асимптотою.

У задачах 1.280 – 1.282 попередньо перейти до полярних координат.

1.280. а) Знайти площу частини фігури, що обмежена лемніскатою Бернуллі $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$;

б) знайти площу частини фігури, що обмежена лемніскатою Бернуллі $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ та лежить всередині кола $x^2 + y^2 = \dfrac{a^2}{2}$.

1.281. Знайти площу фігури, обмеженої лінією

$$x^4 + y^4 = x^2 + y^2.$$

1.282. Знайти площу фігури, обмеженої лінією

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy.$$

Довжина лінії

1.283. а) Знайти довжину дуги ланцюгової лінії $y = a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$, $0 \le x \le b$;

б) знайти довжину дуги параболи $y^2 = 2px$ від її вершини до точки $M(x, y)$. (За незалежну змінну взяти y).

1.284. а) Знайти довжину дуги лінії $y = \ln x$, $\sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$;

б) знайти довжину дуги лінії $y = \ln(1 - x^2)$, $0 \le x \le \dfrac{1}{2}$.

1.285. Обчислити довжину дуги півкубічної параболи $5y^3 = x^2$, замкненої всередині кола $x^2 + y^2 = 6$.

1.286. Знайти довжину дуги петлі лінії $9ay^2 = x(x - 3a)^2$.

1.287. Знайти довжину лінії $x = a\cos^5 t,\ y = a\sin^5 t$.

1.288. Знайти довжину дуги евольвенти кола

$$x = R(\cos t + t\sin t),\ y = R(\sin t - t\cos t),\ 0 \le t \le \pi.$$

1.289. Обчислити довжину дуги лінії

$x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t$, $y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t$, $0\le t\le\pi$.

1.290. Знайти довжину петлі лінії $x=t^2$, $y=t-\dfrac{t^3}{3}$.

1.291. Обчислити довжину дуги кривої $\rho=\sin^3\dfrac{\varphi}{3}$, $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$.

1.292. Обчислити довжину першого витка архімедової спіралі $\rho=a\varphi$.

1.293. Знайти довжину першого витка логарифмічної спіралі $\rho=e^{\varphi}$.

1.294. Обчислити довжину дуги кривої $\varphi=\dfrac{1}{2}\left(\rho+\dfrac{1}{\rho}\right)$, $1\le\rho\le 3$.

Об'єм тіла за площами паралельних перерізів

1.295. Знайти об'єм прямого еліптичного конуса, основою якого є еліпс з півосями a і b, а висота дорівнює h.

1.296. Обчислити об'єм тіла, обмеженого еліптичним параболоїдом $z=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}$ і площиною $z=1$.

1.297. Обчислити об'єм тіла, обмеженого однопорожнинним гіперболоїдом $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}-z^2=1$ і площинами $z=-1$ і $z=2$.

1.298. Обчислити об'єми тіл, обмежених параболоїдом $z=x^2+2y^2$ і еліпсоїдом $x^2+2y^2+z^2=6$.

1.299. Знайти об'єми тіл, утворених перетином двопорожнинного гіперболоїда $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{9}=1$ і еліпсоїда $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}=1$.

1.300. Обчислити об'єм тіла, обмеженого конічною поверхнею $(z-2)^2=\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}$ і площиною $z=0$.

1.301. Обчислити об'єм тіла, обмеженого параболоїдом $2z=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}$ і конусом $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=z^2$.

1.302. Знайти об'єм сегмента, відрізаного від еліптичного параболоїда $\dfrac{y^2}{2p}+\dfrac{z^2}{2q}\le x$ площиною $x=a$.

Об'єм тіла обертання

1.303. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнею, утвореною обертанням параболи $y^2=4x$ навколо своєї осі (параболоїд обертання), і площиною, перпендикулярною до її осі і віддаленої від вершини параболи на відстань, яка дорівнює одиниці.

1.304. Ланцюгова лінія $y=\operatorname{ch}x$ обертається навколо осі абсцис. Отримана при цьому поверхня називається катеноїдом. Знайти об'єм тіла, обмеженого катеноїдом та двома площинами, що відстоять від початку координат на a та b одиниць та перпендикулярні до осі абсцис.

1.305. Криволінійна трапеція, обмежена лінією $y=xe^x$ і прямими $x=1$ та $y=0$, обертається навколо осі Ox. Знайти об'єм тіла, яке при цьому утворюється.

1.306. Фігура, обмежена дугами парабол $y=x^2$ і $y^2=x$, обертається навколо осі абсцис. Обчислити об'єм тіла, яке при цьому утворюється.

1.307. Знайти об'єми тіл, які утворюються обертанням фігури, обмеженої лініями $y=e^x$, $x=0$, $y=0$, ($x\le 0$) навколо:

а) осі Ox; б) осі Oy.

1.308. Знайти об'єм тіла, отриманого обертанням навколо осі Ox трапеції, яка розташована над віссю Ox і обмежена лінією $(x-4)y^2=x(x-3)$.

1.309. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням кривої $\rho=a\cos^2\varphi$ навколо полярної осі.

1.310. Лемніската Бернуллі $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ обертається навколо осі абсцис. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнею, що при цьому утворюється.

1.311. Знайти об'єми тіл, утворених обертанням фігури, обмеженої кривою $x = at^2$, $y = a\ln t$ $(a>0)$ і осями координат, навколо: а) осі Ox, б) осі Oy.

1.312. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої кривою $x = a\cos t$, $y = a\sin 2t$ і віссю Ox $(0 \le x \le a)$.

1.313. Одна арка циклоїди $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$ обертається навколо своєї осі. Обчислити об'єм тіла, обмеженого отриманою поверхнею.

Площа поверхні обертання

1.314. а) Знайти площу поверхні, утвореної обертанням параболи $y^2 = 4ax$ навколо осі абсцис, від вершини до точки з абсцисою $x = 3a$;

б) обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кубічної параболи $3y - x^3 = 0$ навколо осі абсцис ($0 \le x \le a$).

1.315. Обчислити площу катеноїда – поверхні, утвореної обертанням ланцюгової лінії $y = a\,\mathrm{ch}\,\dfrac{x}{a}$ навколо осі абсцис ($0 \le x \le a$).

1.316. Обчислити площу веретеноподібної поверхні, утвореної обертанням одної арки синусоїди $y = \sin x$ навколо осі Ox.

1.317. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox петлі лінії $9ay^2 = x(3a-x)^2$.

1.318. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox дуги кривої $y = \dfrac{1}{6}\sqrt{x}(x-12)$ між точками її перетину з віссю Ox.

1.319. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням дуги кривої $y = e^{-\frac{x}{2}}$, $0 \le x < +\infty$, навколо осі Ox.

1.320. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox дуги лінії $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

1.321. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням дуги кривої $x = a(3\cos t - \cos 3t)$, $y = a(3\sin t - \sin 3t)$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$, навколо: а) осі Ox, б) осі Oy.

1.322. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням петлі кривої $x = a(t^2+1)$, $y = \dfrac{at}{3}(3-t^2)$ навколо осі Ox.

1.323. Трактриса $x = a\left(\cos t + \ln \mathrm{tg}\,\dfrac{t}{2}\right)$, $y = a\sin t$ обертається навколо осі абсцис. Знайти площу отриманої нескінченної поверхні.

1.324. Коло $\rho = 2R\sin\varphi$ обертається навколо полярної осі. Знайти площу отриманої поверхні.

1.325. Знайти площу поверхні, отриманої обертанням дуги кривої $\rho = \dfrac{a}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$ навколо полярної осі.

1.326. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо полярної осі кардіоїди $\rho = a(1+\cos\varphi)$.

Моменти і центр ваги

1.327. Обчислити статичний момент прямокутника з основою a і висотою h відносно його основи.

1.328. Знайти для заданої кривої статичні моменти M_x і M_y відносно координатних осей Ox і Oy:

1) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$;

2) $x^2 + y^2 = a^2$, $y \ge 0$;

3) $y^2 = 2x$, $0 \le x \le 2$;

4) $y^2 - p^2 = 2px$, $x \le 0$;

5) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ \ y\ge 0,\ \ a>b$;

6) $x=a\sin t,\ \ y=b\cos t,\ \ 0\le t\le\dfrac{\pi}{2},\ \ a>b$;

7) $x=a\sin^3 t,\ \ y=b\cos^3 t,\ \ 0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$;

8) $x=a(t-\sin t),\ \ y=a(1-\cos t),\ \ 0\le t\le 2\pi$;

9) $\rho=2a\cos\varphi,\ \ 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$;

10) $\rho=a(1+\cos\varphi),\ \ -\pi\le\varphi\le\pi$;

11) $\rho=ae^{\varphi},\ \ 0\le\varphi\le 2\pi$.

1.329. Знайти статичні моменти M_x і M_y фігур, обмежених заданими кривими, відносно координатних осей Ox і Oy:

1) $y=\cos x,\ \ |x|\le\dfrac{\pi}{2},\ \ y=0$;

2) $y=x^2,\ \ y=\sqrt{x}$;

3) $y=\dfrac{2}{1+x^2},\ \ y=x^2,\ \ x=0,\ \ x\ge 0$;

4) $x=a\sin t,\ \ y=b\cos t,\ \ |t|\le\dfrac{\pi}{2},\ \ y=0$;

5) $x=a(t-\sin t),\ \ y=a(1-\cos t),\ \ 0\le t\le 2\pi,\ \ y=0$;

6) $\rho=a\varphi,\ \ 0\le\varphi\le\pi$;

7) $\rho=a(1+\cos\varphi),\ \ |\varphi|\le\pi$.

1.330. Знайти момент інерції дуги лінії $y=e^x$, $0\le x\le\dfrac{1}{2}$ відносно осі абсцис.

1.331. Обчислити моменти інерції відносно обох осей координат однієї арки циклоїди $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

1.332. Знайти момент інерції півкола радіуса R відносно його діаметра.

1.333. Знайти моменти інерції еліпса з півосями a і b відносно обох його осей.

1.334. Знайти момент інерції конуса, радіус основи якого R, висота h, відносно його осі.

1.335. Знайти момент інерції I_x кривої $x=R\cos\varphi$, $y=R\sin\varphi$, $0\le\varphi\le 2\pi$.

1.336. Знайти центр ваги симетричного параболічного сегмента з основою, яка дорівнює a, і висотою h.

1.337. а) Знайти координати центра ваги півкола $y=\sqrt{r^2-x^2}$;

б) знайти координати центра ваги півкруга, обмеженого віссю абсцис та півколом $y=\sqrt{r^2-x^2}$.

1.338. Користуючись теоремами Гульдіна, знайти:

а) координати центра ваги астроїди $x=a\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$, що лежить в першій чверті;

б) координати центра ваги чверті круга $x^2+y^2\le r^2$;

в) координати центра ваги півкруга $x^2+y^2\le r^2$;

г) координати центра ваги плоскої фігури, обмеженої кривою $y=\cos x$, $-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}$ та віссю абсцис.

1.339. Знайти координати центра ваги кривої:

1) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}},\ \ x\ge 0,\ \ y\ge 0$;

2) $x=a(t-\sin t),\ \ y=a(1-\cos t),\ \ 0\le t\le 2\pi$;

3) $\rho=a(1+\cos\varphi),\ \ 0\le\varphi\le\pi$;

4) $\rho=ae^{\varphi},\ \ 0\le\varphi\le\pi$.

1.340. Знайти координати центра ваги фігури, обмеженої дугою синусоїди $y=\sin x$ і відрізком осі абсцис, $0\le x\le\pi$.

1.341. Довести, що абсциса і ордината центра ваги сектора, обмеженого двома полярними радіусами і лінією, рівняння якої дано в полярних координатах $\rho = \rho(\varphi)$, виражаються так:

$$x_c = \frac{2}{3} \cdot \frac{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^3 \cos\varphi \, d\varphi}{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2 d\varphi}, \quad y_c = \frac{2}{3} \cdot \frac{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^3 \sin\varphi \, d\varphi}{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2 d\varphi}.$$

1.342. Знайти координати центра ваги фігури, обмеженої:

1) піввитком архімедової спіралі $\rho = a\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi$ і променями $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$;

2) правою петлею лемніскати Бернуллі $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$;

3) кривою $\rho = a \sin 2\varphi$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

Деякі задачі фізики

1.343. Обчислити роботу, яку треба затратити, щоб викачати воду, яка заповнює циліндричний резервуар висотою $H = 5$ м, радіус кола основи якого $R = 3$ м.

1.344. Обчислити роботу, яку необхідно затратити, щоб викачати воду, яка наповняє півсферичний резервуар радіуса $R = 0{,}6$ м.

1.345. Обчислити роботу, яку треба затратити, щоб викачати воду з цистерни, обмеженої поверхнями: $y^2 = 2pz$, $x = \pm a$, $z = p$ $(p > 0)$.

Кінетична енергія K тіла, яке обертається навколо нерухомої осі, дорівнює $\dfrac{1}{2} I w^2$, де w – кутова швидкість, I – момент інерції відносно осі обертання.

1.346. Прямокутна пластинка розмірами $a = 50$ см, $b = 40$ см, обертається з постійною кутовою швидкістю $w = 3\pi$ сек$^{-1}$ навколо сторони a. Знайти кінетичну енергію пластинки. Товщина пластинки $d = 0{,}3$ см, густина матеріала, з якого виготовлена пластинка, $\gamma = 8$ г/см^3.

1.347. Трикутна пластинка, основа якої $a = 40$ см, висота $h = 30$ см, обертається навколо своєї основи з постійною кутовою швидкістю $w = 5\pi$ сек$^{-1}$. Знайти кінетичну енергію пластинки, якщо її товщина $d = 0{,}2$ см, густина матеріала, з якого вона виготовлена, $\gamma = 2{,}2$ г/см^3.

Сила тиску P *рідини* на площадку обчислюється за формулою $P = \rho g h S$, де ρ – густина рідини, g – прискорення сили тяжіння, h – глибина занурення, S – площа площадки.

1.348. Знайти силу тиску бензину, який знаходиться у циліндричному баку висотою $h = 3{,}5$ м і радіусом $r = 1{,}5$ м, на його стінки, якщо $\rho = 900$ кг/м^3.

1.349. Обчислити силу, з якою вода тисне на греблю, яка має форму рівнобічної трапеції, верхня основа якої $a = 6{,}4$ м, нижня $b = 4{,}2$ м, висота $H = 3$ м.

Швидкість витікання рідини визначається за законом Торичеллі: $v = \mu\sqrt{2gh}$, де h – висота стовпця рідини над отвором, g – прискорення сили тяжіння.

У задачах 1.350 – 1.352 вважати $\mu = 1$.

1.350. У дні циліндричної посудини, площа основи якої 100 см, висота 30 см, є отвір. Обчислити площу цього отвору, якщо відомо, що вода, яка заповнює посудину, витікає з неї за 2 хвилини.

1.351. У дні котла, який має форму півкулі радіуса $R = 43$ см, утворилася пробоїна площею $S = 0{,}2$ см^2. За який час вода, що наповнює котел, витече з нього?

1.352. У стінці прямокутного бака, який заповнений рідиною, є прямокутний отвір висотою h і шириною b. Верхня сторона отвору паралельна рівню рідини і знаходиться від нього на глибині H. Знайти витрачання рідини через цей отвір. Рівень рідини в баці підтримується сталим.

ГЛАВА 2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

§1. Функції багатьох змінних та їх диференціювання

I. Короткі теоретичні відомості

Основні поняття. Всякий впорядкований набір з n дійсних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називається *точкою* n-вимірного арифметичного простору $\mathbf{R}^n$ і позначається $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ або $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називаються координатами точки P. *Відстань* між точками $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ та $P'(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ визначається за формулою

$$\rho(P, P') = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + \ldots + (x_n - x_n')^2} .$$

Нехай $D \subset \mathbf{R}^n$ – довільна множина точок n - вимірного арифметичного простору. Якщо кожній точці $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ ставиться у відповідність за деяким законом дійсне число $u = f(P)$, то кажуть, що на множині D задана *функція* $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *n змінних* $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Позначення: $u = f(P) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(\vec{x})$.

Множина D називається *областю визначення* функції $u = f(P)$.

Множина $E = \{ u \in \mathrm{R} \,|\, u = f(P), P \in D \}$ – *область значень* функції $u = f(P)$.

При $n = 2$ маємо функцію двох змінних $z = f(x, y)$. Функція двох змінних зображується графічно, взагалі кажучи, у вигляді деякої поверхні в $\mathbf{R}^3$. Проекцією цієї поверхні на площину xOy є множина D.

Лінією рівня функції $z = f(x, y)$ називається лінія на площині xOy, в кожній точці якої функція приймає одне й те ж значення. Рівняння лінії рівня $f(x, y) = c$, c – стала.

Поверхнею рівня функції $u = f(x, y, z)$ називається поверхня, в кожній точці якої функція приймає однакові значення. Рівняння поверхні рівня $f(x, y, z) = c$, c – стала.

Повним приростом функції $f(\vec{x})$ у точці $\vec{x}$ називається величина

$$\Delta u = f(\vec{x} + \overrightarrow{\Delta x}) - f(\vec{x}) =$$
$$= f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n) .$$

Тут $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\overrightarrow{\Delta x} = (\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n)$.

Частинним приростом функції $f(\vec{x})$ у точці $\vec{x}$ по змінній x_k називається величина

$$\Delta_{x_k} u = f(x_1, x_2, \ldots, x_k + \Delta x_k, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n) .$$

Границя та неперервність функції. Число A називається *границею* функції $u = f(P)$ в точці $P_0(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для всіх точок $P \in D$, які задовольняють умові

$$0 < \rho(P, P_0) < \delta ,$$

виконується нерівність

$$| f(P) - A | < \varepsilon .$$

При цьому пишуть:

$$A = \lim_{P \to P_0} f(P) = \lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ \ldots \\ x_n \to a_n}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x}) .$$

Функція $u = f(P)$ називається *неперервною в точці* P_0, якщо виконуються умови:

1) функція $f(P)$ визначена в точці P_0;

2) $\exists \lim\limits_{P \to P_0} f(P)$;

3) $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$.

Якщо в точці P_0 хоча б одна з вказаних умов порушується, то P_0 називається *точкою розриву* функції $f(P)$. Точки розриву можуть бути ізольованими, утворювати лінії розриву, поверхні розриву, тощо.

Функція називається *неперервною в області,* якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

Частинні похідні. *Частинною похідною* функції $u = f(P)$ по змінній x_k у точці P_0 називається границя

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_{x_k} f}{\Delta x_k} ,$$

якщо вона існує.

Позначення: $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$; $f_{x_k}'(\vec{x})$; f_{x_k}'; $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$.

Таким чином,

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_{x_k} f}{\Delta x_k} . \qquad (2.1)$$

Для функції двох змінних $z = f(x,y)$ маємо:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f}{\Delta y}. \qquad (2.2)$$

З означення випливає, що частинна похідна по змінній x_k знаходиться у припущенні, що решта аргументів стала, а змінюється тільки аргумент x_k. При цьому зберігаються всі правила диференціювання функцій однієї змінної. Тобто, щоб знайти частинну похідну $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$, треба взяти звичайну похідну функції $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по змінній x_k, вважаючи решту змінних сталими.

Диференціал функції та його застосування. Функція $u = f(P)$ називається *диференційовною* в точці P, якщо її повний приріст може бути представлено у вигляді

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i + o(\rho), \quad \rho \to 0, \qquad (2.3)$$

де $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2}$.

Повним диференціалом функції $u = f(P)$ в точці P називається головна частина повного приросту функції $f(P)$, лінійна відносно приростів аргументів.

Повний диференціал визначається за формулою:

$$du = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i$$

або

$$du = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i. \qquad (2.4)$$

Тут враховано, що $\Delta x_i = dx_i$.

Для функції двох змінних $z = f(x,y)$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y$$

або

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy. \qquad (2.5)$$

Мають місце такі правила знаходження диференціалів:

$$d(u \pm v) = du \pm dv; \quad d(uv) = vdu + udv; \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}, \ v \neq 0.$$

Тут u та v – функції багатьох змінних.

Повний диференціал використовується в *наближених обчисленнях*. Враховуючи, що при малих значеннях ρ має місце наближена рівність

$$\Delta u \approx du,$$

маємо

$$f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_i$$

або

$$f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n) \approx f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_i. \qquad (2.6)$$

Зокрема, для функції двох змінних $z = f(x,y)$, маємо

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y. \qquad (2.7)$$

Формули (2.6), (2.7) використовуються в наближених обчисленнях.

Диференціювання складних функцій

1. Якщо $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – диференційовна функція змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, які самі є диференційовними функціями незалежної змінної t:

$$x_1 = \varphi_1(t), \ x_2 = \varphi_2(t), \ \ldots, \ x_n = \varphi_n(t),$$

то похідна складної функції $u = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))$ обчислюється за формулою

$$\frac{du}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt}. \qquad (2.8)$$

Зокрема, для функції двох змінних $u = f(x,y)$, де $x = \varphi_1(t)$, $y = \varphi_2(t)$, маємо

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}. \qquad (2.9)$$

2. Якщо $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – диференційовна функція змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, де $x_2 = \varphi_2(x_1)$, $x_3 = \varphi_3(x_1)$, …, $x_n = \varphi_n(x_1)$ – диференційовні функції змінної x_1, то маємо так звану формулу *повної похідної*

$$\frac{du}{dx_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} + \sum_{i=2}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dx_1}. \qquad (2.10)$$

Зокрема, для функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$, де $y = y(x)$, $z = z(x)$, маємо формулу *повної похідної*

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx}. \tag{2.11}$$

3. Якщо $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, де $x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \ldots, t_m)$, $i = \overline{1, n}$, – диференційовні функції змінних t_j, $j = \overline{1, m}$, то мають місце формули:

$$\frac{\partial u}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t_j}, \quad j = \overline{1, m}. \tag{2.12}$$

Зокрема, для функції двох змінних $z = f(x, y)$, де $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, маємо:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}. \tag{2.13}$$

Похідна за напрямом. *Похідною функції* $u = f(x, y, z)$ *за даним напрямом* $\vec{l}$ в точці M_0 називається границя $\lim\limits_{M \to M_0} \frac{u(M) - u(M_0)}{M_0 M}$, яка позначається $\frac{\partial u}{\partial l}$ або $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}$. Тут $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y,\ z_0 + \Delta z)$, $M_0 M = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$

Отже, за означенням

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{M \to M_0} \frac{u(M) - u(M_0)}{M_0 M}.$$

Якщо функція $u = f(x, y, z)$ диференційовна, то має місце формула

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma,$$

де $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – напрямні косинуси вектора $\vec{l}$.

Аналогічно визначається похідна за напрямом для функцій двох змінних $z = f(x, y)$

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos\beta,$$

де $\cos\alpha, \cos\beta$ – напрямні косинуси вектора $\vec{l}$.

Похідна за напрямом характеризує швидкість зміни функції за даним напрямом.

Градієнт функції. *Градієнтом* функції $u = f(x, y, z)$ називається вектор, проекціями якого на координатні осі є відповідні частинні похідні даної функції:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}.$$

Для функції двох змінних $z = f(x, y)$

$$\operatorname{grad} z = \frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j}.$$

Похідна за напрямом $\vec{l}$ зв'язана з градієнтом функції формулою:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (\operatorname{grad} u, \vec{l}) = \text{пр}_{\vec{l}} \operatorname{grad} u.$$

Градієнт вказує напрямок найшвидшого зростання функції в даній точці. Похідна у напрямі градієнта має найбільше значення, тобто у напрямі $\vec{l} = \operatorname{grad} u$:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{\max} = |\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

Градієнт функції в кожній точці напрямлений по нормалі до відповідної поверхні рівня (лінії рівня).

Диференціювання неявних функцій

1. **Неявні функції однієї та багатьох змінних**

Нехай функція $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задана неявно рівнянням

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = 0,$$

де F – диференційовна функція змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n, u$. Тоді частинні похідні функції u по змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ обчислюються за формулами

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial F}{\partial u}}, \quad \frac{\partial F}{\partial u} \neq 0, \quad i = \overline{1, n}. \tag{2.14}$$

Зокрема, якщо функція $y = y(x)$ задана неявно рівнянням

$$F(x, y) = 0,$$

де F – диференційовна функція змінних x, y, то

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0. \tag{2.15}$$

Аналогічно, частинні похідні функції $z = \varphi(x, y)$, заданої неявно рівнянням

$$F(x, y, z) = 0,$$

де $F(x, y, z)$ – диференційовна функція змінних x, y, z, обчислюються за формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0. \tag{2.16}$$

2. **Системи неявних функцій**

Обмежимось розгляданням функцій двох незалежних змінних.

Нехай система двох рівнянь

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$$

визначає u і v як диференційовні функції змінних x і y і якобіан

$$\frac{D(F, G)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v} \\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тоді диференціали du і dv цих функцій (а отже, і частинні похідні) можна знайти з системи рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}dx + \dfrac{\partial F}{\partial y}dy + \dfrac{\partial F}{\partial u}du + \dfrac{\partial F}{\partial v}dv = 0, \\ \dfrac{\partial G}{\partial x}dx + \dfrac{\partial G}{\partial y}dy + \dfrac{\partial G}{\partial u}du + \dfrac{\partial G}{\partial v}dv = 0. \end{cases}$$

Диференціювання параметрично заданих функцій

Нехай функція z незалежних змінних x і y задана параметричними рівняннями

$$x = x(u, v), \; y = y(u, v), \; z = z(u, v)$$

і якобіан

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тоді диференціал dz цієї функції (а отже, і частинні похідні) можна знайти з системи рівнянь

$$\begin{cases} dx = \dfrac{\partial x}{\partial u}du + \dfrac{\partial x}{\partial v}dv, \\ dy = \dfrac{\partial y}{\partial u}du + \dfrac{\partial y}{\partial v}dv, \\ dz = \dfrac{\partial z}{\partial u}du + \dfrac{\partial z}{\partial v}dv. \end{cases}$$

Знаючи диференціал $dz = p\,dx + q\,dy$, знаходимо частинні похідні $\dfrac{\partial z}{\partial x} = p$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y} = q$.

Частинні похідні та диференціали вищих порядків

Частинними похідними другого порядку функції $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називаються частинні похідні від її частинних похідних першого порядку.

Наприклад,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f''_{x_i x_i}; \quad \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f''_{x_i x_j}.$$

Похідна $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ називається *мішаною* частинною похідною другого порядку по змінних x_i, x_j.

Для функції двох змінних $z = f(x, y)$ маємо похідні другого порядку

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Аналогічно визначаються та позначаються частинні похідні порядку вище другого.

Мішані похідні, що відрізняються одна від одної лише послідовністю диференціювання, *рівні* між собою за умови їх неперервності. У цьому випадку кажуть, що результат диференціювання не залежить від порядку диференціювання, наприклад, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Диференціалом другого порядку від функції $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається диференціал від її повного диференціала, тобто $d^2 u = d(du)$.

Аналогічно визначаються диференціали порядку вище другого: $d^3 u = d(d^2 u)$; взагалі $d^m u = d(d^{m-1} u)$.

Якщо $x_1, x_2, \dots, x_n$ – незалежні змінні і функція $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ має неперервні частинні похідні, то диференціал m-го порядку виражається символічною формулою:

$$d^m u = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} dx_i \right)^m u \, , \qquad (2.17)$$

яка формально розкривається за біноміальним законом.

Зокрема,

$$d^2 u = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \, .$$

Для функції двох змінних $z = f(x, y)$ справедлива формула

$$d^m z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^m z \, . \qquad (2.18)$$

При $m = 2$, $m = 3$ маємо

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 \, , \qquad (2.19)$$

$$d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx\, dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3 \, . \qquad (2.20)$$

Для функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$ маємо:

$$d^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dxdy + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} dxdz + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} dydz \, .$$

II. Контрольні питання та завдання

1. Дайте означення функції n змінних, її області визначення та області значень.
2. Дайте означення функції двох змінних та її області визначення. Який геометричний зміст цих понять?
3. Що називається лінією рівня функції $z = f(x, y)$?
4. Дайте означення поверхні рівня функції $u = f(x, y, z)$.
5. Побудуйте поверхню $z = x^2 + 4y^2$ та її лінії рівня.

6. Запишіть вирази для повного та частинного приросту функції $z = f(x, y)$.
7. Дайте означення границі функції $u = f(P)$ в точці P_0.
8. Дайте означення неперервності функції $u = f(P)$ в точці P_0.
9. Визначіть частинні похідні функції $u = f(P)$ в точці P_0.
10. Сформулюйте правило знаходження частинних похідних функції $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.
11. Наведіть означення повного диференціала функції n змінних; двох змінних.
12. Як застосовується повний диференціал в наближених обчисленнях?
13. За якими формулами проводиться диференціювання складних функцій?
14. Запишіть формулу повної похідної.
15. Дайте означення похідної за напрямом.
16. Дайте означення градієнта функції.
17. Як зв'язані похідна за напрямом і градієнт?
18. Сформулюйте правило диференціювання неявно заданої функції.
19. Як проводиться диференціювання системи неявно заданих функцій?
20. Які правила диференціювання параметрично заданих функцій?
21. Визначіть і вкажіть правила знаходження похідних і диференціалів вищих порядків.

III. Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Знайти область визначення D наступних функцій:

а) $z = \ln(4 - x^2 - 4y^2)$; б) $u = \sqrt{-x^2 - y^2 + 2z}$.

► а) область визначення D даної функції $z = \ln(4 - x^2 - 4y^2)$ – множина тих точок (x, y), для яких $4 - x^2 - 4y^2 > 0$, бо логарифмічна функція визначена тільки для додатних значень аргумента.

Щоб зобразити область D геометрично, знайдемо її межу

$$4 - x^2 - 4y^2 = 0 \quad \text{або} \quad x^2 + 4y^2 = 4 \quad \text{або} \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1.$$

Це рівняння визначає в площині xOy еліпс з півосями $a = 2$ та $b = 1$. Даний еліпс ділить всю площину на дві частини. Для точок однієї з цих частин $4 - x^2 - 4y^2 > 0$, для другої $4 - x^2 - 4y^2 < 0$.

Щоб виявити, яка з частин є областю визначення даної функції, тобто задовольняє умові $4 - x^2 - 4y^2 > 0$, достатньо перевірити цю умову для будь-якої однієї точки, яка не лежить на еліпсі. Наприклад, точка $O(0,0)$ належить області D, бо $4 - 0^2 - 4 \cdot 0^2 = 4 > 0$.

Отже, внутрішніми точками області D даної функції є точки, обмежені еліпсом. Сам еліпс не належить області D тому, що для точок еліпса $4 - x^2 - 4y^2 = 0$. Область D – відкрита область (рис.2.1). На рис.2.1 межа області позначена пунктиром.

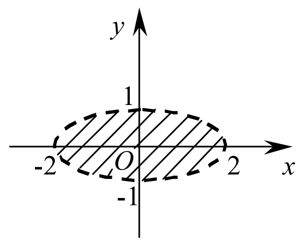


Рис.2.1

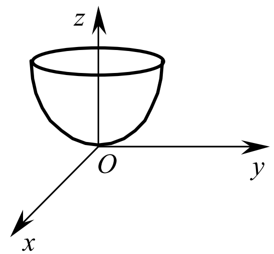


Рис.2.2

б) область визначення D даної функції $u = \sqrt{-x^2 - y^2 + 2z}$ – множина точок (x, y, z), для яких $-x^2 - y^2 + 2z \geq 0$ або $x^2 + y^2 \leq 2z$.

Межа цієї області $x^2 + y^2 = 2z$. Це рівняння параболоїда обертання. Параболоїд обертання ділить весь простір на дві частини, для точок однієї з яких $x^2 + y^2 \leq 2z$, для іншої $x^2 + y^2 > 2z$.

Для виявлення, яка з частин задовольняє умові $x^2 + y^2 < 2z$, візьмемо одну з точок, яка не лежить на параболоїді обертання, наприклад, точку $(0,0,1)$. Ця точка належить області D, бо $0^2 + 0^2 < 2 \cdot 1$.

Отже, областю D визначення даної функції є область, що міститься всередині параболоїда обертання, включаючи і його межу (рис.2.2). ◄

Приклад 2. Знайти лінії рівня функції $z = 2x + y$.

► Лінії рівня визначаються рівнянням

$$2x + y = c.$$

Це сім'я паралельних прямих.

На рис.2.3 зображено лінії рівня при $c = 0; 1; 2$.

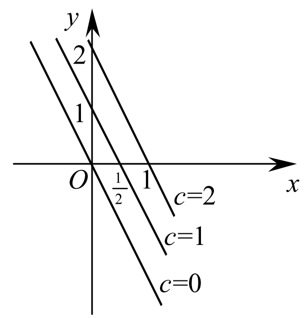


Рис.2.3 ◄

Приклад 3. Знайти поверхні рівня функції

$$u = x^2 + y^2 + z^2.$$

► Поверхні рівня визначаються рівнянням

$$x^2 + y^2 + z^2 = c, \ c \geq 0.$$

Це сім'я концентричних сфер з центром у початку координат і радіусом $R = \sqrt{c}$. На рис.2.4 зображено поверхні рівня заданої функції при $c = 1$, $c = 4$.

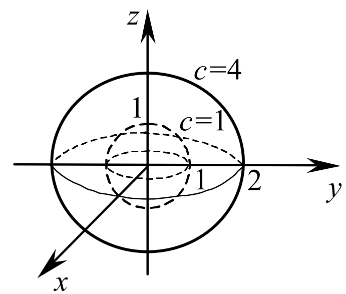


Рис.2.4 ◄

Приклад 4. З'ясувати, чи існують такі границі:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$.

► а) розглядаємо $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Спосіб 1. Нехай точка $P(x,y)$ прямує до точки $P_0(0,0)$. Розглянемо зміну x та y вздовж прямої $y=kx$. Отримаємо

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \left| \begin{array}{c} y=kx,\ \forall k \\ x\to 0 \end{array} \right| = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-k^2x^2}{x^2+k^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-k^2}{1+k^2} = \frac{1-k^2}{1+k^2}.$$

Результат має різні значення в залежності від вибраного k і тому функція границі не має.

Спосіб 2. Вважаємо, що при $P(x,y)\to P(0,0)$, $\rho=\sqrt{x^2+y^2}\to 0$ незалежно від того, за яким напрямком $P\to P_0$. Цей напрямок характеризується кутом φ нахилу прямої – напрямку наближення P до P_0. Тому

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \left| \begin{array}{c} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi, \\ \rho=\sqrt{x^2+y^2}, \\ x\to 0, y\to 0 \Rightarrow \rho\to 0\ \forall\varphi. \end{array} \right| = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2\cos 2\varphi}{\rho^2} = \cos 2\varphi.$$

Результат має різні значення в залежності від вибраного напрямку прагнення P до P_0, тобто кута φ. Звідси функція границі не має.

б) розглядаємо $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$.

Спосіб 1. Розглянемо зміну x та y вздовж прямої $y=kx$. Отримаємо

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \left| \begin{array}{c} y=kx,\ \forall k \\ x\to 0 \end{array} \right| = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1+k^2)}{\sqrt{x^2(1+k^2)+1}-1} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x\ \ (1+k^2)}{\dfrac{x\ \ (1+k^2)}{\sqrt{x^2(1+k^2)+1}}} = \lim_{x\to 0} 2\cdot\sqrt{x^2(1+k^2)+1} = 2.$$

При знаходженні границі скористались правилом Лопіталя.

Спосіб 2. Якщо $P(x,y)\to P(0,0)$, то $\rho=\sqrt{x^2+y^2}\to 0$, тому

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \left| \begin{array}{c} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi, \\ \rho=\sqrt{x^2+y^2}, \\ x\to 0, y\to 0 \Rightarrow \rho\to 0\ \forall\varphi. \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2+1}-1} = \lim_{\rho\to 0} \frac{2\rho}{\dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2+1}}} = = \lim_{\rho\to 0} 2\sqrt{\rho^2+1} = 2.$$

Тут при знаходженні границі застосовано правило Лопіталя. ◄

Приклад 5. Знайти точки розриву функції

$$u = \frac{1-xyz}{2x+3y-z+4}.$$

► Функція не визначена в точках, в яких знаменник обертається в нуль. Тому вона має поверхню розриву – площину $2x+3y-z+4=0$. ◄

Приклад 6. Знайти частинні похідні функції $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

► Вважаючи y сталою, маємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Вважаючи x сталою, маємо

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}. ◄$$

Приклад 7. Знайти повний диференціал функції

$$u = x^2 y + 3y^3 z - 4z^3 + 2.$$

► Знаходимо частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + 9y^2 z; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 3y^3 - 12z^2.$$

Враховуючи, що

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz,$$

маємо

$$du = 2xy\,dx + (x^2 + 9y^2 z)\,dy + (3y^3 - 12z^2)\,dz. ◄$$

Приклад 8. Обчислити наближено за допомогою повного диференціала $\sqrt{(4{,}05)^2 + (2{,}97)^2}$.

► Розглянемо функцію $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ і застосуємо до неї формулу

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y,$$

поклавши $x = 4,\ y = 3,\ \Delta x = 0{,}05,\ \Delta y = -0{,}03$.

Врахуємо, що $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

$$f(4,3) = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5; \quad \frac{\partial f(4,3)}{\partial x} = \frac{4}{5}; \quad \frac{\partial f(4,3)}{\partial y} = \frac{3}{5}.$$

$$\sqrt{(4{,}05)^2 + (3{,}07)^2} \approx 5 + \frac{4}{5}\cdot 0{,}05 + \frac{3}{5}\cdot(-0{,}03) = 5 + \frac{0{,}20 - 0{,}09}{5} =$$

$$= 5 + \frac{0{,}11}{5} = 5 + 0{,}022 = 5{,}022.$$

Отже, $\sqrt{(4{,}05)^2 + (3{,}07)^2} \approx 5{,}022$. ◄

Приклад 9. Знайти $\frac{du}{dt}$, якщо $u = xyz$, де $x = t^2 + 1$, $y = \ln t$, $z = \operatorname{tg} t$.

► Скористаємося формулою

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}.$$

Маємо

$$\frac{du}{dt} = yz\cdot 2t + xz\cdot\frac{1}{t} + xy\cdot\frac{1}{\cos^2 t}.$$

Далі, виразивши x, y, z через t, отримуємо

$$\frac{du}{dt} = 2t\ln t\cdot\operatorname{tg} t + (t^2 + 1)\operatorname{tg} t\cdot\frac{1}{t} + (t^2 + 1)\ln t\cdot\frac{1}{\cos^2 t}.$$

Зауважимо, що результат буде той же самий, якщо попередньо підставити замість x та y їхні значення, а потім знайти звичайну похідну по t. ◄

Приклад 10. Знайти $\frac{du}{dx}$, якщо $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, де $y = x^3$, $z = \sin^2 x$.

► Скористаємося формулою повної похідної

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}.$$

Послідовно знаходимо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2; \quad \frac{dz}{dx} = 2\sin x\cdot\cos x = \sin 2x.$$

Підставивши ці вирази в формулу повної похідної, отримаємо

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(x + y\cdot 3x^2 + z\cdot\sin 2x).$$

Далі підставимо замість y та z їхні задані вирази через x. Остаточно

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + x^6 + \sin^4 x}}(x + 3x^5 + \sin^2 x\cdot\sin 2x). ◄$$

Приклад 11. Знайти $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо $z = x^2\ln y$, де $x = \frac{u}{v}$, $y = uv$.

► Скористаємося формулами

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u};\quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Тоді

$$\frac{\partial z}{\partial u}=2x\cdot\ln y\cdot\frac{1}{v}+\frac{x^2}{y}\cdot v;$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=2x\cdot\ln y\cdot\left(-\frac{u}{v^2}\right)+\frac{x^2}{y}\cdot u.$$

Далі підставивши замість x та y їх вирази через u та v, отримаємо

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{u}{v^2}(1+2\ln(uv));\quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{u^2}{v^2}(1-2\ln(uv)).$$ ◄

Приклад 12. Знайти похідну функції $u=xy^2z^3$ в точці $M(3,2,1)$ за напрямом вектора $\vec{l}=\overrightarrow{MN}$, де $N(5,4,2)$.

► Знайдемо вектор $\overrightarrow{MN}$ та його напрямні косинуси:

$$\overrightarrow{MN}=\vec{l}=(5-3)\vec{i}+(4-2)\vec{j}+(2-1)\vec{k}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k};\quad |\vec{l}|=3;$$

$$\cos\alpha=\frac{2}{3},\quad \cos\beta=\frac{2}{3},\quad \cos\gamma=\frac{1}{3}.$$

Обчислимо значення частинних похідних функції в точці M:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M=\left.y^2z^3\right|_M=4;\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M=\left.2xyz^3\right|_M=12;\quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M=\left.3xy^2z^2\right|_M=36.$$

Отже, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right|_M=4\cdot\dfrac{2}{3}+12\cdot\dfrac{2}{3}+36\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{68}{3}$. ◄

Приклад 13. Знайти градієнт функції $z=x^2y$ в точці $M(1,1)$.

► Обчислюємо частинні похідні функції в точці $M(1,1)$:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M=\left.2xy\right|_M=2;\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M=\left.x^2\right|_M=1.$$

Отже, $\operatorname{grad} z=2\vec{i}+\vec{j}$. ◄

Приклад 14. Знайти похідну функції $z=\ln(x^2+y^2)$ в точці $M(3,4)$ за напрямом градієнта функції z.

► Знайдемо $\operatorname{grad} z$:

$$\operatorname{grad} z=\left.\frac{2x}{x^2+y^2}\right|_M\cdot\vec{i}+\left.\frac{2y}{x^2+y^2}\right|_M\cdot\vec{j}=\frac{6}{25}\vec{i}+\frac{8}{25}\vec{j}.$$

За умовою $\vec{l}=\operatorname{grad} z$.

Отже, $\dfrac{\partial z}{\partial l}=|\operatorname{grad} z|=\sqrt{\left(\dfrac{6}{25}\right)^2+\left(\dfrac{8}{25}\right)^2}=\dfrac{2}{5}$. ◄

Приклад 15. Знайти похідну $\dfrac{dy}{dx}$ функції y, заданої неявно рівнянням $e^y-e^x+2xy=0$.

► Позначимо ліву частину заданого рівняння через $F(x,y)$. Скористаємось формулою для визначення похідної функції $y=y(x)$, заданої неявно рівнянням $F(x,y)=0$:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}},$$

де $\dfrac{\partial F}{\partial x}=-e^x+2y$; $\dfrac{\partial F}{\partial y}=e^y+2x$.

Отже, маємо

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{-e^x+2y}{e^y+2x}=\frac{e^x-2y}{e^y+2x}.$$ ◄

Приклад 16. Знайти похідні $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функції z, заданої неявно рівнянням $x^3+2y^3+z^3-3xyz-2y+3=0$.

► Позначимо ліву частину заданого рівняння через $F(x,y,z)$. Скористаємось формулами для визначення похідних функції $z=z(x,y)$, заданої неявно рівнянням $F(x,y,z)=0$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Знаходимо

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 3yz; \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 6y^2 - 3xz - 2; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 - 3xy.$$

Отже,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3x^2 - 3yz}{3z^2 - 3xy} = -\frac{x^2 - yz}{z^2 - xy};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{6y^2 - 3xz - 2}{3z^2 - 3xy} = -\frac{6y^2 - 3xz - 2}{3(z^2 - xy)}. \blacktriangleleft$$

Приклад 17. Функції $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ задані неявно системою рівнянь

$$\begin{cases} u + v = x, \\ u - yv = 0. \end{cases}$$

Знайти du, dv, d^2u, d^2v.

► Задану систему представляємо у вигляді $\begin{cases} u + v - x = 0, \\ u - yv = 0. \end{cases}$

Отже, $F(x, y, u, v) = u + v - x$, $G(x, y, u, v) = u - yv$.

Тоді $\frac{\partial F}{\partial u} = 1$, $\frac{\partial F}{\partial v} = 1$, $\frac{\partial G}{\partial u} = 1$, $\frac{\partial G}{\partial v} = -y$.

Якобіан системи

$$\frac{D(F, G)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -y \end{vmatrix} = -y - 1 \neq 0 \quad \text{при } y \neq -1.$$

Диференціюванням знаходимо два рівняння, що зв'язують диференціали всіх чотирьох змінних

$$\begin{cases} -dx + du + dv = 0, \\ -vdy + du - ydv = 0 \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} du + dv = dx, \\ du - ydv = vdy. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему відносно du і dv при $y \neq -1$, маємо

$$du = \frac{ydx + vdy}{1 + y}; \quad dv = \frac{dx - vdy}{1 + y}.$$

Диференціюємо повторно

$$d^2u = \frac{(dydx + dvdy)(1 + y) - (ydx + vdy)dy}{(1 + y)^2} =$$

$$= \frac{\left(dydx + \frac{dx - vdy}{1 + y}dy\right)(1 + y) - (ydx + vdy)dy}{(1 + y)^2} =$$

$$= \frac{(1 + y)dxdy + dxdy - vdy^2 - ydxdy - vdy^2}{(1 + y)^2} = \frac{2(dxdy - vdy^2)}{(1 + y)^2};$$

$$d^2v = \frac{-dvdy(1 + y) - (dx - vdy)dy}{(1 + y)^2} = \frac{-\frac{dx - vdy}{1 + y}dy(1 + y) - dxdy + vdy^2}{(1 + y)^2} =$$

$$= \frac{-dxdy + vdy^2 - dxdy + vdy^2}{(1 + y)^2} = \frac{2(vdy^2 - dxdy)}{(1 + y)^2} = -d^2u. \blacktriangleleft$$

Приклад 18. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = cv$.

► Знаходимо:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \cos v, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -u\sin v,$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \sin v, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = u\cos v.$$

Якобіан

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{vmatrix} = u \neq 0 \quad \text{при } u \neq 0.$$

Диференціюванням знаходимо три рівняння, які зв'язують диференціали всіх п'ятьох змінних

$$\begin{cases} dx = \cos v\,du - u\sin v\,dv, \\ dy = \sin v\,du + u\cos v\,dv, \\ dz = c\,dv. \end{cases}$$

З перших двох рівнянь знаходимо dv:

$$dv = \frac{\cos v\,dy - \sin v\,dx}{u}.$$

Підставимо знайдене значення dv у третє рівняння системи і отримаємо:

$$dz = c\,\frac{\cos v\,dy - \sin v\,dx}{u} = -\frac{c\sin v}{u}dx + \frac{c\cos v}{u}dy.$$

Звідки

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c\sin v}{u}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{c\cos v}{u}. \blacktriangleleft$$

Приклад 19. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = y\ln x$. Перевірити, що $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$.

► Знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \ln x.$$

Продиференціювавши повторно, отримаємо:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{y}{x^2}; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(\ln x) = 0;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x}; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\ln x) = \frac{1}{x}.$$

Отже, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$. ◄

Приклад 20. Задано функцію $z = \sin^2(x - \alpha y)$. Показати, що ця функція задовольняє рівняння $\alpha^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; перевірити справедливість рівності $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$.

► Знаходимо частинні похідні функції $z = \sin^2(x - \alpha y)$ першого та другого порядків:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2\sin(x - \alpha y)\cos(x - \alpha y) = \sin 2(x - \alpha y);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2\sin(x - \alpha y)\cos(x - \alpha y)\cdot(-\alpha) = -\alpha\cdot\sin 2(x - \alpha y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2\cos 2(x - \alpha y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2\alpha^2\cos 2(x - \alpha y).$$

Підставивши отримані частинні похідні другого порядку в диференціальне рівняння, приходимо до тотожності:

$$\alpha^2\cdot 2\cos 2(x - \alpha y) = 2\alpha^2\cos 2(x - \alpha y).$$

Отже, функція z задовольняє задане рівняння.
Знаходимо мішані частинні похідні другого порядку заданої функції:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\sin 2(x - \alpha y)) = -2\alpha\cos 2(x - \alpha y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(-\alpha\sin 2(x - \alpha y)) = -2\alpha\cos 2(x - \alpha y).$$

Відтак маємо $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$. ◄

Приклад 21. Знайти диференціал другого порядку $d^2 z$ функції $z = \sin x\cdot\sin y$.

► Скористаємось формулою:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 .$$

Знаходимо:

$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x \cdot \sin y$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \sin x \cdot \cos y$;

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\cos x \cdot \sin y) = -\sin x \cdot \sin y$;

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\cos x \cdot \sin y) = \cos x \cdot \cos y$;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(\sin x \cdot \cos y) = -\sin x \cdot \sin y$.

Отже,

$d^2z = -\sin x \cdot \sin y\, dx^2 + 2\cos x \cdot \cos y\, dx\,dy - \sin x \cdot \sin y\, dy^2$. ◄

IV. Задачі для практичних занять

У задачах 2.1 – 2.9 знайти та зобразити область D визначення функцій.

2.1. $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$. **2.2.** $z = \ln(y^2 - 4x + 8)$.

2.3. $z = \frac{1}{r^2 - x^2 - y^2}$. **2.4.** $z = \arcsin(x + y)$.

2.5. $z = \ln xy$. **2.6.** $u = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}}$.

2.7. $u = \sqrt{x + y + z}$. **2.8.** $u = \frac{1}{\ln(1 - x^2 - y^2 - z^2)}$.

2.9. $u = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - r^2}}$ $(R > r)$.

У задачах 2.10 – 2.14 знайти лінії рівня функцій.

2.10 $z = 2x + y$. **2.11.** $z = \frac{x}{y}$.

2.12. $z = \ln\sqrt{\frac{y}{x}}$. **2.13.** $z = \sqrt{\frac{x}{y}}$.

2.14. $z = e^{\frac{x}{y}}$.

У задачах 2.15 – 2.17 знайти поверхні рівня функцій.

2.15. $u = x + y + 3z$. **2.16.** $u = x^2 + y^2 + z^2$.

2.17. $u = x^2 - y^2 - z^2$.

У задачах 2.18 – 2.26 знайти границі.

2.18. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \frac{\sin xy}{x}$. **2.19.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{3 - \sqrt{xy + 9}}$.

2.20. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sqrt{x^2y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2}$. **2.21.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}$.

2.22. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x}{x + y}$. **2.23.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

2.24. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3 - y^3}{x^3 + y^3}$. **2.25.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1 + x^2y^2)^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$.

2.26. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + 2y^2}$.

У задачах 2.27 – 2.33 знайти точки розриву функцій.

2.27. $z = \frac{1}{(x-1)^2 + (y+1)^2}$. **2.28.** $z = \frac{1}{\sin x \cdot \sin y}$.

2.29. $z = \ln(1 - x^2 - y^2)$.

2.30. $z = \dfrac{x^2 + y^2}{(x+y)(y^2 - x)}$.

2.31. $u = \dfrac{1}{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1}$.

2.32. $u = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - z^2}$.

2.33. $u = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - z^2 - 1}$.

2.34. Дослідити на неперервність функції при $x = 0$, $y = 0$:

1) $f(x,y) = \dfrac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$, $f(0,0) = 0$;

2) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, $f(0,0) = 0$;

3) $f(x,y) = \dfrac{x^3 y^3}{x^2 + y^2}$, $f(0,0) = 0$;

4) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$, $f(0,0) = 0$;

5) $f(x,y) = \dfrac{x^4 - y^4}{x^4 + y^4}$, $f(0,0) = 0$;

6) $f(x,y) = \dfrac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}$, $f(0,0) = 0$.

У задачах 2.35 – 2.47 знайти частинні похідні від заданих функцій.

2.35. $z = x^5 + y^5 - 5x^3 y^3$.

2.36. $z = xy + \dfrac{y}{x}$.

2.37. $z = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

2.38. $z = xe^{-xy}$.

2.39. $z = \dfrac{\cos y^2}{x}$.

2.40. $z = y^x$.

2.41. $z = \ln(x^2 + y^2)$.

2.42. $z = \dfrac{1}{\operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}}$.

2.43. $u = \ln(x + y + z)$.

2.44. $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

2.45. $u = \left(\dfrac{y}{x}\right)^z$.

2.46. $u = (\sin x)^{yz}$.

2.47. $u = xy^2 z^3 t^4 + 3x - 4y + 2z - t + 1$.

2.48. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ при $x = y = 0$, якщо

$$z = \frac{x\cos y - y\cos x}{1 + \sin x + \sin y}.$$

2.49. Знайти $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ при $x = 0,\ y = 0,\ z = \dfrac{\pi}{4}$, якщо

$$u = \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z}.$$

2.50. $u = \ln(1 + x + y^2 + z^2)$. Знайти $u'_x + u'_y + u'_z$ при $x = y = z = 1$.

У задачах 2.51 – 2.56 знайти повні диференціали заданих функцій.

2.51. $z = x^2 y^4 - x^3 y^3 + x^4 y^2$.

2.52. $z = \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$.

2.53. $z = \dfrac{x + y}{x - y}$.

2.54. $z = \arcsin \dfrac{x}{y}$.

2.55. $z = \operatorname{arctg} xy$.

2.56. $u = x^{yz}$.

У задачах 2.57 – 2.61 обчислити наближено число α за допомогою повного диференціала.

2.57. $\alpha = 1{,}02^{4{,}05}$.

2.58. $\alpha = \ln(0{,}09^3 + 0{,}99^3)$.

2.59. $\alpha = \sqrt[3]{1{,}02^2 + 0{,}05^2}$.

2.60. $\alpha = \sqrt{5e^{0{,}02} + 2{,}03^2}$.

2.61. $\alpha = \sqrt{1{,}04^{1{,}99} + \ln 1{,}02}$.

2.62. Знайти $\dfrac{dz}{dt}$, якщо $z = e^{x-2y}$, де $x = \sin t$, $y = t^3$.

2.63. Знайти $\dfrac{dz}{dt}$, якщо $z = x^2 + y^2 + xy$, де $x = \sin t$, $y = e^t$.

2.64. Знайти $\dfrac{dz}{dt}$, якщо $z = \arcsin(x - y)$, де $x = 3t$, $y = 4t^3$.

2.65. Знайти $\dfrac{du}{dt}$, якщо $u = \dfrac{yz}{x}$, де $x = e^t$, $y = \ln t$, $z = t^2 - 1$.

2.66. Знайти $\dfrac{dz}{dx}$, якщо $z = \operatorname{arctg}(xy)$, де $y = e^x$.

2.67. Знайти $\dfrac{dz}{dx}$, якщо $z = \arcsin\dfrac{x}{y}$, де $y = \sqrt{x^2 + 1}$.

2.68. Знайти $\dfrac{dz}{dt}$, якщо $z = \operatorname{tg}(3t + 2x^2 - y)$, де $x = \dfrac{1}{t}$, $y = \sqrt{t}$.

2.69. Знайти $\dfrac{du}{dx}$, якщо $u = \dfrac{e^{ax}(y - z)}{a^2 + 1}$, де $y = a\sin x$, $z = \cos x$.

2.70. $z = x^2 y - xy^2$, де $x = u\cos v$, $y = u\sin v$. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$.

2.71. $z = x^2 \ln y$, де $x = \dfrac{u}{v}$, $y = 3u - 2v$. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$.

2.72. $z = x^2 + y^2$, де $x = u + v$, $y = u - v$. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$.

2.73. $z = \ln(x^2 + y^2)$, де $x = uv$, $y = \dfrac{u}{v}$. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$.

2.74. Знайти похідну функції $z = f(x, y)$ в точці M за даним напрямом:

а) $z = x^2 - xy + y^2$, $M(1,1)$, за напрямом вектора $\vec{l} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$;

б) $z = x^3 - 3x^2 y + 3xy^2 + 1$, $M(3,1)$, за напрямом вектора $\overrightarrow{MN}$, де $N(6,5)$;

в) $z = \operatorname{arctg} xy$, $M(1,1)$, за напрямом бісектриси першого координатного кута.

2.75. Знайти похідну функції $u = f(x, y, z)$ в точці M за даним напрямом:

а) $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, $M(1,2,1)$, за напрямом вектора $\vec{r} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$;

б) $u = x^2 y^2 z^2$, $M(1,-1,3)$, за напрямом вектора $\overrightarrow{MN}$, де $N(9,4,14)$;

в) $u = xy^2 + z^3 - xyz$, $M(1,1,2)$, за напрямом, що утворює з осями координат кути відповідно в 60°, 45°, 60°.

2.76. Знайти градієнт функції $z = f(x, y)$ в точці M:

а) $z = x^2 + y^2$, $M(3,2)$;

б) $z = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$, $M(2,1)$;

в) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, $M(x_0, y_0)$.

2.77. Знайти градієнт функції $u = f(x, y, z)$ в точці M:

а) $u = x^3 y^2 z$, $M(1,1,1)$;

б) $u = xyz$, $M(2,1,1)$.

2.78. Який напрямок $\vec{l}$ найбільшої зміни функції $u(x,y,z) = x\sin z - y\cos z$ у початку координат?

У задачах 2.79 – 2.83 знайти похідну $\frac{dy}{dx}$ від функцій, заданих неявно вказаними рівняннями.

2.79. $x^3y - xy^3 = a^4$. **2.80.** $xe^y + ye^x - e^{xy} = 0$.

2.81. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. **2.82.** $xy - \ln y = a$.

2.83. $\operatorname{arctg}\frac{x+y}{a} - \frac{y}{a} = 0$.

У задачах 2.84 – 2.87 знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ функцій, заданих неявно вказаними рівняннями.

2.84. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

2.85. $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0$.

2.86. $z^3 + 3xyz = a^3$.

2.87. $e^z - xyz = 0$.

2.88. Функції y і z незалежної змінної x задані системою рівнянь

$$\begin{cases} 7x^2 + y^2 - 3z^2 = -1, \\ 4x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 0. \end{cases}$$

Знайти $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$ при $x = 1$, $y = -2$, $z = 2$.

2.89. Функції y і z незалежної змінної x задані системою рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0, \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1. \end{cases}$$

Знайти dy, dz, d^2y, d^2z.

2.90. Функції u і v незалежних змінних x і y задані неявно системою рівнянь

$$\begin{cases} xu + yv = 1, \\ x + y + u + v = 0. \end{cases}$$

Знайти du, dv, d^2u, d^2v.

2.91. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $x = u + v$, $y = u - v$, $z = u^2v^2$.

2.92. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $x = a\cos u \cdot \operatorname{ch} v$, $y = b\sin u \cdot \operatorname{ch} v$, $z = c\operatorname{sh} u$.

2.93. Знайти dz, якщо $x = e^u \cos v$, $y = e^u \sin v$, $z = uv$.

2.94. Знайти dz, якщо $x = u + v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 + v^3$ $(u \neq v)$.

2.95. $u = 4x^3 + 3x^2y + 3xy^2 - y^3$.

Перевірити, що $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$.

2.96. $u = xy + \sin(x+y)$. Знайти $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

2.97. $u = \ln \operatorname{tg}(x+y)$. Перевірити, що $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$.

2.98. $u = x^2 \ln(x+y)$. Знайти $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

2.99. $u = x\sin xy + y\cos xy$. Знайти $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

2.100. $u = \sin(x + \cos y)$. Знайти $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$.

2.101. $z = \cos(ax + e^y)$. Знайти $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$.

2.102. $z = 0{,}5\ln(x^2 + y^2)$. Знайти $d^2 z$.

2.103. $z = \cos(x + y)$. Знайти $d^2 z$.

2.104. $u = e^{xy}$. Знайти $d^2 u$.

2.105. $u = \dfrac{y}{x}$. Знайти $d^3 u$.

2.106. $u = xyz$. Знайти $d^3 u$.

2.107. $u = x \ln y$. Знайти $d^4 u$.

§2. Застосування диференціального числення функцій багатьох змінних

I. Короткі теоретичні відомості

Дотична площина та нормаль до поверхні. *Дотичною площиною* до поверхні в точці M_0 називається площина, в якій лежать усі дотичні, проведені в точці M_0 до всіх можливих кривих, що лежать на поверхні і проходять через точку M_0.

Нормаллю до поверхні в точці M_0 називається пряма, що проходить через точку M_0 перпендикулярно дотичній площині в цій точці.

Якщо поверхня задана рівнянням

$$F(x, y, z) = 0, \qquad (2.21)$$

то рівняння дотичної площини в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ є

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0, \qquad (2.22)$$

а рівняння нормалі:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}. \qquad (2.23)$$

Якщо поверхня задана рівнянням

$$z = f(x, y), \qquad (2.24)$$

то рівняння дотичної площини в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ має вигляд

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0, \qquad (2.25)$$

а рівняння нормалі –

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \qquad (2.26)$$

Формула Тейлора. Якщо функція $u = f(M)$ $(m+1)$ раз диференційовна в деякому околі $O(M_0, \varepsilon)$ точки $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, то для будь-якої точки $M(x_1 x_2, \ldots, x_n) \in O(M_0, \varepsilon)$ має місце *формула Тейлора*

$$u(M) = u\big|_{M_0} + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} d^k u\big|_{M_0} + \frac{1}{(m+1)!} d^{m+1} u\big|_N, \qquad (2.27)$$

де $N \in O(M_0, \varepsilon)$.

Останній доданок у формулі називається залишковим членом у формулі Тейлора і може бути записаний коротко у вигляді $o(\rho^m)$, де $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0)}$ (форма Пеано).

У випадку функції двох змінних $z = f(x, y)$ формула Тейлора в розгорнутому вигляді записується так:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} dy\right) +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} dy^2\right) +$$

$$+ \ldots + \frac{1}{m!}\left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^m f(x_0, y_0) + o(\rho^m). \qquad (2.28)$$

Враховуючи, що $dx = \Delta x = x - x_0$, $dy = \Delta y = y - y_0$ із (2.28) отримуємо

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)\right) +$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}(x-x_0)^2+2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}(x-x_0)(y-y_0)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}(y-y_0)^2\right)+\ldots+\frac{1}{m!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial}{\partial y}(y-y_0)\right)^m f(x_0,y_0)+$$

$$+\,o(\rho^m)\,. \qquad (2.29)$$

При $x_0 = y_0 = 0$ формула (2.28) та (2.29) називається *формулою Маклорена*.

Екстремуми функцій багатьох змінних. Точка $M_0(\vec{x}^0)$ є точкою *локального максимуму (мінімуму)* функції $u = f(\vec{x})$, якщо існує такий окіл точки M_0 $O(M_0)$, що для всіх точок $M \in O(M_0)$, $M \neq M_0$ виконується умова

$$f(M) < f(M_0) \quad (f(M) > f(M_0))\,. \qquad (2.30)$$

Точки локального максимуму і мінімуму називаються точками *локального* екстремуму.

Необхідні умови екстремуму. Якщо диференційовна функція $u = f(\vec{x})$ в точці M_0 має локальний екстремум, то

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{M_0} = 0, \quad i = \overline{1, n} \qquad (2.31)$$

або

$$\left.du\right|_{M_0} = 0\,. \qquad (2.32)$$

Точки, в яких виконується умова (2.31), називаються *стаціонарними*.

Достатні умови екстремуму. Нехай функція $u = f(\vec{x})$ двічі диференційовна в точці M_0 та деякому її околі і точка M_0 – стаціонарна точка цієї функції. Тоді

1) якщо диференціал $\left.d^2u\right|_{M_0}$ є знаковизначеною квадратичною формою незалежних змінних $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$, то функція $u = f(\vec{x})$ має в цій точці екстремум, причому

а) якщо $\left.d^2u\right|_{M_0} > 0$, то точка M_0 – точка локального *мінімуму*,

б) якщо $\left.d^2u\right|_{M_0} < 0$, то точка M_0 – точка локального *максимуму*,

2) якщо другий диференціал $\left.d^2u\right|_{M_0} \neq 0$ і є знакозмінною квадратичною формою незалежних змінних $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$, то точка M_0 не є точкою локального екстремуму,

3) якщо $\left.d^2u\right|_{M_0} = 0$, екстремум може бути, а може й не бути (потрібне додаткове дослідження).

Запишемо вираз для $\left.d^2u\right|_{M_0}$ у вигляді

$$\left.d^2u\right|_{M_0} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{M_0} dx_i dx_j\,. \qquad (2.33)$$

Введемо позначення для частинних похідних другого порядку, які обчислюються в точці M_0

$$a_{ij} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{M_0}, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = \overline{1, n}\,.$$

Тоді

$$\left.d^2u\right|_{M_0} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, dx_i dx_j \qquad (2.34)$$

є квадратичною формою змінних $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ з матрицею

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} = a_{ji}\,.$$

Головні кутові мінори цієї матриці

$$\Delta_1 = a_{11}, \;\; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Згідно з *критерієм Сильвестра* знаковизначеності квадратичної форми, квадратична форма додатно визначена, якщо $\Delta_i > 0$, $i = \overline{1, n}$, від’ємно визначена, коли всі головні кутові мінори непарного порядку від’ємні, парного – додатні.

На підставі критерію Сильвестра можна визначити знак другого диференціала в точці M_0, тобто $d^2u\big|_{M_0}$, враховуючи знаки головних кутових мінорів матриці відповідної квадратичної форми. Отже, маємо,

$d^2u\big|_{M_0} > 0 \Rightarrow \Delta_i > 0,\ i = \overline{1, n} \Rightarrow$ точка M_0 – точка локального мінімуму;

$d^2u\big|_{M_0} < 0 \Rightarrow \Delta_i > 0,\ i$ – парне, $\Delta_i < 0,\ i$ – непарне, $i = \overline{1, n} \Rightarrow$ точка M_0 – точка локального максимуму;

$d^2u\big|_{M_0} \neq 0$, критерій Сильвестра не справджується – точка M_0 – не є точкою локального екстремуму;

$d^2u\big|_{M_0} = 0$, потрібне додаткове дослідження.

Для функції двох змінних $z = f(x, y)$ другий диференціал має вигляд

$$d^2z\big|_{M_0} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\bigg|_{M_0} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\bigg|_{M_0} dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\bigg|_{M_0} dy^2$$

і є квадратичною формою змінних dx, dy з матрицею $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$,

де $a_{11} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\bigg|_{M_0}$, $a_{12} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\bigg|_{M_0}$, $a_{22} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\bigg|_{M_0}$.

Головними кутовими мінорами матриці A є:

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2.$$

1) якщо $\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0$, то точка M_0 – точка локального мінімуму; якщо $\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0$, то точка M_0 – точка локального максимуму,

2) якщо $\Delta_2 < 0$, екстремум у точці M_0 відсутній,

3) якщо $\Delta_2 = 0$, потрібне додаткове дослідження.

Умовний екстремум функції багатьох змінних. *Умовним екстремумом* функції $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається екстремум цієї функції, який досягається за умови, що змінні $x_1, x_2, \ldots, x_n$ зв'язані рівняннями зв'язку

$$\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \quad (k = \overline{1, m},\ m < n).$$

Тобто задача ставиться так: знайти екстремум функції

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{2.35}$$

за умови, що

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0; \\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0. \end{cases} \tag{2.36}$$

Для розв'язання такої задачі використовується *метод множників Лагранжа*, згідно з яким задача знаходження умовного екстремуму зводиться до дослідження на звичайний екстремум *функції Лагранжа*

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \\ + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{2.37}$$

де $\lambda_k \ (k = \overline{1, m})$ називаються *множниками Лагранжа*.

Необхідні умови умовного екстремуму виражаються системою $n + m$ рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = 0,\ i = \overline{1, n}; \\ \varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,\ k = \overline{1, m}. \end{cases} \tag{2.38}$$

Розв'язки цієї системи – стаціонарні точки функції Лагранжа.

Достатні умови умовного екстремуму можна встановити за знаком диференціала другого порядку функції Лагранжа з урахуванням рівнянь зв'язку.

Зокрема, для випадку відшукання екстремуму функції двох змінних

$$z = f(x, y) \tag{2.39}$$

за умови, що

$$\varphi(x, y) = 0, \tag{2.40}$$

функція Лагранжа має вигляд

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y), \tag{2.41}$$

а відповідна система рівнянь для знаходження стаціонарної точки така

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = \varphi(x, y) = 0. \end{cases} \quad (2.42)$$

З цієї системи знаходяться невідомі x_0, y_0, λ_0, де x_0, y_0 – координати точки, в якій можливий умовний екстремум.

Достатні умови умовного екстремуму такі:

$d^2L(x_0, y_0, \lambda_0) > 0 \Rightarrow M_0(x_0, y_0)$ – точка умовного мінімуму;

$d^2L(x_0, y_0, \lambda_0) < 0 \Rightarrow M_0(x_0, y_0)$ – точка умовного максимуму.

При дослідженні знаку d^2L слід мати на увазі, що диференціали змінних dx, dy в $d^2L(x_0, y_0, \lambda_0)$ залежні і ця залежність диктується рівняннями зв'язку.

Крім того, оскільки λ не є звичайною змінною, то при визначенні знака $d^2L(x_0, y_0, \lambda_0)$ величина $d\lambda$ не враховується, тобто вважається

$$d^2L(x, y, \lambda) = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} dx\,dy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} dy^2 . \quad (2.43)$$

Знаходження найбільшого та найменшого значень функції в замкненій області. Якщо функція $u = f(\vec{x})$ диференційовна в замкненій області, то вона досягає свого найбільшого (найменшого) значення або в стаціонарній точці, або в граничній точці області.

Тому, для того щоб знайти найбільше та найменше значення функції в замкненій області, треба:

1) знайти стаціонарні точки, що розташовані в заданій області, і обчислити значення функції в цих точках;

2) знайти найбільше та найменше значення функції на лініях, що утворюють межу області;

3) з усіх знайдених значень вибрати найбільше та найменше.

II. Контрольні питання та завдання

1. Наведіть означення дотичної площини до поверхні; нормалі до поверхні.

2. Який вигляд мають рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні при явному та неявному заданні рівняння поверхні?

3. Запишіть формулу Тейлора для функції n змінних.

4. Запишіть формулу Тейлора для функції двох змінних.

5. Наведіть означення точки локального мінімуму (максимуму) функції багатьох змінних.

6. Сформулюйте необхідні умови локального екстремуму.

7. Яка точка називається стаціонарною?

8. Сформулюйте достатні умови локального екстремуму функції n змінних.

9. Наведіть достатні умови локального екстремуму функції двох змінних.

10. Як ставиться задача на умовний екстремум для функції багатьох змінних; двох змінних?

11. У чому полягає суть методу множників Лагранжа для знаходження умовного екстремуму?

12. Як знаходиться найменше та найбільше значення функції в замкненій області?

III. Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні P в точці M:

а) $P: x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy + yz - 2xz + 16 = 0,\ M(1,2,3)$;

б) $P: z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y,\ M(1,1,1)$.

► а) позначимо через $F(x, y, z)$ ліву частину рівняння поверхні P:

$$F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy + yz - 2xz + 16 .$$

Знайдемо частинні похідні і їх значення в точці $M(1,2,3)$:

$$F'_x(x,y,z) = 2x + y - 2z, \qquad F'_x(1,2,3) = -2,$$

$$F'_y(x,y,z) = 4y + x + z, \qquad F'_y(1,2,3) = 12,$$

$$F'_z(x,y,z) = -6x + y - 2x, \qquad F'_z(1,2,3) = -18.$$

Для написання рівнянь дотичної площини та нормалі до поверхні скористаємося формулами (2.22), (2.23).

Рівняння дотичної площини в точці $M(1,2,3)$:

$$-2(x-1) + 12(y-2) - 18(z-3) = 0$$

або

$$x - 6y + 9z - 16 = 0.$$

Рівняння нормалі в точці $M(1,2,3)$:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-6} = \frac{z-3}{9}.$$

б) згідно з умовою $P: z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$.

Тут $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$.

Знайдемо частинні похідні цієї функції і їх значення в точці $M(1,1,1)$:

$$f'_x(x,y) = 2x - 2y - 1, \quad f'_x(1,1) = -1;$$

$$f'_y(x,y) = -2x + 2y + 2, \quad f'_y(1,1) = 2.$$

Далі скористаємося формулами (2.25), (2.26).

Рівняння дотичної площини в точці $M(1,1,1)$:

$$(-1)(x-1) + 2(y-1) - (z-1) = 0$$

або

$$x - 2y + z = 0.$$

Рівняння нормалі в точці $M(1,1,1)$:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{1}. \blacktriangleleft$$

Приклад 2. Розкласти за формулою Тейлора функцію

$$f(x,y) = x^3 - 5x^2 - xy + y^2 + 10x + 5y - 4$$

в околі точки $M_0(2,-1)$.

► Скористаємося формулою (2.29). Для цього обчислюємо значення $f(x,y)$ та її частинних похідних у точці $M_0(2,-1)$.

$$f(x,y) = x^3 - 5x^2 - xy + y^2 + 10x + 5y - 4, \qquad f(2,-1) = 2;$$

$$f'_x(x,y) = 3x^2 - 10x - y + 10, \qquad f'_x(2,-1) = 3;$$

$$f'_y(x,y) = -x + 2y + 5, \qquad f'_y(2,-1) = 1;$$

$$f''_{xx}(x,y) = 6x - 10, \qquad f''_{xx}(2,-1) = 2;$$

$$f''_{xy}(x,y) = -1, \qquad f''_{xy}(2,-1) = -1;$$

$$f''_{yy}(x,y) = 2, \qquad f''_{yy}(2,-1) = 2;$$

$$f'''_{xxx}(x,y) = 6, \qquad f'''_{xxx}(2,-1) = 6.$$

Всі подальші похідні тотожно рівні нулю. За формулою (2.29) отримуємо шуканий розклад

$$f(x,y) = 2 + 3(x-2) + (y+1) + (x-2)^2 - (x-2)(y+1) +$$

$$+ (y+1)^2 + (x-2)^3. \blacktriangleleft$$

Приклад 3. Розкласти за формулою Тейлора до членів другого порядку включно функцію $f(x,y) = y^x$ в околі точки $M_0(1,1)$.

► Обчислюємо значення функції та її частинних похідних першого та другого порядку в точці $M_0(1,1)$.

$$f(x,y) = y^x, \qquad f(1,1) = 1;$$

$$f'_x(x,y) = y^x \ln y, \qquad f'_x(1,1) = 0;$$

$$f'_y(x,y) = xy^{x-1}, \qquad f'_y(1,1) = 1;$$

$$f''_{xx}(x,y) = y^x \ln^2 y, \qquad f''_{xx}(1,1) = 0;$$

$$f''_{xy}(x,y) = y^{x-1}(x \ln y + 1), \qquad f''_{xy}(1,1) = 1;$$

$$f''_{yy}(x,y) = x(x-1)y^{x-2}, \qquad f''_{yy}(1,1) = 0.$$

За формулою (2.29) отримуємо

$$f(x,y) = 1 + (y-1) + (x-1)(y-1) + o(\rho^2),$$

де $\rho = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$. ◄

Приклад 4. Дослідити на екстремум функцію

$$z = -\frac{1}{9}(3x+5y)^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}y^2 + 5xy - 2y .$$

► Знаходимо частинні похідні функції z першого порядку.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -(3x+5y)^2 + 3x + 5y ;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{5}{3}(3x+5y)^2 + 5y + 5x - 2 .$$

Для визначення стаціонарних точок згідно з необхідними умовами екстремуму, прирівнюємо нулю ці похідні. Маємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} -(3x+5y)^2 + 3x + 5y = 0, \\ -\frac{5}{3}(3x+5y)^2 + 5y + 5x - 2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3x+5y)(-(3x+5y)+1) = 0, \\ -\frac{5}{3}(3x+5y)^2 + (3x+5y) + 2x - 2 = 0. \end{cases}$$

Ця система розпадається на дві системи рівнянь:

$$\begin{cases} 3x+5y = 0, \\ -\frac{5}{3}\cdot 0 + 0 + 2x - 2 = 0. \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} 3x+5y = 1, \\ -\frac{5}{3}\cdot 1 + 1 + 2x - 2 = 0. \end{cases}$$

Для першої системи:

$$\begin{cases} 3x+5y = 0, \\ 2x = 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5y = -3, \\ x = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = -\frac{3}{5}. \end{cases}$$

Для другої системи:

$$\begin{cases} 3x+5y = 1, \\ 2x = \frac{8}{3}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{5}\left(1 - 3\cdot\frac{4}{3}\right), \\ x = \frac{4}{3}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3}, \\ y = -\frac{3}{5}. \end{cases}$$

Отже, маємо дві стаціонарні точки: $M_1\left(1, -\frac{3}{5}\right)$, $M_2\left(\frac{4}{3}, -\frac{3}{5}\right)$.

Для перевірки достатніх умов екстремуму знаходимо частинні похідні другого порядку.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -6(3x+5y) + 3 ,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -10(3x+5y) + 5 ,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{50}{3}(3x+5y) + 5 .$$

Дослідимо на екстремум точку M_1.

Обчислимо частинні похідні другого порядку в точці M_1:

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_1} = \left.(-6(3x+5y)+3)\right|_{\substack{x=1 \\ y=-\frac{3}{5}}} = -6(3-3)+3 = 3 ,$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_1} = \left.(-10(3x+5y)+5)\right|_{\substack{x=1 \\ y=-\frac{3}{5}}} = -10(3-3)+5 = 5 ,$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_1} = \left.\left(-\frac{50}{3}(3x+5y)+5\right)\right|_{\substack{x=1 \\ y=-\frac{3}{5}}} = -\frac{50}{3}(3-3)+5 = 5 .$$

Далі застосуємо загальний підхід для перевірки достатніх умов екстремуму, пов'язаний безпосередньо з матрицею квадратичної форми, що відповідає другому диференціалу функції.

Маємо $a_{11} = 3$, $a_{12} = a_{21} = 5$, $a_{22} = 5$.

Складемо матрицю A : $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$.

Її головні кутові мінори $\Delta_1 = 3 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = -10 < 0$.

Отже, достатні умови екстремуму не виконуються, тому що $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 < 0$. У точці M_1 функція не має екстремуму.

Дослідимо на екстремум точку M_2.

Обчислимо частинні похідні другого порядку в точці M_2:

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_2} = \left.(-6(3x+5y)+3)\right|_{\substack{x=\frac{4}{3} \\ y=-\frac{3}{5}}} = -6(4-3)+3 = -3 ,$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_2} = \left.(-10(3x+5y)+5)\right|_{\substack{x=\frac{4}{3} \\ y=-\frac{3}{5}}} = -10(4-3)+5 = -5 ,$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_2} = \left.\left(-\frac{50}{3}(3x+5y)+5\right)\right|_{\substack{x=\frac{4}{3}\\ y=-\frac{3}{5}}} = -\frac{50}{3}(4-3)+5 = -\frac{35}{3}.$$

Маємо $a_{11} = -3,\ a_{12} = a_{21} = -5,\ a_{22} = -\dfrac{35}{3}$.

Матриця A має вигляд: $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -5 & -\frac{35}{3} \end{pmatrix}$.

Її головні кутові мінори $\Delta_1 = -3 < 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ -5 & -\frac{35}{3} \end{vmatrix} = 10 > 0$.

Отже, $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$. У точці M_2 функція z має максимум.

Знайдемо значення функції в цій точці:

$$z_{\max} = z\big|_{M_2} = \left.\left(-\frac{1}{9}(3x+5y)^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}y^2 + 5xy - 2y\right)\right|_{\substack{x=\frac{4}{3}\\ y=-\frac{3}{5}}} =$$

$$= -\frac{1}{9}(4-3)^3 + \frac{3}{2}\cdot\frac{16}{9} + \frac{5}{2}\cdot\frac{9}{25} + 5\cdot\frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) - 2\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) =$$

$$= -\frac{1}{9} + \frac{8}{3} + \frac{9}{10} - 4 + \frac{6}{5} = \frac{59}{60}. ◄$$

Приклад 5. Дослідити на екстремум функцію

$$z = x^3 + y^3 - 3xy.$$

► Знаходимо частинні похідні функції z першого порядку.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3(x^2 - y); \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3(y^2 - x).$$

Прирівнюючи нулю ці похідні, отримуємо систему для визначення стаціонарних точок:

$$\begin{cases} x^2 - y = 0, \\ y^2 - x = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^4 - y = 0, \\ x = y^2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(y^3 - 1) = 0, \\ x = y^2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0; \\ x = 0, \end{cases} \begin{cases} y = 1; \\ x = 1. \end{cases}$$

Маємо дві стаціонарні точки: $M_1(0,0)$ та $M_2(1,1)$.

Для перевірки достатніх умов екстремуму знаходимо частинні похідні другого порядку.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

Тоді для точки $M_1(0,0)$ маємо:

$$a_{11} = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_1} = 0, \quad a_{12} = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_1} = -3, \quad a_{22} = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_1} = 0;$$

Матриця A має вигляд: $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$. Її головні кутові мінори $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -9 < 0 \Rightarrow$ точка M_1 не є точкою екстремуму.

Для точки $M_2(1,1)$ маємо:

$$a_{11} = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_2} = 6, \quad a_{12} = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_2} = -3, \quad a_{22} = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_2} = 6.$$

Матриця A має вигляд: $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$.

$$\Delta_1 = a_{11} = 6 > 0, \quad \Delta_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 36 - 9 = 27 > 0.$$

Отже, точка $M_2(1,1)$ – точка локального мінімуму.

Знайдемо значення функції z у цій точці:

$$z_{\min} = z\big|_{M_2} = (x^3 + y^3 - 3xy)\big|_{\substack{x=1\\ y=1}} = 1 + 1 - 3 = -1.$$

Зауважимо, що для встановлення типу стаціонарної точки можна також безпосередньо досліджувати знак другого диференціала як квадратичної форми змінних dx і dy, використовуючи метод виділення повного квадрата.

Для точки M_2 це виглядає так:

$$d^2 z(M_2; dx, dy) = 6dx^2 - 3dx\,dy + 6dy^2 = 6\left(dx - \frac{1}{4}dy\right)^2 + \frac{45}{8}dy^2,$$

звідки видно, що для будь-яких dx, dy, не рівних одночасно нулю, $d^2 z > 0$, отже, точка M_2 – точка мінімуму. ◄

Приклад 6. Дослідити на екстремум функцію трьох змінних

$$u = x^2 + y^2 + z^2 + xy - x + y - 2z.$$

► Знаходимо частинні похідні першого порядку

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y - 1; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y + x + 1; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 2z - 2.$$

Для визначення стаціонарних точок згідно з необхідними умовами екстремуму, прирівнюємо нулю ці похідні. Маємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x+y-1=0; \\ x+2y+1=0; \\ 2z-2=0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1-2x; \\ x+2(1-2x)+1=0; \\ z=1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-1; \\ x=\ \ 1; \\ z=\ \ 1. \end{cases}$$

Отримуємо стаціонарну точку $M_1(1,\,-1,\,1)$.

Для перевірки достатніх умов екстремуму знаходимо частинні похідні другого порядку в точці M_1:

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{M_1}=2; \quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{M_1}=2; \quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right|_{M_1}=2;$$
$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right|_{M_1}=1; \quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\right|_{M_1}=0; \quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right|_{M_1}=0.$$

Скористаємось виразом для другого диференціала функції трьох змінних.

$$d^2u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dz^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dxdy+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}dxdz+2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}dydz\,.$$

Далі для визначення знака $\left.d^2u\right|_{M_1}$ можна скористатись двома способами.

Спосіб 1. Скористаємось безпосередньо виразом для d^2u.

$$\left.d^2u\right|_{M_1}=2dx^2+2dy^2+2dz^2+2dxdy=2(dx^2+dxdy+dy^2)+2dz^2\,.$$

Вираз, що стоїть в дужках, невід'ємний при будь-яких dx і dy, бо $a^2+b^2\ge -ab$, а останній доданок додатний (зауважимо, що dx, dy, dz одночасно не обертаються в нуль).

Отже, $\left.d^2u\right|_{M_1}>0$ і функція $u(x,\,y,\,z)$ досягає мінімуму в точці $M_1(1,\,-1,\,1)$, значення функції в цій точці $u_{\min}=\left.u\right|_{M_1}=-2$.

Спосіб 2. Скористаємось критерієм Сильвестра для визначення знака d^2u в точці M_1.

Для цього складаємо матрицю квадратичної форми d^2u змінних dx, dy, dz.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix},$$

де $a_{ij}=\left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\right|_{M_1}$ $i,\ j=\overline{1,\,3}$, $a_{ij}=a_{ji}$. Ці значення знайдені раніше.

Отже,

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Головні кутові мінори цієї матриці такі:

$$\Delta_1=2>0, \qquad \Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3>0, \qquad \Delta_3=\det A=8-2=6>0\,.$$

Згідно критерію Сильвестра $\left.d^2u\right|_{M_1}$ додатно визначена квадратична форма змінних dx, dy, dz.

Отже, $\left.d^2u\right|_{M_1}>0$, звідки випливає, що в точці $M_1(1,\,-1,\,1)$ функція має мінімум, значення функції в точці мінімуму $u_{\min}=-2$. ◄

Приклад 7. Знайти екстремум функції $f(x,y)=x^2+y^2$ за умови $x+y-1=0$.

► Складаємо функцію Лагранжа

$$L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(x+y-1)\,.$$

Згідно з необхідними умовами екстремуму маємо систему рівнянь для визначення стаціонарної точки:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}=2x+\lambda=0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=2y+\lambda=0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=x+y-1=0. \end{cases}$$

Звідки $x=-\dfrac{\lambda}{2};\ y=-\dfrac{\lambda}{2};\ \lambda=-1$.

Отже, $x=\dfrac{1}{2};\ y=\dfrac{1}{2};\ \lambda=-1$.

Тоді $L(x,y,-1)=x^2+y^2-(x+y-1)$.

Позначимо $M_0\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$. Дослідимо точку M_0 на умовний екстремум, використовуючи достатні умови екстремуму.

$$\left.\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}\right|_{M_0}=2;\quad \left.\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}\right|_{M_0}=0;\quad \left.\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}\right|_{M_0}=2.$$

З рівняння зв'язку маємо, що $dy=-dx$. Тоді

$$d^2L(x,y,-1)\Big|_{M_0}=2dx^2+2dy^2=4dx^2>0.$$

Точка $M_0\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ – точка умовного мінімуму вихідної функції; значення функції в точці мінімуму $f\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$. ◄

Приклад 8. Знайти найбільше та найменше значення функції $z=x^2y(2-x-y)$ у замкненій області D, обмеженій прямими $x=0,\ y=0,\ x+y=6$ (рис. 2.5).

► 1) Знаходимо стаціонарні точки. Маємо

$$\frac{\partial z}{\partial x}=xy(4-3x-2y);\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x^2(2-x-2y).$$

Маємо систему для визначення стаціонарних точок:

$$\begin{cases}xy(4-3x-2y)=0,\\ x^2(2-x-2y)=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4-3x-2y=0,\\ 2-x-2y=0.\end{cases}$$

Скоротили на xy та x^2 (всередині трикутника OAB $x\neq 0$, $y\neq 0$).

Розв'язком системи є $x=1,\ y=\dfrac{1}{2}$.

Стаціонарна точка $M\left(1,\dfrac{1}{2}\right)\in D$, тому обчислюємо значення $z\left(1,\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$.

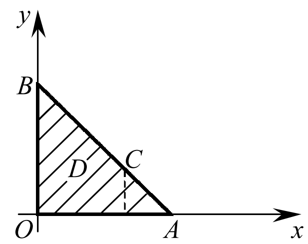


Рис.2.5

2) Досліджуємо функцію на межі області, яка складається з відрізків OB, OA, AB:

а) $OB: x=0,\ z=0$ в усіх точках відрізка; $z(0)=z(B)=0$;

б) $OA: y=0,\ z=0$ в усіх точках відрізка; $z(A)=0$;

в) $AB: x+y=6,\ y=6-x$, тому

$$z=x^2(6-x)(2-x-6+x)=-4x^2(6-x),\ 0\le x\le 6.$$

Знаходимо стаціонарні точки функції $z=-4x^2(6-x)$.

$$z'_x=-48x+12x^2=0\Rightarrow x(x-4)=0.$$

Звідки $x_1=0,\ x_2=4$. Оскільки $y=6-x$, то $y_1=6,\ y_2=2$.

Знаходимо точки $B(0,6)$, $C(4,2)$ та обчислюємо $z(B)=0$, $z(C)=-128$.

3) Порівнюємо всі знайдені значення функції: $z(M)=\dfrac{1}{4}$, $z(0)=$ $=z(A)=z(B)=0$, $z(C)=-128$. Отже, найбільше значення функції $z_{\text{найб}}=\dfrac{1}{4}$ в точці $M\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$; найменше значення функції $z_{\text{найм}}=-128$ в точці $C(4,2)$. ◄

IV. Задачі для практичних занять

У задачах 2.108 – 2.112 для заданої поверхні P знайти рівняння дотичної площини та нормалі в точці M.

2.108. $P:\ z=2x^2-4y^2,\ M(2,1,4)$.

2.109. $P:\ z=xy,\ M(1,1,1)$.

2.110. $P:\ z=\ln(x^2+y^2),\ M(1,0,0)$.

2.111. $P:\ x^2+y^2-z^2=-1,\ M(2,2,3)$.

2.112. $P:\ x^3+y^3+z^3+xyz-6=0,\ M(1,2,-1)$.

2.113. Скласти рівняння дотичних площин до поверхні $x^2+2y^2+3z^2=21$, паралельних площині $x+4y+6z=0$.

2.114. Розкласти функцію $f(x+h,\ y+k)$ за цілими додатними степенями h і k, якщо $f(x,y)=xy^2$.

2.115. Функцію $f(x,y)=x^3-2y^2+3xy$ розкласти за формулою Тейлора в околі точки $(2,1)$.

2.116. Функцію $z=x^y$ розкласти за степенями $(x-1)$, $(y-1)$, знайшовши члени до третього порядку включно.

2.117. Функцію $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2(xy+xz+yz)$ розкласти за формулою Тейлора в околі точки $(1,-1,2)$.

2.118. Розкласти за формулою Маклорена до членів 3-го порядку включно функцію $f(x,y)=e^y\cos x$.

2.119. Розкласти за формулою Маклорена до членів четвертого порядку включно функцію $f(x,y)=\sin x\cdot \mathrm{sh}y$.

2.120. Розкласти за формулою Тейлора до членів другого порядку включно функцію $f(x,y,z)=\ln(xy+z^2)$ в околі точки $(1,1,0)$.

2.121. Розкласти за формулою Тейлора в околі точки $(1,1)$ до членів другого порядку включно неявну функцію $z(x,y)$, що задана рівнянням $z^3+3yz-4x=0$, якщо $z(1,1)=1$.

У задачах 2.122 – 2.128 знайти точки екстремуму функції двох змінних.

2.122. $z=2xy-3x^2-2y^2+10$.

2.123. $z=4(x-y)-x^2-y^2$.

2.124. $z=x^2+xy+y^2-y-1$.

2.125. $z=x^2+xy+y^2-3x-6y$.

2.126. $z=xy^2(1-x-y)\ \ (x>0,y>0)$.

2.127. $z=xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y}\ \ (x>0,y>0)$.

2.128. $z=x^3+3xy^2-15x-12y$.

У задачах 2.129 – 2.131 знайти точки екстремуму функції трьох змінних.

2.129. $u=x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z$.

2.130. $u=x^2+y^2+z^2-xy+x-2z$.

2.131. $u=x+\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}+\dfrac{2}{z}$.

У задачах 2.132 – 2.138 знайти точки умовного екстремуму функцій.

2.132. $z=x^m+y^m\ \ (m>1)$ при $x+y=2\ \ (x\ge 0,y\ge 0)$.

2.133. $z=x^2+y^2-xy+x+y-4$ при $x+y+3=0$.

2.134. $z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ при $x+y=2$.

2.135. $z=xy^2$ при $x+2y=1$.

2.136. $u=2x+y-2z$ при $x^2+y^2+z^2=36$.

2.137. $u=xy^2z^3$ при $x+2y+3z=12\ \ (x>0,y>0,z>0)$.

2.138. $u=x+y+z$ при $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$.

У задачах 2.139 – 2.143 знайти найбільше та найменше значення функції $z=f(x,y)$ у заданій області D.

2.139. $z=x^2-y^2$, D – круг: $x^2+y^2\le 4$.

2.140. $z=x^2+2xy-4x+8y$, D – прямокутник: $0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2$.

2.141. $z=x^2y(4-x-y)$, D – трикутник: $x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le 6$.

2.142. $z=x^2+y^2-xy-x-y$, D – трикутник: $x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le 3$.

2.143. $z=e^{-x^2-y^2}(2x^2+3y^2)$, D – круг: $x^2+y^2\le 4$.

ГЛАВА 3. КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

§1. Подвійні інтеграли

I. Короткі теоретичні відомості

Основні поняття. Нехай функція $z = f(x,y)$ визначена в замкненій обмеженій області D площини xOy. Будемо вважати, що межа L області D складається із скінченного числа неперервних кривих. Розіб'ємо область D на n довільних частинних областей D_i, які не мають спільних внутрішніх точок. Площі областей D_i позначимо ΔS_i, їх діаметри – d_i ($i = \overline{1, n}$). *Діаметром* d_i області D_i називається довжина найбільшої хорди, яка з'єднує дві точки межі області D_i. Візьмемо довільну точку $P_i(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ і знайдемо значення функції $f(x,y)$ у точці P_i.

Вираз вигляду

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i$$

називається *інтегральною сумою* для функції $z = f(x,y)$ по області D. Позначимо через λ максимальний із діаметрів d_i областей D_i, тобто $\lambda = \max d_i$, $i = \overline{1, n}$.

Означення. Якщо існує границя інтегральної суми I_n при $\lambda \to 0$, тобто

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i ,$$

яка не залежить від способу розбиття області D на частинні області D_i та від вибору точок $P_i(\xi_i, \eta_i)$, то ця границя називається *подвійним інтегралом* від функції $f(x,y)$ по області D.

Подвійний інтеграл позначається так:

$$\iint_D f(x,y)\,dS, \quad \iint_D f(x,y)\,dx\,dy, \quad \iint_D f(P)\,dS .$$

Отже, за означенням

$$\iint_D f(x,y)\,dS = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i . \qquad (3.1)$$

Теорема. Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в обмеженій замкненій області D, то існує подвійний інтеграл від функції $f(x,y)$ по області D.

Геометричний зміст подвійного інтеграла. Якщо $f(x,y) \ge 0$ в області D, то подвійний інтеграл чисельно дорівнює об'єму V циліндричного тіла, яке знаходиться над площиною xOy, нижня основа якого є область D, верхня – частина поверхні $z = f(x,y)$, що проектується в D, а бічна поверхня – циліндрична, з твірною, паралельною осі Oz, і напрямною L – межею області D (рис.3.1).

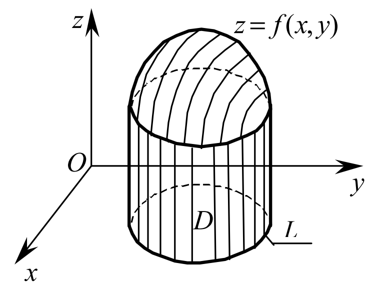


Рис.3.1

Властивості подвійного інтеграла

1⁰. $\iint_D C f(x,y)\,dx\,dy = C\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$, де $C = \text{const}$.

2⁰. $\iint_D \big(f_1(x,y) + f_2(x,y)\big)dx\,dy = \iint_D f_1(x,y)\,dx\,dy + \iint_D f_2(x,y)\,dx\,dy$.

3⁰. Якщо функція $z = f(x,y) \ge 0$ в області D, то

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \ge 0 .$$

4⁰. Якщо дві функції в області D задовольняють нерівності

$$f(x,y) \ge g(x,y) ,$$

то

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \ge \iint_D g(x,y)\,dx\,dy .$$

5⁰. Якщо область D складається із двох областей D_1 і D_2, які не мають спільних внутрішніх точок, то

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy .$$

6⁰ (Оцінка подвійного інтеграла). Якщо $z = f(x,y)$ є неперервною функцією в обмеженій замкненій області D, яка має площу S, то

$$mS \le \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy \le MS\,,$$

де m і M – відповідно найменше і найбільше значення функції $z = f(x,y)$ в області D.

7^0 (Теорема про середнє значення функції $z = f(x,y)$). Якщо функція $z = f(x,y)$ неперервна в обмеженій замкненій області D, яка має площу S, то в цій області існує хоча б одна точка $P(\xi,\eta)$ така, що

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = f(\xi,\eta)\cdot S\,.$$

Обчислення подвійного інтеграла

Означення. Область D називається *правильною* у напрямі осі Oy (осі Ox), якщо будь-яка пряма, яка проходить через внутрішню точку області D, паралельно осі Oy (осі Ox), перетинає межу області в двох точках M і N.

Якщо область D (рис.3.2) правильна у напрямі осі Oy і проектується на вісь Ox у відрізок $[a,b]$, то її межа розбивається на дві лінії: AmB, яка задається рівнянням $y = \varphi_1(x)$, і AnB, рівняння якої $y = \varphi_2(x)$. Тоді область D задається системою нерівностей:

$D:\ a \le x \le b\,,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\,.$

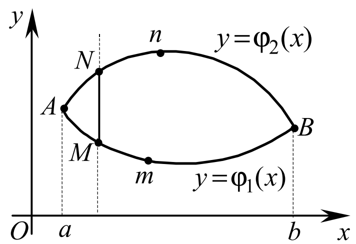


Рис.3.2

При такому заданні області D подвійний інтеграл по цій області D обчислюється за формулою:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\,. \tag{3.2}$$

Інтеграл $\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$ називається *повторним* або *двократним*.

Інтеграл $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$ називається *внутрішнім* інтегралом. В ньому інтегрування ведеться по змінній y, а x вважається сталою величиною. Отже

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx\,.$$

Якщо область D (рис.3.3) є правильною у напрямі осі Ox, то її можна задати нерівностями:

$D:\ c \le y \le d\,,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\,.$

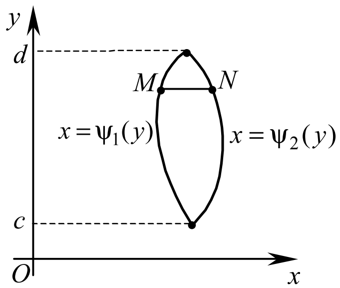


Рис.3.3

Тоді подвійний інтеграл по області D обчислюється за формулою:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\,. \tag{3.3}$$

Інтеграл $\int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx$ називається *повторним* або *двократним*.

Інтеграл $\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx$ – *внутрішнім* інтегралом. У ньому інтегрування ведеться по змінній x, а y – стала. Отже, маємо

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy\,.$$

Якщо область D правильна у напрямі осі Ox та осі Oy, то справедливі формули (3.2) і (3.3).

Якщо порівняти формули (3.2) і (3.3), то маємо:

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\,. \tag{3.4}$$

Перехід від лівої частини формули (3.4) до правої і навпаки називається *зміною порядку інтегрування*.

Зауваження 1. Якщо область D не є правильною ні у напрямі осі Ox, ні у напрямі осі Oy, то таку область необхідно розбити на частини, кожна з яких є правильною областю у напрямі осі Ox чи осі Oy.

Зауваження 2. У кожному конкретному випадку, залежно від області D та підінтегральної функції $f(x,y)$, треба обирати той порядок інтегрування, який приводить до простіших обчислень.

Заміна змінних у подвійному інтегралі. Нехай задано дві прямокутні декартові системи координат xOy та uOv, причому x і y пов'язані зі змінними u і v формулами:

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v). \end{cases} \tag{3.5}$$

Формули (3.5) встановлюють взаємно однозначну відповідність між точками $M(x,y)$ області D площини xOy і точками $M'(u,v)$ деякої області D' площини uOv. Якщо визначник

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{3.6}$$

то має місце формула (3.7) – *загальна формула заміни змінних у подвійному інтегралі*:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D'} f(x(u,v), y(u,v))|I|\,du\,dv. \tag{3.7}$$

Функціональний визначник (3.6) називається *визначником Якобі або якобіаном*.

Перехід до полярних координат. Прямокутні декартові координати x і y і полярні координати ρ і φ зв'язані співвідношеннями:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \qquad (\ 0 \le \rho < +\infty, \quad 0 \le \varphi < 2\pi\ ). \end{cases}$$

Якобіан $I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho$.

Тоді *формула переходу до полярних координат* набуває вигляду

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\,d\rho\,d\varphi, \tag{3.8}$$

де область D задана у декартовій системі координат xOy, а область D' – відповідна їй область у полярній системі координат.

Перехід до узагальнених полярних координат. Декартові та узагальнені полярні координати зв'язані співвідношеннями:

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi \\ y = b\rho\sin\varphi, \qquad (0 \le \rho < +\infty, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \quad a > 0, \quad b > 0). \end{cases}$$

У даному випадку $|I| = ab\rho$, а *формула переходу до узагальнених полярних координат* має вигляд:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D'} f(a\rho\cos\varphi, b\rho\sin\varphi)\,ab\rho\,d\rho\,d\varphi, \tag{3.9}$$

де область D задана у декартовій системі координат xOy, а область D' – відповідна їй область в узагальненій полярній системі координат.

II. Контрольні питання та завдання

1. Дайте означення подвійного інтеграла.

2. Наведіть приклади функції, для якої не існує подвійний інтеграл.

3. Наведіть приклади області D, для якої не існує подвійний інтеграл.

4. Яка область називається правильною у напрямі осі Ox; у напрямі осі Oy?

5. Як задати аналітично правильну область у напрямі осі Ox; у напрямі осі Oy?

6. Як обчислювати подвійний інтеграл?

7. Які межі інтегрування для області D, яка є прямокутником?

8. Запишіть загальну формулу заміни змінних у подвійному інтегралі.

9. Які межі інтегрування у повторному інтегралі, коли D' є коло з радіусом R і центром у полюсі полярної системи?

10. Які координати називають узагальненими полярними координатами? Чому дорівнює для таких координат якобіан?

III. Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2}\,dxdy$, де D – прямокутник $(0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 1)$.

► Область D (рис.3.4) є правильною як у напрямі осі Oy, так і осі Ox.

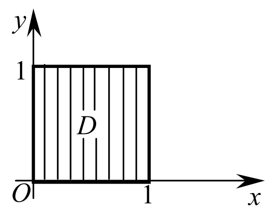


Рис.3.4

Тоді за формулою (3.2) маємо:

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2}\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \frac{x^2}{1+y^2}\,dy = \int\limits_0^1 x^2 dx \int\limits_0^1 \frac{dy}{1+y^2} =$$

$$= \left(\int\limits_0^1 x^2\ dx\right)\left(\operatorname{arctg} y\big|_0^1\right) = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}.$$

Зауважимо, що у цьому прикладі внутрішній інтеграл має сталі межі інтегрування і тому він дорівнює сталій величині. У даному випадку подвійний інтеграл перетворився на добуток двох визначених інтегралів.◄

Приклад 2. Знайти межі інтегрування подвійного інтеграла $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$, якщо область D є трикутник, обмежений лініями: $y=0,\ \ y=2-x,\ \ x=0$.

► Область D (рис.3.5) є правильною як у напрямі осі Oy, так і осі Ox.

Тоді за формулою (3.2) маємо:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x,y)\,dy.$$

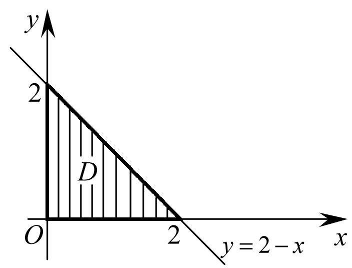


Рис.3.5 ◄

Приклад 3. Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{x}}^{2-x} f(x,y)\,dy$.

► Область інтегрування D (рис.3.6) обмежена лініями $x=0$, $x=1$, $y=\sqrt{x}$, $y=2-x$. З останніх двох рівнянь маємо: $x=y^2$, $x=2-y$.

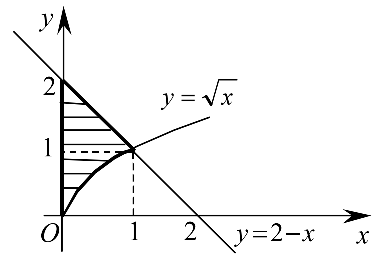


Рис.3.6

Пряма $y=1$ розбиває область D на області D_1 і D_2, де

$D_1:\ 0 \le y \le 1,\ \ 0 \le x \le y^2,\ \ \ D_2:\ 1 \le y \le 2,\ \ 0 \le x \le 2-y$.

Отже,

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{x}}^{2-x} f(x,y)\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{y^2} f(x,y)\,dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} f(x,y)\,dx. ◄$$

Приклад 4. Обчислити повторний інтеграл $\int\limits_1^2 dx \int\limits_0^x y\,dy$.

► $\int\limits_1^2 dx \int\limits_0^x y\,dy = \int\limits_1^2 \left(\int\limits_0^x y\,dy\right) dx = \int\limits_1^2 \left(\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^x\right) dx = \int\limits_1^2 \frac{x^2}{2}\,dx = \left.\frac{x^3}{6}\right|_1^2 = \frac{7}{6}.$ ◄

Приклад 5. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D xy^2 dxdy$, де область D обмежена лініями $x=0,\ x=1,\ y=x^2,\ y=x$.

► Область D зображена на рис.3.7. Ця область правильна у напрямі як осі Oy, так і осі Ox. Для обчислення даного інтеграла можна користуватись як формулою (3.2), так і формулою (3.3).

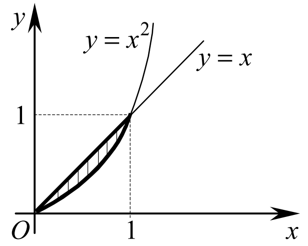


Рис.3.7

$$\iint\limits_D xy^2 dx\,dy = \int\limits_0^1 x\,dx \int\limits_{x^2}^{x} y^2 dy = \int\limits_0^1 x\left(\int\limits_{x^2}^{x} y^2 dy\right)dx = \int\limits_0^1 x\left(\left.\frac{y^3}{3}\right|_{x^2}^{x}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_0^1 x(x^3 - x^6)\,dx = \left.\frac{x^5}{15}\right|_0^1 - \left.\frac{x^8}{24}\right|_0^1 = \frac{1}{15} - \frac{1}{24} = \frac{1}{40}.$$ ◄

Приклад 6. Перейти у подвійному інтегралі $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ до полярних координат, якщо область D обмежена колом $x^2+y^2=2x$.

► Перетворимо рівняння $x^2+y^2=2x$ до канонічного вигляду, виділивши повний квадрат відносно змінної x. Маємо $(x-1)^2+y^2=1$. Отже, це рівняння кола з центром $O_1(1,\,0)$ радіуса $R=1$, а область D відповідно круг (рис.3.8).

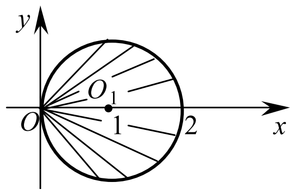


Рис.3.8

Перейдемо до полярних координат $x=\rho\cos\varphi,\ \ y=\rho\sin\varphi$, тоді рівняння кола набуває вигляду $\rho = 2\cos\varphi$, причому змінна φ задовольняє умові: $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, бо $\rho \ge 0$, а $0 \le \rho \le 2\cos\varphi$.

Тоді за формулою (3.8) маємо

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \left|\begin{array}{ll} x=\rho\cos\varphi, & D\to D', \\ y=\rho\sin\varphi, & D': 0\le\rho\le 2\cos\varphi, \\ dxdy = \rho\,d\rho d\varphi, & -\dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}. \end{array}\right| =$$

$$= \iint\limits_{D'} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho.$$ ◄

Приклад 7. Обчислити $\iint\limits_D e^{-x^2-y^2} dxdy$, де область D є круг радіуса R з центром у початку координат: $x^2+y^2 \le R^2$.

► Зробимо заміну змінних: $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi$, тоді рівняння $x^2+y^2=R^2$ перетвориться на $\rho = R\ (0\le\varphi\le 2\pi)$. Тоді за формулою (3.8) маємо:

$$\iint\limits_D e^{-x^2-y^2} dxdy = \left|\begin{array}{ll} x=\rho\cos\varphi, & D\to D', \\ y=\rho\sin\varphi, & D': 0\le\rho\le R, \\ dxdy=\rho\,d\rho d\varphi, & 0\le\varphi\le 2\pi. \end{array}\right| = \iint\limits_{D'} e^{-\rho^2}\rho\,d\rho\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R e^{-\rho^2}\rho\,d\rho = \int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^R e^{-\rho^2}\rho\,d\rho\right)d\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^R e^{-\rho^2} d(-\rho^2)\right)d\varphi =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\left. e^{-\rho^2}\right|_0^R\right)d\varphi = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(e^{-R^2}-1\right)d\varphi = \frac{1-e^{-R^2}}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \pi\left(1-e^{-R^2}\right).$$ ◄

Приклад 8. Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint\limits_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy,$$

де область D обмежена еліпсом $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

► Перейдемо до узагальнених полярних координат, поклавши: $x = a\rho\cos\varphi,\ y = b\rho\sin\varphi$. Тоді рівняння еліпса у цих координатах:

$$\frac{a^2\rho^2\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{b^2\rho^2\sin^2\varphi}{b^2}=1 \ \Rightarrow\ \rho^2=1 \ \Rightarrow\ \rho=1.$$

Отже, $0\le\rho\le 1$. Кут φ змінюється від 0 до 2π. Тоді

$$\iint\limits_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy = \left|\begin{array}{ll} x=a\rho\cos\varphi, & D\to D', \\ y=b\rho\sin\varphi, & D': 0\le\rho\le 1, \\ dxdy = ab\rho\, d\rho d\varphi, & 0\le\varphi\le 2\pi. \end{array}\right| =$$

$$=\iint\limits_{D'}\sqrt{1-\rho^2}\ ab\rho\ d\rho d\varphi = ab\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^1\sqrt{1-\rho^2}\,\rho\, d\rho =$$

$$= ab\cdot 2\pi\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{2(1-\rho^2)^{3/2}}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3}\pi ab.\ ◄$$

IV. Задачі для практичних занять

У задачах 3.1 – 3.9 обчислити повторні (двократні) інтеграли.

3.1. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^2 xy\,dy.$ **3.2.** $\int\limits_0^{2b} dx\int\limits_0^a (a-y)x^2dy.$

3.3. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 \frac{x^2}{1+y^2}dy.$ **3.4.** $\int\limits_1^2 d\rho\int\limits_0^{\pi/2}\rho\sin\varphi\, d\varphi.$

3.5. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 e^{x+y}dy.$ **3.6.** $\int\limits_0^a dx\int\limits_0^{\sqrt{x}} dy.$

3.7. $\int\limits_1^2 dy\int\limits_0^{\ln y} e^x dx.$ **3.8.** $\int\limits_2^4 dx\int\limits_x^{2x}\frac{y}{x}dy.$

3.9. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 \frac{1}{(x+y+1)^2}dy.$

У задачах 3.10 – 3.19 визначити межі інтегрування в інтегралі $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ для заданої області інтегрування D.

3.10. D – прямокутник: $2\le x\le 5,\ 0\le y\le 3$.

3.11. D – трикутник, обмежений прямими:

а) $x=0,\ y=0,\ x+y=1$;

б) $x+y=6,\ y=2x,\ y=\frac{x}{2}$.

3.12. D – трикутник: $x+y\le 1,\ x-y\le 1,\ x\ge 0$.

3.13. D – паралелограм, обмежений прямими: $x=3$, $x=5$, $3x-2y+4=0$, $3x-2y+1=0$.

3.14. D – чверть круга: $x\ge 0,\ y\ge 0,\ x^2+y^2\le 1$.

3.15. D – область, обмежена параболами: $y=x^2$, $y=4-x^2$.

3.16. D – область, обмежена параболами: $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$.

3.17. $D: y\le\frac{2}{1+x^2},\ y\ge x^2$.

3.18. $D: y^2\le 2x,\ y\ge 0,\ x\ge 0,\ x\le 2$.

3.19. $D: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1$.

У задачах 3.20 – 3.29 змінити порядок інтегрування в заданих інтегралах.

3.20. $\int\limits_1^2 dx\int\limits_x^{2x} f(x,y)\,dy$. **3.21.** $\int\limits_0^1 dy\int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx$.

3.22. $\int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy$. **3.23.** $\int\limits_0^r dx\int\limits_x^{\sqrt{2rx-x^2}} f(x,y)\,dy$.

3.24. $\int\limits_2^4 dx\int\limits_x^{x+3} f(x,y)\,dy$. **3.25.** $\int\limits_0^{\pi/2} dx\int\limits_0^{\cos x} f(x,y)\,dy$.

3.26. $\int\limits_0^{\frac{R\sqrt{2}}{2}} dx \int\limits_0^{x} f(x,y)\,dy + \int\limits_{\frac{R\sqrt{2}}{2}}^{R} dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)\,dy$.

3.27. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)\,dy + \int\limits_1^3 dx \int\limits_0^{\frac{3-x}{2}} f(x,y)\,dy$.

3.28. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt[3]{x^2}} f(x,y)\,dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} f(x,y)\,dy$.

3.29. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{2x}^{6-x} f(x,y)\,dy$.

У задачах 3.30 – 3.40 обчислити подвійний інтеграл по заданій області D.

3.30. $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dxdy$, де D – область, обмежена параболою $y=x^2$ та прямими $x=1$, $y=0$.

3.31. $\iint\limits_D (x^3+y^3)\,dxdy$, де D – трикутник, обмежений прямими $y=\frac{x}{2}$, $y=x$, $x=4$.

3.32. $\iint\limits_D \frac{y^3}{x^2}\,dxdy$, де D – область, обмежена параболою $y=\sqrt{x}$ та прямими $y=\frac{x}{3}$, $x=1$.

3.33. $\iint\limits_D (6xy^2-12x^2y)\,dxdy$, де D – прямокутник $0\le x\le 1$, $2\le y\le 3$.

3.34. $\iint\limits_D (x+y)\,dxdy$, де D – область, обмежена параболою $y=4-(x-1)^2$ та прямими $x=0$, $y=\frac{3x}{2}$.

3.35. $\iint\limits_D (1+x+y)\,dxdy$, де D – область, обмежена параболою $x=\sqrt{y}$ та прямими $y=-x$, $y=2$.

3.36. $\iint\limits_D xy^2\,dxdy$, де D – область, обмежена параболою $y=2-x^2$ та прямими $y=x$, $x=0$.

3.37. $\iint\limits_D x\,dxdy$, де D – трикутник з вершинами $O(0,0)$, $A(0,1)$ і $B(1,1)$.

3.38. $\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}\,dxdy$, де D – область, обмежена параболою $y^2=x$ та прямими $x=0$, $y=1$.

3.39. Перейти у подвійному інтегралі $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ до полярних координат ρ і φ та розставити межі інтегрування:

а) D – круг: $x^2+y^2\le by$;

б) D – область, що обмежена колами $x^2+y^2=4x$, $x^2+y^2=8x$ та прямими $y=x$, $y=2x$;

в) D – область, що обмежена прямими $y=x$, $y=0$, $x=1$;

г) D – сегмент, який відтинається від кола $x^2+y^2=4$ прямою $x+y=2$;

д) D – внутрішня частина правої петлі лемніскати Бернуллі $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

3.40. Перетворити задані інтеграли до полярних координат:

а) $\int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)\,dy$; б) $\int\limits_{R/2}^{2R} dy \int\limits_0^{\sqrt{2Ry-y^2}} f(x,y)\,dx$.

У задачах 3.41 – 3.50 перейти у подвійному інтегралі до полярних координат та обчислити його.

3.41. $\iint\limits_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy$, де D – круг радіуса $R=2$ з центром у початку координат: $x^2+y^2\le 4$.

3.42. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, де D – кільце: $1\le x^2+y^2\le 4$.

3.43. $\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy$, де область D обмежена лемніскатою Бернуллі $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ $(x\ge 0,\ a>0)$.

3.44. $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dxdy$, де D – область, що обмежена колом $x^2+y^2=2ax$ $(a>0)$.

3.45. $\iint\limits_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dxdy$, де D – частина кільця: $x^2+y^2\ge 1$, $x^2+y^2\le 9$, $y\ge\frac{x}{\sqrt3}$, $y\le x\sqrt3$.

3.46. $\iint\limits_D y\,dxdy$, де D – півкруг діаметра a з центром у точці $C(a/2,\,0)$: $x^2+y^2\le ax$, $y\ge 0$.

3.47. $\iint\limits_D (1-2x-3y)\,dxdy$, де D – круг $x^2+y^2\le R^2$.

3.48. Перетворити задані інтеграли до узагальнених полярних координат:

а) $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$, де область D обмежена еліпсом $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$;

б) $\iint\limits_D f\left(\sqrt{4-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\right)dxdy$, де область D – частина еліптичного кільця, обмеженого еліпсами $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{x^2}{4a^2}+\frac{y^2}{4b^2}=1$, що лежить у першому квадранті.

3.49. Обчислити інтеграл $\iint\limits_D xy\,dxdy$, де D – область, що обмежена еліпсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(x\ge 0,\ y\ge 0)$.

3.50. Обчислити інтеграл $\iint\limits_D \sqrt{xy}\,dx\,dy$, де D – область, що обмежена лінією $\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}\right)^4=\frac{xy}{\sqrt6}$ $(x\ge 0,\ y\ge 0)$.

§2. Потрійні інтеграли

I. Короткі теоретичні відомості

Основні поняття. Нехай функція $u=f(x,y,z)$ визначена в замкненій обмеженій області G тривимірного простору $\mathbf{R}^3$. Розіб'ємо область G на n довільних частинних областей G_i, які не мають спільних внутрішніх точок. Об'єми областей G_i позначимо ΔV_i, їх діаметри – d_i ($i=\overline{1,n}$). *Діаметром* d_i області G_i називається довжина найбільшої хорди, яка з'єднує дві точки межі області G_i. Візьмемо довільну точку $P_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in G_i$ і знайдемо значення функції $f(x,y,z)$ у точці P_i.

Вираз вигляду

$$I_n=\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta V_i$$

називається *інтегральною сумою* для функції $f(x,y,z)$ по області D. Позначимо через λ максимальний із діаметрів d_i областей G_i, тобто $\lambda=\max d_i$, $i=\overline{1,\,n}$.

Означення. Якщо існує границя інтегральної суми I_n за умови, що $\lambda\to 0$, тобто

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta V_i\,,$$

яка не залежить від способу розбиття області G на частинні області G_i та від вибору точок $P_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$, то ця границя називається *потрійним інтегралом* від функції $f(x,y,z)$ по області G.

Потрійний інтеграл позначається так:

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dV\,,\quad \iiint\limits_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,,\quad \iiint\limits_G f(P)\,dV\,.$$

Отже, за означенням

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dV=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta V_i\,.$$

Теорема. Якщо функція $f(x,y,z)$ неперервна в обмеженій замкненій області G, то існує потрійний інтеграл від функції $f(x,y,z)$ по області G.

Обчислення потрійного інтеграла

Означення. Якщо будь-яка пряма, яка проходить через внутрішню точку області G паралельно осі Oz, перетинає границю області G у двох точках, а проекція G на площину xOy є правильною областю D, то область G називається *правильною* у напрямі осі Oz.

Аналогічно вводиться означення правильної області у напрямах осей Ox і Oy.

Нехай область G обмежена знизу і зверху поверхнями $z=z_1(x,y)$ і $z=z_2(x,y)$ відповідно, а з боків *циліндричною* поверхнею, твірні якої паралельні осі Oz. Позначимо проекцію області G на площину xOy через D, тобто $\text{пр}_{xOy}G=D$ (рис.3.9).

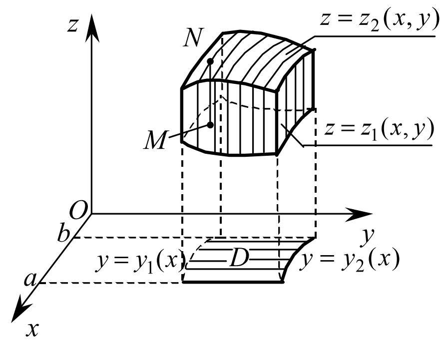


Рис.3.9

Припустимо, що кожна пряма, яка паралельна осі Oz і проходить через внутрішню точку області G, перетинає область G у точках M і N. Точку M назвемо точкою входу в область G, а N – точкою виходу з області G, їхні аплікати позначимо відповідно $z_{вх}$ і $z_{вих}$. Тоді $z_{вх}=z_1(x,y)$, $z_{вих}=z_2(x,y)$ і для будь-якої неперервної в області G функції $f(x,y,z)$ має місце формула

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_D dx\,dy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,. \tag{3.10}$$

Тобто, щоб обчислити потрійний інтеграл, спочатку треба обчислити інтеграл $I(x,y)=\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$ по змінній z, вважаючи змінні x і y сталими. Інтеграл $I(x,y)$ називають внутрішнім інтегралом, бо

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_D\left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right)dx\,dy\,. \tag{3.11}$$

Права частина формули (3.11) є подвійним інтегралом по області D із підінтегральною функцією $I(x,y)$. Таким чином, формула (3.11) дає змогу звести потрійний інтеграл до подвійного інтеграла.

Якщо область D, наприклад, обмежена кривими $y=y_1(x)$ і $y=y_2(x)$, а $x\in[a,b]$, причому $y_1(x)$ і $y_2(x)$ неперервні в області D, а область G (рис.3.9) задана відповідно так:

$$G:\{z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y),\ y_1(x)\le y\le y_2(x),\ a\le x\le b\},$$

то переходячи від подвійного інтеграла у формулі (3.11) до повторного, одержимо формулу

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,. \tag{3.12}$$

Формула (3.12) зводить обчислення потрійного інтеграла до послідовного обчислення трьох визначених інтегралів.

Порядок інтегрування у формулі (3.12) може бути й іншим, тобто змінні x,y і z за певних умов можна міняти місцями. Якщо, наприклад $G:\{x_1(y,z)\le x\le x_2(y,z),\ y_1(z)\le y\le y_2(z),\ e\le z\le l\}$, причому $x_2(y,z)$, $x_1(y,z)$, $y_1(z)$, $y_2(z)$ неперервні в областях G і D відповідно, то

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\int\limits_e^l dz\int\limits_{y_1(z)}^{y_2(z)} dy\int\limits_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx\,. \tag{3.13}$$

Заміна змінних у потрійному інтегралі. Нехай задано дві прямокутні декартові системи координат $Oxyz$ та $Ouvw$, причому змінні x, y, z та u, v, w пов'язані співвідношеннями (3.14):

$$\begin{cases} x = x(u,v,w), \\ y = y(u,v,w), \\ z = z(u,v,w). \end{cases} \tag{3.14}$$

Формули (3.14) встановлюють взаємно однозначну відповідність між точками областей G і G', розташованих відповідно в просторі xyz та uvw.

Якщо функції (3.14) задовольняють умові:

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то має місце формула (3.15) – формула заміни змінних у потрійному інтегралі:

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{G'} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))\,|I|\,dudvdw. \tag{3.15}$$

Тут I – визначник Якобі або якобіан.

Перехід до циліндричних координат у потрійному інтегралі

Циліндричні координати. Визначимо положення точки M у просторі її декартовою координатою z і полярними координатами ρ і φ її проекції M_1 на площину xOy (рис.3.10).

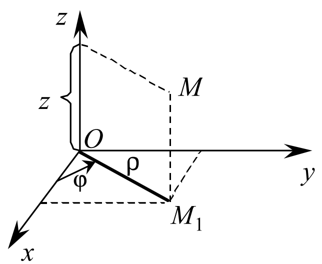


Рис.3.10

Величини $\rho,\ \varphi,\ z$ називаються *циліндричними* координатами точки M. З рис.3.10 видно, що циліндричні координати $\rho,\ \varphi,\ z$ і декартові координати точки M пов'язані співвідношеннями:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases} \tag{3.16}$$

Ці формули відображають область $0 \le \rho < +\infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$ на весь простір xyz.

Якобіан у циліндричних координатах має вигляд:

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

За формулою (3.15) маємо потрійний інтеграл у циліндричних координатах:

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{G'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\,\rho\,d\rho d\varphi dz, \tag{3.17}$$

де область G задана у декартовій системі координат x, y, z, а G' – відповідна їй область у циліндричній системі координат ρ, φ, z.

Перехід до сферичних координат у потрійному інтегралі

Сферичні координати. Визначимо положення точки M у просторі за допомогою трьох величин, а саме: відстані r від початку координат O до точки M, кута φ між додатним напрямом осі Ox та проекцією OM_1 відрізка OM на площину xOy (рис.3.11), кута θ між додатним напрямом осі Oz та відрізком OM.

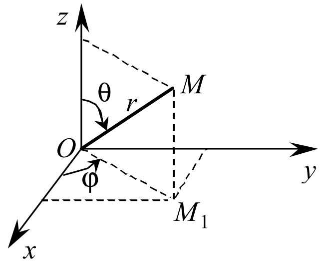


Рис.3.11

Величини r,φ,θ називаються *сферичними* координатами точки M. З рис.3.11 видно, що сферичні координати r,φ,θ і декартові координати точки M пов'язані співвідношеннями:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\,\sin\theta, \\ y = r\sin\varphi\,\sin\theta, \\ z = r\cos\theta. \end{cases} \qquad (3.18)$$

Ці формули відображають область $0 \le r < +\infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi$ на весь простір xyz.

Якобіан у сферичних координатах має вигляд:

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{vmatrix} = r^2\sin\theta.$$

За формулою (3.15) маємо потрійний інтеграл у сферичних координатах:

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{G'} f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)\,r^2\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta, \qquad (3.19)$$

де область G задана у декартовій системі координат x,y,z, а G' – відповідна їй область у сферичних координатах r,φ,θ.

Зауважимо, що при обчисленні потрійного інтеграла в циліндричних або сферичних координатах область G', як правило, не будують, а межі інтегрування знаходять безпосередньо за областю G.

II. Контрольні питання та завдання

1. Дайте означення потрійного інтеграла.

2. Сформулюйте умови існування потрійного інтеграла.

3. Яка область G у тривимірному просторі називається правильною у напрямі осі Oz, Oy або Ox?

4. Як обчислити потрійний інтеграл у прямокутних координатах?

5. Що таке якобіан? Як перейти від прямокутних координат у потрійному інтегралі до будь-яких довільних координат?

6. Як обчислити потрійний інтеграл у циліндричних координатах? Наведіть приклади області інтегрування у потрійному інтегралі , для якої межі інтегрування сталі.

7. Як обчислити потрійний інтеграл у сферичних координатах? Для якої області межі інтегрування в потрійному інтегралі у сферичних координатах сталі?

III. Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Обчислити повторний (трикратний) інтеграл

$$\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} z\,dz.$$

► $\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} z\,dz = \int_0^1 dx \int_0^x \left(\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} z\,dz \right) dy = \int_0^1 dx \int_0^x \left(\frac{z^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{x^2+y^2}} \right) dy =$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^x (x^2+y^2)dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\int_0^x (x^2+y^2)\,dy \right) dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\left(x^2y + \frac{y^3}{3} \right)\Big|_0^x \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^3 + \frac{x^3}{3} \right) dx = \frac{4}{2\cdot 3}\int_0^1 x^3 dx = \frac{4x^4}{2\cdot3\cdot4}\Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$ ◄

Приклад 2. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_G x\,dxdydz$, де G – тетраедр, що обмежений координатними площинами та площиною $2x+2y+z-6=0$.

► Тетраедр (рис.3.12 а)) знизу обмежений площиною $z=0$, а зверху площиною $z=6-2x-2y$. Проекція D тетраедра на площину xOy є трикутник AOB (рис.3.12 б)), в якому y змінюється від $y=0$ до $y=3-x$.

Таким чином,

$$\iiint_G x\,dx\,dy\,dz = \iint_D dx\,dy \int_0^{6-2x-2y} x dz = \iint_D x\,dx\,dy \int_0^{6-2x-2y} dz =$$

$$= \iint_D \left(\int_0^{6-2x-2y} dz \right) x\,dx\,dy = \iint_D (6-2x-2y)\,x\,dx\,dy = \int_0^3 x\,dx \int_0^{3-x} (6-2x-2y)dy =$$

$$= \int_0^3 \left(\int_0^{3-x} (6-2x-2y)\,dy \right) x\,dx = \int_0^3 \left((6y-2xy-y^2)\Big|_0^{3-x} \right) x\,dx =$$

$$= \int_0^3 (6(3-x)-2x(3-x)-(3-x)^2)\,x\,dx =$$

$$= \int_0^3 (18x-6x^2-6x^2+2x^3-9x+6x^2-x^3)\,dx = \int_0^3 (9x-6x^2+x^3)\,dx =$$

$$= \left(\frac{9}{2}x^2 - 2x^3 + \frac{x^4}{4} \right)\Bigg|_0^3 = \frac{81}{2} - 54 + \frac{81}{4} = \frac{243}{4} - 54 = \frac{27}{4}.$$

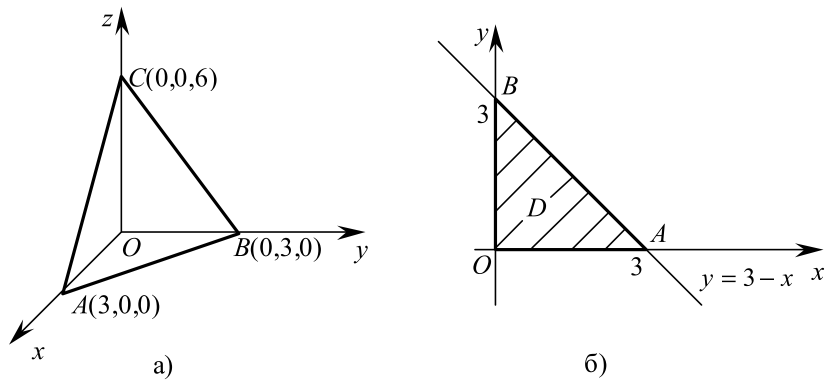


Рис.3.12◄

Приклад 3. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint_G z\,dxdydz$, де G – область, що обмежена сферою $x^2+y^2+z^2=4$ та параболоїдом обертання $x^2+y^2=3z$.

► Рівняння $x^2+y^2+z^2=4$ визначає сферу із центром у початку координат і радіусом $R=2$, друга поверхня $x^2+y^2=3z$ є параболоїд обертання навколо осі Oz. Побудуємо область G (рис.3.13 а)) та її проекцію D на площину xOy (рис.3.13 б)).

Для визначення області D розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4, \\ x^2+y^2=3z. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=4-z^2, \\ x^2+y^2=3z. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-z^2=3z, \\ x^2+y^2=3z. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z^2+3z-4=0, \\ x^2+y^2=3z. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1=1,\ z_2=-4(\text{не підходить}) \\ x^2+y^2=3z. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=1, \\ x^2+y^2=3z. \end{cases}$$

Маємо, що D є круг радіуса $\sqrt{3}$, центр якого співпадає з початком координат, тобто $D: x^2+y^2\le 3$.

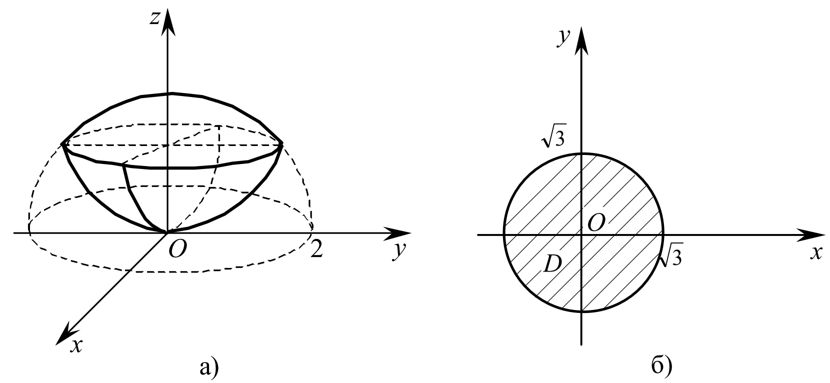


Рис.3.13

Перейдемо у потрійному інтегралі до циліндричних координат. Врахуємо, що у циліндричних координатах рівняння сфери: $\rho^2+z^2=4$ або $z^2=4-\rho^2$; рівняння параболоїда обертання: $\rho^2=3z$ або $z=\frac{\rho^2}{3}$; рівняння кола $\rho^2=3$.

Отже, G': $0\le\rho\le\sqrt{3}$, $0\le\varphi\le 2\pi$, $\frac{\rho^2}{3}\le z\le\sqrt{4-\rho^2}$.

За формулою (3.17) маємо:

$$\iiint_G z\,dxdydz = \left| \begin{array}{ll} x=\rho\cos\varphi, & dxdydz=\rho\, d\rho d\varphi dz \\ y=\rho\sin\varphi, & G\to G' \\ z=z, & \end{array} \right| =$$

$$=\iiint_{G'} z\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} \rho\, d\rho \int_{\frac{\rho^2}{3}}^{\sqrt{4-\rho^2}} z\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} \rho \left(\frac{z^2}{2} \Bigg|_{\frac{\rho^2}{3}}^{\sqrt{4-\rho^2}} \right) d\rho =$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} \rho\left(4-\rho^2-\frac{\rho^4}{9}\right)d\rho = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} \left(4\rho-\rho^3-\frac{\rho^5}{9}\right)d\rho =$$

$$=\frac{1}{2}2\pi\left(\frac{4\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}-\frac{\rho^6}{54}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}} = \pi\left(6-\frac{9}{4}-\frac{27}{54}\right)=\frac{13}{4}\pi. ◄$$

Приклад 4. Обчислити потрійний інтеграл

$$\iiint_G \frac{dxdydz}{x^2+y^2+z^2+R^2},$$

де G – верхня половина кулі радіуса R із центром у початку координат: $x^2+y^2+z^2\le R^2$; $z\ge 0$.

► Перейдемо до сферичних координат. Врахуємо, що у сферичних координатах рівняння сфери $r=R$. Проекцією півкулі на площину xOy є круг $x^2+y^2\le R^2$.

Отже, маємо

$$\iiint_G \frac{dx\,dy\,dz}{x^2+y^2+z^2+R^2} =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} x=r\cos\varphi\sin\theta, & dx\,dy\,dz=r^2\sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta, \\ y=r\sin\varphi\sin\theta, & G\to G', \\ z=r\cos\theta, & G':0\le r\le R,\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}. \end{array} \right| =$$

$$=\iiint_{G'} \frac{r^2\sin\theta}{r^2+R^2}\,dr\,d\varphi\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta \int_0^R \frac{r^2dr}{r^2+R^2} =$$

$$=\varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot\left(-\cos\theta\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)\left(\int_0^R \frac{r^2+R^2-R^2}{r^2+R^2}dr\right) = 2\pi\left(\int_0^R dr - R^2\int_0^R \frac{dr}{r^2+R^2}\right) =$$

$$=2\pi\left(R-\frac{R^2}{R}\operatorname{arctg}\frac{r}{R}\Bigg|_0^R\right) = 2\pi\left(R-R\frac{\pi}{4}\right) = 2\pi R\left(1-\frac{\pi}{4}\right). ◄$$

IV. Задачі для практичних занять

3.51. Обчислити задані повторні (трикратні) інтеграли.

а) $\int_0^1 dx\int_0^2 dy\int_0^3 dz$; б) $\int_0^a dx\int_0^b dy\int_0^c (x+y+z)dz$;

в) $\int_0^a dx\int_0^x dy\int_0^y xyz\,dz$; г) $\int_0^a dx\int_0^x dy\int_0^{xy} x^3y^3z\,dz$.

У задачах 3.52 – 3.55 обчислити потрійні інтеграли.

3.52. $\iiint_G y\,dxdydz$, де G – область, яка обмежена площинами $x=0,\ y=0,\ z=1,\ x+y+z=2$.

3.53. $\iiint_G y\cos(z+x)\,dxdydz$, де G – область, яка обмежена параболічним циліндром $y=\sqrt{x}$ та площинами $y=0,\ z=0,\ x+z=\pi/2$.

3.54. $\iiint_G \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$, де G – область, яка обмежена площинами $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1$.

3.55. $\iiint_G xyz\,dxdydz$, де G – область, яка обмежена параболічними циліндрами $y=x^2,\ x=y^2$, гіперболічним параболоїдом $z=xy$ та площиною $z=0$.

3.56. Перейти у потрійному інтегралі $\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz$ до циліндричних координат ρ, φ, z або сферичних координат r, φ, θ і розставити межі інтегрування:

а) G – область, що знаходиться у першому октанті та обмежена циліндром $x^2 + y^2 = R^2$ та площинами $z = 0$, $z = 1$, $y = x$ та $y = x\sqrt{3}$;

б) G – область, що обмежена циліндром $x^2 + y^2 = 2x$, площиною $z = 0$ і параболоїдом $z = x^2 + y^2$;

в) G – частина кулі $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$, що лежить у першому октанті.

У задачах 3.57 – 3.70 обчислити дані інтеграли, переходячи до циліндричних або сферичних координат.

3.57. $\iiint\limits_G z\,dxdydz$, де G – область, яка обмежена площиною $z = 1$ та конусом $z^2 = x^2 + y^2$.

3.58. $\iiint\limits_G (x + y + z)\,dxdydz$, де G – область, яка обмежена площинами $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$ та параболоїдом обертання $z = x^2 + y^2$ (у першому октанті).

3.59. $\iiint\limits_G xy\,dxdydz$, де G – область, яка обмежена площинами $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$ та параболоїдом обертання $z = x^2 + y^2$ (у першому октанті).

3.60. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_0^a dz$.

3.61. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int\limits_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\,dz$.

3.62. $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2 + y^2)\,dz$.

3.63. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz$.

3.64. $\int\limits_0^{2a} dx \int\limits_{-\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}} dz$.

3.65. $\iiint\limits_G x^2 y^2\,dxdydz$, де G – область, що обмежена циліндром $x^2 + y^2 = 1$, параболоїдом $z = x^2 + y^2$ та площиною $z = 0$.

3.66. $\iiint\limits_G z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, де G – область, що обмежена площинами $z = 0$, $z = a$ $(a > 0)$ та циліндром $y^2 = 2x - x^2$.

3.67. $\iiint\limits_G x^2\,dxdydz$, де G – куля з центром у початку координат радіуса R: $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$.

3.68. $\iiint\limits_G (x^2 + y^2)\,dxdydz$, де $G: a^2 \le x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$, $z \ge 0$.

3.69. $\iiint\limits_G \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, де область G – куля: $x^2 + y^2 + z^2 \le x$.

3.70. $\iiint\limits_G \dfrac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$, де область G – циліндр: $x^2 + y^2 \le 1$, $-1 \le z \le 1$.

§3. Застосування кратних інтегралів

I. Короткі теоретичні відомості

Геометричні застосування подвійного інтеграла

Обчислення площ плоских фігур

Площа S_D області $D \subset \mathbf{R}^2$ обчислюється за формулою:

$$S_D = \iint_D dxdy . \quad (3.20)$$

Якщо $D: \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), \ \ a \le x \le b$ (рис.3.14), то

$$S_D = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy . \quad (3.21)$$

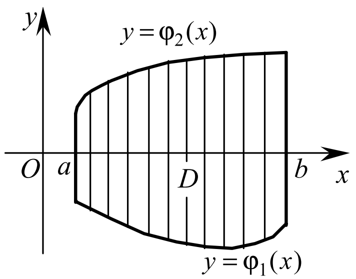


Рис.3.14

Якщо $D: \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y), \ \ c \le y \le d$ (рис.3.15), то

$$S_D = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dx . \quad (3.22)$$

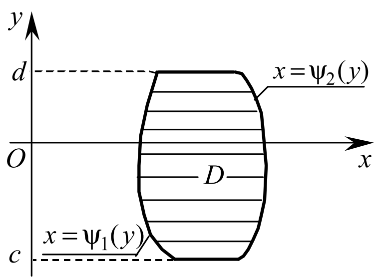


Рис.3.15

Якщо область D обмежена лініями, рівняння яких задаються у полярній системі координат $D: \rho_1(\varphi) \le \rho \le \rho_2(\varphi), \ \ \alpha \le \varphi \le \beta$ (рис.3.16), то площа S_D обчислюється за формулою:

$$S_D = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho \, d\rho . \quad (3.23)$$

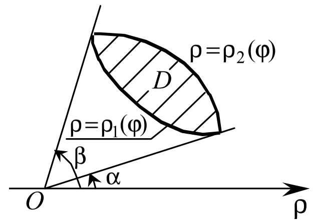


Рис.3.16

Обчислення об'єму тіла

Об'єм циліндричного тіла G, твірні якого паралельні осі Oz і яке обмежене знизу областю D площини xOy, а зверху – поверхнею σ: $z = f(x,y)$, $f(x,y) \ge 0$ в області D, $\text{пр}_{xOy}\sigma = D$ (рис.3.17), обчислюється за формулою:

$$V = \iint_D f(x,y)\,dxdy . \quad (3.24)$$

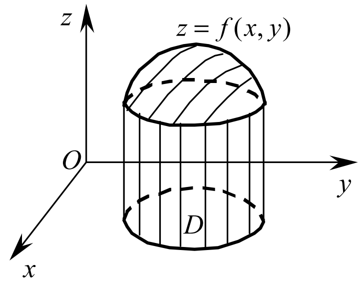


Рис.3.17

Якщо тіло G обмежене знизу поверхнею з рівнянням $z = f_1(x,y)$, зверху – поверхнею з рівнянням $z = f_2(x,y)$, а проекція верхньої та нижньої поверхонь на площину xOy є областю D (рис.3.18), то об'єм тіла G обчислюється за формулою:

$$V_G = \iint_D (f_2(x,y) - f_1(x,y))\,dxdy . \quad (3.25)$$

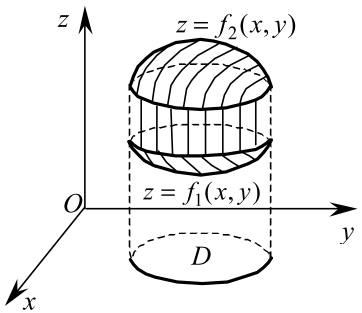


Рис.3.18

Обчислення площі поверхні

Якщо поверхня σ задається рівнянням $z = f(x, y)$ і її проекція на площину xOy є замкнена область D, то площа S_σ поверхні σ обчислюється за формулою:

$$S_\sigma = \iint\limits_D \sqrt{1 + f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y)}\, dxdy\,. \tag{3.26}$$

Фізичні застосування подвійного інтеграла

Обчислення маси матеріальної пластинки

Якщо пластинка лежить у площині xOy і має форму замкненої області D, в кожній точці якої задана поверхнева густина $\mu = \mu(x, y)$, то маса m пластинки обчислюється за формулою:

$$m = \iint\limits_D \mu(x, y)\, dxdy\,. \tag{3.27}$$

Середня густина $\mu_{\text{сер}}$ матеріальної пластинки

Якщо маса пластинки дорівнює m, а площа пластинки S, то середня густина пластинки

$$\mu_{\text{сер}} = \frac{m}{S} = \frac{\iint\limits_D \mu(x, y)\, dxdy}{\iint\limits_D dxdy}\,, \tag{3.28}$$

де $\mu(x, y)$ – густина пластинки у кожній точці пластинки.

Статичні моменти пластинки D відносно осей Ox і Oy знаходяться за формулами:

$$M_x = \iint\limits_D y\mu(x, y)\, dxdy\,, \quad M_y = \iint\limits_D x\mu(x, y)\, dxdy\,.$$

У випадку однорідної пластинки $\mu = \text{const}$.

Координати центра ваги пластинки обчислюються за формулами:

$$x_c = \frac{M_y}{m}\,, \quad y_c = \frac{M_x}{m}\,,$$

де m – маса пластинки, M_x, M_y – її статичні моменти відносно координатних осей.

У випадку однорідної пластинки ці формули приймають вигляд:

$$x_c = \frac{\iint\limits_D x\, dxdy}{S}\,, \quad y_c = \frac{\iint\limits_D y\, dxdy}{S}\,,$$

де S – площа області D.

Моменти інерції пластинки D відносно осей Ox і Oy знаходяться за формулами:

$$I_x = \iint\limits_D y^2 \mu(x, y)\, dxdy\,, \quad I_y = \iint\limits_D x^2 \mu(x, y)\, dxdy\,,$$

а момент інерції відносно початку координат – за формулою:

$$I_0 = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\mu(x, y)\, dxdy = I_x + I_y\,.$$

Застосування потрійного інтеграла

Обчислення об'єму тіла

Об'єм тіла $G \subset \mathbf{R}^3$ обчислюється за формулою:

$$V = \iiint\limits_G dxdydz\,. \tag{3.29}$$

Обчислення маси матеріального тіла $G \subset \mathbf{R}^3$

Якщо матеріальне тіло G має об'ємну густину $\mu = \mu(x, y, z)$, то маса тіла обчислюється за формулою:

$$m = \iiint\limits_G \mu(x, y, z)\, dxdydz\,. \tag{3.30}$$

Середня густина $\mu_{\text{сер}}$ тіла G є відношенням маси тіла до його об'єму, тобто:

$$\mu_{\text{сер}} = \frac{m}{V} = \frac{\iiint\limits_G \mu(x, y, z)\, dxdydz}{\iiint\limits_G dxdydz}\,, \tag{3.31}$$

де $\mu(x, y, z)$ – густина тіла G у кожній точці.

Статичні моменти тіла G відносно координатних площин знаходяться за формулами:

$$M_{yz} = \iiint_G x\mu\, dxdydz\,, \quad M_{zx} = \iiint_G y\mu\, dxdydz\,, \quad M_{xy} = \iiint_G z\mu\, dxdydz\,.$$

Координати центра ваги тіла G визначаються за формулами:

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m}\,, \quad y_c = \frac{M_{zx}}{m}\,, \quad z_c = \frac{M_{xy}}{m}\,,$$

або

$$x_c = \frac{1}{m}\iiint_G x\mu\, dxdydz\,, \quad y_c = \frac{1}{m}\iiint_G y\mu\, dxdydz\,, \quad z_c = \frac{1}{m}\iiint_G z\mu\, dxdydz\,,$$

де m – маса тіла G.

При $\mu = 1$ маємо

$$x_c = \frac{1}{V}\iiint_G x\, dxdydz\,, \quad y_c = \frac{1}{V}\iiint_G y\, dxdydz\,, \quad z_c = \frac{1}{V}\iiint_G z\, dxdydz\,,$$

де V – об'єм тіла G.

Моменти інерції тіла G відносно осей координат відповідно знаходяться за формулами:

$$I_x = \iiint_G (y^2 + z^2)\mu\, dxdydz\,, \quad I_y = \iiint_G (z^2 + x^2)\mu\, dxdydz\,,$$

$$I_z = \iiint_G (x^2 + y^2)\mu\, dxdydz\,.$$

II. Контрольні питання та завдання

1. Як обчислити площу замкненої обмеженої області?

2. Яку фігуру можна назвати криволінійним циліндричним тілом, і як за допомогою подвійного або потрійного інтеграла обчислити його об'єм?

3. Як обчислити площу поверхні, яка проектується на площину xOy у обмежену замкнену область?

4. Як обчислити масу пластинки і тіла, якщо відома поверхнева або об'ємна густина в кожній точці?

III. Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Обчислити площу фігури D, яка обмежена параболою $y = x^2 - 2x$ та прямою $y = x$.

► Побудуємо фігуру D за рівняннями її межі (рис.3.19).

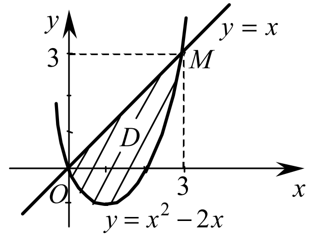


Рис.3.19

Розв'язавши систему рівнянь $\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = x \end{cases}$, знайдемо, що $x_1 = 0$, $x_2 = 3$; $y_1 = 0$, $y_2 = 3$ відповідно. Отже, лінії, що обмежують область, перетинаються в точках $O(0,0)$ та $M(3,3)$.

Область D задається системою нерівностей:

$$D:\ 0 \le x \le 3\,,\ x^2 - 2x \le y \le x\,.$$

Тоді

$$S = \iint_D dxdy = \int_0^3 dx \int_{x^2-2x}^{x} dy = \int_0^3 (x - x^2 + 2x)\, dx = \left.\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\right|_0^3 = \frac{9}{2}\,. \blacktriangleleft$$

Приклад 2. Обчислити площу фігури, яка обмежена лемніскатою Бернуллі з рівнянням: $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

► Оскільки лемніската Бернуллі (рис.3.20) симетрична відносно координатних осей, то $S = 4S_D$.

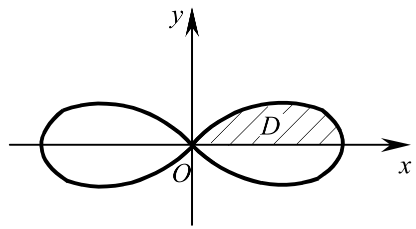


Рис.3.20

Перейдемо до полярних координат $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, тоді рівняння лемніскати перетвориться на рівняння

$$(\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi)^2=a^2(\rho^2\cos^2\varphi-\rho^2\sin^2\varphi),$$

$$\rho^4=a^2\rho^2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi),\quad \rho^2=a^2\cos2\varphi.$$

Враховуючи, що $\rho\ge0$, маємо $\rho=a\sqrt{\cos2\varphi}$, $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4}$.

Тоді

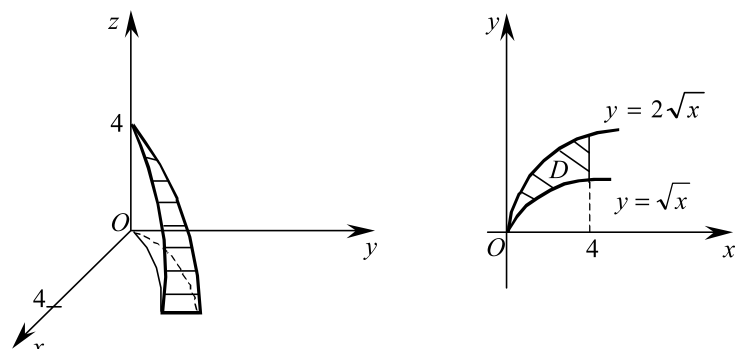
$$S=4S_D=4\iint\limits_D dx\,dy=\left|\begin{array}{ll} x=\rho\cos\varphi, & D\to D', \\ y=\rho\sin\varphi, & D':\ 0\le\rho\le a\sqrt{\cos2\varphi}, \\ dx\,dy=\rho\,d\rho\,d\varphi, & 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4}. \end{array}\right|=$$

$$=4\iint\limits_{D'}\rho\,d\rho\,d\varphi=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{a\sqrt{\cos2\varphi}}\rho\,d\rho=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^{a\sqrt{\cos2\varphi}}\right)d\varphi=$$

$$=4\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos2\varphi\,d\varphi=a^2(\sin2\varphi)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=a^2.\ ◄$$

Приклад 3. Знайти об'єм тіла G, обмеженого циліндрами $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$ та площинами $x+z=4$, $z=0$.

► Задане тіло G обмежено зверху площиною $x+z=4$, знизу площиною $z=0$ і з боків прямими циліндрами $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$ (рис.3.21а)). Область інтегрування $D=\text{пр}_{xOy}G$ зображена на рис.3.21 б).



а) б)

Рис.3.21

Змінна x змінюється від 0 до 4, тобто $0\le x\le4$; при будь-якому значенні з цього проміжку $\sqrt{x}\le y\le2\sqrt{x}$. Крім того, $z=4-x$.

Отже,

$$V=\iint\limits_D(4-x)\,dxdy=\int_0^4dx\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}(4-x)\,dy=\int_0^4(4-x)\,y\Big|_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}dx=$$

$$=\int_0^4(4-x)(2\sqrt{x}-\sqrt{x})\,dx=\int_0^4(4-x)\sqrt{x}\,dx=\int_0^4\left(4x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}\right)dx=$$

$$=\left(4\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right)\Bigg|_0^4=\frac{64}{3}-\frac{64}{5}=\frac{128}{15}.\ ◄$$

Приклад 4. Обчислити об'єм тіла, яке обмежене циліндром $x^2+y^2=Rx$ і сферою $x^2+y^2+z^2=R^2$ $(x\ge0)$, за допомогою подвійного інтеграла.

► Перша поверхня є циліндр із твірною, паралельною осі Oz, і напрямною: $\left(x-\dfrac{R}{2}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{R}{2}\right)^2$, друга – сфера із центром у початку координат і радіусом R. Від перетину двох поверхонь утворюється тіло, яке має дві симетричні частини відносно площини xOy. Проекцію цього тіла на площину xOy зображено на рис.3.22. Це є круг. На рисунку заштриховано область D – півкруга. Об'єм тіла обчислюється за формулою (3.24), де $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$. Враховано симетрію тіла і симетрію проекції цього тіла на площину xOy.

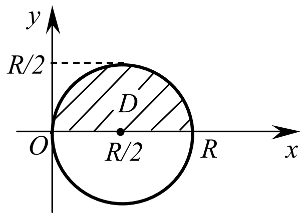


Рис.3.22

$$V=4\iint\limits_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy=\left|\begin{array}{ll} x=\rho\cos\varphi, & D\to D', \\ y=\rho\sin\varphi, & D':0\le\rho\le R\cos\varphi, \\ dx\,dy=\rho\,d\rho\,d\varphi, & 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}. \end{array}\right|=$$

$$= 4\iint\limits_{D'} \sqrt{R^2 - \rho^2}\,\rho\, d\rho d\varphi = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{R\cos\varphi} \sqrt{R^2 - \rho^2}\,\rho d\rho =$$

$$= 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_0^{R\cos\varphi} \sqrt{R^2 - \rho^2}\,\rho d\rho \right) d\varphi = -\frac{2\cdot 2}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left((R^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{R\cos\varphi} \right) d\varphi =$$

$$= -\frac{4}{3}R^3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left((1 - \cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}} - 1 \right) d\varphi = -\frac{4}{3}R^3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3\varphi - 1)\, d\varphi =$$

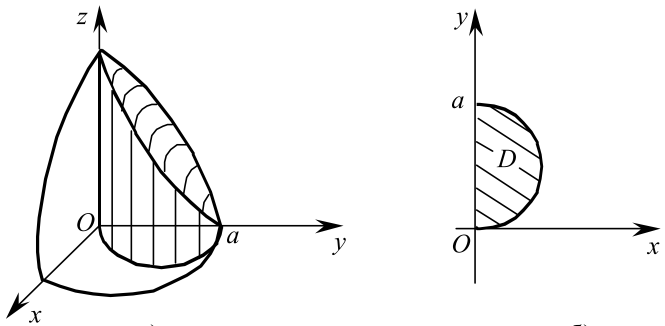
$$= -\frac{4}{3}R^3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\, d\varphi + \frac{4}{3}R^3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{4}{3}R^3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2\varphi)\, d\cos\varphi + \frac{4}{3}R^3\frac{\pi}{2} =$$

$$= \frac{4}{3}R^3 \left(\cos\varphi - \frac{\cos^3\varphi}{3} \right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}R^3\left(-1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3}\pi R^3 =$$

$$= \frac{2}{3}\pi R^3 - \frac{8}{9}R^3 = \frac{4}{3}R^3\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right). \blacktriangleleft$$

Приклад 5. Знайти площу частини сфери $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, що міститься всередині циліндра $x^2 + y^2 = ay$ $(x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0)$.

► Частина сфери, що знаходиться в першому октанті і міститься всередині циліндра, проектується у півкруг, обмежений колом $x^2 + y^2 = ay$ та віссю Oy (рис.3.23).



а) б)

Рис.3.23

З рівняння сфери маємо:

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\ ; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\ ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\ ;$$

$$\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

Отже, $S = \iint\limits_D \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\, dxdy$.

Перейдемо до полярних координат. Врахуємо, що рівняння кола прийме вигляд $\rho = a\sin\varphi$.

$$S = a\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = \left| \begin{array}{ll} x = \rho\cos\varphi, & D \to D', \\ y = \rho\sin\varphi, & D' : 0 \le \rho \le a\sin\varphi, \\ dxdy = \rho d\rho d\varphi, & 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}. \end{array} \right| =$$

$$= a\iint\limits_{D'} \frac{\rho\, d\rho d\varphi}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} = a\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{a\sin\varphi} \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} = -a\int\limits_0^{\pi/2} \left(\sqrt{a^2 - \rho^2}\Big|_0^{a\sin\varphi} \right) d\varphi =$$

$$= -a^2 \int\limits_0^{\pi/2} (\cos\varphi - 1)\, d\varphi = -a^2(\sin\varphi - \varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -a^2\left(1 - \frac{\pi}{2}\right) = a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right). \blacktriangleleft$$

Приклад 6. Обчислити об'єм тіла G, яке обмежене параболоїдом $(x-1)^2 + y^2 = z$ і площиною $2x + z = 2$, за допомогою потрійного інтеграла.

► Знайдемо рівняння проекції лінії перетину поверхні $(x-1)^2 + y^2 = z$ (параболоїд) із площиною $2x + z = 2$ на площину xOy. Враховуючи, що на лінії перетину аплікати співпадають, отримаємо

$$(x-1)^2 + y^2 = 2 - 2x,$$

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ (коло)}.$$

Тіло G та область $D = \text{пр}_{xOy} G$ зображено на рис.3.24.

Оскільки область D є круг, зручно перейти до циліндричних координат, тобто покласти $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$. Тоді границя області D матиме рівняння $\rho = 1$. Рівняння площини $2x + z = 2$ в циліндричних координатах є $z = 2(1-\rho\cos\varphi)$, а рівняння параболоїда, яке запишемо так: $z = x^2 - 2x + 1 + y^2$, матиме вигляд $z = \rho^2 - 2\rho\cos\varphi + 1$, причому: $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \rho \le 1$.

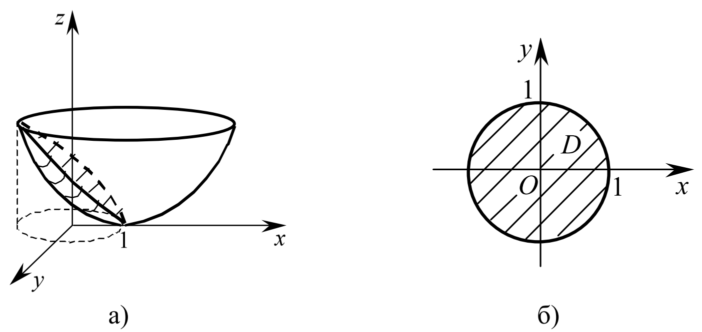


Рис.3.24

Змінна z змінюється від $z = \rho^2 - 2\rho\cos\varphi + 1$ до $z = 2(1-\rho\cos\varphi)$. Отже, $\rho^2 - 2\cos\varphi + 1 \le z \le 2(1-\rho\cos\varphi)$, бо область G обмежена знизу параболоїдом, зверху – площиною. Об'єм тіла, обмеженого параболоїдом і площиною, обчислюється так:

$$V = \iiint\limits_G dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{G'} \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho\,d\rho \int_{\rho^2-2\rho\cos\varphi+1}^{2(1-\rho\cos\varphi)} dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho \left(z \Big|_{\rho^2-2\rho\cos\varphi+1}^{2(1-\rho\cos\varphi)} \right) d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho\,(2 - 2\rho\cos\varphi - \rho^2 + 2\rho\cos\varphi - 1)\,d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (\rho - \rho^3)\,d\rho = \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right)\Bigg|_0^1 = 2\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2}. ◄$$

Приклад 7. Обчислити об'єм тіла G, яке обмежено поверхнею $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^2(x^2 + y^2)^2$ за допомогою потрійного інтеграла.

► Перейдемо до сферичних координат, поклавши $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$. Тоді рівняння поверхні прийме вигляд: $r^2 = a^2\sin^4\theta$ або $r = a\sin^2\theta$; отже $0 \le r \le a\sin^2\theta$, $0 \le \theta \le \pi$. Об'єм тіла обчислюється так:

$$V = 2\iiint\limits_G dx\,dy\,dz = 2\iiint\limits_{G'} r^2 \sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta \int_0^{a\sin^2\theta} r^2\,dr =$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} \sin\theta \left(\frac{r^3}{3} \Bigg|_0^{a\sin^2\theta} \right) d\theta = \frac{2\pi a^3}{3} \int_0^{\pi} \sin^7\theta\,d\theta = -\frac{2\pi a^3}{3} \int_0^{\pi} (1 - \cos^2\theta)^3\,d\cos\theta =$$

$$= -\frac{2}{3}\pi a^3 \left(\cos\theta\Big|_0^{\pi} - 3\int_0^{\pi} \cos^2\theta\,d\cos\theta + 3\int_0^{\pi} \cos^4\theta\,d\cos\theta - \int_0^{\pi} \cos^6\theta\,d\cos\theta \right) =$$

$$= -\frac{2}{3}\pi a^3 \left(-2 - \cos^3\theta\Big|_0^{\pi} + \frac{3}{5}\cos^5\theta\Big|_0^{\pi} - \frac{\cos^7\theta}{7}\Bigg|_0^{\pi} \right) =$$

$$= -\frac{2\pi a^3}{3} \left(-2 + 2 - \frac{6}{5} + \frac{2}{7} \right) = \frac{64}{105}\pi a^3. ◄$$

Приклад 8. Обчислити масу та середню густину пластинки D, яка обмежена лініями $y = x^2$, $y = 1$, якщо густина визначається функцією $\mu(x, y) = x^2 + y^2$.

► Пластинка D зображена на рис.3.25.

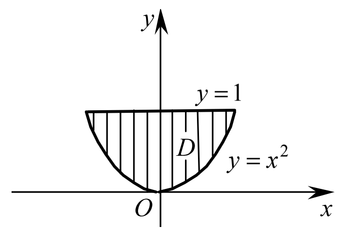


Рис.3.25

Обчислимо масу пластинки D:

$$m = \iint\limits_D \mu(x, y)\,dxdy = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\,dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} (x^2 + y^2)\,dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_{x^2}^{1} \right) dx = \int_{-1}^{1} \left(x^2 - x^4 + \frac{1}{3} - \frac{x^6}{3} \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x}{3} - \frac{x^7}{21} \right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{44}{105}.$$

Знайдемо площу пластинки D, враховуючи симетрію пластинки відносно осі Oy:

$$S = \iint_D dxdy = 2\iint_{D'} dx\,dy = 2\int_0^1 dx\int_{x^2}^1 dy = 2\int_0^1 \left(y\Big|_{x^2}^1 \right)dx = 2\int_0^1 (1-x^2)\,dx =$$

$$= 2\left(x - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^1 = 2\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}.$$

Тепер обчислимо середню густину пластинки $\mu_{\text{сер}}$:

$$\mu_{\text{сер}} = \frac{m}{S} = \frac{44\cdot 3}{105\cdot 4} = \frac{11}{35}. \blacktriangleleft$$

Приклад 9. Знайти статичні моменти M_x та M_y відносно осей координат та центр ваги $C(x_c, y_c)$ однорідної пластинки D, обмеженої кривою $y = \sin x$, $0 \le x \le \pi$ та віссю Ox (густина $\mu(x,y)=1$).

► Пластинка D зображена на рис.3.26.

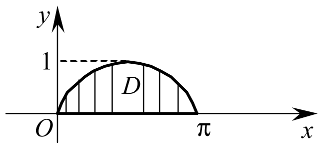


Рис.3.26

$$M_x = \iint_D y\,dxdy = \int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} y\,dy = \int_0^\pi \left(\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{\sin x} \right)dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin^2 x\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^\pi (1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{4}\left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right)\Bigg|_0^\pi = \frac{\pi}{4}.$$

$$M_y = \iint_D x\,dxdy = \int_0^\pi x\,dx \int_0^{\sin x} dy = \int_0^\pi x\sin x\,dx = -x\cos x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\,dx = \pi.$$

$$S_D = \iint_D dxdy = \int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} dy = \int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x\big|_0^\pi = 2.$$

Отже,

$$x_c = \frac{M_y}{S_D} = \frac{\pi}{2};\quad y_c = \frac{M_x}{S_D} = \frac{\pi}{8}. \blacktriangleleft$$

Приклад 10. Знайти момент інерції рівнобедреного прямокутного трикутника відносно гіпотенузи довжини $2a$, якщо в кожній точці його поверхнева густина пропорційна відстані точки до гіпотенузи.

► Нехай гіпотенуза заданого трикутника ABC розміщена на осі Ox і ділиться початком координат пополам (рис.3.27).

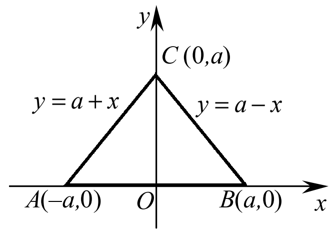


Рис.3.27

Рівняння катетів AC і CB будуть відповідно $y = a + x$ та $y = a - x$, або $x = y - a$ та $x = a - y$. Густина $\mu(x,y) = ky$, де k – коефіцієнт пропорційності.

Шуканий момент інерції відносно гіпотенузи буде моментом інерції відносно осі Ox, тобто I_x.

$$I_x = \iint_D y^2\mu(x,y)\,dxdy = \iint_D ky^3\,dxdy = k\int_0^a y^3 dy \int_{y-a}^{a-y} dx =$$

$$= k\int_0^a y^3 \left(x\Bigg|_{y-a}^{a-y} \right)dy = k\int_0^a y^3(a-y-y+a)\,dy = 2k\int_0^a y^3(a-y)\,dy =$$

$$= 2k\left(a\frac{y^4}{4} - \frac{y^5}{5} \right)\Bigg|_0^a = 2k\frac{a^5}{20} = \frac{ka^5}{10}. \blacktriangleleft$$

Приклад 11. Обчислити масу та середню густину $\mu_{\text{сер}}$ тіла G, яке обмежене поверхнями $2z = x^2 + y^2$ і $z = 2$ і має густину $\mu(x,y,z) = z$.

► Дане тіло обмежене знизу параболоїдом $2z = x^2 + y^2$, зверху площиною $z = 2$ і проектується в круг $x^2 + y^2 \le 4$ площини xOy (рис.3.28).

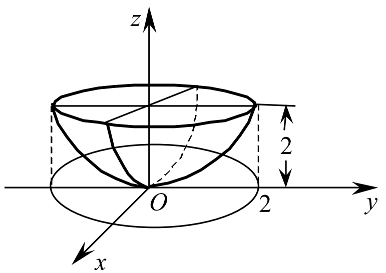


Рис.3.28

Використовуючи циліндричні координати, знаходимо рівняння параболоїда $z=\frac{\rho^2}{2}$ $(0\le\varphi<2\pi)$, тобто $\frac{\rho^2}{2}\le z\le 2$.

Маса тіла G обчислюється так:

$$m=\iiint\limits_G \mu(x,y,z)\,dxdy\,dz=\iiint\limits_G z\,dxdy\,dz=\iiint\limits_{G'} z\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\rho\,d\rho\int\limits_{\frac{\rho^2}{2}}^2 z\,dz=2\pi\int\limits_0^2\rho\left(\frac{z^2}{2}\Bigg|_{\frac{\rho^2}{2}}^2\right)d\rho=2\pi\int\limits_0^2\rho\left(2-\frac{\rho^4}{8}\right)d\rho=$$

$$=2\pi\left(\rho^2-\frac{\rho^6}{48}\right)\Bigg|_0^2=2\pi\left(4-\frac{64}{48}\right)=\frac{16\pi}{3}.$$

Середня густина $\mu_{\text{сер}}$ – це відношення маси тіла до його об’єму, тобто

$$\mu_{\text{сер}}=\frac{m}{V}.$$

Обчислимо об’єм тіла V:

$$V=\iiint\limits_G dxdy\,dz=\iiint\limits_{G'}\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\rho\,d\rho\int\limits_{\frac{\rho^2}{2}}^2 dz=2\pi\int\limits_0^2\rho\left(z\Bigg|_{\frac{\rho^2}{2}}^2\right)d\rho=$$

$$=2\pi\int\limits_0^2\rho\left(2-\frac{\rho^2}{2}\right)d\rho=2\pi\left(\rho^2-\frac{\rho^4}{8}\right)\Bigg|_0^2=2\pi(4-2)=4\pi.$$

Середня густина $\mu_{\text{сер}}=\frac{16\pi}{3\cdot 4\pi}=\frac{4}{3}$. ◄

Приклад 12. Знайти координати центра ваги $C(x_c,y_c,z_c)$ півкулі $x^2+y^2+z^2\le R^2$, $z\ge 0$, якщо густина $\mu(x,y,z)$ в кожній точці пропорційна відстані від точки до центра.

► Маємо $\mu(x,y,z)=k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. В силу симетрії $x_c=y_c=0$.

Далі обчислення проводимо у сферичних координатах.
Знаходимо статичний момент відносно площини xOy:

$$M_{xy}=\iiint\limits_G z\mu\,dxdydz=k\iiint\limits_G z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz=$$

$$=k\iiint\limits_G r\cos\theta\cdot r\cdot r^2\sin\theta\,drd\varphi d\theta=k\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\,d\theta\int\limits_0^R r^4dr=$$

$$=k\,\varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot\left(-\frac{1}{4}\cos 2\theta\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)\cdot\frac{r^5}{5}\Bigg|_0^R=2k\pi\frac{1}{2}\frac{R^5}{5}=\frac{1}{5}k\pi R^5.$$

Знаходимо масу тіла:

$$m=\iiint\limits_G\mu\,dxdydz=k\iiint\limits_G\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz=k\iiint\limits_G r\cdot r^2\sin\theta\,drd\varphi d\theta=$$

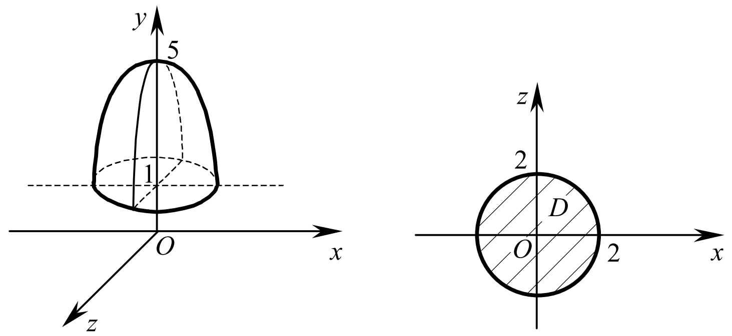
$$=k\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\sin\theta\,d\theta\int\limits_0^R r^3dr=k\,\varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot\left(-\cos\theta\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)\cdot\frac{r^4}{4}\Bigg|_0^R=\frac{1}{2}k\pi R^4.$$

Отже, $z_c=\frac{M_{xy}}{m}=\frac{2}{5}R$.

Таким чином, $C\left(0,0,\frac{2}{5}R\right)$. ◄

Приклад 13. Знайти момент інерції відносно осі Oy однорідного тіла G (густина $\mu(x,y,z)=1$), обмеженого параболоїдом $y=5-x^2-z^2$ і площиною $y=1$.

► Область G та її проекцію D на площину xOz зображено на рис.3.29.



а) б)

Рис.3.29

Для обчислення момента інерції I_y перейдемо до циліндричних координат.

$$I_y = \iiint_G \mu(x^2+y^2)\,dxdydz = \mu\iiint_G (x^2+y^2)\,dxdydz =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} x=\rho\cos\varphi, & G \to G', \\ z=\rho\sin\varphi, & G': 0\le\rho\le 2, \\ y=y, & 0\le\varphi\le 2\pi, \\ dxdz=\rho d\rho d\varphi, & 1\le y\le 5-\rho^2. \end{array} \right| = ч\mu\iiint_{G'} \rho^2\rho\, d\rho d\varphi dy =$$

$$= \mu\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^3 d\rho \int_1^{5-\rho^2} dy = \mu\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot\int_0^2 \rho^3\left(y\Big|_1^{5-\rho^2}\right) d\rho = \mu\cdot 2\pi\int_0^2 \rho^3(5-\rho^2-1)\,d\rho =$$

$$= 2\pi\mu\int_0^2 (4\rho^3-\rho^5)\,d\rho = 2\pi\mu\left(\rho^4-\frac{\rho^6}{6}\right)\Big|_0^2 = 2\pi\mu\left(2^4-\frac{2^6}{6}\right) = \frac{32}{3}\pi\mu. ◄$$

IV. Задачі для практичних занять

Площа плоскої фігури

У задачах 3.71 – 3.85 обчислити площу області D, яка обмежена заданими лініями, за допомогою подвійного інтеграла (параметри, які входять до умови, вважати додатними).

3.71. $D: y=x,\ \ y=5x,\ \ x=1$.

3.72. $D: x=0,\ \ y=0,\ \ x+y=1$.

3.73. $D: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

3.74. $D: y=\sqrt{x},\ \ y=2\sqrt{x},\ \ x=4$.

3.75. $D: y=x^2+1,\ \ x+y=3$.

3.76. $D: x^2=3y,\ \ y^2=3x$.

3.77. $D: y=x^2,\ \ y=\dfrac{3}{4}x^2+1$.

3.78. $D: y=\dfrac{8}{x^2+4},\ \ x^2=4y$.

3.79. $D: y=\dfrac{8a^3}{x^2+4a^2},\ \ x=2y,\ \ x=0$.

3.80. $D: (x^2+y^2)^2=2ax^3$.

3.81. $D: (x^2+y^2)^3=x^4+y^4$.

3.82. $D: (x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2),\ \ x^2+y^2\ge a^2$.

3.83. $D: x^2+2x+y^2=0,\ \ x^2+4x+y^2=0,\ \ y=x,\ \ y=0$.

3.84. $D: x^2-5x+y^2=0,\ \ x^2-7x+y^2=0,\ \ y=\dfrac{x}{\sqrt{3}},\ \ y=0$.

3.85. $D: x^2+y^2-3y=0,\ \ x^2+y^2-5y=0,\ \ y=\dfrac{x}{\sqrt{3}},\ \ x=0$.

Об'єм тіла. I

У задачах 3.86 – 3.98 знайти подвійним інтегруванням об'єми тіл, обмежених вказаними поверхнями (параметри, які входять до умови задач, вважати додатними).

3.86. Площинами координат, площинами $x=4$, $y=4$ та параболоїдом $z=x^2+y^2+1$.

3.87. Площинами координат, площинами $x = a$, $y = b$ і еліптичним параболоїдом $z = \dfrac{x^2}{2p} + \dfrac{y^2}{2q}$.

3.88. Параболоїдом обертання $z = x^2 + y^2$, площинами координат і площиною $x + y = 1$.

3.89. Площиною $x + y + z = 1$ і координатними площинами (піраміда).

3.90. Параболоїдом обертання $z = x^2 + y^2$ і площинами $z = 0$, $y = 1$, $y = 2x$ і $y = 6 - x$.

3.91. Циліндром $z = 9 - y^2$, координатними площинами та площиною $3x + 4y = 12$ $(y \ge 0)$.

3.92. Циліндром $z = 4 - x^2$, координатними площинами та площиною $2x + y = 4$ $(x \ge 0)$.

3.93. Циліндром $x^2 + y^2 = 4$, площинами $z = x + y + 10$ і $z = 0$.

3.94. Циліндром $x^2 + z^2 = a^2$ і площинами $z = 0$, $y = 0$, $y = x$.

3.95. Еліптичним параболоїдом $z = 2x^2 + y^2 + 1$, площиною $x + y = 1$ і координатними площинами.

3.96. Параболоїдом $z = x^2 + y^2$, циліндром $y = x^2$ і площинами $z = 0$, $y = 1$.

3.97. Гіперболічним параболоїдом $z = x^2 - y^2$ і площинами $z = 0$, $x = 3$.

3.98. Гіперболічним параболоїдом $z = x^2 - y^2$ і площинами $z = 0$, $x = 1$, $y = 0$.

Площа поверхні

У задачах 3.99 – 3.104 обчислити площу вказаної поверхні.

3.99. Обчислити площу тієї частини площини $6x + 3y + 2z = 12$, яка знаходиться у першому октанті.

3.100. Обчислити площу тієї частини поверхні $z^2 = 2xy$, яка знаходиться над прямокутником, що лежить в площині $z = 0$ і який обмежений прямими $x = 0$, $y = 0$, $x = 3$, $y = 6$.

3.101. Обчислити площу частини конуса $z^2 = x^2 + y^2$, яка лежить над площиною xOy і відтинається площиною $z = \sqrt{2}\left(\dfrac{x}{2} + 1\right)$.

3.102. Обчислити площу частини параболоїда $2z = x^2 + y^2$, що вирізається циліндром $x^2 + y^2 = 1$.

3.103. Обчислити площу частини кулі $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, яка вирізається циліндром $x^2 + y^2 = Rx$.

3.104. Обчислити повну поверхню тіла, обмеженого сферою $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ і параболоїдом $x^2 + y^2 = 2az$ $(z \ge 0)$.

Об'єм тіла. II

У задачах 3.105 – 3.120 знайти потрійним інтегруванням об'єми тіл, обмежених вказаними поверхнями (параметри, які входять до умови задач, вважати додатними), переходячи (якщо це потрібно) до циліндричних або сферичних координат.

3.105. Циліндрами $z = 4 - y^2$ і $z = y^2 + 2$ і площинами $x = -1$ і $x = 2$.

3.106. Параболоїдами $z = x^2 + y^2$ та $z = x^2 + 2y^2$ і площинами $y = x$, $y = 2x$, $x = 1$.

3.107. Параболоїдами $z = x^2 + y^2$, $z = 2x^2 + 2y^2$, циліндром $y = x^2$ та площиною $y = x$.

3.108. Параболоїдом $az = x^2 + y^2$ і верхньою частиною конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ $(a > 0)$.

3.109. Сферою $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ і конусом $x^2 + y^2 \le z^2$.

3.110. Параболоїдом $z = 6 - x^2 - y^2$ і конусом $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3.111. Циліндрами $z^2 = 4 - x$, $x^2 + y^2 = 4x$.

3.112. Циліндрами $y = 2\sqrt{x}$, $x = 2\sqrt{y}$ і площиною $z = 4 - x$ $(z \geq 0)$.

3.113. Циліндром $x^2 + y^2 = 4$ і параболоїдом $z = x^2 + y^2$ $(z \geq 0)$.

3.114. Циліндрами $x = y^2$, $x = 2y^2 + 1$, $z = 1 - y^2$ $(z \geq 0)$.

3.115. Циліндрами $z = \ln(x+2)$, $z = \ln(6 - x)$ і площинами $x = 0$, $x + y = 2$, $x - y = 2$.

3.116. Параболоїдом $z = x^2 + y^2$ та площиною $z = x + y$.

3.117. Сферою $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ і параболоїдом $x^2 + y^2 = 3z$.

3.118. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 x$.

3.119. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 3xyz$.

3.120. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z^2 = x^2 + y^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ $(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$.

Маса, моменти і центр ваги

У задачах 3.121 – 3.124 подвійним інтегруванням знайти вказані величини.

3.121. Знайти масу пластинки D заданої форми з заданою густиною $\mu(x, y)$:

а) пластинка D – круг радіуса R, густина $\mu(x, y)$ пропорційна квадрату відстані точки від центра і дорівнює δ на межі пластинки;

б) пластинка D – прямокутний трикутник з катетами $OB = a$, $OA = b$, густина $\mu(x, y)$ в кожній точці пропорційна відстані точки від катета OA.

3.122. Знайти статичні моменти даних плоских фігур (густина $\mu = 1$) відносно вказаних осей:

а) прямокутника зі сторонами a та b відносно сторони a;

б) півкруга відносно діаметра;

в) однорідної фігури, обмеженої синусоїдою $y = \sin x$ і прямою OA, що проходить через початок координат і вершину $A(\pi/2, 1)$ синусоїди $(x \geq 0)$, відносно осей Ox і Oy.

3.123. Знайти координати центра ваги даних плоских фігур (густина $\mu = 1$):

а) фігури, обмеженої кривими $y^2 = ax$, $y = x$;

б) фігури, обмеженої лініями $y^2 = 4x + 4$, $y^2 = -2x + 4$;

в) фігури, обмеженої синусоїдою $y = \sin x$, віссю Ox і прямою $x = \pi/4$;

г) фігури, обмеженої верхньою половиною еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, що спирається на велику вісь $(a > b)$.

3.124. Знайти моменти інерції даних плоских фігур:

а) однорідного трикутника $(\mu = 1)$, обмеженого прямими $x + y = 2$, $x = 2$, $y = 2$ відносно початку координат;

б) фігури, обмеженої лінією $x^2 + y^2 - 2x = 0$, відносно початку координат, якщо її густина $\mu(x, y) = 3{,}5$;

в) однорідного трикутника $(\mu = 1)$, обмеженого прямими $x + y = 1$, $x + 2y = 2$, $y = 0$, відносно осей Ox, Oy та початку координат;

г) трикутника, обмеженого прямими $x + y = a$, $x = a$, $y = a$ відносно осей Ox і Oy та початку координат, якщо густина пропорційна ординаті точки з коефіцієнтом пропорційності k;

д) однорідної фігури $(\mu = 1)$, обмеженої еліпсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ відносно осей Ox, Oy та початку координат.

У задачах 3.125 – 3.129 потрійним інтегруванням знайти вказані величини.

3.125. Знайти масу тіла G заданої форми з заданою густиною $\mu(x,y,z)$:

а) тіло G – куб з ребром $a=1$, густина $\mu(x,y,z)=x+y+z$;

б) тіло G – частина кулі радіуса R, яка знаходиться у першому октанті, густина $\mu(x,y,z)$ в кожній точці дорівнює відстані від цієї точки до площини xOy;

в) тіло G обмежено сферою $x^2+y^2+z^2=4$, густина $\mu(x,y,z)=z$;

г) тіло G обмежено параболоїдом $x^2+y^2=3z$ і сферою $x^2+y^2+z^2=4$, густина $\mu(x,y,z)=z$.

3.126. Знайти масу тіла G заданої форми з заданою густиною $\mu(x,y,z)$ та середню густину тіла:

а) тіло G обмежено поверхнями $x^2+y^2-z^2=a^2$, $z=0$, $z=a>0$, густина $\mu(x,y,z)$ в кожній точці пропорційна аплікаті z і в площині $z=a$ дорівнює γ_0;

б) тіло G – сферичний шар між поверхнями $x^2+y^2+z^2=a^2$ і $x^2+y^2+z^2=4a^2$, густина $\mu(x,y,z)$ в кожній точці пропорційна квадрату відстані від точки до початку координат, якщо задане найбільше значення густини γ_0.

3.127. Знайти статичні моменти даних тіл відносно вказаних площин:

а) прямокутного паралелепіпеда з ребрами a, b і c відносно його граней;

б) прямого кругового конуса з радіусом основи R, висоти H відносно площини, що проходить через вершину конуса паралельно його основі;

в) тіла, обмеженого еліпсоїдом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ і площиною xOy відносно цієї площини.

3.128. Знайти координати центра ваги однорідних тіл, обмежених даними поверхнями (густина $\mu=1$):

а) площинами $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=2$, $y=4$ та $x+y+z=8$ (зрізаний паралелепіпед);

б) еліпсоїдом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ і координатними площинами $(x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0)$;

в) циліндром $z=\frac{y^2}{2}$ і площинами $x=0$, $y=0$, $z=0$ і $2x+3y-12=0$.

3.129. Знайти моменти інерції даних однорідних тіл G $(\mu=1)$, обмежених даними поверхнями, відносно вказаних осей:

а) $G: z=x^2+y^2$, $z=3$, відносно осі Oz;

б) $G: x^2=y^2+z^2$, $x=2$, відносно осі Ox;

в) $G: y=4-x^2-z^2$, $y=0$, відносно осі Oy.

ГЛАВА 4. ***КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ. ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ. ТЕОРІЯ ПОЛЯ***

§1. Криволінійні інтеграли

I. Короткі теоретичні відомості

Криволінійні інтеграли першого роду (по довжині дуги)

Основні поняття. Нехай задана просторова гладка або кусково-гладка крива $L \subset \mathbf{R}^3$, яка обмежена точками A і B. Нехай в кожній точці $M(x,y,z)$ цієї кривої визначена неперервна функція $f(x,y,z) = f(M)$. Розіб'ємо криву L на n частин точками $A = A_0$, A_1, $A_2, \ldots, A_n = B$. Позначимо через Δl_i довжину дуги $A_{i-1}A_i$. На кожній дузі $A_{i-1}A_i$ візьмемо точку $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ і складемо суму

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta l_i$$

Ця сума називається *інтегральною сумою* для функції $f(x,y,z)$ по дузі AB.

Покладемо $\lambda = \max \Delta l_i$, $i = \overline{1, n}$.

Означення. Якщо існує границя інтегральної суми $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta l_i$, яка не залежить від способу розбиття дуги AB та від вибору на ній точок $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, то ця границя називається *криволінійним інтегралом першого роду* від функції $f(x,y,z)$ по дузі AB.

Криволінійний інтеграл першого роду позначається так:

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)\,dl \quad \text{або} \quad \int\limits_{L} f(x,y,z)\,dl .$$

Отже, за означенням

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)\,dl = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta l_i . \tag{4.1}$$

Якщо AB – плоска крива, тобто $AB \subset \mathbf{R}^2$, то

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta l_i . \tag{4.2}$$

Зауважимо, що оскільки у формулах (4.1), (4.2) Δl_i – довжина дуги, $\Delta l_i > 0$, то

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)\,dl = \int\limits_{BA} f(x,y,z)\,dl ;$$
$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl = \int\limits_{BA} f(x,y)\,dl .$$

Обчислення криволінійного інтеграла першого роду

Обчислення криволінійного інтеграла першого роду зводиться до обчислення визначеного інтеграла.

а) якщо крива $AB \subset \mathbf{R}^3$ і задана параметрично

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \quad t_1 \le t \le t_2, \end{cases}$$

то

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)\,dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f[x(t), y(t), z(t)]\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\; dt . \tag{4.3}$$

б) якщо крива $AB \subset \mathbf{R}^2$ і задана параметрично

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t_1 \le t \le t_2, \end{cases}$$

то

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f[x(t), y(t)]\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\; dt . \tag{4.4}$$

в) якщо крива $AB \subset \mathbf{R}^2$ задана рівнянням

$$y = y(x), \quad a \le x \le b ,$$

то

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl = \int\limits_{a}^{b} f[x, y(x)]\sqrt{1 + y'^2(x)}\; dx . \tag{4.5}$$

Аналогічно, якщо крива $AB \subset \mathbf{R}^2$ задана рівнянням

$$x = x(y), \quad c \le y \le d ,$$

то

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl = \int\limits_{c}^{d} f[x(y), y]\sqrt{x'^2(y) + 1}\; dy .$$

г) якщо крива $AB \subset \mathbf{R}^2$ задається у полярній системі координат рівнянням

$$\rho = \rho(\varphi), \quad \alpha \le \varphi \le \beta,$$

то

$$\int_{AB} f(x,y)\,dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}\;d\varphi. \quad (4.6)$$

Зауважимо, що виведення вказаних формул базується на означенні криволінійного інтеграла першого роду з урахуванням формул для диференціала довжини дуги.

Для пункту а) $dl = \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\;dt$;

для пункту б) $dl = \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\;dt$;

для пункту в) $dl = \sqrt{1+y'^2(x)}\;dx$ або $dl = \sqrt{x'^2(y)+1}\;dy$;

для пункту г) $dl = \sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}\;d\varphi$.

Цей факт зручно використовувати при обчисленні криволінійних інтегралів першого роду, обчислюючи попередньо диференціал довжини дуги dl та застосовуючи одну з формул для обчислення цих інтегралів. Перехід від лівої до правої частини цих формул проходить тоді формально і майже виключає необхідність їх запам'ятовування.

Застосування криволінійного інтеграла першого роду

а) *довжина дуги* AB обчислюється за формулою

$$l = \int_{AB} dl. \quad (4.7)$$

б) *маса матеріальної дуги* AB, в кожній точці якої задана густина $\mu(x,y,z)$, обчислюється за формулою

$$m = \int_{AB} \mu(x,y,z)\,dl. \quad (4.8)$$

Аналогічно, для випадку $AB \subset \mathbf{R}^2$, густина дуги $\mu(x,y)$, маємо

$$m = \int_{AB} \mu(x,y)\,dl.$$

Криволінійні інтеграли другого роду (по координатах)

Основні поняття. Нехай задана гладка або кусково-гладка крива $L \subset \mathbf{R}^3$, яка обмежена точками A і B, в кожній точці якої задана вектор-функція $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$, де функції $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ – неперервні на кривій L. Розіб'ємо криву L на n частинних дуг точками $A = A_0$, A_1, $A_2, \ldots, A_n = B$. Кожній частинній дузі $A_{i-1}A_i$ поставимо у відповідність вектор $\overrightarrow{A_{i-1}A_i} = \overrightarrow{\Delta S_i} = (\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i)$. Позначимо його довжину через Δl_i, тобто $\left|\overrightarrow{\Delta S_i}\right| = \Delta l_i$. Покладемо $\lambda = \max \Delta l_i$, $i = \overline{1, n}$. На кожній частинній дузі $A_{i-1}A_i$ візьмемо точку $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ і обчислимо скалярний добуток

$$(\vec{F}(M_i), \overrightarrow{\Delta S_i}) = P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i + R(M_i)\Delta z_i.$$

Складемо суму

$$I_n = \sum_{i=1}^{n}(\vec{F}(M_i), \overrightarrow{\Delta S_i}) = \sum_{i=1}^{n}[P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i + R(M_i)\Delta z_i],$$

яка називається *інтегральною сумою* від вектор-функції $\vec{F}(x,y,z)$ вздовж кривої L від точки A до точки B.

Означення. Якщо існує границя інтегральної суми $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}(\vec{F}(M_i), \overrightarrow{\Delta S_i})$, яка не залежить від способу розбиття дуги AB та від вибору на ній точок M_i, то ця границя називається *криволінійним інтегралом другого роду* від вектор-функції $\vec{F}(x,y,z)$ по дузі AB.

Криволінійний інтеграл другого роду позначається так:

$$\int_{AB} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$

або

$$\int_{L} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz.$$

Отже, за означенням

$$\int_{AB} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i + R(M_i)\Delta z_i]. \quad (4.9)$$

Якщо крива $AB \subset \mathbf{R}^2$, то криволінійний інтеграл по дузі AB від вектор-функції $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ визначається за формулою:

$$\int_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i]. \quad (4.10)$$

Зауважимо, що для криволінійного інтеграла другого роду має місце властивість:

$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = -\int_{BA} P\,dx + Q\,dy + R\,dz\,. \qquad (4.11)$$

Обчислення криволінійного інтеграла другого роду

Обчислення криволінійного інтеграла другого роду зводиться до обчислення визначеного інтеграла.

а) якщо крива $AB \subset \mathbf{R}^3$ і задана параметрично

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$$

і початковій точці кривої відповідає значення параметра $t = t_A$, а кінцевій точці – $t = t_B$, то

$$\int_{AB} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz = \int_{t_A}^{t_B} [P(x(t),y(t),z(t))x'(t) +$$

$$+ Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]\,dt\,. \qquad (4.12)$$

б) якщо крива $AB \subset \mathbf{R}^2$ і задана параметрично

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

і початковій точці кривої відповідає значення параметра $t = t_A$, а кінцевій точці – $t = t_B$, то

$$\int_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{t_A}^{t_B} [P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)]\,dt\,. \qquad (4.13)$$

в) якщо крива $AB \subset \mathbf{R}^2$ задана рівнянням $y = y(x)$ і початковій точці кривої відповідає значення $x = x_A$, а кінцевій точці – $x = x_B$, то

$$\int_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{x_A}^{x_B} [P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x)]\,dx\,. \qquad (4.14)$$

Аналогічно, якщо крива $AB \subset \mathbf{R}^2$ задана рівнянням $x = x(y)$ і початковій точці кривої відповідає значення $y = y_A$, а кінцевій точці – $y = y_B$, то

$$\int_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{y_A}^{y_B} [P(x(y),y)x'(y) + Q(x(y),y)]\,dy\,.$$

Зауважимо, що нижня межа визначених інтегралів у правій частині наведених формул для обчислення криволінійних інтегралів другого роду не обов'язково менша за верхню.

Зауважимо також, що виведення формул у пунктах а), б), в) базується на означенні криволінійного інтеграла другого роду з урахуванням формул для диференціала функції.

Для пункту а) $dx = x'(t)\,dt$, $dy = y'(t)\,dt$, $dz = z'(t)\,dt$;

для пункту б) $dx = x'(t)\,dt$, $dy = y'(t)\,dt$;

для пункту в) $dy = y'(x)\,dx$ або $dx = x'(y)\,dy$.

Цей факт зручно використовувати при обчисленні криволінійних інтегралів другого роду, попередньо обчисливши ці диференціали, а потім застосувавши відповідні формули для обчислення вказаних інтегралів. Перехід від лівої до правої частини цих формул проходить тоді формально і майже виключає необхідність їх запам'ятовування.

Криволінійний інтеграл другого роду по замкненій кривій

Означення 1. Область $D \subset \mathbf{R}^2$ називається *однозв'язною*, якщо для будь-якого замкненого контуру $L \subset D$ обмежена цим контуром область також цілком лежить в області D.

Однозв'язність області означає відсутність в ній "дірок". На рис.4.1 наведено: а) однозв'язну, б) двозв'язну, в) тризв'язну області.

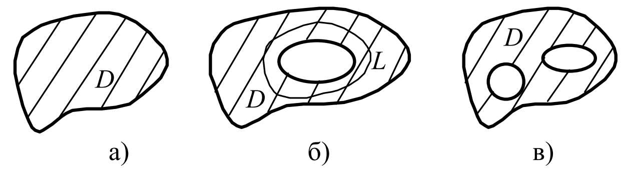


Рис.4.1

Припустимо, що контур L області D не має точок самоперетину.

Контур L однозв'язної області D називається *додатно орієнтованим*, якщо на ньому вибрано такий напрямок обходу, при якому область D залишається зліва від спостерігача. У протилежному випадку – *від'ємно орієнтованим*.

Додатно орієнтований контур позначають L або L^+, від'ємно орієнтований L^-. У подальшому ми писатимемо контур L, вважаючи під цим додатно орієнтований контур.

Відповідно криволінійний інтеграл по замкненому додатно орієнтованому контуру L позначається так:

$$\oint_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy\,.$$

Для тривимірного випадку вводиться також поняття однозв'язної області та орієнтації контуру.

Означення 2. Область $G \subset \mathbf{R}^3$ називається *поверхнево-однозв'язною* або *однозв'язною*, якщо на будь-який замкнений контур $L \subset G$ можна натягнути поверхню, що цілком лежить в області G.

Відповідно криволінійний інтеграл по замкненому додатно орієнтованому контуру $L \subset \mathbf{R}^3$ позначається так:

$$\oint_L P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz\,.$$

Теорема. Якщо функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ та їх частинні похідні першого порядку неперервні в замкненій однозв'язній області $D \subset \mathbf{R}^2$, яка обмежена кусково-гладкою додатно орієнтованою кривою L, то має місце формула

$$\oint_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy\,. \tag{4.15}$$

Формула (4.15) називається *формулою Гріна*.

Формулу Гріна можна розповсюдити на будь-яку область, яку можна розбити на скінченне число областей вказаного в теоремі типу (наприклад, область, що має точки самоперетину, область, що не є однозв'язною).

Незалежність криволінійного інтеграла другого роду від форми шляху інтегрування

Теорема 1. Нехай функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ та їх частинні похідні $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$ неперервні в замкненій однозв'язній області D. Тоді наступні чотири твердження рівносильні (тобто виконання будь-якого з них тягне за собою виконання решти трьох) :

1. $\oint_L P\,dx + Q\,dy = 0$,

де L – будь-який замкнений контур, що лежить в області D.

2. $\int_{AB} P\,dx + Q\,dy$ не залежить від форми шляху інтегрування, що з'єднує точки A і B, $AB \subset D$.

3. $P\,dx + Q\,dy = du(x,y)$, тобто вираз $P\,dx + Q\,dy$ є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$, визначеної в області D.

4. У всіх точках області D

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}\,. \tag{4.16}$$

При виконанні умов цієї теореми, як наслідок, має місце формула:

$$\int_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{AB} du(x,y) = u(B) - u(A) = u(x,y)\Big|_A^B\,. \tag{4.17}$$

Аналогічна теорема має місце для тривимірного випадку.

Теорема 2. Нехай функції $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ неперервні разом із своїми частинними похідними першого порядку в замкненій поверхнево-однозв'язній області G. Тоді має місце рівносильність таких чотирьох тверджень:

1. $\oint_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$,

де L – будь-який замкнений контур, що лежить в області G.

2. $\int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ не залежить від форми шляху інтегрування, що з'єднує точки A і B, $AB \subset G$.

3. $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = du(x,y,z)$, тобто вираз $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ є повним диференціалом деякої функції $u(x,y,z)$, визначеної в області G.

4. У всіх точках області G виконуються рівності

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},\quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z},\quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}\,. \tag{4.18}$$

При виконанні умов цієї теореми, як наслідок, має місце формула:

$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{AB} du(x,y,z) = u(B) - u(A) = u(x,y,z)\Big|_A^B\,. \tag{4.19}$$

Знаходження функції за її повним диференціалом

За допомогою розглянутих теорем можна розв'язати таку *задачу*:

Нехай відомо, що вираз $P\,dx + Q\,dy$ є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$, тобто $P\,dx + Q\,dy = du(x,y)$. Умовою того, що цей вираз є повним диференціалом, є виконання умови (4.16): $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. Треба знайти цю функцію $u(x,y)$.

Розв'язання задачі виконується так:

з виразу

$$du = P\,dx + Q\,dy$$

випливає, що

$$u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy\,,$$

де точки $M_0(x_0, y_0)$, $M(x,y) \in D$, D – область визначення функцій $P(x,y)$, $Q(x,y)$ і криволінійний інтеграл не залежить від форми шляху інтегрування, а тільки від початкової та кінцевої точок цього шляху. Цей шлях вибираємо, як правило, у вигляді ламаної, складеної з відрізків прямих, паралельних осям координат. Отже, *формула для знаходження функції за її повним диференціалом* представиться так:

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)\,dy + C\,, \tag{4.20}$$

де M_0M – ламана (рис.4.2), яка з'єднує точки $M_0(x_0, y_0)$, $M(x,y)$ так, що відрізки ламаної паралельні осям координат.

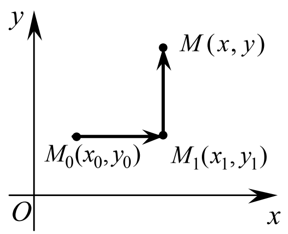


Рис.4.2

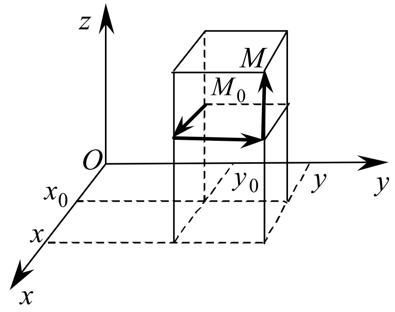


Рис.4.3

Аналогічно розглядається поставлена задача для тривимірного випадку. Якщо виконуються умови (4.18): $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$, то $P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz = du(x,y,z)$ і тоді

$$u(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y,z_0)dy + \int_{z_0}^{z} R(x,y,z)dz + C\,, \tag{4.21}$$

де M_0M – ламана (рис.4.3), яка з'єднує точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M(x,y,z)$ так, що сторони ламаної паралельні осям координат.

Застосування криволінійного інтеграла другого роду

а) *площа плоскої області* D, обмеженої кривою L, обчислюється за однією з формул:

$$S = -\oint_L y\,dx\,, \tag{4.22}$$

$$S = \oint_L x\,dy\,, \tag{4.23}$$

$$S = \frac{1}{2}\oint_L x\,dy - y\,dx\,. \tag{4.24}$$

Формули (4.22), (4.23) отримуються з формули Гріна при відповідному виборі функцій $P(x,y)$ та $Q(x,y)$. Формула (4.24) отримана з формул (4.22), (4.23) шляхом додавання їх лівих та правих частин.

б) *робота* А сили $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж кривої L обчислюється за формулою:

$$\mathrm{A} = \int_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz\,. \tag{4.25}$$

II. Контрольні питання та завдання

1. Що називається криволінійним інтегралом першого роду?

2. Як обчислити криволінійний інтеграл першого роду за допомогою визначеного інтеграла, якщо рівняння кривої інтегрування задані у параметричній формі? Довести відповідну формулу.

3. Як обчислити криволінійний інтеграл першого роду за допомогою визначеного інтеграла, якщо рівняння кривої інтегрування задано у вигляді $y = y(x)$ або $x = x(y)$? Довести відповідні формули.

4. Як за допомогою криволінійного інтеграла першого роду обчислити довжину дуги і масу кривої?

5. Що називається криволінійним інтегралом другого роду?

6. Як обчислити криволінійний інтеграл другого роду за допомогою визначеного інтеграла? Довести відповідну формулу.

7. Дайте означення однозв'язної області D і просторово-однозв'язної області G.

8. Яку замкнену криву називають додатно орієнтованою?

9. Напишіть і доведіть формулу Гріна.

10. Сформулюйте умови незалежності криволінійного інтеграла другого роду від форми кривої – шляху інтегрування.

11. Як знайти функцію двох або трьох змінних за її повним диференціалом?

12. Як за допомогою криволінійного інтеграла другого роду обчислити площу плоскої фігури?

13. Як обчислити роботу змінної сили при переміщенні матеріальної точки вздовж заданої кривої?

III. Приклади розв'язання задач

Криволінійні інтеграли першого роду

Приклад 1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_L x^2 dl$, де L – дуга плоскої кривої $y = \ln x$ при $1 \le x \le 2$.

► Знайдемо диференціал довжини дуги

$$dl = \sqrt{1 + y'^2(x)}\ dx = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\ dx$$

і скористаємось формулою (4.5):

$$\int\limits_L x^2 dl = \int\limits_1^2 x^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\ dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^2 (1+x^2)^{\frac{1}{2}} d(1+x^2) = \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^2 =$$

$$= \frac{1}{3}\left(5^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{3}\left(\sqrt{125} - \sqrt{8}\right). ◄$$

Приклад 2. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_L (2z - \sqrt{x^2 + y^2}\ ) dl$, де L – перший виток конічної гвинтової лінії

$$\begin{cases} x = t\cos t, \\ y = t\sin t, \\ z = t, \qquad 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$$

► Оскільки $x'(t) = \cos t - t\sin t$, $y'(t) = \sin t + t\cos t$, $z'(t) = 1$, то $dl = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt = \sqrt{t^2 + 2}\ dt$ і за формулою (4.3) маємо

$$\int\limits_L (2z - \sqrt{x^2 + y^2}\ ) dl = \int\limits_0^{2\pi} \left(2t - \sqrt{(t\cos t)^2 + (t\sin t)^2}\ \right)\sqrt{t^2 + 2}\ dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} t\sqrt{t^2 + 2}\ dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} (t^2 + 2)^{\frac{1}{2}} d(t^2 + 2) = \frac{1}{3}(t^2 + 2)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\left((1 + 2\pi^2)^{\frac{3}{2}} - 1\right). ◄$$

Приклад 3. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_L (x + y)\, dl$, де L – пелюсток лемніскати Бернуллі $\rho = a\sqrt{\sin 2\varphi}$, розташований у першому координатному куті (рис.4.4).

► Використовуємо формулу (4.6), попередньо обчисливши dl:

$$\rho'(\varphi) = \frac{a\cos 2\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}};$$

$$\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi) = a^2 \sin 2\varphi + \frac{a^2\cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi} = \frac{a^2}{\sin 2\varphi};$$

$$dl = \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)} = \frac{a}{\sqrt{\sin 2\varphi}} d\varphi.$$

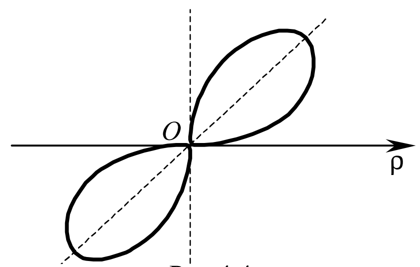


Рис.4.4

У першому координатному куті полярна координата φ змінюється від 0 до $\pi/2$, тоді

$$\int\limits_L (x + y)\, dl = \int\limits_0^{\pi/2} (\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi)\ \frac{a}{\sqrt{\sin 2\varphi}}\ d\varphi = \left|\rho = a\sqrt{\sin 2\varphi}\right| =$$

$$= a^2 \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{\sin 2\varphi}\,(\cos\varphi + \sin\varphi)\ \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}} = a^2 \int\limits_0^{\pi/2} (\cos\varphi + \sin\varphi)\, d\varphi =$$

$$= a^2(\sin\varphi - \cos\varphi)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = a^2(1 + 1) = 2a^2. ◄$$

Приклад 4. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_L \sqrt{2x^2+y^2}\,dl$, де L – лінія перетину сфери $x^2+y^2+z^2=a^2$ і площини $z=x$.

► Крива L задана перетином двох поверхонь: сфери та площини. Складемо параметричне рівняння кривої L. Для цього, поклавши в рівнянні сфери $z=x$, отримаємо спочатку рівняння проекції кривої L на площину xOy: $\frac{x^2}{a^2/2}+\frac{y^2}{a^2}=1$. Ця проекція є еліпс із півосями $\frac{a}{\sqrt2}$ і a. Параметричне рівняння еліпса має вигляд: $\begin{cases} x=\frac{a}{\sqrt2}\cos t, \\ y=a\sin t, \quad 0\le t\le 2\pi. \end{cases}$

Оскільки $z=x$, параметричне рівняння кривої L має вигляд:

$$\begin{cases} x=\frac{a}{\sqrt2}\cos t, \\ y=a\sin t, \\ z=\frac{a}{\sqrt2}\cos t, \quad 0\le t\le 2\pi. \end{cases}$$

Використаємо формулу (4.3). Для цього знайдемо

$$dl=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\ dt=\sqrt{2\frac{a^2}{2}\sin^2 t+a^2\cos^2 t}\ dt=a\,dt.$$

Отже,

$$\int\limits_L \sqrt{2x^2+y^2}\,dl==\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{2\frac{a^2}{2}\cos^2 t+a^2\sin^2 t}\ a\,dt=a^2\int\limits_0^{2\pi}dt=2\pi a^2.\ ◄$$

Приклад 5. Знайти довжину дуги однієї арки циклоїди

$$L:\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t), \quad 0\le t\le 2\pi. \end{cases}$$

► За формулою (4.7) довжина дуги $l=\int\limits_L dl$.

Обчислимо dl. Маємо:

$x'(t)=a(1-\cos t)$, $y'(t)=a\sin t$,

$$dl=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\ dt=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\ dt=$$

$$=a\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}\ dt=a\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt=$$

$$=2a\sqrt{\sin^2\frac{t}{2}}\ dt=2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt.$$

Отже,

$$l=\int\limits_L dl=2a\int\limits_0^{2\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt=2a\int\limits_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\ dt=-4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=$$

$$=-4a(-1-1)=8a.\ ◄$$

Приклад 6. Обчислити масу кривої $L: y=\frac{x^4}{4}, 0\le x\le 1$, якщо густина в кожній її точці $\mu(x,y)=x^5+8xy$.

► Скористаємось формулою $m=\int\limits_L \mu(x,y)\,dl$,

де $dl=\sqrt{1+y'^2(x)}\ dx=\sqrt{1+x^6}\ dx$.

Тоді

$$m=\int\limits_L (x^5+8xy)\,dl=\int\limits_0^1\left(x^5+8x\frac{x^4}{4}\right)\sqrt{1+x^6}\ dx=\int\limits_0^1 3x^5\sqrt{1+x^6}\ dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\sqrt{1+x^6}\ d(x^6+1)=\frac{1}{3}(1+x^6)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{1}{3}(2\sqrt2-1).\ ◄$$

Приклад 7. Знайти масу чверті витка гвинтової лінії

$$L:\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t, \\ z=bt, \quad 0\le t\le \pi/2, \end{cases}$$

якщо густина в кожній її точці $\mu(x,y,z)=xy$.

► За формулою (4.8) $m=\int\limits_L \mu(x,y,z)\,dl$,

де

$$dl=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\ dt=\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+b^2}\ dt=\sqrt{a^2+b^2}\ dt.$$

Тоді

$$m = \int_L xy\,dl = \int_0^{\pi/2} a\cos t \cdot a\sin t \cdot \sqrt{a^2+b^2}\,dt = a^2\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{\pi/2}\cos t\sin t\,dt =$$

$$= a^2\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{\pi/2}\sin t\,d\sin t = \frac{a^2\sqrt{a^2+b^2}}{2}\sin^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2\sqrt{a^2+b^2}}{2}. ◄$$

Криволінійні інтеграли другого роду

Приклад 8. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int_L xy\,dx + (x^2+y)\,dy$, де L – дуга параболи $y = x^2$ від точки $A(0,0)$ до точки $B(2,4)$.

► Скористаємось формулою (4.14), враховуючи, що $dy = 2xdx$, тоді отримаємо:

$$\int_L xy\,dx + (x^2+y)\,dy = \int_0^2 \left(x\cdot x^2 + (x^2+x^2)2x\right)dx = \int_0^2 5x^3dx = \frac{5}{4}x^4\Big|_0^2 = 20. ◄$$

Приклад 9. Знайти криволінійний інтеграл другого роду $\int_L x(x^2+y^2)dx + y(x^2+y^2)dy$, де L – коло $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \ 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$

► Знаходимо $dx = -\sin t\,dt$, $dy = \cos t\,dt$ і скористаємось формулою (4.13), тоді

$$\int_L x(x^2+y^2)\,dx + y(x^2+y^2)\,dy =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left((\cos^2 t + \sin^2 t)\cos t(-\sin t) + \sin t(\cos^2 t + \sin^2 t)\cos t\right)dt = \int_0^{2\pi} 0\,dt = 0. ◄$$

Приклад 10. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int_L y^2dx + (x^2+z)dy + (x+y+z^2)dz$, де L – відрізок прямої у просторі від точки $A(1,0,2)$ до точки $B(3,1,4)$.

► Складемо рівняння прямої, яка проходить через точки A і B, у вигляді: $\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A} = \dfrac{y-y_A}{y_B-y_A} = \dfrac{z-z_A}{z_B-z_A}$.

Маємо $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-2}{2} = t$. Звідки отримаємо параметричне рівняння L: $\begin{cases} x = 2t+1, \\ y = t, \\ z = 2t+2, \ t_A \le t \le t_B. \end{cases}$

Знайдемо t_A, t_B. Для цього підставимо у систему $x_A = 1$, $y_A = 0$, $z_A = 2$, а потім $x_B = 3$, $y_B = 1$, $z_B = 4$. Отримаємо $t_A = 0$ і $t_B = 1$.

Далі знайдемо $dx = 2\,dt$, $dy = dt$, $dz = 2dt$ і скористаємось формулою (4.12):

$$\int_L y^2dx + (x^2+z)dy + (x+y+z^2)dz =$$

$$= \int_0^1 \left[t^2 + \left((2t+1)^2 + 2t + 2\right) + \left((2t+1) + t + (2t+2)^2\right)\right]dt =$$

$$= \int_0^1 (14t^2 + 28t + 13)\,dt = \left(14\frac{t^3}{3} + 14t^2 + 13t\right)\Big|_0^1 = \frac{95}{3}. ◄$$

Приклад 11. Обчислити криволінійний інтеграл $\oint_L (x+y)dx - (x-y)dy$, де L – коло $x^2 + y^2 = r^2$:

а) за формулою Гріна, б) безпосередньо.

► а) використаємо формулу Гріна:

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$$

де $P(x,y) = x+y$, $Q(x,y) = -(x-y)$, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = -1$.

Тоді

$$\oint_L (x+y)dx - (x-y)dy = \iint_D (-1-1)dxdy = -2S_D = -2\pi r^2;$$

б) використаємо формулу (4.13), що зводить до обчислення визначеного інтеграла. Рівняння кривої L у параметричній формі має вигляд:

$$\begin{cases} x = r\cos t, \\ y = r\sin t, \ 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$$

Тоді

$$\oint_L (x+y)dx-(x-y)dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left((r\cos t + r\sin t)(-r\sin t)-(r\cos t - r\sin t)\, r\cos t\right)dt =$$

$$= r^2 \int_0^{2\pi} \left(-\cos t\,\sin t - \sin^2 t - \cos^2 t + \sin t\cos t\right)dt = -r^2\int_0^{2\pi} dt = -2\pi r^2. ◄$$

Приклад 12. Впевнитись, що вираз

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{2}{y}-\frac{x}{y^2}\right)dy$$

є повним диференціалом деякої функції та знайти цю функцію.

► Маємо: $P(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, $Q(x,y)=\frac{2}{y}-\frac{x}{y^2}$. Ці функції неперервні разом з частинними похідними $\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}$ на всій площині xOy, крім точки $O(0,0)$. Оскільки $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial y}$, то

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{2}{y}-\frac{x}{y^2}\right)dy = du(x,y).$$

Для знаходження функції за її повним диференціалом скористаємось формулою (4.20): $u(x,y)=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)\,dy + C$, поклавши $x_0=1$, $y_0=1$ (якщо б точка $O(0,0)$ не була точкою розриву, доцільніше було б взяти $x_0=0$, $y_0=0$).

Отже,

$$u(x,y)=\int_1^x P(x,1)\,dx + \int_1^y Q(x,y)\,dy + C =$$

$$= \int_1^x \left(\frac{1}{x}+1\right)dx + \int_1^y \left(\frac{2}{y}-\frac{x}{y^2}\right)dy + C = (\ln|x|+x)\Big|_1^x + \left(2\ln|y|+\frac{x}{y}\right)\Bigg|_1^y + C =$$

$$= \ln|x| + x - 1 + 2\ln|y| + \frac{x}{y} - x + C = \ln|x| + 2\ln|y| + \frac{x}{y} - 1 + C.$$

Включивши мінус одиницю в довільну сталу, маємо:

$$u(x,y)=\ln|x|+2\ln|y|+\frac{x}{y}+C. ◄$$

Приклад 13. Обчислити площу еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

► Перейдемо до параметричного задання еліпса:

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$$

За формулою (4.24) знаходимо:

$$S=\frac{1}{2}\int_L x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos t\cdot b\cos t - b\sin t\,(-a\sin t))\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}(\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt = \frac{1}{2}ab\cdot 2\pi = \pi ab. ◄$$

Приклад 14. Обчислити роботу сили

$$\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

при переміщенні матеріальної точки вздовж першого витка конічної гвинтової лінії L: $\begin{cases} x = ae^t\cos t, \\ y = ae^t \sin t, \\ z = ae^t \end{cases}$

із точки $A(0,0,0)$ в точку $B(a,0,a)$.

► Використаємо формулу (4.25):

$$\text{A} = \int_L P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz,$$

де $P(x,y,z)=x$, $Q(x,y,z)=y$, $R(x,y,z)=z$,

$$dx = a(e^t\cos t - e^t\sin t)\,dt, \; dy = a(e^t\sin t + e^t\cos t)\,dt, \; dz = a e^t dt.$$

В точці A параметр $t\to-\infty$, а в точці B параметр $t=0$ (перевірте, підставивши послідовно координати точок A та B в рівняння кривої L).

Маємо:

$$\text{A} = \int_L P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz =$$

$$= \int_{-\infty}^{0}\left(a^2e^t\cos t\,(e^t\cos t - e^t\sin t) + a^2e^t\sin t\,(e^t\sin t + e^t\cos t) + a^2e^{2t}\right)dt =$$

$$= 2a^2 \int\limits_{-\infty}^{0} e^{2t} dt = a^2 e^{2t} \Big|_{-\infty}^{0} = a^2 \left(1 - \lim_{t \to -\infty} e^{2t}\right) = a^2 (1 - 0) = a^2 . ◄$$

IV. Задачі для практичних занять

Криволінійні інтеграли першого роду

У задачах 4.1 – 4.17 обчислити криволінійні інтеграли першого роду.

4.1. $\int\limits_L \frac{dl}{x-y}$, де L – відрізок прямої $y = \frac{1}{2}x - 2$ між точками $A(0,-2)$ і $B(4,0)$.

4.2. $\int\limits_L xy\,dl$, де L – контур прямокутника з вершинами $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(4,2)$ і $D(0,2)$.

4.3. $\int\limits_L (x+y)\,dl$, де L – контур трикутника з вершинами $A(1,0)$, $B(0,1)$, $O(0,0)$.

4.4. $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, де L – відрізок прямої, яка з'єднує точки $A(0,0)$ і $B(1,2)$.

4.5. $\int\limits_L y\,dl$, де L – дуга параболи $y^2 = 2x$ від точки $A(0,0)$ до точки $B(1,\sqrt{2})$.

4.6. $\int\limits_L (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y})\,dl$, де L – відрізок прямої від точки $A(-1,0)$ до точки $B(0,1)$.

4.7. $\int\limits_L y^2 dl$, де L – чверть кола $x = a\cos t$, $y = a\sin t$ $(0 \le t \le \pi/2)$.

4.8. $\int\limits_L xy\,dl$, де L – чверть еліпса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ $(0 \le t \le \pi/2)$.

4.9. $\int\limits_L (x^2+y^2)^n\,dl$, де L – коло $x = a\cos t$, $y = a\sin t$.

4.10. $\int\limits_L \sqrt{2y}\,dl$, де L – перша арка циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

4.11. $\int\limits_L (x-y)dl$, де L – коло $x^2 + y^2 = ax$ (перейти до полярних координат).

4.12. $\int\limits_L x\sqrt{x^2-y^2}\,dl$, де L – лемніската Бернуллі $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ $(x \ge 0)$ (перейти до полярних координат).

4.13. $\int\limits_L (x^2+y^2)^2 dl$, де L – дуга логарифмічної спіралі $\rho = ae^{3\varphi}$ від точки $A(a,0)$ до точки $O(0,0)$.

4.14. $\int\limits_L \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dl$, де L – частина спіралі Архімеда $\rho = 2\varphi$, яка лежить всередині кола радіуса R з центром у початку координат (у полюсі).

4.15. $\int\limits_L \frac{z^2\,dl}{x^2+y^2}$, де L – перший виток гвинтової лінії $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = at$, $0 \le t \le 2\pi$.

4.16. $\int\limits_L xyz\,dl$, де L – чверть кола, утвореного перетином сфери $x^2+y^2+z^2 = R^2$ і циліндра $x^2+y^2 = \frac{R^2}{4}$, що лежить в першому октанті.

4.17. $\int\limits_L \frac{y\,dl}{x+3z}$, де L – дуга лінії $x = t$, $y = \frac{t^2}{\sqrt{2}}$, $z = \frac{t^3}{3}$ від точки $O(0,0,0)$ до точки $B\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$.

У задачах 4.18 – 4.21 обчислити довжину кривої L за допомогою криволінійного інтеграла першого роду.

4.18. L – ланцюгова лінія $y = \operatorname{ch} x$, $0 \le x \le 1$.

4.19. L – крива, задана рівнянням $x = 2 - \frac{t^4}{4}$, $y = \frac{t^6}{6}$, що обмежена точками перетину її з осями координат.

4.20. L – гвинтова лінія $x = 4a\cos t$, $y = 4a\sin t$, $z = 3at$, $0 \le t \le 2\pi$.

4.21. L – дуга конічної гвинтової лінії $x = ae^t \cos t$, $y = ae^t \sin t$, $z = ae^t$ від точки $O(0,0,0)$ до точки $A(a,0,a)$.

У задачах 4.22 – 4.26 знайти масу матеріальної дуги L, якщо задана густина $\mu(x, y)$.

4.22. L – дуга кривої $y = \ln x$ між точками з абсцисами $x_1 = \sqrt{3}$ та $x_2 = \sqrt{8}$, густина кривої в кожній точці дорівнює квадрату абсциси цієї точки.

4.23. L – ланцюгова лінія $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ між точками з абсцисами $x_1 = 0$ та $x_2 = a$, густина в кожній точці обернено пропорційна ординаті точки, причому в точці $(0, a)$ густина дорівнює δ.

4.24. L – чверть еліпса $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, що лежить в першому квадранті, густина в кожній точці дорівнює добутку координат цієї точки.

4.25. L – лемніската Бернуллі $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$, густина $\mu(x, y) = k\rho$, k – коефіцієнт пропорційності, $k > 0$.

4.26. $L: x = at$, $y = \frac{a}{2}t^2$, $z = \frac{a}{3}t^3$, $0 \le t \le 1$, густина $\mu(x, y) = \sqrt{\frac{2y}{a}}$.

Криволінійні інтеграли другого роду

У задачах 4.27 – 4.40 обчислити криволінійні інтеграли другого роду.

4.27. $\int_L (x^2 - y^2)\,dx$, де L – дуга параболи $y = x^2$ від точки $O(0,0)$ до точки $A(2,4)$.

4.28. $\int_L xy\,dx + (y - x)\,dy$, де L: $y = x^3$ від точки $O(0,0)$ до точки $A(1,1)$.

4.29. $\int_L (y + x^2)\,dx + (2x - y)\,dy$, де L – дуга параболи $y = 2x - x^2$ від точки $A(1,1)$ до точки $B(3,-3)$.

4.30. $\int_L x\,dy$, де L – відрізок прямої $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ від точки перетину її з віссю абсцис до точки перетину її з віссю ординат.

4.31. $\int_L -x\cos y\,dx + y\sin x\,dy$, де L – відрізок прямої від точки $O(0,0)$ до точки $A(\pi, 2\pi)$.

4.32. $\int_L x\,dy$, де L – контур трикутника, утвореного осями координат і прямою $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$, у додатному напрямі (проти годинникової стрілки).

4.33. $\int_L (x^2 + y^2)\,dy$, де L – контур чотирикутника з вершинами (вказаними в порядку обходу) в точках $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(4,4)$ і $D(0,4)$.

4.34. $\int_L y\,dx + x\,dy$, де L – чверть кола $x = R\cos t$, $y = R\sin t$ від $t_1 = 0$ до $t_2 = \frac{\pi}{2}$.

4.35. $\int\limits_L y\,dx - x\,dy$, де L – еліпс $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, що пробігається в додатному напрямі.

4.36. $\int\limits_L (2a - y)\,dx + x\,dy$, де L – арка циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

4.37. $\int\limits_L \frac{(x+y)\,dx - (x-y)\,dy}{x^2 + y^2}$, де L – коло $x^2 + y^2 = a^2$, при обході проти годинникової стрілки.

4.38. $\int\limits_L \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$, де L – чверть еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, яка лежить у першому квадранті, здійснюючи обхід за годинниковою стрілкою.

4.39. $\int\limits_L xdx + ydy + (x + y - 1)\,dz$, де L – відрізок прямої від точки $(1,1,1)$ до точки $(2,3,4)$.

4.40. $\int\limits_L yz\,dx + z\sqrt{R^2 - y^2}\,dy + xy\,dz$, де L – дуга гвинтової лінії $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $z = \frac{at}{2\pi}$ від точки перетину лінії з площиною $z = 0$ до точки її перетину з площиною $z = a$.

У задачах 4.41 – 4.46 обчислити криволінійні інтеграли другого роду по замкненим додатно орієнтованим контурам L безпосередньо і за формулою Гріна.

4.41. $\oint\limits_L (x + y)\,dx - 2xdy$, де L – контур трикутника зі сторонами $x = 0$, $y = 0$, $x + y = a$.

4.42. $\oint\limits_L \frac{1}{y}dx - \frac{1}{x}dy$, де L – контур трикутника з вершинами $A(1,1)$, $B(2,1)$ і $C(2,2)$.

4.43. $\oint\limits_L 2(x^2 + y^2)\,dx + (x + y)^2\,dy$, де L – контур трикутника з вершинами $A(1,1)$, $B(2,2)$, $C(1,3)$.

4.44. $\oint\limits_L xy^2\,dy - x^2 ydx$, де L – коло $x^2 + y^2 = R^2$.

4.45. $\oint\limits_L (1 - x^2)\,y\,dx + x\,(1 + y^2)\,dy$, де L – коло $x^2 + y^2 = R^2$.

4.46. $\oint\limits_L (xy + x + y)\,dx + (xy + x - y)\,dy$,

де L: а) еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; б) коло $x^2 + y^2 = ax$.

У задачах 4.47 – 4.53 перевірити, що під знаком криволінійного інтеграла стоїть повний диференціал, та обчислити цей криволінійний інтеграл.

4.47. $\int\limits_{(-1,2)}^{(2,3)} y\,dx + x\,dy$.

4.48. $\int\limits_{(0,0)}^{(2,1)} 2xy\,dx + x^2 dy$.

4.49. $\int\limits_{(3,4)}^{(5,12)} \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2}$ (початок координат не лежить на кривій інтегрування).

4.50. $\int\limits_{(-2,-1)}^{(3,0)} (x^4 + 4xy^3)\,dx + (6x^2 y^2 - 5y^4)\,dy$.

4.51. $\int\limits_{(0,1)}^{(2,3)} (x + y)\,dx + (x - y)\,dy$.

4.52. $\int\limits_{(1,-1,2)}^{(2,1,3)} x\,dx - y^2 dy + z\,dz$.

4.53. $\int\limits_{(1,2,3)}^{(3,2,1)} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$.

У задачах 4.54 – 4.60 знайти функцію за заданим повним диференціалом.

4.54. $du = x^2 dx + y^2 dy$.

4.55. $du = 4(x^2 - y^2)(xdx - ydy)$.

4.56. $du = \dfrac{(x+2y)\,dx + y\,dy}{(x+y)^2}$.

4.57. $du = (2x\cos y - y^2 \sin x)\,dx + (2y\cos x - x^2 \sin y)\,dy$.

4.58. $du = \dfrac{dx + dy + dz}{x + y + z}$.

4.59. $du = (x^2 - 2yz)\,dx + (y^2 - 2xz)\,dy + (z^2 - 2xy)\,dz$.

4.60. $du = \dfrac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

У задачах 4.61 – 4.67 обчислити площу фігур, обмежених заданими замкненими кривими L за допомогою криволінійного інтеграла другого роду.

4.61. L – еліпс $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$

4.62. L – арка циклоїди $\begin{cases} x = a\,(t - \sin t), \\ y = a\,(1 - \cos t), \quad 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$

4.63. L – астроїда $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \quad 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$

4.64. L – петля листа Декарта $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3}, \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}, \quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

4.65. L – кардіоїда $\begin{cases} x = 2a\cos t - a\cos 2t, \\ y = 2a\sin t - a\sin 2t, \quad 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$

4.66. L – петля лінії $(x+y)^3 = xy$.

4.67. L – петля лінії $(x+y)^4 = x^2 y$.

У задачах 4.68 – 4.75 обчислити роботу сили $\vec{F}$ при переміщенні одиничної маси вздовж кривої L від точки A до точки B.

4.68. $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$; L – верхня половина еліпса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; $A(a,0)$, $B(-a,0)$.

4.69. $\vec{F} = y^2\vec{i} + x^2\vec{j}$; L – дуга параболи $y = x^2$; $A(0,0)$, $B(1,1)$.

4.70. $\vec{F} = y\vec{i} + (y-x)\vec{j}$; $L: y = a - \dfrac{x^2}{a}$; $A(-a,0)$, $B(0,a)$.

4.71. $\vec{F} = (x-y)\vec{i} + x\vec{j}$; L – додатно орієнтований квадрат зі сторонами $x = a$, $x = -a$, $y = a$, $y = -a$.

4.72. $\vec{F} = z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$; L: $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$; $A(0,0,0)$, $B(1,1,1)$.

4.73. $\vec{F} = -yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$; L – перший виток гвинтової лінії $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = ht$; $A(a,0,0)$, $B(a,0,2\pi h)$.

4.74. $\vec{F} = z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$; L – лінія від перетину двох поверхонь: сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ та площини $x + y + z = R$ в додатному напрямі відносно орта $\vec{k}$.

4.75. $\vec{F} = 2xy\vec{i} + y^2\vec{j} - x^2\vec{k}$; L – лінія перетину гіперболоїда $x^2 + y^2 - 2z^2 = 2a^2$ та площини $y = x$; $A(a,a,0)$, $B(a\sqrt{2}, a\sqrt{2}, a)$.

§2. Поверхневі інтеграли

I. Короткі теоретичні відомості

Поверхневі інтеграли першого роду

Основні поняття. Поверхня називається *гладкою*, якщо в кожній її точці існує дотична площина і при переході від точки до точки положення цієї дотичної площини змінюється неперервно. Поверхня, яка складається із скінченного числа неперервно сполучених гладких поверхонь, називається *кусково-гладкою*.

Нехай в точках деякої кусково-гладкої поверхні σ визначена неперервна функція $f(x,y,z)$. Розіб'ємо поверхню σ на n частинних поверхонь σ_i без спільних внутрішніх точок. Позначимо площу кожної із них $\Delta\sigma_i$. Покладемо $\lambda = \max d_i$, $i=\overline{1,\,n}$, де d_i – діаметр i-ї частинної поверхні. На кожній частинній поверхні σ_i візьмемо довільну точку $M_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ і складемо суму

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\sigma_i .$$

Ця сума називається *інтегральною сумою* для функції $f(x,y,z)$ по поверхні σ.

Означення. Якщо існує границя $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\sigma_i$, яка не залежить від способу розбиття поверхні σ та від вибору точок M_i, то ця границя називається *поверхневим інтегралом першого роду* від функції $f(x,y,z)$ по поверхні σ.

Позначення: $\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)\,d\sigma$.

Отже, за означенням

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)\,d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\sigma_i . \qquad (4.26)$$

Обчислення поверхневого інтеграла першого роду

Обчислення поверхневого інтеграла першого роду зводиться до обчислення подвійного інтеграла.

Нехай поверхня σ задана рівнянням $z=z(x,y)$ і будь-яка пряма, паралельна осі Oz, перетинає цю поверхню лише в однієї точці, тобто поверхня σ однозначно проектується на площину xOy. Проекцією поверхні σ на площину xOy є область D_{xy}, тобто $\text{пр}_{xOy}\sigma = D_{xy}$. Функція $z(x,y)$ неперервна із своїми частинними похідними першого порядку в цій області. Тоді має місце формула:

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)\,d\sigma = \iint\limits_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2(x,y)+z_y'^2(x,y)}\;dxdy . \qquad (4.27)$$

Аналогічно, якщо поверхня σ задана рівнянням $y=y(x,z)$ і $\text{пр}_{xOz}\sigma = D_{xz}$, маємо:

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)\,d\sigma = \iint\limits_{D_{xz}} f(x,y(x,z),z)\sqrt{1+y_x'^2(x,z)+y_z'^2(x,z)}\;dxdz . \qquad (4.28)$$

Якщо поверхня σ задана рівнянням $x=x(y,z)$ і $\text{пр}_{yOz}\sigma = D_{yz}$, маємо:

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)\,d\sigma = \iint\limits_{D_{yz}} f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+x_y'^2(y,z)+x_z'^2(y,z)}\;dydz . \qquad (4.29)$$

Застосування поверхневого інтеграла першого роду

а) *площа поверхні* σ обчислюється за формулою

$$S = \iint\limits_{\sigma} d\sigma . \qquad (4.30)$$

б) *маса матеріальної поверхні* σ, в кожній точці якої задана густина $\mu(x,y,z)$, обчислюється за формулою

$$m = \iint\limits_{\sigma} \mu(x,y,z)\,d\sigma . \qquad (4.31)$$

Поверхневі інтеграли другого роду

Основні поняття. Гладка поверхня σ називається *двосторонньою*, якщо обхід по будь-якому замкненому контуру, що лежить на поверхні σ і не має загальних точок з її межею, не змінює напрямку нормалі до поверхні. Якщо ж на поверхні існує замкнений контур, при обході по якому напрямок нормалі змінюється на протилежний, то поверхня називається *односторонньою*.

Двосторонню поверхню називають *орієнтовною*, а вибір певної сторони поверхні, тобто вибір напрямку нормалі до поверхні, називається *орієнтацією* поверхні.

Нехай задана кусково-гладка орієнтовна поверхня, сторона якої задається нормальним вектором $\vec{n}$:

$$\vec{n} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k} ,$$

де $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ – напрямні косинуси вектора $\vec{n}$, $|\vec{n}|=1$.

Крім того, на поверхні σ задана вектор-функція $\vec{F}(x,y,z)$:

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k},$$

де $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ – неперервні функції.

Розіб'ємо поверхню σ на частинні поверхні σ_i, $i=\overline{1,n}$, площі яких позначимо $\Delta\sigma_i$. Покладемо $\lambda = \max d_i$, $i=\overline{1,n}$, де d_i – діаметр i-ї частинної поверхні. Візьмемо довільну точку $M_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\sigma_i$, обчислимо $\vec{F}(M_i)$ і $\vec{n}(M_i)=\vec{n}_i$ і складемо суму I_n:

$$I_n = \sum_{i=1}^{n}(\vec{F}(M_i),\vec{n}(M_i))\Delta\sigma_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}[P(M_i)\cos\alpha_i + Q(M_i)\cos\beta_i + R(M_i)\cos\gamma_i]\Delta\sigma_i. \qquad (4.32)$$

Ця сума називається *інтегральною сумою* від вектор-функції $\vec{F}(x,y,z)$ по стороні поверхні σ, визначеної нормальним вектором $\vec{n}$.

Означення. Якщо існує границя $\lim\limits_{\lambda\to 0} I_n$, яка не залежить від способу розбиття поверхні σ та від вибору точок M_i, то ця границя називається *поверхневим інтегралом другого роду* від вектор-функції $\vec{F}(x,y,z)$ по стороні поверхні σ, визначеної нормальним вектором $\vec{n}$.

Позначення:

$$\iint_\sigma(\vec{F},\vec{n})\,d\sigma; \quad \iint_\sigma(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,d\sigma; \quad \iint_\sigma P\,dydz + Q\,dxdz + R\,dxdy.$$

Отже, за означенням

$$\iint_\sigma(\vec{F},\vec{n})\,d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}(\vec{F}(M_i),\vec{n}(M_i))\Delta\sigma_i$$

або

$$\iint_\sigma(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,d\sigma =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(M_i)\cos\alpha_i + Q(M_i)\cos\beta_i + R(M_i)\cos\gamma_i]\Delta\sigma_i. \qquad (4.33)$$

Обчислення поверхневого інтеграла другого роду

Обчислення поверхневого інтеграла другого роду зводиться до обчислення поверхневого інтеграла першого роду, а отже до обчислення подвійного інтеграла.

Якщо поверхня σ однозначно проектується на площини xOy, yOz, xOz, то мають місце формули відповідно для кожної із площин:

$$\Delta\sigma_i = \frac{\Delta x_i\Delta y_i}{|\cos\gamma|}, \quad \Delta\sigma_i = \frac{\Delta y_i\Delta z_i}{|\cos\alpha|}, \quad \Delta\sigma_i = \frac{\Delta x_i\Delta z_i}{|\cos\beta|}, \qquad (4.34)$$

які можна використати для обчислення поверхневого інтеграла другого роду.

1. *Метод проектування на всі три координатні площини.*

Нехай поверхня σ однозначно проектується на всі три координатні площини. Тоді рівняння $\Phi(x,y,z)=0$ поверхні σ однозначно розв'язується відносно кожного з аргументів x, y, z так, що

$$x = x(y,z), \; y = y(x,z), \; z = z(x,y). \qquad (4.35)$$

Позначимо $\text{пр}_{xOy}\sigma = D_{xy}$, $\text{пр}_{xOz}\sigma = D_{xz}$, $\text{пр}_{yOz}\sigma = D_{yz}$. Підставимо формули (4.34) і (4.35) у формулу (4.33).

Отримаємо *формулу для обчислення поверхневого інтеграла другого роду*:

$$\iint_\sigma(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,d\sigma = \pm\iint_{D_{yz}}P(x(y,z),y,z)\,dydz \pm$$

$$\pm\iint_{D_{xz}}Q(x,y(x,z),z)\,dxdz \pm \iint_{D_{xy}}R(x,y,z(x,y))\,dxdy. \qquad (4.36)$$

Знак в кожному із доданків правої частини формули (4.36) вибирається таким, який знак мають $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ на орієнтовній поверхні σ.

2. *Метод проектування на одну із координатних площин.*

Якщо незамкнена поверхня σ однозначно проектується на площину xOy в область D_{xy}, а рівняння поверхні можна задати рівнянням $z=z(x,y)$ і за формулами (4.34) $\Delta\sigma_i = \dfrac{\Delta x_i\Delta y_i}{|\cos\gamma|}$, то поверхневий інтеграл другого роду перетворюється на подвійний інтеграл по області D_{xy}:

$$\iint_\sigma(\vec{F},\vec{n})\,d\sigma = \iint_{D_{xy}}\left.\frac{(\vec{F},\vec{n})}{|\cos\gamma|}\right|_{z=z(x,y)}dxdy. \qquad (4.37)$$

Якщо поверхня σ однозначно проектується на площини xOz або yOz, то поверхневий інтеграл другого роду перетворюється на подвійний за формулами:

$$\iint_{\sigma} (\vec{F},\vec{n})\, d\sigma = \iint_{D_{xz}} \left. \frac{(\vec{F},\vec{n})}{|\cos\beta|} \right|_{y=y(x,z)} dxdz\,, \tag{4.38}$$

$$\iint_{\sigma} (\vec{F},\vec{n})\, d\sigma = \iint_{D_{yz}} \left. \frac{(\vec{F},\vec{n})}{|\cos\alpha|} \right|_{x=x(y,z)} dydz\,. \tag{4.39}$$

Зауважимо, що коли поверхня σ кусково-гладка, тоді її розбивають на гладкі поверхні, які однозначно проектуються на координатні площини, далі обчислення проводять по кожній окремій частині, а інтеграл по усій поверхні σ дорівнює сумі інтегралів по усім частинам.

Формула Остроградського-Гаусса

Формула Остроградського-Гаусса встановлює зв'язок між поверхневим інтегралом другого роду по замкненій поверхні по зовнішній її стороні і потрійним інтегралом по області G, обмеженій цією поверхнею.

Якщо поверхня σ замкнена, а функції $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ неперервні разом із своїми частинними похідними першого порядку в області G, обмеженій цією поверхнею, то має місце *формула Остроградського-Гаусса*:

$$\iint_{\sigma} P(x,y,z)\,dydz + Q(x,y,z)\,dxdz + R(x,y,z)\,dxdy =$$

$$= \iiint_{G} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz\,. \tag{4.40}$$

У цій формулі зліва інтегрування ведеться по зовнішній стороні поверхні.

Формула Стокса

Формула Стокса встановлює зв'язок між поверхневим і криволінійним інтегралами.

Якщо функції $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ неперервні разом із своїми частинними похідними першого порядку на кусково-гладкій поверхні σ, яка обмежена кусково-гладкою замкненою кривою L, причому орієнтація кривої L узгоджена із орієнтацією поверхні σ, то має місце *формула Стокса*:

$$\oint_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dxdz\,. \tag{4.41}$$

Зазначимо, що *орієнтація кривої* L, обмежуючої поверхню σ, вважається *узгодженою* із орієнтацією цієї поверхні (орієнтація поверхні σ задається напрямом нормалі $\vec{n}$ до неї), якщо спостерігач, який дивиться з кінця нормалі $\vec{n}$, бачить обхід вздовж кривої L проти годинникової стрілки.

Зауваження. Якщо поверхня σ лежить на площині xOy, то формула Стокса (4.41) переходить у формулу Гріна, тобто

$$\oint_L P\,dx + Q\,dy = \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy\,.$$

Застосування поверхневого інтеграла другого роду

Якщо вектор-функція $\vec{F}(x,y,z) = \vec{v}(x,y,z)$ є швидкість руху рідини, яка протікає через поверхню σ в сторону, визначену напрямком вектора нормалі $\vec{n}$, то *кількість рідини* Π, що протікає через цю поверхню в одиницю часу, обчислюється за формулою:

$$\Pi = \iint_{\sigma} (\vec{v},\vec{n})\, d\sigma\,. \tag{4.42}$$

II. Контрольні питання та завдання

1. Що називається поверхневим інтегралом першого роду?
2. Як обчислюється поверхневий інтеграл першого роду?
3. Які застосування має поверхневий інтеграл першого роду?
4. Як знайти масу матеріальної поверхні за допомогою поверхневого інтеграла першого роду?
5. Які поверхні називаються двосторонніми? Наведіть приклади двосторонніх поверхонь.
6. Яку поверхню називають орієнтовною?
7. Що називається поверхневим інтегралом другого роду?
8. Як обчислюється поверхневий інтеграл другого роду?
9. У чому полягає різниця між поверхневими інтегралами першого і другого роду?
10. У чому полягає зв'язок між поверхневими інтегралами першого і другого роду?
11. Наведіть формулу Остроградського-Гаусса.

12. Наведіть формулу Стокса.

13. Яке застосування має поверхневий інтеграл другого роду?

III. Приклади розв'язання задач

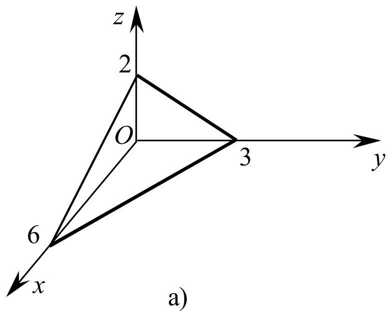
Поверхневі інтеграли першого роду

Приклад 1. Обчислити поверхневий інтеграл першого роду $\iint\limits_{\sigma}(6x+4y+3z)\,d\sigma$, де σ – частина площини $x+2y+3z=6$, розташованої у першому октанті.

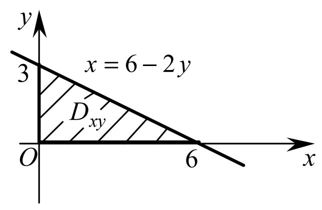
► Будемо використовувати формулу (4.27):

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)\,d\sigma = \iint\limits_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2(x,y)+z_y'^2(x,y)}\;dxdy.$$

Поверхню σ та її проекцію D_{xy} на площину xOy зображено на рис.4.5, де D_{xy} – трикутник: $0 \le y \le 3$, $0 \le x \le 6-2y$.



а)



б)

Рис.4.5

Рівняння поверхні σ: $x+2y+3z=6$. Тоді

$$z=\frac{1}{3}(6-2y-x), \quad z_x'=-\frac{1}{3}, \quad z_y'=-\frac{2}{3}.$$

Отже,

$$\iint\limits_{\sigma}(6x+4y+3z)\,d\sigma=$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\left(6x+4y+3\frac{1}{3}(6-2y-x)\right)\sqrt{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2}\;dxdy=$$

$$=\frac{\sqrt{14}}{3}\iint\limits_{D_{xy}}(5x+2y+6)\,dxdy=\frac{\sqrt{14}}{3}\int\limits_0^3 dy\int\limits_0^{6-2y}(5x+2y+6)\,dx=$$

$$=\frac{\sqrt{14}}{3}\int\limits_0^3\left(\frac{5}{2}x^2+2xy+6x\right)\Bigg|_0^{6-2y}dy=$$

$$=\frac{\sqrt{14}}{3}\int\limits_0^3\left(\frac{5}{2}(6-2y)^2+2y(6-2y)+6(6-2y)\right)dy=$$

$$=\frac{\sqrt{14}}{3}\int\limits_0^3(6y^2-60y+126)\,dy=\frac{\sqrt{14}}{3}\left(2y^3-30y^2+126y\right)\Big|_0^3=$$

$$=\frac{\sqrt{14}}{3}\cdot 162=54\sqrt{14}\;. ◄$$

Приклад 2. Обчислити поверхневий інтеграл першого роду $\iint\limits_{\sigma}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\;d\sigma$, де σ – частина поверхні параболоїда $z=1-x^2-y^2$, яка відтинається площиною $z=0$.

► Поверхню σ та її проекцію D_{xy} на площину xOy зображено на рис.4.6, де D_{xy} – круг $x^2+y^2\le 1$. Рівняння обмежуючого кола отримаємо, якщо в рівнянні поверхні σ покладемо $z=0$.

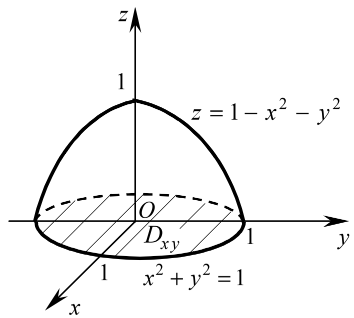


Рис.4.6

Маємо: $z_x'=-2x$, $z_y'=-2y$.

Отже, за формулою (4.27):

$$\iint\limits_{\sigma}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\;d\sigma=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\;\sqrt{1+(-2x)^2+(-2y)^2}\;dxdy=$$

$$= \iint_{D_{xy}} (1+4x^2+4y^2)\,dxdy = \left| \begin{array}{ll} x=\rho\cos\varphi, & D\to D', \\ y=\rho\sin\varphi, & D': 0\le\rho\le 1, \\ dxdy=\rho\, d\rho d\varphi, & 0\le\varphi\le 2\pi. \end{array} \right| =$$

$$= \iint_{D'} \rho(1+4\rho^2)\,d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho(1+4\rho^2)\,d\rho =$$

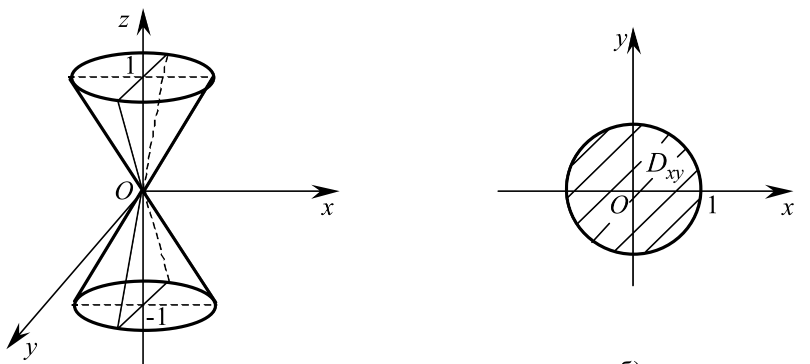
$$= \varphi\Big|_0^{2\pi} \cdot \left(\frac{\rho^2}{2}+\rho^4\right)\Bigg|_0^1 = 2\pi\frac{3}{2} = 3\pi. ◄$$

Приклад 3. Обчислити площу конічної поверхні σ: $z^2 = x^2+y^2$, $-1\le z\le 1$.

► Площа поверхні обчислюється за формулою:

$$S = \iint_\sigma d\sigma = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1+z_x'^2(x,y)+z_y'^2(x,y)}\; dxdy .$$

Поверхня σ та її проекція D_{xy} на площину xOy зображені на рис.4.7, де D_{xy} – круг: $x^2+y^2\le 1$. З рівняння поверхні маємо: $z=\pm\sqrt{x^2+y^2}$. Оскільки поверхня симетрична відносно площини xOy, покладемо $z=\sqrt{x^2+y^2}$, тоді $z_x' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z_y' = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.



а) б)

Рис.4.7

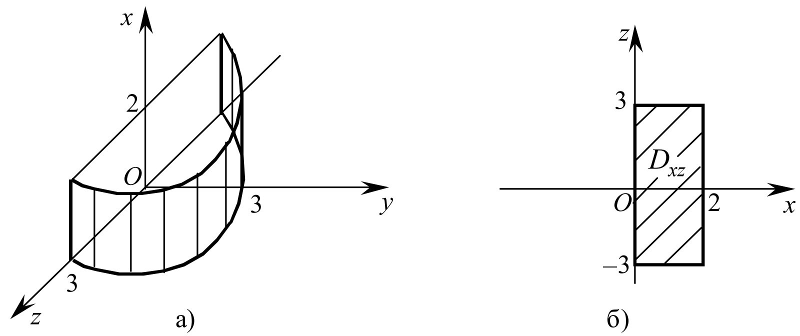
Отже,

$$S = 2\iint_{D_{xy}} \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\; dxdy = 2\iint_{D_{xy}} \sqrt{2}\,dxdy = 2\sqrt{2}\iint_{D_{xy}} dxdy = 2\pi\sqrt{2}.$$

Цей результат можна отримати і безпосередньо, бо бічна поверхня кругового конуса дорівнює πRl, де R – радіус основи, l – довжина твірної. У нашому випадку $l=\sqrt{2}$, $R=1$ і, враховуючи симетрію відносно площини xOy, отримаємо $S = 2\pi Rl = 2\pi\sqrt{2}$. ◄

Приклад 4. Знайти масу частини циліндричної поверхні σ: $y=\sqrt{9-z^2}$, яка відтинається площинами $x=0$, $x=2$, якщо поверхнева густина $\mu(x,y,z)=ky(x+z)$, де k – коефіцієнт пропорційності.

► Поверхню σ та її проекцію D_{xz} на площину xOz зображено на рис.4.8, де D_{xz} – прямокутник: $0\le x\le 2$, $-3\le z\le 3$.



а) б)

Рис.4.8

Маса поверхні обчислюється за формулою: $m=\iint_\sigma \mu(x,y,z)\,d\sigma$.

Оскільки рівняння поверхні σ: $y=y(x,z)$, то

$d\sigma = \sqrt{1+y_x'^2(x,z)+y_z'^2(x,z)}\; dxdz$, де $y_x'=0$, $y_z' = -\dfrac{z}{\sqrt{9-z^2}}$.

Отже,

$$d\sigma = \sqrt{1+\frac{z^2}{9-z^2}}\; dxdz = \frac{3}{\sqrt{9-z^2}}\,dxdz;$$

$$\mu(x,y(x,z),z) = k(x+z)\sqrt{9-z^2}.$$

Тоді

$$m = \iint\limits_{\sigma} ky(x+z)\,d\sigma = \iint\limits_{D_{xz}} k(x+z)\sqrt{9-z^2}\,\frac{3}{\sqrt{9-z^2}}\,dxdz =$$

$$= 3k\iint\limits_{D_{xz}}(x+z)\,dxdz = 3k\int\limits_{-3}^{3}dz\int\limits_{0}^{2}(x+z)\,dx = 3k\int\limits_{-3}^{3}\left(\frac{x^2}{2}+xz\right)\Bigg|_0^2 dz =$$

$$= 3k\int\limits_{-3}^{3}(2+2z)\,dz = 6k\left(z+\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_{-3}^{3} = 36k\,. ◄$$

Поверхневі інтеграли другого роду

Приклад 5. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_{\sigma} x\,dydz + y\,dxdz + z\,dxdy$, де σ – верхня сторона частини площини $x+z-1=0$, яка лежить у першому октанті і відтинається площинами $y=0$ і $y=4$.

► Поверхня σ зображена на рис.4.9. Оскільки розглядається її верхня сторона, то вектор нормалі $\vec{n}$ утворює гострий кут з віссю Oz.

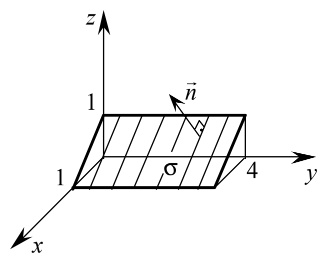


Рис.4.9

Будемо використовувати метод проектування на всі координатні площини за формулою (4.36).

D_{yz} – прямокутник: $0 \le y \le 4$, $0 \le z \le 1$;

D_{xy} – прямокутник: $0 \le y \le 4$, $0 \le x \le 1$;

D_{xz} – пуста множина, тому що площина $x+z-1=0$ перпендикулярна площині xOz.

Маємо $z(x,y) = 1-x$, $x(y,z) = 1-z$.

Отже,

$$\iint\limits_{\sigma} x\,dydz + y\,dxdz + z\,dxdy = \iint\limits_{D_{yz}} x(y,z)\,dydz + \iint\limits_{D_{xz}} y(x,z)\,dxdz +$$

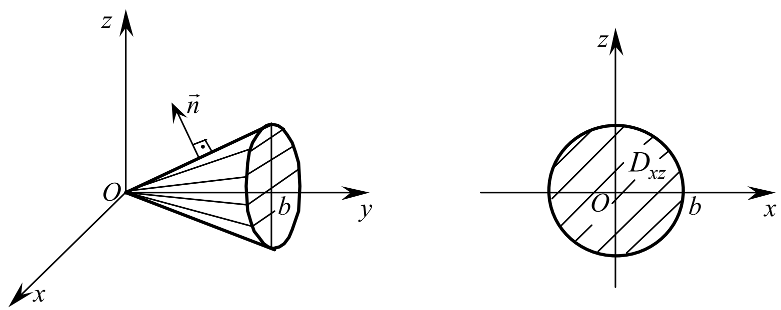
$$+\iint\limits_{D_{xy}} z(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_{yz}}(1-z)\,dydz + \iint\limits_{D_{xy}}(1-x)\,dxdy = \int\limits_0^4 dy\int\limits_0^1(1-x)\,dx +$$

$$+\int\limits_0^4 dy\int\limits_0^1(1-z)\,dz = 2\int\limits_0^4 dy\int\limits_0^1(1-x)\,dx = 2\int\limits_0^4\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 dy = 2\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^4 dy = 4\,.$$

Оскільки нормальний вектор $\vec{n}$ утворює із осями Oz і Ox гострі кути, то у формулі (4.36) вибрали знак “+” в кожному доданку. ◄

Приклад 6. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_{\sigma}(x^2+y^2+z^2)\,dxdz$, де σ – зовнішня сторона конічної поверхні $y=\sqrt{x^2+z^2}$, яка відтинається площинами $y=0$, $y=b$, $b>0$.

► Поверхня σ та її проекція D_{xz} на площину Oxz зображені на рис.4.10, де D_{xz} – круг: $x^2+z^2 \le b^2$.



а) б)

Рис.4.10

Будемо використовувати метод проектування на координатну площину за формулою (4.36). Нормаль $\vec{n}$ до поверхні σ утворює з віссю Oy тупий кут, тобто $\cos\beta < 0$.

Отже,

$$\iint\limits_{\sigma}(x^2+y^2+z^2)\,dxdz = -\iint\limits_{D_{xz}}\left(x^2+\left(\sqrt{x^2+z^2}\right)^2+z^2\right)dxdz =$$

$$= -2\iint\limits_{D_{xz}}(x^2+z^2)\,dxdz = \left|\begin{array}{ll} x=\rho\cos\varphi, & D_{xz}\to D_{\rho\varphi}, \\ z=\rho\sin\varphi, & D_{\rho\varphi}: 0\le\rho\le b, \\ dxdz=\rho\, d\rho d\varphi, & 0\le\varphi\le 2\pi. \end{array}\right| =$$

$$= -2\iint\limits_{D_{\rho\varphi}}\rho^3\,d\rho d\varphi = -2\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^b\rho^3\,d\rho = -2\cdot 2\pi\left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^b = -\pi b^4 . \blacktriangleleft$$

Приклад 7. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_{\sigma} x\,dydz + dxdz + z^2dxdy$, де σ – зовнішня сторона поверхні сфери $x^2+y^2+z^2=1$, яка розміщена у другому октанті ($x\le 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$).

► Поверхня σ та її проекції на координатні площини зображені на рис.4.11 та рис.4.12. Проекції D_{xy}, D_{xz}, D_{yz} є чверті кругів з центром у початку координат і радіусів рівних одиниці. Одиничний вектор нормалі $\vec{n}$ до поверхні σ утворює гострі кути з осями Oy і Oz і тупий кут з віссю Ox, тому $\cos\alpha<0$, $\cos\beta>0$, $\cos\gamma>0$.

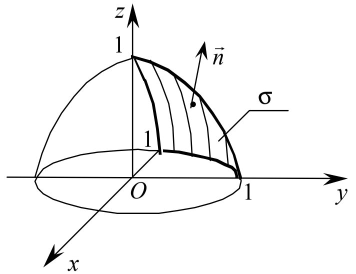


Рис.4.11

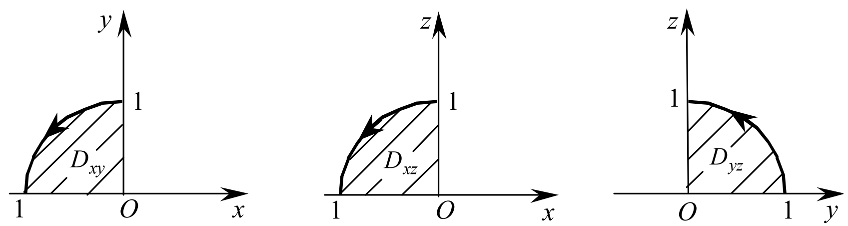


Рис.4.12

Маємо

$$z(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}\ ,\ y(x,z)=\sqrt{1-x^2-z^2}\ ,\ x(y,z)=-\sqrt{1-y^2-z^2}\ .$$

Отже,

$$I=\iint\limits_{\sigma} z^2dxdy + x\,dydz + dxdz = \iint\limits_{\sigma} z^2dxdy + \iint\limits_{\sigma} x\,dydz + \iint\limits_{\sigma} dxdz\ ,$$

де

$$\iint\limits_{\sigma} z^2dxdy = \iint\limits_{D_{xy}}(1-x^2-y^2)\,dxdy = \left|\begin{array}{ll} x=\rho\cos\varphi, & D_{xy}\to D_{\rho\varphi}, \\ y=\rho\sin\varphi, & D_{\rho\varphi}: 0\le\rho\le 1, \\ dxdy=\rho\, d\rho d\varphi, & \frac{\pi}{2}\le\varphi\le\pi. \end{array}\right| =$$

$$= \iint\limits_{D_{\rho\varphi}}\rho(1-\rho^2)\,d\rho d\varphi = \int\limits_{\pi/2}^{\pi}d\varphi\int\limits_0^1(\rho-\rho^3)\,d\rho = \left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left.\left(\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right)\right|_0^1 = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4};$$

$$\iint\limits_{\sigma} x\,dydz = -\iint\limits_{D_{xz}}(-\sqrt{1-y^2-z^2})\,dydz = \left|\begin{array}{ll} x=\rho\cos\varphi, & D_{xz}\to D_{\rho\varphi}, \\ z=\rho\sin\varphi, & D_{\rho\varphi}: 0\le\rho\le 1, \\ dxdz=\rho\, d\rho d\varphi, & 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}. \end{array}\right| =$$

$$= \iint\limits_{D_{\rho\varphi}}\sqrt{1-\rho^2}\,\rho\,d\rho d\varphi = \int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^1\sqrt{1-\rho^2}\,\rho\,d\rho = \frac{\pi}{2}\left.\left(-\frac{2}{3\cdot 2}(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right)\right|_0^1 =$$

$$= -\frac{\pi}{6}(0-1)=\frac{\pi}{6};$$

$$\iint\limits_{\sigma} dxdz = \iint\limits_{D_{xz}} dxdz = S_{xz} = \frac{1}{4}\pi\ .$$

Остаточно $I=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}=\frac{2}{3}\pi$. ◄

Приклад 8. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_{\sigma} 4x^3dydz+4y^3dxdz-6z^4dxdy$, де σ – зовнішня сторона поверхні, яка обмежена циліндром $x^2+y^2=a^2$ і площинами $z=0$, $z=h$.

► Оскільки поверхня σ замкнена, то для обчислення інтеграла I використовуємо формулу Остроградського-Гаусса (4.40).

Маємо $P(x,y,z)=4x^3$, $Q(x,y,z)=4y^3$, $R(x,y,z)=-6z^4$,

$\frac{\partial P}{\partial x}=12x^2$, $\frac{\partial Q}{\partial y}=12y^2$, $\frac{\partial R}{\partial z}=-24z^3$.

Тоді

$$I=\iint_{\sigma}4x^3dydz+4y^3dxdz-6z^4dxdy=\iiint_{G}(12x^2+12y^2-24z^3)\,dxdydz=$$

$$=12\iiint_{G}(x^2+y^2-2z^3)\,dxdydz=\left|\begin{array}{ll} x=\rho\cos\varphi, & G\to G', \\ y=\rho\sin\varphi, & G':0\le\rho\le a, \\ z=z, & 0\le\varphi\le 2\pi, \\ dxdydz=\rho\, d\rho d\varphi dz, & 0\le z\le h. \end{array}\right|=$$

$$=12\iiint_{G'}(\rho^2-2z^3)\rho\, d\rho d\varphi dz=12\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a\rho d\rho\int_0^h(\rho^2-2z^3)\,dz=$$

$$=24\pi\int_0^a\rho\left(\rho^2 z-2\frac{z^4}{4}\right)\bigg|_0^h d\rho=24\pi\int_0^a\left(\rho^3 h-\rho\frac{h^4}{2}\right)d\rho=$$

$$=24\pi\left(h\frac{\rho^4}{4}-h^4\frac{\rho^2}{4}\right)\bigg|_0^a=6\pi ha^2(a^2-h^3).\ ◄$$

Приклад 9. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $I=\oint_L y\,dx+z\,dy+x\,dz$, де L – коло, утворене від перетину сфери $x^2+y^2+z^2=a^2$ і площини $x+y+z=0$, причому обхід кривої L здійснюється проти годинникової стрілки, якщо дивитись із додатного напряму осі Ox.

► Оскільки крива L замкнена, можна використати формулу Стокса (4.41).

Маємо $P(x,y,z)=y$, $Q(x,y,z)=z$, $R(x,y,z)=x$,

$\frac{\partial P}{\partial y}=1$, $\frac{\partial P}{\partial z}=0$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=0$, $\frac{\partial Q}{\partial z}=1$, $\frac{\partial R}{\partial x}=1$, $\frac{\partial R}{\partial y}=0$.

Виберемо за поверхню σ, яка натягнута на коло L, частину площини $x+y+z=0$, обмеженої цим колом. Тоді

$$I=\oint_L y\,dx+z\,dy+x\,dz=\iint_{\sigma}(-dxdy-dydz-dxdz).$$

Будемо використовувати для обчислення поверхневого інтеграла в правій частині останньої рівності метод проектування на всі три координатні площини за формулою (4.36). За умовою вектор одиничної нормалі $\vec{n}$ до площини $x+y+z=0$ утворює із осями Ox, Oy, Oz гострі кути, отже знак перед кожним доданком правої частини не змінюється. Проекція σ на площини xOy, xOz, yOz є коло радіуса a із центром у початку координат.

Отже,

$$I=-\iint_{D_{xy}}dxdy-\iint_{D_{xz}}dxdz-\iint_{D_{yz}}dydz=-3\iint_{D_{xy}}dxdy=-3S_{D_{xy}}=-3\pi a^2.\ ◄$$

IV. Задачі для практичних занять

Поверхневі інтеграли першого роду

У задачах 4.76 – 4.86 обчислити поверхневі інтеграли першого роду.

4.76. $\iint_{\sigma}\left(x+2z+\frac{4}{3}y\right)d\sigma$, де σ – частина площини $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$, яка лежить у першому октанті.

4.77. $\iint_{\sigma}xyz\,d\sigma$, де σ – частина площини $x+y+z=1$, яка лежить у першому октанті.

4.78. $\iint_{\sigma}\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$, де σ – частина поверхні конуса $x^2+y^2=z^2$, $0\le z\le 1$.

4.79. $\iint_{\sigma}(x^2+y^2\,d\sigma$, де σ – частина поверхні параболоїда $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, $0\le z\le 2$.

4.80. $\iint_{\sigma}(x^2+y^2+z^2)\,d\sigma$, де σ – сфера $x^2+y^2+z^2=1$.

4.81. $\iint_{\sigma}x\,d\sigma$, де σ – частина сфери $x^2+y^2+z^2=R^2$ $(x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0)$.

4.82. $\iint\limits_{\sigma} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, d\sigma$, де σ – півсфера $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

4.83. $\iint\limits_{\sigma} x^2 y^2 d\sigma$, де σ – півсфера $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

4.84. $\iint\limits_{\sigma} (x + y + z)\, d\sigma$, де σ – поверхня куба $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$.

4.85. $\iint\limits_{\sigma} (x^2 + y^2)\, d\sigma$, де σ – межа тіла $\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 1$.

4.86. $\iint\limits_{\sigma} \frac{d\sigma}{(1 + x + y)^2}$, де σ – межа тетраедра, обмеженого площиною $x + y + z = 1$ і координатними площинами $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

У задачах 4.87 – 4.91 обчислити площу заданої поверхні σ за допомогою поверхневого інтеграла першого роду.

4.87. σ – поверхня циліндра $2z = x^2$, яка відтинається площинами $y = \frac{x}{2}$, $y = 2x$, $x = 2\sqrt{2}$.

4.88. σ – поверхня конуса $z^2 = 2xy$, яка відтинається площинами $x = a$, $y = a$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

4.89. σ – поверхня конуса $y^2 + z^2 = x^2$, яка розташована всередині циліндра $x^2 + y^2 = a^2$.

4.90. σ – поверхня параболоїда $x^2 + y^2 = 2az$, яка розташована всередині циліндра $x^2 + y^2 = 3a^2$.

4.91. σ – поверхня конуса $x^2 + y^2 = z^2$, яка розташована всередині циліндра $z^2 = 2px$.

У задачах 4.92 – 4.96 обчислити масу заданої поверхні σ з заданою густиною $\mu(x, y, z)$ за допомогою поверхневого інтеграла першого роду.

4.92. σ – поверхня куба $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$, поверхнева густина $\mu(x, y, z) = xyz$.

4.93. σ – частина поверхні параболоїда $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $0 \le z \le 1$, поверхнева густина $\mu(x, y, z) = z$.

4.94. σ – півсфера $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, поверхнева густина $\mu(x, y, z) = x^2 + y^2$.

4.95. σ – півсфера $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, поверхнева густина $\mu(x, y, z) = x^2 y^2$.

4.96. σ – частина поверхні конуса $x^2 + y^2 = z^2$, $-2 \le z \le 2$, поверхнева густина $\mu(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Поверхневі інтеграли другого роду

У задачах 4.97 – 4.108 обчислити поверхневі інтеграли другого роду.

4.97. $\iint\limits_{\sigma} y\, dxdz$, де σ – верхня сторона площини $x + y + z = a$, $(x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0)$.

4.98. $\iint\limits_{\sigma} x\, dydz + y\, dxdz + z\, dxdy$, де σ – верхня сторона площини $x + 2y + z - 6 = 0$ $(x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0)$.

4.99. $\iint\limits_{\sigma} xz\, dxdy + xy\, dydz + yz\, dxdz$, де σ – зовнішня сторона піраміди, утвореної площинами $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

4.100. $\iint\limits_{\sigma} \frac{dxdy}{z}$, де σ – зовнішня сторона сфери $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

4.101. $\iint\limits_{\sigma} z^2 dxdy$, де σ – зовнішня сторона півсфери $x^2+y^2+z^2=R^2$, $z\ge 0$.

4.102. $\iint\limits_{\sigma} x\,dydz + y\,dxdz + z\,dxdy$, де σ – додатна сторона куба, утвореного площинами $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=1$, $y=1$, $z=1$.

4.103. $\iint\limits_{\sigma} x^2y^2z\,dxdy$, де σ – додатна сторона нижньої половини сфери $x^2+y^2+z^2=R^2$.

4.104. $\iint\limits_{\sigma} z\,dxdy$, де σ – зовнішня сторона еліпсоїда $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

4.105. $\iint\limits_{\sigma} z^2dxdy$, де σ – зовнішня сторона еліпсоїда $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

4.106. $\iint\limits_{\sigma} x^2dydz$, де σ – зовнішня сторона частини поверхні параболоїда $z=\dfrac{H}{R^2}(x^2+y^2)$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\le H$.

4.107. $\iint\limits_{\sigma} (x+y)\,dydz+(y-x)\,dxdz+(z-2)\,dxdy$, де σ – частина поверхні конуса $x^2+y^2-z^2=0$, яка відтинається площинами $z=0$ і $z=1$, нормаль до якої утворює тупий кут з віссю Oz.

4.108. $\iint\limits_{\sigma} yz\,dxdy + xz\,dydz + xy\,dxdz$, де σ – зовнішня сторона поверхні, розташованої у першому октанті і утвореної із циліндра $x^2+y^2=R^2$ і площин $x=0$, $y=0$, $z=0$ і $z=H$.

У задачах 4.109 – 4.116 обчислити поверхневий інтеграл по поверхні σ за допомогою формули Остроградського-Гаусса.

4.109. $\iint\limits_{\sigma} xz\,dxdy + xy\,dydz + yz\,dxdz$, де σ – зовнішня сторона піраміди, утвореної площинами $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

4.110. $\iint\limits_{\sigma} x^2dydz + 3y\,dxdz - 2zx\,dxdy$, де σ – зовнішня сторона піраміди, обмеженої площинами $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

4.111. $\iint\limits_{\sigma} yz\,dxdy + xz\,dydz + xy\,dxdz$, де σ – зовнішня сторона поверхні, розташованої у першому октанті і утвореної із циліндра $x^2+y^2=R^2$ і площин $x=0$, $y=0$, $z=0$ і $z=H$.

4.112. $\iint\limits_{\sigma} x\,dydz + y\,dxdz + (1-z)\,dxdy$, де σ – зовнішня сторона повної поверхні конуса $z^2=x^2+y^2$, $0\le z\le H$.

4.113. $\iint\limits_{\sigma} x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy$, де σ – зовнішня сторона повної поверхні куба $0\le x\le a$, $0\le y\le a$, $0\le z\le a$.

4.114. $\iint\limits_{\sigma} x^3dydz + y^3dxdz + z^3dxdy$, де σ – зовнішня сторона поверхні сфери $x^2+y^2+z^2=a^2$.

4.115. $\iint\limits_{\sigma} y^2z\,dxdy + xz\,dydz + x^2y\,dxdz$, де σ – зовнішня сторона поверхні, розташованої у першому октанті і утвореної із параболоїда $z=x^2+y^2$, циліндра $x^2+y^2=1$ і координатних площин.

4.116. $\iint\limits_{\sigma} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\,d\sigma$, де σ – зовнішня сторона сфери $x^2+y^2+z^2=R^2$.

У задачах 4.117 – 4.122 обчислити криволінійні інтеграли за допомогою формули Стокса.

4.117. $\oint\limits_L x^2y^3dx + dy + z\,dz$, де L – коло $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$, взявши за поверхню σ півсферу $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Інтегрування по колу в площині xOy ведеться в додатному напрямі.

4.118. $\oint\limits_L yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$, де L – контур трикутника OAB із вершинами $O(0,0,0)$, $A(1,1,0)$, $B(1,1,1)$.

4.119. $\oint\limits_L y^2dx + z^2dy + x^2dz$, де L – контур трикутника ABC із вершинами $A(a,0,0)$, $B(0,a,0)$, $C(0,0,a)$.

4.120. $\oint\limits_L (y^2 + z^2)\,dx + (x^2 + z^2)\,dy + (x^2 + y^2)\,dz$, де L – крива, яка утворена від перетину двох поверхонь: сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$ і циліндра $x^2 + y^2 = 2rx$ $(0 < r < R,\ z > 0)$. Обхід по кривій L проти годинникової стрілки, якщо дивитись із додатного напряму осі Oz.

4.121. $\oint\limits_L x\,dx + (x + y)\,dy + (x + y + z)\,dz$, де L – крива $x = a\sin t$, $y = a\cos t$, $z = a(\sin t + \cos t)$, яка пробігається у напрямку зростання параметра t $(0 \le t \le 2\pi)$.

4.122. $\oint\limits_L y^2z^2\,dx + x^2z^2\,dy + x^2y^2\,dz$, де L – замкнена крива $x = a\cos t$, $y = a\cos 2t$, $z = a\cos 3t$, яка пробігається у напрямку зростання параметра t $(0 \le t \le 2\pi)$.

§3. Теорія поля

I. Короткі теоретичні відомості

Скалярне поле та його характеристики

Кажуть, що в просторі $\mathbf{R}^3$ задано *поле* деякої величини, якщо в кожній точці простору (або його частині) визначено значення цієї величини. Поле, задане в області $G \subset \mathbf{R}^3$, називається *скалярним*, якщо в кожній точці $M(x,y,z) \in G$ задається скалярна функція $u = u(x,y,z)$.

Геометричне місце точок, в якому скалярна функція $u = u(x,y,z)$ зберігає одне і те ж значення, називається *поверхнею рівня*, тобто рівняння поверхні рівня $u(x,y,z) = C$.

Похідна за напрямом

Візьмемо дві точки скалярного поля $M(x,y,z)$ і $M_1(x_1,y_1,z_1)$. Проведемо вектор $\vec{l}$ від точки M до точки M_1, напрямні косинуси якого позначимо $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ (рис.4.13).

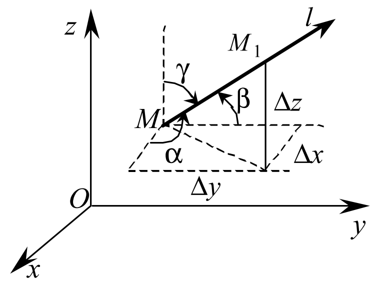


Рис.4.13

Координати точки M_1 дорівнюють відповідно

$$x_1 = x + \Delta x,\ y_1 = y + \Delta y,\ z_1 = z + \Delta z,$$

тоді $\Delta l = MM_1 = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$.

Обчислимо приріст $\Delta_l u$ функції $u(x,y,z)$ при переході від точки M до точки M_1 в напрямі вектора $\vec{l}$: $\Delta_l u = u(M_1) - u(M)$.

Якщо існує границя $\lim\limits_{\Delta l \to 0} \dfrac{\Delta_l u}{\Delta l}$, то цю границю називають *похідною функції $u(x,y,z)$ в точці $M(x,y,z)$ за напрямом вектора $\vec{l}$* і позначають $\dfrac{\partial u}{\partial l}$, тобто

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l u}{\Delta l}. \tag{4.43}$$

Припустимо, що функція $u(x,y,z)$ диференційовна в точці M, тоді її приріст $\Delta_l u$ представляється у вигляді

$$\Delta_l u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y + \varepsilon_3\Delta z, \qquad (4.44)$$

де ε_1, ε_2, ε_3 – нескінченно малі функції при $\Delta l \to 0$.

Оскільки $\Delta x = \Delta l\cos\alpha$, $\Delta y = \Delta l\cos\beta$, $\Delta z = \Delta l\cos\gamma$, то переходячи до границі у рівнянні (4.44) при $\Delta l \to 0$, дістанемо *формулу для обчислення похідної за напрямом*

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma. \qquad (4.45)$$

Означення. Вектор, координатами якого є частинні похідні функції $u(x,y,z)$ в точці $M(x,y,z)$ називається *градієнтом функції* в цій точці і позначається $\operatorname{grad} u$. Отже,

$$\operatorname{grad} u(x,y,z) = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}. \qquad (4.46)$$

Враховуючи, що $\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$, $\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, можна записати формулу (4.45) у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (\operatorname{grad} u, \vec{l}) = \text{пр}_{\vec{l}}\operatorname{grad} u. \qquad (4.47)$$

Далі за властивістю скалярного добутку маємо

$$\text{пр}_{\vec{l}}\operatorname{grad} u = |\operatorname{grad} u|\cos\varphi, \qquad (4.48)$$

де φ – кут між $\vec{l}$ і $\operatorname{grad} u$.

Якщо $\cos\varphi = 1$, то $\frac{\partial u}{\partial l}$ приймає найбільше значення, тобто при цьому напрям $\vec{l}$ співпадає із напрямом $\operatorname{grad} u$. До того ж має місце співвідношення $\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{\max} = |\operatorname{grad} u|$.

Властивості градієнта

Нехай $u = u(x,y,z)$, $v = v(x,y,z)$ – диференційовні функції. Тоді мають місце властивості.

1^0. $\operatorname{grad}(u+v) = \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} v$.

2^0. $\operatorname{grad}(Cu) = C\operatorname{grad} u$.

3^0. $\operatorname{grad} uv = u\operatorname{grad} v + v\operatorname{grad} u$.

4^0. $\operatorname{grad}\frac{u}{v} = \frac{1}{v^2}(v\operatorname{grad} u - u\operatorname{grad} v)$.

5^0. $\operatorname{grad} f(u(x,y,z)) = \frac{\partial f}{\partial u}\operatorname{grad} u$.

Зауважимо, що вектор градієнт та його довжина використовуються для визначення координат одиничного нормального вектора до заданої поверхні.

Якщо поверхня σ задається рівнянням $F(x,y,z) = 0$, а $\vec{n}_F$ – її нормальний вектор, то вектор одиничної нормалі $\vec{n}$ визначається так:

$$\vec{n} = \pm\frac{\vec{n}_F}{|\vec{n}_F|} =$$

$$= \left(\pm\frac{F'_x(x,y,z)}{\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}}; \pm\frac{F'_y(x,y,z)}{\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}}; \pm\frac{F'_z(x,y,z)}{\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}}\right). \qquad (4.49)$$

Але, якщо вважати, що задано скалярне поле $u(x,y,z) = F(x,y,z)$, то

$$\operatorname{grad} u = \operatorname{grad} F(x,y,z) = \left(F'_x(x,y,z), F'_y(x,y,z), F'_z(x,y,z)\right). \qquad (4.50)$$

Тоді

$$\vec{n} = \pm\frac{\operatorname{grad} F(x,y,z)}{|\operatorname{grad} F(x,y,z)|}. \qquad (4.51)$$

Якщо поверхня σ задається рівнянням $z = z(x,y)$, то

$$\vec{n} = \left(\frac{z'_x}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}}; \frac{z'_y}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}}; \frac{-1}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}}\right). \qquad (4.52)$$

Отже, напрямні косинуси $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ вектора одиничної нормалі $\vec{n}$ визначаються через координати $\operatorname{grad} F$ та його довжину за формулою (4.51).

Векторне поле та його характеристики

Поле, задане в області $G \subset \mathbf{R}^3$, називається *векторним*, якщо в кожній точці $M(x,y,z) \in G$ задається вектор $\vec{a} = \vec{a}(M)$:

$$\vec{a}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}.$$

Векторною лінією векторного поля $\vec{a}$ називається крива, в кожній точці M якої вектор $\vec{a}$ напрямлений по дотичній до цієї кривої.

Якщо $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ неперервні і мають частинні похідні першого порядку, то векторні лінії визначаються з системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}. \tag{4.53}$$

Дивергенцією векторного поля $\vec{a}(M)$ в точці M називається вираз

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \tag{4.54}$$

Дивергенція векторного поля є *скалярною характеристикою* векторного поля.

Якщо вважати, що $\vec{a}$ – поле швидкостей рідини, що рухається, то $\operatorname{div}\vec{a}(M)$ є потужність джерела, яке розташовано в точці M (за умови, що $\operatorname{div}\vec{a} > 0$), або потужність стоку ($\operatorname{div}\vec{a} < 0$).

Властивості дивергенції

1^0. $\operatorname{div}(C_1\vec{a}_1 + C_2\vec{a}_2) = C_1\operatorname{div}\vec{a}_1 + C_2\operatorname{div}\vec{a}_2$, де $C_1, C_2 = \text{const}$.

2^0. $\operatorname{div}(u(x,y,z)\cdot\vec{a}(M)) = (\operatorname{grad}u,\vec{a}) + u\cdot\operatorname{div}\vec{a}$.

3^0. Якщо $\vec{a}(M)$ – сталий вектор ,то $\operatorname{div}\vec{a} = 0$.

Ротором векторного поля $\vec{a}(M)$ називають вектор

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}. \tag{4.55}$$

Ротор векторного поля є *векторною характеристикою* векторного поля.

Властивості ротора

1^0. $\operatorname{rot}(C_1\vec{a}_1 + C_2\vec{a}_2) = C_1\operatorname{rot}\vec{a}_1 + C_2\operatorname{rot}\vec{a}_2$, де $C_1, C_2 = \text{const}$.

2^0. $\operatorname{rot}(u(x,y,z)\cdot\vec{a}(M)) = [\operatorname{grad}u,\vec{a}] + u\cdot\operatorname{rot}\vec{a}$.

3^0. Якщо $\vec{a}(M)$ – сталий вектор ,то $\operatorname{rot}\vec{a} = 0$.

Потоком векторного поля $\vec{a}(M)$ через поверхню σ в сторону, визначену нормальним одиничним вектором $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ називається поверхневий інтеграл

$$\Pi = \iint_\sigma (\vec{a},\vec{n})\,d\sigma = \iint_\sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,d\sigma = \iint_\sigma a_n\,d\sigma. \tag{4.56}$$

Тут $a_n = \text{пр}_{\vec{n}}\vec{a}$.

Якщо $\vec{a} = \vec{v}(x,y,t)$ – поле швидкостей рідини, то потік поля через сторону поверхні σ, визначену нормальним одиничним вектором $\vec{n}$, дорівнює кількості рідини, що протікає через цю поверхню в одиницю часу.

Лінійним інтегралом векторного поля $\vec{a}(M)$ вздовж орієнтованої кривої L називається криволінійний інтеграл

$$\int_L (\vec{a},d\vec{r}) = \int_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_L a_\tau\,dl, \tag{4.57}$$

де $d\vec{r} = (dx,dy,dz)$, $a_\tau = \text{пр}_{\vec{\tau}}\vec{a}$, $\vec{\tau} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ – одиничний вектор дотичної до кривої.

Якщо $\vec{a} = \vec{F}(x,y,z)$ – силове поле, то лінійний інтеграл є робота сили по переміщенню точки вздовж лінії L.

Лінійний інтеграл вздовж замкненого контуру L називається *циркуляцією* векторного поля $\vec{a} = \vec{a}(M)$:

$$\text{C} = \oint_L (\vec{a},d\vec{r}). \tag{4.58}$$

Формули Остроградського-Гаусса та Стокса у векторній формі

Формула Остроградського-Гаусса у векторній формі має вигляд

$$\Pi = \iint_\sigma (\vec{a},\vec{n})\,d\sigma = \iiint_G \operatorname{div}\vec{a}\,dV, \tag{4.59}$$

тобто потік векторного поля $\vec{a}(M)$ через замкнену поверхню σ, що обмежує область $G \subset \mathbf{R}^3$, в напрямку її зовнішньої нормалі $\vec{n}$, $|\vec{n}| = 1$, дорівнює потрійному інтегралу по області G від дивергенції векторного поля.

Формула Стокса у векторній формі має вигляд

$$\text{C} = \oint_L (\vec{a},d\vec{r}) = \iint_\sigma (\operatorname{rot}\vec{a},\vec{n})\,d\sigma, \tag{4.60}$$

тобто циркуляція векторного поля $\vec{a}(M)$ вздовж замкненого контура L дорівнює потоку вектора ротора $\operatorname{rot}\vec{a}$ через поверхню σ, обмежену цим контуром (орієнтація поверхні σ і контура L узгоджені).

Поняття узгодженості орієнтації поверхні σ і обмежуючого її контура L введено в § 2 цієї глави.

Спеціальні види векторних полів

Потенціальне векторне поле. Векторне поле $\vec{a}(M)$ називається *потенціальним*, якщо

$$\vec{a}(M) = \operatorname{grad}u(x,y,z). \tag{4.61}$$

Функцію $u(x,y,z)$ називають *потенціалом* поля $\vec{a}(M)$.

Критерій потенціальності векторного поля

Для того, щоб векторне поле $\vec{a}$ в однозв'язній області $G \subset \mathbf{R}^3$ було потенціальним, необхідно і достатньо, щоб в кожній точці області G виконувалась умова

$$\operatorname{rot}\vec{a} = 0 . \tag{4.62}$$

Виконання умови (4.62) рівносильно виконанню умов:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} . \tag{4.63}$$

Потенціал $u(x,y,z)$ векторного поля $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ визначається формулою

$$u(x,y,z) = \int\limits_{M_0(x_0,y_0,z_0)}^{M(x,y,z)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz , \tag{4.64}$$

де $M_0(x_0,y_0,z_0)$ – будь-яка фіксована точка в однозв'язній області $G \subset \mathbf{R}^3$. Інтегрування ведеться по будь-якій кривій, що з'єднує точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ і $M(x,y,z)$.

Зауваження. Якщо поле потенціальне і крива L замкнена, то

$$\oint\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0 .$$

Соленоїдальне векторне поле. Векторне поле $\vec{a}(M)$ називається *соленоїдальним* або *трубчастим*, якщо $\operatorname{div}\vec{a}(M) = 0$.

Із означення соленоїдального поля випливає, що це поле не має ні джерел, ні стоків.

Оскільки $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = 0$, то поле ротора є соленоїдальним. Потік Π соленоїдального векторного поля через замкнену поверхню σ у напрямку зовнішньої нормалі дорівнює нулю, що випливає з теореми Остроградського-Гаусса.

Оператор Гамільтона. Диференціальні операції другого порядку. Оператор Лапласа

Символічний оператор Гамільтона або оператор "набла" розглядається як вектор і позначається

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} . \tag{4.65}$$

За допомогою оператора набла можна скорочено записати $\operatorname{grad} u$, $\operatorname{div}\vec{a}$, $\operatorname{rot}\vec{a}$.

1. Якщо задано скалярне поле $u(x,y,z)$, то

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} ,$$

тобто

$$\operatorname{grad} u = \nabla u . \tag{4.66}$$

2. Якщо задано векторне поле

$$\vec{a}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k} ,$$

то

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} ,$$

тобто

$$\operatorname{div}\vec{a} = \nabla \cdot \vec{a} . \tag{4.67}$$

3. Якщо задано векторне поле

$$\vec{a}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k} ,$$

то

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} ,$$

тобто

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \nabla \times \vec{a} . \tag{4.68}$$

Комбінуючи символи $\operatorname{grad} u$, $\operatorname{div}\vec{a}$, $\operatorname{rot}\vec{a}$ попарно, можна отримати дев'ять пар виразів. Всі ці дії називають *диференціальними операціями другого порядку*. Але не всі пари мають значення. Розташуємо усі можливості у таблицю.

	Скалярне поле $u(x,y,z)$	Векторне поле $\vec{a}(M)$	
	$\operatorname{grad} u$	$\operatorname{div}\vec{a}$	$\operatorname{rot}\vec{a}$
grad		$\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a}$	
div	$\operatorname{div}\operatorname{grad} u$		$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = 0$
rot	$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = 0$		$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a}$

Заштриховані клітини відповідають операціям, які не мають сенсу.

Диференціальні операції другого порядку можна записати через оператор набла.

Для скалярного поля $u(x,y,z)$ маємо:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}u = \nabla\cdot\nabla u\,. \tag{4.69}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}u = \nabla\times\nabla u = 0\,. \tag{4.70}$$

Для векторного поля $\vec{a}(M)$ маємо:

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a} = \nabla\cdot(\nabla\cdot\vec{a})\,. \tag{4.71}$$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = \nabla\cdot(\nabla\times\vec{a}) = 0\,. \tag{4.72}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a} = \nabla\times(\nabla\times\vec{a})\,. \tag{4.73}$$

Обчислимо $\operatorname{div}\operatorname{grad}u$.

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}u = \operatorname{div}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\,. \tag{4.74}$$

Вираз $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ називають *лапласіаном* для скалярної функції $u(x,y,z)$ і позначають через Δu:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\,. \tag{4.75}$$

Отже,

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}u = \Delta u\,. \tag{4.76}$$

Зауваження. При використанні оператора ∇ до добутку будь-яких величин треба пам'ятати правило диференціювання добутку

$$\frac{\partial}{\partial x}(uv) = v\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial x}\,.$$

Отже, оператор ∇ треба використовувати по черзі до кожного множника, при цьому у першу чергу враховувати його диференціальний характер, а потім вже векторні властивості.

II. Контрольні питання та завдання

1. Дайте означення скалярного поля.

2. Дайте означення основних характеристик скалярного поля.

3. Який зв'язок між похідною за напрямом і градієнтом скалярного поля?

4. Сформулюйте та доведіть основні властивості градієнта скалярного поля.

5. Запишіть координати вектора одиничної нормалі до поверхні в залежності від того, яким рівнянням задається поверхня.

6. Дайте означення векторного поля.

7. Які основні характеристики векторного поля?

8. Що таке потік векторного поля?

9. Дайте означення дивергенції векторного поля. Які її властивості?

10. Дайте означення ротора векторного поля. Які його властивості?

11. Наведіть означення лінійного інтеграла векторного поля та циркуляції.

12. Запишіть формулу Остроградського-Гаусса у векторній формі.

13. Запишіть формулу Стокса у векторній формі.

14. Яке поле називається потенціальним?

15. Як знайти потенціал векторного поля?

16. Яке поле називається соленоїдальним?

17. Визначте оператор Гамільтона та наведіть вирази градієнта, дивергенції та ротора за допомогою цього оператора.

18. Які існують диференціальні операції другого порядку? Що таке лапласіан?

III. Приклади розв'язання задач

У цьому пункті наведено 14 прикладів розв'язання задач, які за своєю тематикою розподілились таким чином:

1. Скалярне поле та його характеристики: *приклад 1*.
2. Векторне поле та його характеристики: *приклади 2 – 4*.
3. Обчислення потоку векторного поля: *приклади 5 – 9*.
4. Обчислення циркуляції векторного поля:*приклади 10, 11*.
5. Спеціальні види векторних полів: *приклади 12, 13*.
6. Оператор Гамільтона: *приклад 14*.

Скалярне поле та його характеристики

Приклад 1. Задано скалярне поле $u = x^2 - \frac{3}{2}y^2 + 2z^2x$, точка $M(1,-1,2)$, вектор $\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.

Обчислити:

а) похідну скалярного поля u в точці M за напрямом l, заданим вектором $\vec{a}$, тобто $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M$;

б) напрям та величину градієнта скалярного поля u в точці M, тобто $\operatorname{grad} u|_M$ та $|\operatorname{grad} u|_M|$.

► а) похідна за напрямом обчислюється за формулою

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M \cos\gamma,$$

де $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – напрямні косинуси вектора $\vec{a}$.

Знаходимо

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = (2x+2z^2)|_M = 10;\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = -3y|_M = 3;\ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = 4xz|_M = 8;$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2+(-2)^2+1} = 3;\ \cos\alpha = \frac{2}{3},\ \cos\beta = -\frac{2}{3},\ \cos\gamma = \frac{1}{3}.$$

Тоді

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M = 10\cdot\frac{2}{3} + 3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) + 8\cdot\frac{1}{3} = \frac{22}{3};$$

б) врахуємо, що

$$\operatorname{grad} u|_M = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M \vec{i} + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M \vec{j} + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M \vec{k}.$$

Маємо

$$\operatorname{grad} u|_M = 10\vec{i} + 3\vec{j} + 8\vec{k}.$$

Тоді величина градієнта скалярного поля u

$$|\operatorname{grad} u|_M| = \sqrt{10^2+3^2+8^2} = \sqrt{173}.\ ◄$$

Векторне поле та його характеристики

Приклад 2. Знайти векторну лінію векторного поля $\vec{a}(M) = -y\vec{i} + x\vec{j} + b\vec{k}$, що проходить через точку $M_0(1,0,0)$.

► Векторні лінії поля визначаються з системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{b}.$$

Розв'язуємо цю систему:

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} \Rightarrow xdx + ydy = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = C_1^2,$$

або в параметричному вигляді: $x = C_1\cos t$, $y = C_1\sin t$.

Далі

$$\frac{dy}{x} = \frac{dz}{b} \Rightarrow \frac{C_1\cos t\,dt}{C_1\cos t} = \frac{dz}{b} \Rightarrow dz = b\,dt \Rightarrow z = bt + C_2.$$

Отже, розв'язком системи, а отже, рівнянням векторних ліній, записаних у параметричній формі є:

$$x = C_1\cos t,\ y = C_1\sin t,\ z = bt + C_2.$$

Оскільки векторна лінія проходить через точку $M_0(1,0,0)$, то

$$1 = C_1\cos t,\ 0 = C_1\sin t,\ 0 = bt + C_2.$$

Звідси знаходимо, що $C_1 = 1$, $C_2 = 0$.

Отже, рівнянням векторної лінії поля $\vec{a}(M)$, що проходить через точку $M_0(1,0,0)$ є

$$x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = bt.\ ◄$$

Приклад 3. Обчислити дивергенцію векторного поля $\vec{a}(M) = (x^2+y)\vec{i} + (y^2+z)\vec{j} + (z^2+x)\vec{k}$ в точці $M_0(1,-2,3)$.

► За означенням

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Тоді $\operatorname{div}\vec{a}|_{M_0} = (2x+2y+2z)|_{M_0} = 4$.

Оскільки $\operatorname{div}\vec{a}|_{M_0} = 4 > 0$, то точка M_0 є джерелом векторного поля. ◄

Приклад 4. Обчислити ротор векторного поля

$$\vec{a}(M) = (z-y)\vec{i} + (x-z)\vec{j} + (y-x)\vec{k}.$$

► За означенням $\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$.

Тоді

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z-y & x-z & y-x \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(y-x)}{\partial y} - \frac{\partial(x-z)}{\partial z}\right)\vec{i} +$$

$$+\left(\frac{\partial(z-y)}{\partial z} - \frac{\partial(y-x)}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial(x-z)}{\partial x} - \frac{\partial(x-y)}{\partial y}\right)\vec{k} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} =$$

$= 2(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$. ◄

Обчислення потоку векторного поля

Враховуючи, що потік векторного поля визначається як поверхневий інтеграл $\Pi = \iint\limits_{\sigma} (\vec{a},\vec{n})\, d\sigma$, при його обчисленні використовують такі підходи.

1. Якщо $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$, то $\Pi_\sigma = \Pi_{\sigma_1} + \Pi_{\sigma_2}$ (*властивість адитивності*).

2. Якщо σ – зовнішня сторона замкненої поверхні σ, то згідно з формулою Остроградського-Гаусса потік Π визначається так:

$$\Pi = \iint\limits_{\sigma} (\vec{a},\, \vec{n})\, d\sigma = \iiint\limits_{G} \operatorname{div}\vec{a}\, dV .$$

3. Якщо поверхня σ *незамкнена*, то її доповнюють іншими поверхнями до *замкненої*. Далі обчислюють потік за теоремою Остроградського-Гаусса та із результату віднімають потоки через додаткові поверхні.

4. Якщо поверхня задана рівнянням $F(x,y,z)=0$, яке однозначно розв'язується відносно *кожної* змінної, то це означає, що поверхня взаємно однозначно проектується на *кожну* з координатних площин. Тоді для обчислення поверхневого інтеграла, що виражає потік, використовується *метод проектування на кожну координатну площину* (див. глава 4, §2). Відповідні формули мають вигляд:

$$\Pi = \iint\limits_{\sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, d\sigma = \pm \iint\limits_{D_{yz}} P(x,y,z)\big|_{x=x(y,z)}\, dydz \pm$$

$$\pm \iint\limits_{D_{xz}} Q(x,y,z)\big|_{y=y(x,z)}\, dxdz \pm \iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z)\big|_{z=z(x,y)}\, dxdy .$$

Знак перед кожним інтегралом вибирається таким, який знак у відповідного напрямного косинуса нормалі до поверхні σ.

5. Якщо поверхня задана рівнянням $F(x,y,z)=0$, яке однозначно розв'язується відносно *будь-якої* змінної, то це означає, що поверхня взаємно однозначно проектується на *відповідну* координатну площину. Тоді для обчислення поверхневого інтеграла, що виражає потік, використовується *метод проектування на одну координатну площину* (див. глава 4, §2). Відповідні формули мають вигляд:

$$\iint\limits_{\sigma} (\vec{a},\vec{n})\, d\sigma = \iint\limits_{D_{yz}} \frac{(\vec{a},\vec{n})}{|\cos\alpha|}\bigg|_{x=x(y,z)} dydz$$

або

$$\iint\limits_{\sigma} (\vec{a},\vec{n})\, d\sigma = \iint\limits_{D_{xz}} \frac{(\vec{a},\vec{n})}{|\cos\beta|}\bigg|_{y=y(x,z)} dxdz$$

або

$$\iint\limits_{\sigma} (\vec{a},\vec{n})\, d\sigma = \iint\limits_{D_{xy}} \frac{(\vec{a},\vec{n})}{|\cos\gamma|}\bigg|_{z=z(x,y)} dxdy .$$

6. Якщо поверхня σ не має взаємно однозначних проекцій на координатні площини, то цю поверхню розбивають на частини, які задовольняють умовам взаємно однозначного проектування, а потім використовують властивість адитивності поверхневих інтегралів.

Приклад 5. Обчислити потік векторного поля

$$\vec{a} = (x+z)\vec{i} + (2y-x)\vec{j} + z\vec{k}$$

через зовнішню сторону поверхні піраміди, яка утворена площиною $x - 2y + 2z = 4$ і координатними площинами, за допомогою формули Остроградського-Гаусса.

► За формулою Остроградського-Гаусса

$$\Pi = \iint\limits_{\sigma} (\vec{a},\vec{n})\, d\sigma = \iiint\limits_{G} \operatorname{div}\vec{a}\, dV = \iiint\limits_{G} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dV .$$

Маємо $P(x,y,z) = x+z$, $Q(x,y,z) = 2y-x$, $R(x,y,z) = z$,

$\dfrac{\partial P}{\partial x} = 1$, $\dfrac{\partial Q}{\partial y} = 2$, $\dfrac{\partial R}{\partial z} = 1$, $\operatorname{div}\vec{a} = 4$.

Тоді $\Pi = \iint\limits_{\sigma} (\vec{a},\vec{n})\, d\sigma = \iiint\limits_{G} 4\, dV = 4V_G$, де G – задана піраміда.

Перетворимо рівняння площини $x-2y+2z=4$ до вигляду $\frac{x}{4}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{2}=1$. Звідси видно, що висота піраміди $H_{\text{пір}}=2$, а основа – прямокутний трикутник з катетами довжиною 4 та 2 відповідно.

Обчислимо об'єм піраміди: $V_G=\frac{1}{3}H_{\text{пір}}S_{\text{осн}}=\frac{1}{3}\cdot 2\cdot\frac{4\cdot 2}{2}=\frac{8}{3}$.

Остаточно $\Pi=4\cdot\frac{8}{3}=\frac{32}{3}$. ◄

Приклад 6. Обчислити потік векторного поля

$$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

через зовнішню сторону бічної поверхні σ циліндра $x^2+y^2=R^2$, обмеженого площинами $z=0$ і $z=H$ $(H>0)$.

► Доповнимо задану поверхню σ до повної поверхні площинами $z=0$ і $z=H$.

Тоді $\Pi=\Pi_{\text{бічн.}}+\Pi_1+\Pi_2$,

де Π – потік через повну поверхню циліндра, $\Pi_{\text{бічн.}}$ – потік через бічну поверхню, Π_1 – потік через верхню основу циліндра, Π_2 – через нижню.

Звідси $\Pi_{\text{бічн.}}=\Pi-\Pi_1-\Pi_2$.

Потік через повну замкнену поверхню обчислимо за допомогою формули Остроградського-Гаусса

$$\Pi=\iiint\limits_G \operatorname{div}\vec{a}\,dV.$$

Маємо $P(x,y,z)=x$, $Q(x,y,z)=y$, $R(x,y,z)=z$,

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{\partial R}{\partial z}=1,\ \operatorname{div}\vec{a}=3.$$

$$\Pi=\iiint\limits_G 3\,dV=3V_{\text{цилін.}}=3\pi R^2H.$$

$$\Pi_1=\iint\limits_{\sigma_1}(\vec{a},\vec{n})d\sigma=\iint\limits_{\sigma_1}(\vec{a},\vec{k})d\sigma=\iint\limits_{\sigma_1}z\big|_{z=H}d\sigma=H\iint\limits_{\sigma_1}d\sigma=H\sigma_1=H\pi R^2.$$

$$\Pi_2=\iint\limits_{\sigma_2}(\vec{a},\vec{n})d\sigma=-\iint\limits_{\sigma_2}(\vec{a},\vec{k})d\sigma=-\iint\limits_{\sigma_1}z\big|_{z=0}d\sigma=-\iint\limits_{\sigma_1}0\,d\sigma=0.$$

Остаточно $\Pi_{\text{бічн.}}=3\pi R^2H-\pi R^2H=2\pi R^2H$. ◄

Приклад 7. Обчислити потік векторного поля

$$\vec{a}=x^3\vec{i}+y^3\vec{j}+z^3\vec{k}$$

через зовнішню сторону бічної поверхні конуса $x^2+y^2=\frac{R^2}{H^2}z^2$ $(0\le z\le H)$.

► Доповнимо бічну поверхню конуса до повної замкненої поверхні площиною $z=H$.

Тоді $\Pi=\Pi_{\text{бічн.}}+\Pi_{\text{осн}}$,

де Π – потік через повну поверхню конуса, $\Pi_{\text{бічн.}}$ – потік через бічну поверхню, $\Pi_{\text{осн}}$ – потік через основу.

Звідси $\Pi_{\text{бічн.}}=\Pi-\Pi_{\text{осн}}$.

За формулою Остроградського-Гаусса

$$\Pi=\iint\limits_\sigma(\vec{a},\vec{n})d\sigma=\iiint\limits_G \operatorname{div}\vec{a}\,dV=\iiint\limits_G\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV.$$

Маємо $P(x,y,z)=x^3$, $Q(x,y,z)=y^3$, $R(x,y,z)=z^3$,

$$\frac{\partial P}{\partial x}=3x^2,\ \frac{\partial Q}{\partial y}=3y^2,\ \frac{\partial R}{\partial z}=3z^2,\ \operatorname{div}\vec{a}=3(x^2+y^2+z^2).$$

G – замкнена область: $x^2+y^2=\frac{R^2}{H^2}z^2$, $0\le z\le H$.

Тоді

$$\Pi=3\iiint\limits_G(x^2+y^2+z^2)\,dxdydz=\left|\begin{array}{ll} x=\rho\cos\varphi, & G\to G', \\ y=\rho\sin\varphi, & G':0\le\rho\le R, \\ z=z, & 0\le\varphi\le 2\pi, \\ dxdydz=\rho\,d\rho d\varphi dz, & \frac{H}{R}\rho\le z\le H. \end{array}\right|=$$

$$=3\iiint\limits_{G'}(\rho^2+z^2)\rho d\rho d\varphi dz=3\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R\rho d\rho\int_{\frac{H}{R}\rho}^{H}(\rho^2+z^2)\,dz=$$

$$=3\cdot 2\pi\int_0^R\rho\left(\rho^2z+\frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_{\frac{H}{R}\rho}^{H}d\rho=6\pi\int_0^R\left(\rho^3H+\frac{1}{3}\rho H^3-\frac{H}{R}\rho^4-\frac{1}{3}\frac{H^3}{R^3}\rho^4\right)d\rho=$$

$$=6\pi\left(\frac{1}{4}R^4H+\frac{1}{6}R^2H^3-\frac{1}{5}R^4H-\frac{1}{15}R^2H^3\right)=\frac{3}{10}\pi R^2H(R^2+2H^2).$$

Тепер обчислимо потік через основу $\Pi_{\text{осн.}}$ безпосередньо.

$$\Pi_{\text{осн.}} = \iint\limits_{\sigma_{\text{осн.}}} (\vec{a},\vec{n})\,d\sigma .$$

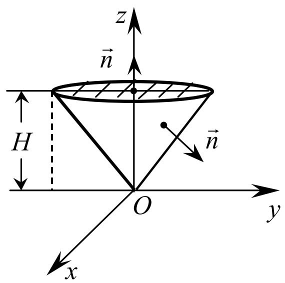


Рис.4.14

Оскільки потік обчислюється через зовнішню поверхню, то нормаль $\vec{n}$ до основи конуса співпадає із вектором $\vec{k}$ (рис.4.14), отже,

$\vec{n} = \vec{k} = (0,0,1)$, $(\vec{a},\vec{n}) = z^3 \cdot 1 = z^3$.

Основою конуса є круг $x^2 + y^2 \le R^2$, що розташований в площині $z = H$; $\text{пр}_{xOy}\sigma_{\text{осн.}} = D_{xy}$, $D_{xy} : x^2 + y^2 \le R^2$, отже,

$$\Pi_{\text{осн.}} = \iint\limits_{\sigma_{\text{осн.}}} (\vec{a},\vec{n})\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma_{\text{осн.}}} z^3\,d\sigma = \iint\limits_{D_{xy}} z^3\Big|_{z=H}\,dxdy = H^3 \iint\limits_{D_{xy}} dxdy = H^3\pi R^2 .$$

Остаточно

$$\Pi_{\text{бічн.}} = \Pi - \Pi_{\text{осн.}} = \frac{3}{10}\pi R^2 H(R^2 + 2H^2) - H^3\pi R^2 = \frac{\pi}{10} R^2 H(3R^2 - 4H^2). \blacktriangleleft$$

Приклад 8. Обчислити потік векторного поля

$$\vec{a} = z\vec{i} - x\vec{j} + y\vec{k}$$

через нижню сторону трикутника, отриманого від перетину площини $3x + 6y - 2z = 6$ з координатними площинами.

► Задану поверхню зображено на рис.4.15.

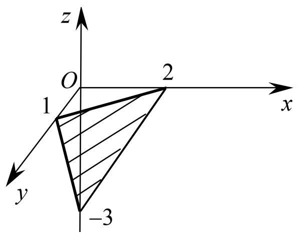


Рис.4.15

Наведемо три способи розв'язання задачі.

Спосіб 1. Доповнення незамкненої поверхні до замкненої.

Задана поверхня – трикутник – незамкнена. Доповнимо її до замкненої. Разом з координатними площинами площина $3x + 6y - 2z = 6$ утворює замкнену поверхню – поверхню піраміди. Позначимо її σ, тобто

$$\sigma : \begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{1} + \dfrac{z}{-3} = 1, \\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0. \end{cases}$$

$\text{пр}_{xOy}\sigma = D_{xy}$; $\text{пр}_{xOz}\sigma = D_{xz}$; $\text{пр}_{yOz}\sigma = D_{yz}$.

Ці проекції зображено на рис.4.16.

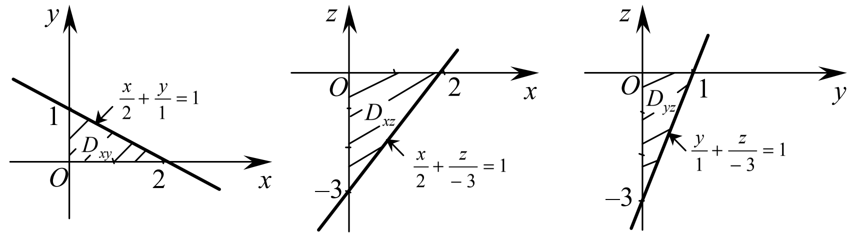


Рис.4.16

Застосуємо формулу Остроградського-Гаусса.

Врахуємо, що $\operatorname{div}\vec{a} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} = 0$, бо $\vec{a} = (z, -x, y)$.

Шуканий потік позначимо через Π, потік через замкнену поверхню σ – через Π_σ, потік через трикутники, що відповідають обмежуючим поверхню координатним площинам відповідно Π_{xy}, Π_{xz}, Π_{yz}.

Отже, маємо $\Pi = \Pi_\sigma - (\Pi_{xy} + \Pi_{xz} + \Pi_{yz})$,

де

$$\Pi_\sigma = \iint\limits_{\sigma} (\vec{a},\vec{n})\,d\sigma = \iiint\limits_{G} \operatorname{div}\vec{a}\,dV = 0 ;$$

$$\Pi_{xy} = \iint\limits_{D_{xy}} (\vec{a},\vec{k})\Big|_{z=0} dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} y\,dxdy = \int\limits_0^1 y\,dy \int\limits_0^{2(1-y)} dx = 2\int\limits_0^1 (y - y^2)\,dy = \frac{1}{3} ;$$

$$\Pi_{xz} = -\iint\limits_{D_{xz}} (\vec{a},\vec{j})\Big|_{y=0} dxdz = -\iint\limits_{D_{xz}} x\,dxdz = -\int\limits_0^2 x\,dx \int\limits_{\frac{3}{2}(x-2)}^{0} dz = \frac{3}{2}\int\limits_0^2 (x^2 - 2x)\,dx = 2 ;$$

$$\Pi_{yz} = \iint\limits_{D_{yz}} (\vec{a},\vec{i}\,)\Big|_{x=0} dydz = -\iint\limits_{D_{yz}} z\,dydz = -\int\limits_{-3}^{0} z\,dz \int\limits_{0}^{1+\frac{z}{3}} dy = -\int\limits_{-3}^{0} (z+\frac{z^2}{3})\,dz = \frac{3}{2}.$$

Отже, $\Pi = 0 - \left(\frac{1}{3} + 2 + \frac{3}{2}\right) = -\frac{23}{6}$.

Спосіб 2. Застосування методу проектування на одну координатну площину для знаходження потоку.

За умовою векторне поле $\vec{a} = z\vec{i} - x\vec{j} + y\vec{k}$; поверхня σ – трикутник, отриманий від перетину площини $3x + 6y - 2z = 6$ з координатними площинами. Рівняння площини однозначно розв'язується відносно кожної з трьох змінних, тобто існує взаємно однозначна відповідність між точками поверхні і точками її проекції на будь-яку координатну площину.

Розв'яжемо це рівняння $3x + 6y - 2z = 6$ відносно координати y :

$$y = -\frac{1}{6}(3x - 2z - 6).$$

Спроектуємо поверхню σ на площину $z = 0$, а поверхневий інтеграл, що виражає потік, запишемо через подвійний інтеграл у вигляді

$$\Pi = \iint\limits_{D_{xz}} \frac{(\vec{a},\vec{n})}{|\cos\beta|}\Bigg|_{y=y(x,z)} dxdz.$$

Оскільки нормаль до вибраної сторони поверхні утворює тупий кут з віссю Oz, то $\cos\gamma < 0$. Якщо функцію $F(x,y,z)$ представити у вигляді

$$F(x,y,z) = 3x + 6y - 2z - 6,$$

то $\operatorname{grad} F = 3\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k}$.

Тоді знаки $\cos\gamma$ і $F'_z = -2$ співпадають і одиничний нормальний вектор $\vec{n} = +\frac{\operatorname{grad} F}{|\operatorname{grad} F|}$,

де $|\operatorname{grad} F| = \sqrt{9+36+4} = 7$, $\vec{n} = \frac{1}{7}(3\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k})$, $|\vec{n}| = 1$.

Звідси $\cos\beta = n_y = \frac{6}{7}$.

Врахуємо, що $\vec{a} = (z, -x, y)$, тоді маємо

$$\frac{(\vec{a},\vec{n})}{|\cos\beta|} = \frac{1}{6}(3z - 6x - 2y).$$

Область інтегрування D_{xz} – проекція заданої площини на площину xOz (рис.4.16 б), обмежена лініями $3x - 2z - 6 = 0$, $x = 0$, $z = 0$.

Отже,

$$\Pi = \frac{1}{6}\iint\limits_{D_{xz}} (3z - 6x - 2y)\Big|_{y=-\frac{1}{6}(3x-2z-6)} dxdz =$$

$$= \frac{1}{6}\int\limits_0^2 dx \int\limits_{\frac{3}{2}(x-2)}^{0} \left(\frac{7}{3}z - 5x - 2\right) dz = -\frac{23}{6}.$$

Спосіб 3. Застосування методу проектування на кожну координатну площину для знаходження потоку.

За умовою векторне поле $\vec{a} = z\vec{i} - x\vec{j} + y\vec{k}$; поверхня σ – трикутник, отриманий від перетину площини $3x + 6y - 2z = 6$ з координатними площинами. Рівняння площини $3x + 6y - 2z = 6$ однозначно розв'язується відносно кожної змінної, тобто маємо

$$x = 2 - 2y + \frac{2}{3}z; \quad y = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}z; \quad z = -3 + \frac{3}{2}x + 3y.$$

Одиничний нормальний вектор $\vec{n} = \left(\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, -\frac{2}{7}\right)$ (див. спосіб 2).

Отже, $\cos\alpha > 0$, $\cos\beta > 0$, $\cos\gamma < 0$.

Векторне поле $\vec{a} = (z, -x, y)$.

Запишемо у розгорнутому вигляді формулу для обчислення потоку, враховуючи знаки напрямних косинусів нормалі

$$\Pi = +\iint\limits_{D_{yz}} z\,dydz + \iint\limits_{D_{xz}} (-x)\,dxdz - \iint\limits_{D_{xy}} y\,dxdy = \int\limits_{-3}^{0} z\,dz \int\limits_{0}^{1+\frac{z}{3}} dy - \int\limits_0^2 dx \int\limits_{\frac{3}{2}(x-2)}^{0} dz -$$

$$-\int\limits_0^1 y\,dy \int\limits_0^{2(1-y)} dx = \int\limits_{-3}^{0}\left(z + \frac{z^2}{3}\right)dz + \frac{3}{2}\int\limits_0^2 (x^2 - 2x)\,dx - 2\int\limits_0^1 (y - y^2)\,dy = -\frac{23}{6}. \blacktriangleleft$$

Приклад 9. Знайти потік радіуса-вектора $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ через зовнішню сторону поверхні σ – прямого кругового циліндра, якщо початок координат співпадає з центром нижньої основи циліндра, R – радіус основи циліндра, H – його висота.

► Поверхню σ зображено на рис.4.17.

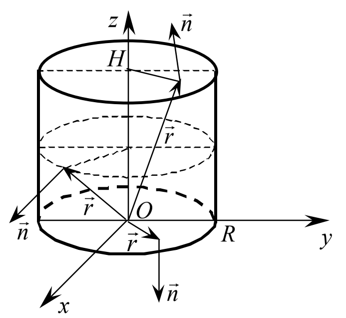


Рис.4.17

Спосіб 1. Поверхня σ замкнена, тому застосовуємо формулу Остроградського-Гаусса: $\Pi = \iint_\sigma (\vec r, \vec n)\, d\sigma = \iiint_G \operatorname{div} \vec r\, dV$.

Маємо $\operatorname{div} \vec r = 3$.

Отже, $\Pi = 3\iiint_V dV = 3V_{\text{цил}} = 3\pi R^2 H$.

Спосіб 2. Врахуємо, що на бічній поверхні циліндра σ_1: $(\vec r, \vec n) = \text{пр}_{\vec n}\vec r = R$; на верхній основі циліндра σ_2: $(\vec r, \vec n) = \text{пр}_{\vec n}\vec r = H$; на нижній основі циліндра σ_3: $(\vec r, \vec n) = \text{пр}_{\vec n}\vec r = 0$. Тоді

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 = \iint_{\sigma_1} (\vec r, \vec n)\, d\sigma + \iint_{\sigma_2} (\vec r, \vec n)\, d\sigma + \iint_{\sigma_3} (\vec r, \vec n)\, d\sigma =$$

$$= \iint_{\sigma_1} R\, d\sigma + \iint_{\sigma_2} H\, d\sigma + \iint_{\sigma_3} 0\, d\sigma = R \cdot 2\pi R H + H \cdot \pi R^2 + 0 = 3\pi R^2 H. \blacktriangleleft$$

Обчислення циркуляції векторного поля

Приклад 10. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec a = y\vec i + x^2\vec j - z\vec k$ по контуру $L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 3 \end{cases}$

1) безпосередньо, використовуючи означення циркуляції,

2) за формулою Стокса.

► 1) Контур L – коло радіуса $R = 2$, яке лежить на площині $z = 3$. Виберемо орієнтацію на колі таку, як вказано на рис.4.18.

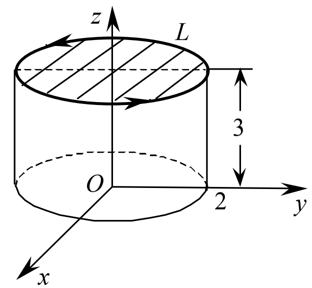


Рис.4.18

Запишемо рівняння кола у просторі у параметричному вигляді:

$$L: \begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \\ z = 3, \quad 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$$

Тоді $dx = -2\sin t\, dt$, $dy = 2\cos t\, dt$, $dz = 0\, dt$;

$$P(x,y,z) = y,\ Q(x,y,z) = x^2,\ R(x,y,z) = -z.$$

Отже,

$$\oint_L (\vec a, d\vec r) = \oint_L y\, dx + x^2 dy - z\, dz = \int_0^{2\pi} (2\sin t \cdot (-2\sin t) + 4\cos^2 t \cdot 2\cos t - 3 \cdot 0)\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-4\sin^2 t + 8\cos^3 t)\, dt = -2\int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t)\, dt + 8\int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 t)\, d\sin t =$$

$$= -4\pi + \sin 2t\Big|_0^{2\pi} + 8\sin t\Big|_0^{2\pi} - \frac{8\sin^3 t}{3}\Bigg|_0^{2\pi} = -4\pi.$$

2) Для обчислення циркуляції за формулою Стокса виберемо будь-яку поверхню, натягнуту на контур L. Найпростіший вигляд такої поверхні σ має круг у площині $z = 3$, натягнутий на контур L.

$$\text{Тоді} \quad \vec n = \vec k, \quad \operatorname{rot} \vec a = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & x^2 & -z \end{vmatrix} = (2x - 1)\vec k.$$

Отже,

$$\oint_L (\vec a, d\vec r) = \iint_\sigma (\operatorname{rot} \vec a, \vec n)\, d\sigma = \iint_\sigma (2x - 1)\, d\sigma = \iint_{D_{xy}} (2x - 1)\, dxdy =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} x = \rho\cos\varphi, & D_{xy} : x^2 + y^2 \le 4, \\ y = \rho\sin\varphi, & D_{xy} \to D', \\ dxdy = \rho\, d\rho d\varphi, & D' : 0 \le \rho \le 2,\ 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{array} \right| = \iint_{D'} (2\rho\cos\varphi - 1)\rho\, d\rho d\varphi =$$

$$= 2\iint_{D'} \rho^2 \cos\varphi\, d\rho d\varphi - \iint_{D'} \rho\, d\rho d\varphi = 2\int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi \int_0^2 \rho^2 d\rho - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho\, d\rho =$$

$$= 2\cdot \sin\varphi\Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^2 - 2\pi \cdot \frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^2 = 0 - 4\pi = -4\pi. ◄$$

Приклад 11. Обчислити циркуляцію C векторного поля $\vec{a} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$ вздовж кривої L: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 1 - \cos t - \sin t$ у напрямку зростання параметра t $(0 \le t \le 2\pi)$:
1) безпосередньо, використовуючи означення циркуляції,
2) за формулою Стокса.

► 1) Обчислюємо циркуляцію C безпосередньо:

$$C = \oint_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \oint_L xy\, dx + yz\, dy + xz\, dz .$$

Знайдемо $dx = -\sin t\, dt$, $dy = \cos t\, dt$, $dz = (\sin t - \cos t)\, dt$.

Тоді

$xy\, dx + yz\, dy + xz\, dz =$

$=(-\sin^2 t\cos t + \sin t(1-\cos t - \sin t)\cos t + \cos t(1 - \cos t - \sin t)(\sin t - \cos t))dt =$

$= (-3\sin^2 t\cos t + 2\sin t\cos t - \sin t\cos^2 t - \cos^2 t + \cos^3 t)\, dt$.

Маємо

$$C = \oint_L (-3\sin^2 t\cos t + \sin 2t - \sin t\cos^2 t - \cos^2 t + \cos^3 t)\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-3\sin^2 t)\, d(\sin t) + \int_0^{2\pi} \sin 2t\, dt - \int_0^{2\pi} \sin t\cos^2 t\, dt - \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt +$$

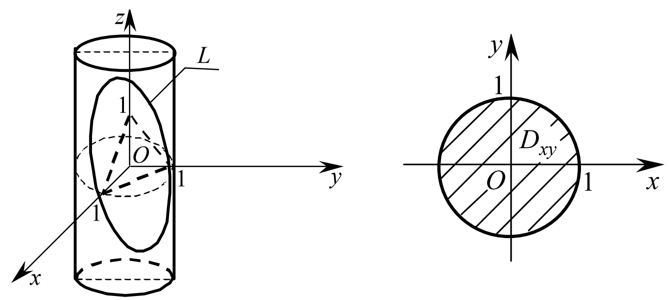
$$+ \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 t)\cos t\, dt =$$

$$= \left(-\sin^3 t - \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{\cos^3 t}{3} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t + \sin t - \frac{\sin^3 t}{3} \right)\Bigg|_0^{2\pi} = -\pi .$$

2) Обчислюємо циркуляцію C за формулою Стокса:

$$C = \oint_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \iint_\sigma (\mathrm{rot}\,\vec{a}, \vec{n})\, d\sigma ,$$

де σ – будь-яка поверхня, натягнута на замкнену криву L.



а) б)

Рис.4.19

Якщо підставити $x = \cos t$ і $y = \sin t$ у вираз для z: $z = 1 - \cos t - \sin t$, то отримаємо $z = 1 - x - y$, тобто $x + y + z = 1$. Можна розглядати криву L як лінію перетину кругового циліндра $x^2 + y^2 = 1$ і площини $x + y + z = 1$. Тоді візьмемо за поверхню σ: $x + y + z = 1$. Крива L – еліпс, який проектується в коло $x^2 + y^2 = 1$. Отже, $\text{пр}_{xOy}\sigma = D_{xy}$ – круг $x^2 + y^2 \le 1$ (рис.4.19).

Знайдемо одиничний вектор: $\vec{n} = \pm \dfrac{\mathrm{grad}\, F}{|\mathrm{grad}\, F|}$,

де $F(x, y, z) = 0$ – рівняння поверхні σ, яка задана неявно, тобто $F(x, y, z) = x + y + z - 1$.

Виберемо знак “+”, бо за умовою обхід кривої L є обходом проти годинникової стрілки або в напрямі зростання параметра t.

Тоді $\mathrm{grad}\, F = \dfrac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial F}{\partial z}\vec{k} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$,

$$|\mathrm{grad}\, F| = \sqrt{3}, \quad \vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \quad |\vec{n}| = 1 .$$

Знайдемо $\mathrm{rot}\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy & yz & xz \end{vmatrix} = -y\vec{i} - z\vec{j} - x\vec{k}$, тоді $(\operatorname{rot}\vec{a},\vec{n}) = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}(x+y+z)$, $|\cos\gamma| = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Отже,

$$C = \iint_{\sigma}(\operatorname{rot}\vec{a},\vec{n})\,d\sigma = \iint_{D_{xy}} \left.\frac{(\operatorname{rot}\vec{a},\vec{n})}{|\cos\gamma|}\right|_{z=1-x-y} dxdy = -\iint_{D_{xy}} dxdy = -S_D = -\pi\,. \blacktriangleleft$$

Спеціальні види векторних полів

Приклад 12. Довести, що векторне поле

$$\vec{a} = (y+z)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (x+y)\vec{k}$$

потенціальне і знайти його потенціал.

► Необхідною і достатньою умовою потенціальності поля $\vec{a}(M)$ є умова $\operatorname{rot}\vec{a} = 0$.

Маємо $P(x,y,z) = y+z$, $Q(x,y,z) = x+z$, $R(x,y,z) = x+y$,

тоді $\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix} = (1-1)\vec{i} + (1-1)\vec{j} + (1-1)\vec{k} = 0$.

Виберемо криву інтегрування як вказано на рис.4.20.

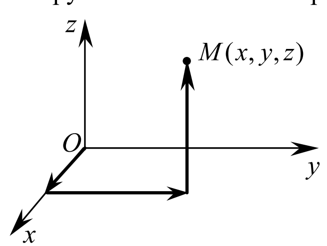


Рис.4.20

$$u(x,y,z) = \int\limits_{M_0(x_0,y_0,z_0)}^{M(x,y,z)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{O(0,0,0)}^{M(x,y,z)} (y+z)\,dx + (x+z)\,dy + (x+y)\,dz =$$

$$= \int_0^x (0+0)\,dx + \int_0^y (x+0)\,dy + \int_0^z (x+y)\,dz + C = 0 + x\int_0^y dy + (x+y)\int_0^z dz + C =$$

$$= xy + (x+y)z + C = xy + xz + yz + C\,.$$

Отже, $u(x,y,z) = xy + xz + yz + C$, де C – довільна стала. ◄

Приклад 13. Довести, що векторне поле

$$\vec{a} = 2xyz\,\vec{i} - y\,(yz+1)\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

соленоїдальне.

► Згідно з означенням, векторне поле $\vec{a}$ соленоїдальне, якщо $\operatorname{div}\vec{a} = 0$. Знайдемо $\operatorname{div}\vec{a}$:

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2yz - 2yz - 1 + 1 = 0\,.$$

Отже, векторне поле $\vec{a}$ соленоїдальне. ◄

Оператор Гамільтона

Приклад 14. Використовуючи оператор Гамільтона (“набла”), знайти вирази для:

1) $\operatorname{grad}(uv)$, 2) $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b})$, 3) $\operatorname{rot}(u\cdot\vec{a})$, 4) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a}$,

де $u = u(x,y,z)$, $v = v(x,y,z)$, $\vec{a} = \vec{a}(x,y,z)$, $\vec{b} = \vec{b}(x,y,z)$.

► 1) $\operatorname{grad}(uv) = \nabla(uv) = \nabla(\overset{\downarrow}{u}v) + \nabla(u\overset{\downarrow}{v}) = v\nabla u + u\nabla v =$
$= v\operatorname{grad}u + u\operatorname{grad}v$.

Тут перш за все враховано диференціальні властивості оператора ∇. Стрілкою вказано множник, до якого застосовується цей оператор.

2) $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b}) = \nabla(\vec{a}\times\vec{b}) = \nabla(\overset{\downarrow}{\vec{a}}\times\vec{b}) + \nabla(\vec{a}\times\overset{\downarrow}{\vec{b}}) = (\nabla,\overset{\downarrow}{\vec{a}},\vec{b}) + (\nabla,\vec{a},\overset{\downarrow}{\vec{b}}) =$

$= (\vec{b},\nabla,\overset{\downarrow}{\vec{a}}) - (\vec{a},\nabla,\overset{\downarrow}{\vec{b}}) = \vec{b}(\nabla\times\vec{a}) - \vec{a}(\nabla\times\vec{b}) = \vec{b}\operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a}\operatorname{rot}\vec{b}$.

Тут перш за все враховано диференціальні властивості оператора ∇. Стрілкою вказано множник, до якого застосовується цей оператор. Потім розглянули кожний доданок як мішаний добуток векторів та скористались властивістю циклічної перестановки множників у цьому добутку (для мішаного добутку векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ця властивість така: $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{b},\vec{c},\vec{a}) = (\vec{c},\vec{a},\vec{b}) = -(\vec{b},\vec{a},\vec{c}) = -(\vec{c},\vec{b},\vec{a}) = -(\vec{a},\vec{c},\vec{b})$; тут використане послідовно таке: $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{c},\vec{a},\vec{b}) = -(\vec{b},\vec{a},\vec{c})$, тобто $(\nabla,\overset{\downarrow}{\vec{a}},\vec{b}) = (\vec{b},\nabla,\overset{\downarrow}{\vec{a}})$, $(\nabla,\vec{a},\overset{\downarrow}{\vec{b}}) = -(\vec{a},\nabla,\overset{\downarrow}{\vec{b}})$).

3) $\operatorname{rot}(u\vec{a}) = \nabla\times(u\cdot\vec{a}) = \nabla\times(\overset{\downarrow}{u}\cdot\vec{a}) + \nabla\times(u\cdot\overset{\downarrow}{\vec{a}}) =$
$= -\vec{a}\times(\nabla u) + u(\nabla\times\vec{a}) = -(\vec{a}\times\operatorname{grad}u) + u\operatorname{rot}\vec{a}$.

Тут перш за все враховано диференціальні властивості оператора ∇. Стрілкою вказано множник, до якого застосовується цей оператор. Потім розглянули кожний доданок як векторний добуток векторів та скористались в першому доданку властивістю антикомутативності векторного добутку ($\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$), в другому – тим, що скалярний множник виноситься за знак векторного добутку ($\vec{a}\times k\vec{b}=k(\vec{a}\times\vec{b})$).

4) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a} = \nabla\times(\nabla\times\vec{a}) = \nabla(\nabla\vec{a}) - \vec{a}(\nabla\nabla) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{a}) - \nabla^2\vec{a}$.

Тут використане представлення подвійного векторного добутку через скалярні добутки векторів (для подвійного векторного добутку векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ це представлення має вигляд: $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = = \vec{b}(\vec{a},\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a},\vec{b})$). ◄

IV. Задачі для практичних занять

Скалярне поле та його характеристики

4.123. Знайти і побудувати лінії рівня заданих скалярних полів:

а) $u=y^2+x$; б) $u=xy$; в) $u=\dfrac{y}{x}$.

4.124. Знайти і побудувати поверхні рівня заданих скалярних полів:

а) $u=x+y+z$; б) $u=x^2+y^2-z^2$; в) $u=x^2+y^2-z$.

4.125. Знайти градієнти заданих скалярних полів $u=u(\vec{r})$, $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$:

а) $u=|\vec{r}|$; б) $u=\ln|\vec{r}|$; в) $u=(\vec{a},\vec{r})$, $\vec{a}$ – сталий вектор.

4.126. Обчислити $\operatorname{grad} u$, якщо

а) $u=r$; б) $u=r^2$; в) $u=\dfrac{1}{r}$; г) $u=f(r)$;

де $r=|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

4.127. Знайти величину і напрямок градієнта поля $u=x^3+y^3+z^3-3xyz$ в точці $A(2,1,1)$. Визначити, в яких точках градієнт поля перпендикулярний до осі Oz і в яких точках дорівнює нулю.

4.128. Знайти кут між градієнтами поля $u=x^2+2y^2-z^2$ в точках $P_1(2,3,-1)$ та $P_2(1,-1,2)$.

4.129. Знайти похідні від заданих полів в заданих точках за заданим напрямом:

а) $u=x^2+\dfrac{1}{2}y^2$ у точці $P_0(2,-1)$ за напрямом вектора $\overrightarrow{P_0P_1}$, де $P_1(6,2)$;

б) $u=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}y^2+z$ у точці $P_0(2,1,1)$ за напрямом прямої $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z-1}{2}$ в сторону зростання поля;

в) $u=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$ у точці $P_0(a,b,c)$ за напрямом радіуса-вектора цієї точки.

4.130. Знайти швидкість та напрямок найшвидшого зростання поля $u=xyz$ у точці $P_0(1,2,2)$.

4.131. Знайти одиничний вектор нормалі до поверхні рівня поля $u=x^2+2xy-4yz$ у точці $P_0(1,1,-1)$, напрямлений у бік зростання поля.

Векторне поле та його характеристики

У задачах 4.132 – 4.137 знайти векторні лінії заданих векторних полів.

4.132. $\vec{a}=y\vec{i}-x\vec{j}$. **4.133.** $\vec{a}=x\vec{i}-y\vec{j}$.

4.134. $\vec{a}=y\vec{i}+\vec{j}$. **4.135.** $\vec{a}=\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

4.136. $\vec{a}=\dfrac{1}{x}\vec{i}+\dfrac{1}{y}\vec{j}+\dfrac{1}{z}\vec{k}$.

4.137. $\vec{a}=(y-z)\vec{i}+(z-x)\vec{j}+(x-y)\vec{k}$.

У задачах 4.138 – 4.141 обчислити дивергенцію і ротор заданих векторних полів.

4.138. $\vec{a} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

4.139. $\vec{a} = (y^2 + z^2)\vec{i} + (z^2 + x^2)\vec{j} + (x^2 + y^2)\vec{k}$.

4.140. $\vec{a} = x^2yz\vec{i} + xy^2z\vec{j} + xyz^2\vec{k}$.

4.141. $\vec{a} = \mathrm{grad}(x^2 + y^2 + z^2)$.

4.142. Знайти дивергенцію векторного поля $\vec{a} = x^2y\vec{i} + xy^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ в точці $P(1,2,-1)$.

4.143. Знайти дивергенцію градієнта скалярного поля $u = x^3y^2z$ в точці $P(1,-1,1)$.

Обчислення потоку векторного поля

У задачах 4.144 – 4.151 знайти потік векторного поля $\vec{a}$ через замкнену поверхню σ у напрямі зовнішньої нормалі, використовуючи формулу Остроградського-Гаусса.

4.144. $\vec{a} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} - z^3\vec{k}$, σ – поверхня куба $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$, $0 \le z \le a$.

4.145. $\vec{a} = \dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, σ – поверхня сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

4.146. $\vec{a} = x^2y\vec{i} + xy^2\vec{j} + xyz\vec{k}$, σ – поверхня тіла $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

4.147. $\vec{a} = x^2y\vec{i} - xy^2\vec{j} + (x^2 + y^2)z\vec{k}$, σ – поверхня циліндричного тіла $x^2 + y^2 \le R^2$, $0 \le z \le H$.

4.148. $\vec{a} = (x - y)\vec{i} + (x + y)\vec{j} + z^2\vec{k}$, σ – поверхня циліндричного тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, $z = 2$.

4.149. $\vec{a} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$, σ – поверхня сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

4.150. $\vec{a} = x\vec{i} - 2y\vec{j} - z\vec{k}$, σ – поверхня тіла, обмеженого параболоїдом $1 - z = x^2 + y^2$ та площиною $z = 0$.

4.151. $\vec{a} = 3x\vec{i} - y\vec{j} - z\vec{k}$, σ – поверхня тіла, обмеженого параболоїдом $9 - z = x^2 + y^2$ та площинами $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

4.152. Довести, що потік радіуса-вектора $\vec{r}$ через будь-яку замкнену поверхню у напрямі зовнішньої нормалі, дорівнює потрійному об'єму тіла, обмеженого цією поверхнею.

4.153. Знайти потік радіуса-вектора $\vec{r}$ через повну поверхню циліндра $x^2 + y^2 \le R^2$, $0 \le z \le H$ у напрямі зовнішньої нормалі.

4.154. Знайти потік радіуса-вектора $\vec{r}$ через бічну поверхню циліндра $x^2 + y^2 \le R^2$, $0 \le z \le H$.

4.155. Обчислити потік радіуса-вектора $\vec{r}$ через бічну поверхню кругового конуса, основа якого знаходиться на площині xOy, а вісь співпадає з віссю Oz. Висота конуса $H = 1$, радіус основи $R = 2$.

4.156. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ через бічну поверхню піраміди з вершиною в точці $S(0,0,2)$, якщо основою піраміди є трикутник з вершинами $O(0,0,0)$, $A(2,0,0)$ і $B(0,1,0)$.

У задачах 4.157 – 4.163 обчислити потік векторного поля $\vec{a}$ через задану незамкнену поверхню σ у вказаному напрямі.

4.157. $\vec{a} = (x - 3z)\vec{i} + (x + 2y + z)\vec{j} + (4x + y)\vec{k}$, σ – верхня частина площини $x + y + z = 2$, що лежить в першому октанті.

4.158. $\vec{a} = 8x\vec{i} + 11y\vec{j} + 17z\vec{k}$, σ – частина площини $x + 2y + 3z = 1$ (нормальний вектор якої складає гострий кут з віссю Oz), розташованої в першому октанті.

4.159. $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} - z\vec{k}$, σ – частина поверхні конуса $z^2 = x^2 + y^2$ (нормальний вектор якої утворює гострий кут з ортом $\vec{k}$), що відтинається площинами $z = 0$, $z = 3$.

4.160. $\vec{a} = y^2 z\vec{i} + xz\vec{j} + x^2 y\vec{k}$, σ – частина поверхні параболоїда $z = x^2 + y^2$ (нормальний вектор якої утворює тупий кут з ортом $\vec{k}$), що вирізається циліндром $x^2 + y^2 = 1$.

4.161. $\vec{a} = x^2\vec{i} + z\vec{k}$, σ – частина поверхні параболоїда $z = x^2 + y^2$ (нормальний вектор якої утворює тупий кут з ортом $\vec{k}$), що відтинається площиною $z = 4$.

4.162. $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, σ – частина поверхні гіперболічного параболоїда $z = \frac{H}{R^2}(x^2 - y^2)$, що вирізається площинами $x = R$, $z = 0$, $x = 0$, орієнтовної у відповідності з напрямком орта $\vec{k}$.

4.163. $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z\vec{k}$, σ – частина поверхні гіперболічного параболоїда $z = \frac{H}{R^2}(x^2 - y^2)$, що вирізається циліндром $x^2 + y^2 = R^2$, орієнтовної у відповідності з напрямком орта $\vec{k}$.

Лінійний інтеграл і циркуляція

4.164. Обчислити лінійний інтеграл $\int\limits_{OA}(\vec{a}, d\vec{r})$, якщо $\vec{a} = z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$, рівняння дуги OA: $\vec{r} = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$, $0 \le t \le 1$.

4.165. Обчислити лінійний інтеграл $\int\limits_{OA}(\vec{a}, d\vec{r})$, якщо $\vec{a} = -yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$, дуга OA – перший виток гвинтової лінії $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = ht$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

У задачах 4.166 – 4.171 обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{a}$ вздовж замкненої кривої L у заданому напрямі обходу двома способами: 1) безпосередньо, використовуючи означення циркуляції; 2) за допомогою формули Стокса.

4.166. $\vec{a} = z\vec{i} + (x + y)\vec{j} + y\vec{k}$, L – контур трикутника, отриманого від перетину площини $2x + y + 2z = 2$ з координатними площинами, при додатному напрямі обходу відносно нормального вектора площини $\vec{n} = (2,1,2)$.

4.167. $\vec{a} = z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$, L: $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ при додатному напрямі обходу відносно орта $\vec{k}$.

4.168. $\vec{a} = -y\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, L – лінія перетину конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ з площиною $z = 1$ при додатному напрямі обходу відносно орта $\vec{k}$.

4.169. $\vec{a} = y^2\vec{i} + xy\vec{j} + (x^2 + y^2)\vec{k}$, L – контур, що вирізається в першому октанті з параболоїда $x^2 + y^2 = Rz$ площинами $x = 0$, $y = 0$, $z = R$ в додатному напрямі обходу відносно зовнішньої нормалі поверхні параболоїда.

4.170. $\vec{a} = z^2\vec{i} + x^2\vec{j} + y^2\vec{k}$, L – лінія перетину сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ з площиною $x + y + z = R$ в додатному напрямі обходу відносно орта $\vec{k}$.

4.171. $\vec{a} = z^3\vec{i} + x^3\vec{j} + y^3\vec{k}$, L – лінія перетину гіперболоїда $2x^2 - y^2 + z^2 = R^2$ з площиною $x + y = 0$ в додатному напрямі обходу відносно орта $\vec{i}$.

4.172. Обчислити потік ротора векторного поля $\vec{a} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ через поверхню параболоїда обертання $z = 2(1 - x^2 - y^2)$, яка відтинається площиною $z = 0$. Використати теорему Стокса.

Спеціальні види векторних полів

У задачах 4.173 – 4.177 перевірити, що векторне поле $\vec{a}(M)$ потенціальне і знайти його потенціал.

4.173. $\vec{a} = (3x^2y - y^3)\vec{i} + (x^3 - 3xy^2)\vec{j}$.

4.174. $\vec{a} = yz\vec{i} + zx\vec{j} + xy\vec{k}$.

4.175. $\vec{a} = (y+z)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (x+y)\vec{k}$.

4.176. $\vec{a} = 2xy\vec{i} + (x^2 - 2yz)\vec{j} - y^2\vec{k}$.

4.177. $\vec{a} = (yz - xy)\vec{i} + \left(xz - \dfrac{x^2}{2} + yz^2\right)\vec{j} + (xy + y^2z)\vec{k}$.

У задачах 4.178 – 4.181 перевірити, чи є векторне поле $\vec{a}(M)$ соленоїдальним.

4.178. $\vec{a} = (x^2y + y^3)\vec{i} + (x^3 - xy^2)\vec{j}$.

4.179. $\vec{a} = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j} + (x^2 + y^2)z\vec{k}$.

4.180. $\vec{a} = \dfrac{x}{yz}\vec{i} + \dfrac{y}{xz}\vec{j} - \dfrac{(x+y)\ln z}{xy}\vec{k}$.

4.181. $\vec{a} = \dfrac{x\vec{i} - y\vec{j}}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{(x^2-y^2)z}{(x^2+y^2)^{3/2}}\vec{k}$.

Оператор Гамільтона

У задачах 4.182 – 4.183 довести вказані співвідношення, використовуючи оператор Гамільтона (“набла”).

4.182. $\operatorname{grad}(uv) = v\operatorname{grad}u + u\operatorname{grad}v$;

$\operatorname{div}(u\cdot\vec{a}) = u\operatorname{div}\vec{a} + \vec{a}\operatorname{grad}u$;

$\operatorname{rot}(u\cdot\vec{a}) = u\operatorname{rot}\vec{a} + [\operatorname{grad}u, \vec{a}]$;

$\operatorname{div}[\vec{a},\vec{b}] = (\vec{b}, \operatorname{rot}\vec{a}) - (\vec{a}, \operatorname{rot}\vec{b})$.

4.183. $\operatorname{rot}\operatorname{grad}u = 0$; $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = 0$.

ГЛАВА 5. *ТИПОВІ РОЗРАХУНКОВІ ЗАВДАННЯ*

§1. Індивідуальне завдання 1.

Інтегральне числення функцій однієї змінної

Задача 1. [*гл.1, § 1, приклади: 2, 3 – для п. а), б); 6, 7 – для п. в); 4, 5 – для п. г); 8–14 – для п. д); 15–18 – для п. е); 19–21 – для п. є); 22 – для п. ж); 23–28 – для п. з)*]

Знайти невизначені інтеграли.

Варіанти завдань

1. а) $\int \dfrac{2x}{\sqrt{5-4x^2}}dx$; б) $\int \sin^4 2x \cdot \cos 2x\,dx$; в) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{3x^2 - 4x + 1}}$;

г) $\int \dfrac{x\operatorname{arctg}x}{\sqrt{1+x^2}}dx$; д) $\int \dfrac{x^3+1}{x^3-x^2}dx$; е) $\int \dfrac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$;

є) $\int \dfrac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x\sqrt[4]{x^3}}dx$; ж) $\int \dfrac{dx}{5+2\sin x + 3\cos x}$; з) $\int \sin^3 x \cdot \cos^{15} x\,dx$.

2. а) $\int \dfrac{\sin 3x}{\sqrt[7]{\cos^2 3x}}dx$; б) $\int \dfrac{x}{e^{2x^2+1}}dx$; в) $\int \dfrac{2-x}{\sqrt{8-x^2-2x}}dx$;

г) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{4x-1}\,dx$; д) $\int \dfrac{x^3+1}{x^2-x}dx$; е) $\int \dfrac{1}{x\sqrt{2x-1}}dx$;

є) $\int \dfrac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x\sqrt[3]{x^2}}dx$; ж) $\int \dfrac{dx}{5-4\sin x + 2\cos x}$; з) $\int \dfrac{\cos^2 x}{\sin^4 x}dx$.

3. а) $\int \dfrac{x}{\sqrt{5-3x^2}}dx$; б) $\int \dfrac{\sin x}{\cos^5 x}dx$; в) $\int \dfrac{x}{x^2-7x+13}dx$;

г) $\int \ln(x-5)\,dx$; д) $\int \dfrac{(3x+13)\,dx}{(x-1)(x^2+2x+5)}$; е) $\int \dfrac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}dx$;

є) $\int \dfrac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt{x}}dx$; ж) $\int \dfrac{3\sin x - 2\cos x}{1+\cos x}dx$; з) $\int \dfrac{\sin^3 x}{\cos^{10} x}dx$.

4. а) $\int \frac{3x}{4x^2+1}dx$; б) $\int \frac{\cos x}{\sin x+2}dx$; в) $\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx$;

г) $\int x\cos 8x\,dx$; д) $\int \frac{x^2-6x+8}{x^3+8}dx$; е) $\int \frac{x-\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[6]{x})}dx$;

є) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x\sqrt{x}}dx$; ж) $\int \frac{dx}{5+3\cos x-5\sin x}$; з) $\int \sin^3 x\cdot\cos^9 x\,dx$.

5. а) $\int \frac{4x}{\sqrt{3-4x^2}}dx$; б) $\int \sin^3 4x\cos 4x\,dx$; в) $\int \frac{2+x}{\sqrt{x^2+2x+10}}dx$;

г) $\int \operatorname{arctg} 2x\,dx$; д) $\int \frac{12-6x}{(x+1)(x^2-4x+13)}dx$; е) $\int \frac{\sqrt{3x+1}-1}{\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt{3x+1}}dx$;

є) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt[9]{x^4}}dx$; ж) $\int \frac{dx}{5\cos x+10\sin x}$; з) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos x}$.

6. а) $\int \frac{2x}{\sqrt{8x^2-9}}dx$; б) $\int \sqrt[3]{\cos 2x}\sin 2x\,dx$; в) $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx$;

г) $\int x^2e^{-x}dx$; д) $\int \frac{(2x^2+2x+20)\,dx}{(x-1)(x^2+2x+5)}$; е) $\int \frac{\sqrt{x}}{4x-\sqrt[3]{x^2}}dx$;

є) $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^2}}{x\sqrt[6]{x^5}}dx$; ж) $\int \frac{dx}{3+2\cos x-\sin x}$; з) $\int \frac{dx}{\cos^3 x\cdot\sin x}$.

7. а) $\int \frac{4x}{\sqrt{4x^2+3}}dx$; б) $\int \frac{\cos x}{3-\sin x}dx$; в) $\int \frac{3x}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx$;

г) $\int (x+1)e^{-4x}dx$; д) $\int \frac{(x^2+3x-6)\,dx}{(x+1)(x^2+6x+13)}$; е) $\int \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx$;

є) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x\sqrt[9]{x^8}}dx$; ж) $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$; з) $\int \sin^3 x\cdot\cos^{12} x\,dx$.

8. а) $\int \frac{x}{\sqrt{9-8x^2}}dx$; б) $\int \frac{\cos 5x}{\sqrt[3]{\sin^2 5x}}dx$; в) $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx$;

г) $\int x^2e^{-2x}dx$; д) $\int \frac{x^2+3x+2}{x^3-1}dx$; е) $\int \frac{\sqrt{x}}{3x+\sqrt[3]{x^2}}dx$;

є) $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x})^2}}{x\sqrt[9]{x^5}}dx$; ж) $\int \frac{dx}{5-4\sin x+7\cos x}$; з) $\int \frac{4-7\operatorname{tg} x}{2+3\operatorname{tg} x}dx$.

9. а) $\int \frac{\sqrt{3}\,x}{\sqrt{3x^2-2}}dx$; б) $\int \frac{\sin 5x}{\cos^4 5x}dx$; в) $\int \frac{5x}{\sqrt{3-x^2-2x}}dx$;

г) $\int x\operatorname{arctg} 3x\,dx$; д) $\int \frac{36\,dx}{(x+2)(x^2-2x+10)}$; е) $\int \frac{\sqrt{x+3}}{1+\sqrt[3]{x+3}}dx$;

є) $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x^2})^2}}{x^2\cdot\sqrt[9]{x}}dx$; ж) $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$; з) $\int \frac{3\operatorname{tg}^2 x-1}{\operatorname{tg}^2 x+5}dx$.

10. а) $\int \frac{2x}{\sqrt{3x^2-2}}dx$; б) $\int \sin^6 3x\cdot\cos 3x\,dx$; в) $\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx$;

г) $\int \operatorname{arctg} 4x\,dx$; д) $\int \frac{(9x-9)\,dx}{(x+1)(x^2-4x+13)}$; е) $\int \frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}dx$;

є) $\int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[3]{x})^3}}{x\sqrt[12]{x^7}}dx$; ж) $\int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x+3}$; з) $\int \frac{11-3\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x+3}dx$.

11. а) $\int \frac{2x}{\sqrt{7-2x^2}}dx$; б) $\int \frac{\operatorname{tg}^3 4x}{\cos^2 4x}dx$; в) $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}dx$;

г) $\int \arcsin 5x\,dx$; д) $\int \frac{7x-10}{x^3+8}dx$; е) $\int \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[6]{x-1}}dx$;

є) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x^2}dx$; ж) $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$; з) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx$.

12. а) $\int \frac{x}{2x^2-7}dx$; б) $\int \frac{dx}{\cos^2 3x\cdot\operatorname{tg}^4 3x}$; в) $\int \frac{x}{\sqrt{5x^2-2x+1}}dx$;

г) $\int x^2\operatorname{arctg} x\,dx$; д) $\int \frac{(4x^2+3x+17)\,dx}{(x-1)(x^2+2x+5)}$; е) $\int \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[6]{x+3}}dx$;

є) $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x^2\sqrt{x}}dx$; ж) $\int \frac{dx}{8+4\cos x}$; з) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}dx$.

13. а) $\int \frac{x}{3x^2+8}dx$; б) $\int \frac{\operatorname{ctg}^5 6x}{\sin^2 6x}dx$; в) $\int \frac{x}{x^2+4x+14}dx$;

г) $\int x \operatorname{arctg} 5x\, dx$; д) $\int \frac{4x+2}{x^4+4x^2}dx$; е) $\int \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt[3]{x}+1)\sqrt{x}}\, dx$;

є) $\int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt{x})^3}}{x\sqrt[8]{x^7}}\, dx$; ж) $\int \frac{dx}{3\sin x - 4\cos x}$; з) $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^9 x}dx$.

14. а) $\int \frac{2x}{3x^2-7}dx$; б) $\int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$; в) $\int \frac{2x+1}{x^2+3x+6}dx$;

г) $\int x^2 e^{3x}\, dx$; д) $\int \frac{4x+2}{x^4+8x}dx$; е) $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}\, dx$;

є) $\int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[3]{x^2})^3}}{x^2\sqrt[6]{x}}\, dx$; ж) $\int \frac{dx}{7\sin x - 3\cos x}$; з) $\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x\, dx$.

15. а) $\int \frac{2x}{\sqrt{2x^2+5}}dx$; б) $\int \frac{\arcsin^3 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$; в) $\int \frac{3x+4}{x^2+7x+14}dx$;

г) $\int x \arcsin x\, dx$; д) $\int \frac{(x^2-5x+40)\,dx}{(x+2)(x^2-2x+10)}$; е) $\int \frac{\sqrt{x}}{x-4\sqrt[3]{x^2}}\, dx$;

є) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2\sqrt[8]{x}}\, dx$; ж) $\int \frac{dx}{2+4\sin x+3\cos x}$; з) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^8 x}dx$.

16. а) $\int \frac{2x}{\sqrt{7-3x^2}}dx$; б) $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg}^7 x}$; в) $\int \frac{2x-3}{x^2+x+5}dx$;

г) $\int x\cos(5x-2)\,dx$; д) $\int \frac{4x-x^2-12}{x^3+8}dx$; е) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}-1}$;

є) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2}\, dx$; ж) $\int \frac{dx}{3\sin x+4\cos x}$; з) $\int \sin^4 x\cdot\cos^2 x\, dx$.

17. а) $\int \frac{x}{2x^2+9}dx$; б) $\int \frac{\operatorname{arctg}^4 5x}{1+25x^2}dx$; в) $\int \frac{x-3}{x^2-9x+13}dx$;

г) $\int x^2 \ln x\, dx$; д) $\int \frac{(x^2-13x+40)\,dx}{(x+1)(x^2-4x+13)}$; е) $\int \frac{x+2}{\sqrt{3x+1}}\, dx$;

є) $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x^3})^2}}{x^2\sqrt[4]{x}}\, dx$; ж) $\int \frac{2-\sin x+3\cos x}{1+\cos x}dx$; з) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^{12} x}dx$.

18. а) $\int \frac{5x}{\sqrt{3-5x^2}}dx$; б) $\int \frac{\arcsin^2 5x}{\sqrt{1-25x^2}}dx$; в) $\int \frac{2x+3}{x^2-7x+12}dx$;

г) $\int x^2 e^{5x+2}dx$; д) $\int \frac{3-9x}{x^3-1}dx$; е) $\int \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}}\, dx$;

є) $\int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt{x})^4}}{x\sqrt[10]{x^9}}\, dx$; ж) $\int \frac{dx}{5+\sin x+3\cos x}$; з) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$.

19. а) $\int \frac{x}{\sqrt{3x^2+8}}dx$; б) $\int \frac{x}{e^{3x^2+4}}dx$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{7x^2+5x+4}}$;

г) $\int x e^{-7x}\, dx$; д) $\int \frac{6-9x}{x^3+8}dx$; е) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\, dx$;

є) $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x})^2}}{x\sqrt[9]{x^5}}\, dx$; ж) $\int \frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$; з) $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^3 x}dx$.

20. а) $\int \frac{5x}{\sqrt{5x^2+3}}dx$; б) $\int e^{2x^3-1}x^2\, dx$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{6x^2+5x-11}}$;

г) $\int \arcsin 2x\, dx$; д) $\int \frac{(4x-10)\,dx}{(x+2)(x^2-2x+10)}$; е) $\int \frac{dx}{(9+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$;

є) $\int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[3]{x^2})^4}}{x^2\sqrt[5]{x}}\, dx$; ж) $\int \frac{7+6\sin x-5\cos x}{1+\cos x}dx$; з) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^8 x}dx$.

21. а) $\int \frac{x}{3x^2-6}dx$; б) $\int e^{4-5x^2}x\, dx$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{5+3x-x^2}}$;

г) $\int e^{2x}\cos x\, dx$; д) $\int \frac{(x^2+23)\,dx}{(x+1)(x^2+6x+13)}$; е) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}+1}\, dx$;

є) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2\sqrt[5]{x}}\, dx$; ж) $\int \frac{dx}{3+\cos x+\sin x}$; з) $\int \operatorname{tg}^5 x\, dx$.

22. а) $\int \frac{x}{5x^2+1}dx$; б) $\int \frac{\sqrt{\ln^5(x+1)}}{x+1}dx$; в) $\int \frac{x+1}{\sqrt{2x^2+5x+3}}dx$;

г) $\int \arccos x\,dx$; д) $\int \frac{(2x^2+7x+7)\,dx}{(x-1)(x^2+2x+5)}$; е) $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}\,dx$;

є) $\int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[4]{x^3})^4}}{x^2\,\sqrt[20]{x^7}}\,dx$; ж) $\int \frac{6\sin x+\cos x}{1+\cos x}\,dx$; з) $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$.

23. а) $\int \frac{5x}{5x^2-3}\,dx$; б) $\int \frac{dx}{(1-x)\ln^3(1-x)}$; в) $\int \frac{x}{\sqrt{8-3x-2x^2}}\,dx$;

г) $\int x^2\ln(1+x)\,dx$; д) $\int \frac{(19x-x^2-34)\,dx}{(x+1)(x^2-4x+13)}$; е) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx$;

є) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[5]{x}}}{x\,\sqrt[15]{x^4}}\,dx$; ж) $\int \frac{dx}{3\cos x-4\sin x}$; з) $\int \frac{dx}{\sin^5 x\cdot\cos^5 x}$.

24. а) $\int \frac{x}{2x^2-7}\,dx$; б) $\int \frac{\ln^3(2-x)}{x-2}\,dx$; в) $\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}}\,dx$;

г) $\int \ln(x^2+1)\,dx$; д) $\int \frac{(4x^2+38)\,dx}{(x+2)(x^2-2x+10)}$; е) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$;

є) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2\,\sqrt[5]{x}}\,dx$; ж) $\int \frac{dx}{5+3\cos x}$; з) $\int \frac{dx}{\sin^4 x\cdot\cos^4 x}$.

25. а) $\int \frac{9x}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx$; б) $\int \frac{\ln^4(3x+1)}{3x+1}\,dx$; в) $\int \frac{dx}{3x^2-x+1}$;

г) $\int x\cos(2x+7)\,dx$; д) $\int \frac{8\,dx}{(x+1)(x^2+6x+13)}$; е) $\int \frac{x^4}{\sqrt{x-1}}\,dx$;

є) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2\,\sqrt[15]{x}}\,dx$; ж) $\int \frac{dx}{4\sin x-6\cos x}$; з) $\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}\,dx$.

26. а) $\int \frac{3x}{9x^2+2}\,dx$; б) $\int \frac{\ln^5(x-8)}{x-8}\,dx$; в) $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}\,dx$;

г) $\int x^2e^{-5x}\,dx$; д) $\int \frac{(2x^2+4x+20)\,dx}{(x+1)(x^2-4x+13)}$; е) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}\,dx$;

є) $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[5]{x^4})^2}}{x^2\,\sqrt[3]{x}}\,dx$; ж) $\int \frac{dx}{3+3\cos x+5\sin x}$; з) $\int \frac{dx}{\sin x\cdot\cos^4 x}$.

27. а) $\int \frac{2x}{5x^2-3}\,dx$; б) $\int \frac{dx}{(x-4)\ln^5(x-4)}$; в) $\int \frac{dx}{2x^2-5x+7}$;

г) $\int \frac{\ln^2 x}{x^2}\,dx$; д) $\int \frac{(5x+13)\,dx}{(x+1)(x^2+6x+13)}$; е) $\int \frac{\sqrt{x-5}}{x^3}\,dx$;

є) $\int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[5]{x^4})^3}}{x^2\,\sqrt[5]{x^2}}\,dx$; ж) $\int \frac{dx}{\cos x-3\sin x}$; з) $\int \cos^3\frac{x}{2}\cdot\sin^5\frac{x}{2}\,dx$.

28. а) $\int \frac{5x}{\sqrt{7x^2-1}}\,dx$; б) $\int \frac{\operatorname{arctg}^4 8x}{1+64x^2}\,dx$; в) $\int \frac{x-1}{x^2-x-1}\,dx$;

г) $\int x\sin(2-3x)\,dx$; д) $\int \frac{4x^2+x+10}{x^3+8}\,dx$; е) $\int \frac{dx}{x\,\sqrt[3]{x-8}}$;

є) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{x\,\sqrt[3]{x}}\,dx$; ж) $\int \frac{dx}{4-4\sin x+3\cos x}$; з) $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$.

29. а) $\int \frac{3x}{\sqrt{9x^2+5}}\,dx$; б) $\int e^{3\cos x+2}\sin x\,dx$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$;

г) $\int \operatorname{arctg}\frac{x}{4}\,dx$; д) $\int \frac{(4x^2+7x+5)\,dx}{(x-1)(x^2+2x+5)}$; е) $\int \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\,dx$;

є) $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^2}}{x\,\sqrt[12]{x^5}}\,dx$; ж) $\int \frac{dx}{3\sin x-\cos x}$; з) $\int \operatorname{ctg}^4 x\,dx$.

30. а) $\int \frac{x}{3x^2-2}\,dx$; б) $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx$; в) $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$;

г) $\int \arccos\frac{x}{12}\,dx$; д) $\int \frac{3x^2+2x+1}{x^3-1}\,dx$; е) $\int \sqrt{\frac{3-4x}{9-5x}}\,dx$;

є) $\int \frac{\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\,\sqrt[12]{x^5}}\,dx$; ж) $\int \frac{dx}{2-3\cos x+\sin x}$; з) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[4]{\cos^3 x}}\,dx$.

31. а) $\int \frac{7x}{7x^2+1}\,dx$; б) $\int \frac{x^4}{e^{x^5+1}}\,dx$; в) $\int \frac{x}{5x^2-2x+1}\,dx$;

г) $\int \ln(1-2x)\,dx$; д) $\int \frac{6x}{x^3-1}\,dx$; е) $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$;

є) $\int \frac{\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x\sqrt[6]{x^5}}\,dx$; ж) $\int \frac{dx}{8\sin^2 x-16\sin x\cos x}$; з) $\int \mathrm{tg}^7 x\,dx$.

Задача 2. [*гл.1, § 2, приклади 1 – 5*]
Обчислити визначені інтеграли.

Варіанти завдань

1. а) $\int_0^1 xe^{-2x}dx$; б) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}}dx$.

2. а) $\int_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}dx$; б) $\int_0^{\pi/4} \sin^3 2x\,dx$.

3. а) $\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx$; б) $\int_0^{\pi} \sin^4 \frac{x}{2}\,dx$.

4. а) $\int_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$; б) $\int_0^{\pi/3} \cos^3 x\sin 2x\,dx$.

5. а) $\int_{-1/2}^{1/2} \arccos 2x\,dx$; б) $\int_0^{\pi/3} \mathrm{tg}^2 x\,dx$.

6. а) $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$; б) $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{(1-\cos x)^3}\,dx$.

7. а) $\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\cos x\,dx$; б) $\int_0^{\pi/4} 2\cos x\sin 3x\,dx$.

8. а) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$; б) $\int_0^{\pi} \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\,dx$.

9. а) $\int_1^2 x^2\ln x\,dx$; б) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^2 x+1}\,dx$.

10. а) $\int_{2/3}^{7/3} \frac{x}{\sqrt{2+3x}}dx$; б) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \mathrm{tg}^4\varphi\,d\varphi$.

11. а) $\int_0^{\pi/2} (x+3)\sin x\,dx$; б) $\int_0^{\pi} \cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}\,dx$.

12. а) $\int_1^e x\ln^2 x\,dx$; б) $\int_0^{\pi/4} \sin 3x\cos 5x\,dx$.

13. а) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$; б) $\int_0^{\pi/3} \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx$.

14. а) $\int_1^2 \ln(3x+2)\,dx$; б) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \mathrm{ctg}^3 x\,dx$.

15. а) $\int_0^4 x^3\sqrt{x^2+9}\,dx$; б) $\int_0^{\pi/2} \cos x\cos 3x\cos 5x\,dx$.

16. а) $\int_{-1}^0 (x+1)e^{2x}dx$; б) $\int_0^{\pi} \cos^4 x\sin^2 x\,dx$.

17. а) $\int_0^1 x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$; б) $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x\,dx$.

18. а) $\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{1+3x}}dx$; б) $\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{1+\sin x}\,dx$.

19. а) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$; б) $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1+\mathrm{tg}\,x}{\sin 2x}\,dx$.

20. а) $\int_{1/2}^1 \arcsin(1-x)\,dx$; б) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin 2x}{\cos^3 x}\,dx$.

21. а) $\int_0^{13} \frac{x+1}{\sqrt[3]{2x+1}}dx$; б) $\int_0^{\pi/8} \sin x\sin 3x\,dx$.

22. а) $\int_{3/2}^2 \mathrm{arctg}(2x-3)\,dx$; б) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{(1+\sin x)^2}\,dx$.

23. а) $\int\limits_2^5 \frac{x^2}{(x-1)\sqrt{x-1}}dx$; б) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{3+2\sin x}\,dx$.

24. а) $\int\limits_0^{\pi/8} x^2 \sin 4x\,dx$; б) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{2+\cos x}\,dx$.

25. а) $\int\limits_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$; б) $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{4-7\,\mathrm{tg}\,x}{2+3\,\mathrm{tg}\,x}\,dx$.

26. а) $\int\limits_1^2 (x-1)\ln x\,dx$; б) $\int\limits_0^{\pi/8} \sin^4 \frac{x}{2}\,dx$.

27. а) $\int\limits_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}dx$; б) $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^3 x}$.

28. а) $\int\limits_0^{\pi/2} x^2 \sin x\,dx$; б) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \cos^2 x \sin^4 x\,dx$.

29. а) $\int\limits_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx$; б) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^5 x\,dx$.

30. а) $\int\limits_0^1 x^2 e^{3x}dx$; б) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi} \sin x \sin 2x \sin 3x\,dx$.

31. а) $\int\limits_2^{2,5} \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$; б) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{4+\sqrt{\sin x}}\,dx$.

Задача 3. [*гл.1, § 2, приклади 6 – 18*]
Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність.

Варіанти завдань

1. а) $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-3x}dx$; б) $\int\limits_0^1 \frac{x^4}{\sqrt[3]{1-x^5}}dx$.

2. а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{2x^2-2x+1}$; б) $\int\limits_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt[9]{1-2x}}$.

3. а) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$; б) $\int\limits_1^5 \frac{x^2}{\sqrt{31(x^3-1)}}dx$.

4. а) $\int\limits_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x-1)^2}$; б) $\int\limits_1^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}$.

5. а) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{(6x^2-5x+1)\ln\frac{3}{4}}$; б) $\int\limits_0^4 \frac{10x}{\sqrt[4]{(16-x^2)^3}}dx$.

6. а) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{9x^2-9x+2}$; б) $\int\limits_0^{1/4} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}$.

7. а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2}$; б) $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{(2x-1)^2}$.

8. а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$; б) $\int\limits_{-1}^1 \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

9. а) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+13}$; б) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

10. а) $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^3}$; б) $\int\limits_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$.

11. а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^3}dx$; б) $\int\limits_{1/2}^1 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}dx$.

12. а) $\int\limits_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{\pi(x^2+4x+5)}$; б) $\int\limits_0^1 \frac{x}{1-x^4}dx$.

13. а) $\int\limits_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$; б) $\int\limits_0^{\pi/6} \frac{\cos 3x}{\sqrt[6]{(1-\sin 3x)^5}}dx$.

14. а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\mathrm{arctg}\,2x}{\pi(1+4x^2)}dx$; б) $\int\limits_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}dx$.

15. а) $\int\limits_{1/2}^{+\infty} \frac{16}{\pi(4x^2+4x+5)}dx$; б) $\int\limits_{-1/3}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}$.

16. а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x}{4x^2+4x+5}dx$; б) $\int\limits_{3/4}^{1} \frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}$.

17. а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x+2}{\sqrt[3]{(x^2+4x+1)^4}}dx$; б) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}dx$.

18. а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{3-x^2}{x^2+4}dx$; б) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[5]{4x-x^2-4}}$.

19. а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{4}{x(1+\ln^2 x)}dx$; б) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt[7]{\cos^2 x}}dx$.

20. а) $\int\limits_{0}^{+\infty} x\sin x\,dx$; б) $\int\limits_{-3/4}^{0} \frac{dx}{\sqrt{4x+3}}$.

21. а) $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{7}{(x^2-4x)\ln 5}dx$; б) $\int\limits_{1}^{2} \frac{x}{\sqrt{(x^2-1)^3}\ln 2}dx$.

22. а) $\int\limits_{1/3}^{+\infty} \frac{\pi}{(1+9x^2)\operatorname{arctg}^2 3x}dx$; б) $\int\limits_{0}^{1/3} \frac{dx}{9x^2-9x+2}$.

23. а) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)\sqrt{\pi\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}}$; б) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{3\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx$.

24. а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x}{16x^4+1}dx$; б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$.

25. а) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{16x}{16x^4-1}dx$; б) $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9}}$.

26. а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^3}{\sqrt{16x^4+1}}dx$; б) $\int\limits_{0}^{1/3} \frac{e^{3+\frac{1}{x}}}{x^2}dx$.

27. а) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{16x^4-1}}dx$; б) $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^5}}$.

28. а) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{x}{\sqrt{(x^2+4)^3}}dx$; б) $\int\limits_{1/3}^{1} \frac{\ln(3x-1)}{3x-1}dx$.

29. а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+8)^4}}dx$; б) $\int\limits_{1/4}^{1} \frac{dx}{20x^2-9x+1}$.

30. а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt[4]{(16+x^2)^5}}dx$; б) $\int\limits_{1/2}^{1} \frac{x}{(1-x)\ln^2(1-x)}dx$.

31. а) $\int\limits_{4}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-4x+1}}dx$; б) $\int\limits_{0}^{2/3} \frac{\sqrt[3]{\ln(2-3x)}}{2-3x}dx$.

Задача 4. [*гл.1, § 3, приклади 1, 2*]
Обчислити площу фігури, обмеженої заданими лініями.

Варіанти завдань

1. $y=(x-2)^3$, $y=4x-8$.
2. $y=x\sqrt{9-x^2}$, $y=0$.
3. $y=4-x^2$, $y=x^2-2x$.
4. $y=\sin x\cdot\cos^2 x$, $y=0$ $\left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$.
5. $y=\sqrt{4-x^2}$, $y=0$.
6. $y=\cos x\cdot\sin^2 x$, $y=0$ $\left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$.
7. $y=\sqrt{e^x-1}$, $y=0$, $x=\ln 2$.
8. $y=\arccos x$, $y=0$, $x=0$.
9. $y=(x+1)^2$, $y^2=x+1$.
10. $y=x\sqrt{36-x^2}$, $y=0$ $(0\le x\le 6)$.
11. $y=2x-x^2+3$, $y=x^2-4x+3$.
12. $y=x\operatorname{arctg} x$, $y=0$, $x=\sqrt{3}$.
13. $x=\arccos y$, $y=0$, $x=0$.

14. $y = x^2\sqrt{8-x^2}$, $y = 0$ $(0 \le x \le 2\sqrt{2})$.

15. $x = \sqrt{e^y - 1}$, $x = 0$, $y = \ln 2$.

16. $y = x\sqrt{4-x^2}$, $y = 0$ $(0 \le x \le 2)$.

17. $y = \dfrac{x}{1+\sqrt{x}}$, $y = 0$, $x = 1$.

18. $y = \dfrac{1}{1+\cos x}$, $y = 0$, $x = -\dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{2}$.

19. $x = (y-2)^3$, $x = 4y - 8$.

20. $y = \cos^5 x \cdot \sin 2x$, $y = 0$ $\left(0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}\right)$.

21. $y = \dfrac{x}{(x^2+1)^2}$, $y = 0$, $x = 1$.

22. $x = 4 - y^2$, $x = y^2 - 2y$.

23. $x = \dfrac{1}{y\sqrt{1+\ln y}}$, $x = 0$, $y = 1$, $y = e^3$.

24. $y = \dfrac{e^{1/x}}{x^2}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

25. $y = x^2\sqrt{16-x^2}$, $y = 0$ $(0 \le x \le 4)$.

26. $x = \sqrt{4-y^2}$, $x = 0$, $y = 0$, $y = 1$.

27. $y = (x-1)^2$, $y^2 = x - 1$.

28. $y = x^2\cos x$, $y = 0$ $\left(0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}\right)$.

29. $x = 4 - (y-1)^2$, $x = y^2 - 4y + 3$.

30. $y = \dfrac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = e^3$.

31. $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$.

Задача 5. [*гл.1, § 3, приклад 9*]
Обчислити довжину лінії, заданої у полярних координатах.

Варіанти завдань

1. $\rho = 3e^{\frac{3}{4}\varphi}$, $-\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

2. $\rho = 2e^{\frac{4}{3}\varphi}$, $-\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

3. $\rho = \sqrt{2}\,e^{\varphi}$, $-\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

4. $\rho = 5e^{\frac{5}{12}\varphi}$, $-\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

5. $\rho = 6e^{\frac{12}{5}\varphi}$, $-\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

6. $\rho = 3e^{\frac{3}{4}\varphi}$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3}$.

7. $\rho = 4e^{\frac{4}{3}\varphi}$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3}$.

8. $\rho = \sqrt{2}\,e^{\varphi}$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3}$.

9. $\rho = 5e^{\frac{5}{12}\varphi}$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3}$.

10. $\rho = 12e^{\frac{12}{5}\varphi}$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3}$.

11. $\rho = 1 - \sin\varphi$, $-\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

12. $\rho = 2(1-\cos\varphi)$, $-\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

13. $\rho = 3(1+\sin\varphi)$, $-\dfrac{\pi}{6} \le \varphi \le 0$.

14. $\rho = 4(1-\sin\varphi)$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{6}$.

15. $\rho = 5(1-\cos\varphi)$, $-\dfrac{\pi}{3} \le \varphi \le 0$.

16. $\rho = 6(1+\sin\varphi)$, $-\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le 0$.

17. $\rho = 7(1-\sin\varphi)$, $-\dfrac{\pi}{6} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{6}$.

18. $\rho = 8(1-\cos\varphi)$, $-\dfrac{2\pi}{3} \le \varphi \le 0$.

19. $\rho = 2\varphi$, $0 \le \varphi \le \dfrac{3}{4}$.

20. $\rho = \sin^3\dfrac{\varphi}{3}$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

21. $\rho = 2\varphi$, $0 \le \varphi \le \dfrac{5}{12}$.

22. $\rho = 2\sin^3\dfrac{\varphi}{3}$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

23. $\rho = 4\varphi$, $0 \le \varphi \le \dfrac{3}{4}$.

24. $\rho = 6\cos^3\dfrac{\varphi}{3}$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

25. $\rho = 5\varphi$, $0 \le \varphi \le \dfrac{12}{5}$.

26. $\rho = 2\cos\varphi$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{6}$.

27. $\rho = 8\cos\varphi$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}$.

28. $\rho = 6\cos\varphi$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3}$.

29. $\rho = 6\sin\varphi$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3}$.

30. $\rho = 8\sin\varphi$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}$.

31. $\rho = 2\sin\varphi$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{6}$.

Задача 6. [*гл.1, § 3, приклади 12, 13*]
Знайти об'єм тіла, заданого поверхнями, що його обмежують.

Варіанти завдань

1. $\frac{x^2}{9}+y^2=1$, $z=0$, $z=y$ $(y\geq 0)$.
2. $z=x^2+4y^2$, $z=2$.
3. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-z^2=1$, $z=0$, $z=3$.
4. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{36}=-1$, $z=12$.
5. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$, $z=0$, $z=1$.
6. $x^2+y^2=9$, $z=0$, $z=y$ $(y\geq 0)$.
7. $z=x^2+9y^2$, $z=3$.
8. $\frac{x^2}{4}+y^2-z^2=1$, $z=0$, $z=3$.
9. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{64}=-1$, $z=16$.
10. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$, $z=0$, $z=2$.
11. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$, $z=0$, $z=y\sqrt{3}$ $(y\geq 0)$.
12. $z=2x^2+8y^2$, $z=4$.
13. $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{25}-z^2=1$, $z=0$, $z=2$.
14. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{36}=-1$, $z=12$.
15. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{36}=1$, $z=0$, $z=3$.
16. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{16}=1$, $z=0$, $z=y\sqrt{3}$ $(y\geq 0)$.

17. $z=x^2+5y^2$, $z=5$.
18. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-z^2=1$, $z=0$, $z=4$.
19. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}-\frac{z^2}{100}=-1$, $z=20$.
20. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{64}=1$, $z=0$, $z=4$.
21. $\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{25}=1$, $z=0$, $z=\frac{y}{\sqrt{3}}$ $(y\geq 0)$.
22. $z=4x^2+9y^2$, $z=6$.
23. $x^2+\frac{y^2}{4}-z^2=1$, $z=0$, $z=3$.
24. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{100}=-1$, $z=20$.
25. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{100}=1$, $z=0$, $z=5$.
26. $\frac{x^2}{27}+y^2=1$, $z=0$, $z=\frac{y}{\sqrt{3}}$ $(y\geq 0)$.
27. $z=2x^2+18y^2$, $z=6$.
28. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}-z^2=1$, $z=0$, $z=2$.
29. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{64}=-1$, $z=16$.
30. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{144}=1$, $z=0$, $z=6$.
31. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{196}=1$, $z=0$, $z=7$.

Задача 7. [*гл.1, § 3, приклади 14, 15*]
Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігур, обмежених графіками заданих функцій. *У варіантах 1 – 16* вісь обертання – Ox, *у варіантах 17 – 31* вісь обертання – Oy.

Варіанти завдань

1. $y=-x^2+5x-6$, $y=0$.
2. $2x-x^2-y=0$, $2x^2-4x+y=0$.
3. $y=3\sin x$, $y=\sin x$, $0\le x\le\pi$.
4. $y=5\cos x$, $y=\cos x$, $x=0$, $x\ge 0$.
5. $y=\sin^2 x$, $x=\dfrac{\pi}{2}$, $y=0$.
6. $x=\sqrt[3]{y-2}$, $x=1$, $y=1$.
7. $y=xe^x$, $x=1$, $y=0$.
8. $y=2x-x^2$, $y=-x+2$, $x=0$.
9. $y=2x-x^2$, $y=-x+2$.
10. $y=e^{1-x}$, $x=0$, $x=1$, $y=0$.
11. $y=x^2$, $y^2-x=0$.
12. $x^2+(y-2)^2=1$.
13. $y=1-x^2$, $x=0$, $x=\sqrt{y-2}$, $x=1$.
14. $y=x^2$, $y=1$, $x=2$.
15. $y=x^3$, $y=\sqrt{x}$.
16. $y=\sin\dfrac{\pi x}{2}$, $y=x^2$.
17. $y=\arccos\dfrac{x}{3}$, $y=\arccos x$, $y=0$.
18. $y=\arcsin\dfrac{x}{5}$, $y=\arcsin x$, $y=\dfrac{\pi}{2}$.
19. $y=x^2$, $y=0$, $x=2$.
20. $y=x^2+1$, $y=x$, $x=0$, $x=1$.
21. $y=\sqrt{x-1}$, $y=0$, $y=1$, $x=0{,}5$.
22. $y=\ln x$, $x=2$, $y=0$.
23. $y=(x-1)^2$, $y=1$.
24. $y^2=x-2$, $y=0$, $y=x^3$, $y=1$.
25. $y=x^3$, $y=x^2$.

26. $y=\arccos\dfrac{x}{5}$, $y=\arccos\dfrac{x}{3}$, $y=0$.
27. $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=0$.
28. $y=x^2-2x+1$, $y=0$, $x=2$.
29. $y=x^3$, $y=x$.
30. $y=\arccos x$, $y=\arcsin x$, $x=0$.
31. $y=(x-1)^2$, $x=0$, $x=2$, $y=0$.

Задача 8. [*гл.1, § 3, приклади 24 – 30*]
Розв'язати задану задачу фізики.

Варіанти завдань

У варіантах 1 – 13 треба: обчислити силу тиску на пластину P, яка вертикально занурена у воду. Форма, розміри та розташування пластини вказані далі для кожного варіанта.

1. P : рівнобічна трапеція з основами $a=4{,}5$ м та $b=6{,}6$ м і висотою $h=3{,}0$ м. (рис.5.1).

2. P : рівнобедрений трикутник, основа якого $a=AB=2$ м лежить на поверхні води, висота трикутника дорівнює $h=1$ м (рис.5.2).

3. P : півеліпс з півосями $a=2$ м та $b=1$ м, $B_1B_2=2b$ лежить на поверхні води (рис.5.3).

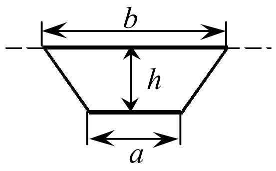


Рис.5.1

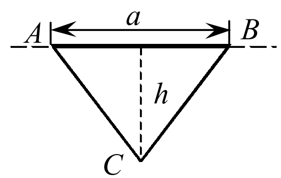


Рис.5.2

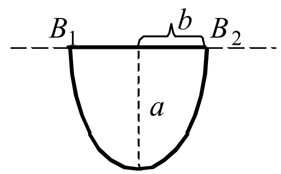


Рис.5.3

4. P : півеліпс з півосями $a=2$ м та $b=1$ м, $A_1A_2=2a$ лежить на поверхні води (рис.5.4).

5. P : прямокутний трикутник ABC, де AB лежить на поверхні води, $AB=1$ м, $AC=2$ м (рис.5.5).

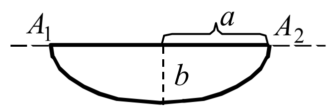


Рис.5.4

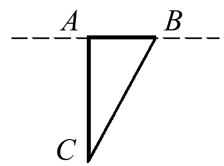


Рис.5.5

6. P : рівнобедрений трикутник, основа якого $a = AB = 10$ м паралельна поверхні води, а вершина C лежить на поверхні води, висота трикутника дорівнює $h = 4$ м (рис.5.6).

7. P : півколо радіуса $R = 3$ м (рис.5.7).

8. P : півколо радіуса $R = 2$ м (рис.5.8).

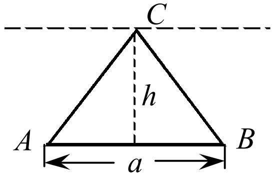


Рис.5.6

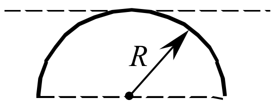


Рис.5.7

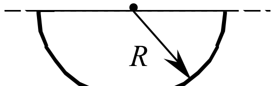


Рис.5.8

9. P : коло радіуса $R = 3$ м (рис.5.9).

10. P : еліпс з півосями $a = 2$ м, $b = 1$ м (рис.5.10).

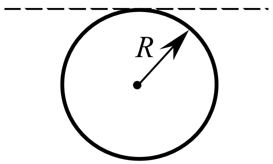


Рис.5.9

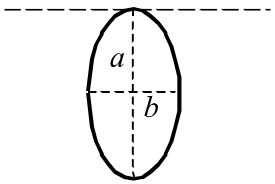


Рис.5.10

11. P : рівнобічна трапеція з основами $a = 8$ м , $b = 4$ м, висотою $h = 2$ м (рис.5.11).

12. P : рівнобічна трапеція з основами $a = 4$ м , $b = 8$ м, висотою $h = 2$ м (рис.5.12).

13. P : прямокутний трикутник ABC , де точка A лежить на поверхні води, сторона BC паралельна поверхні води, $a = AB = 1$м, $b = BC = 1$ м (рис.5.13).

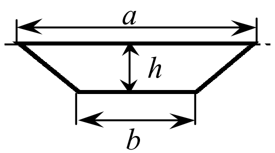


Рис.5.11

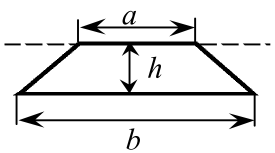


Рис.5.12

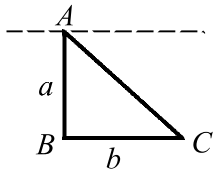


Рис.5.13

У варіантах 14 – 27 треба: обчислити роботу, яку треба затратити, щоб викачати воду з резервуара P . Форма, розміри та розташування резервуара наведено далі для кожного варіанта.

14. P : правильна чотирикутна піраміда зі стороною основи $a = 2$ м, висотою $H = 3$ м.

15. P : правильна чотирикутна піраміда, обернена вершиною вниз. Сторона основи піраміди дорівнює $a = 2$ м, висота $H = 6$ м.

16. P : зрізаний конус, у якого радіус верхньої основи $R_1 = 1$ м, нижньої – $R_2 = 2$ м, висота $H = 3$ м.

17. P : циліндрична цистерна, радіус основи якої $R = 1$ м, довжина $l = 5$ м.

18. P : правильна трикутна піраміда, обернена вершиною вниз, сторона основи якої $a = 4$ м, висота $H = 6$ м.

19. P : конус, обернений вершиною вниз, радіус основи якого $R = 3$ м, висота $H = 5$ м.

20. P : зрізаний конус, радіус верхньої основи якого $R_1 = 3$ м, нижньої основи $R_2 = 1$м, висота $H = 3$ м.

21. P : правильна чотирикутна зрізана піраміда, сторона верхньої основи якої $a = 8$ м, нижньої – $b = 4$ м, висота $H = 2$ м.

22. P : параболоїд обертання з радіусом основи $R = 2$ м, глибиною $H = 4$ м.

23. P : половина еліпсоїда обертання, радіус основи якого $R = 1$ м, глибина $H = 4$ м.

24. P : циліндр з радіусом основи $R = 1$ м і висотою $H = 3$ м.

25. P : півсфера радіуса $R = 2$ м.

26. P : правильна шестикутна піраміда з вершиною, оберненою вниз, сторона основи якої $a = 2$ м, висота $H = 6$ м.

27. P : правильна шестикутна піраміда з вершиною, оберненою вниз, сторона основи якої $a = 1$м, висота $H = 2$ м.

У варіантах 28 – 31 треба: обчислити кінетичну енергію тіла P , що обертається навколо заданої осі з постійною кутовою швидкістю w .

28. P : круглий диск маси M , радіуса R ; вісь обертання проходить через його центр перпендикулярно до його площини.

29. P : круговий циліндр, радіус основи якого R , висота H ; вісь обертання – вісь циліндра; густина матеріала, з якого зроблено циліндр, дорівнює γ .

30. P : однорідна трикутна пластинка з основою a висоти h ; вісь обертання – основа трикутника; густина матеріала пластини дорівнює γ .

31. P : круговий конус маси M , радіус основи R , висота H ; вісь обертання – вісь конуса; густина матеріала, з якого зроблено конус, дорівнює γ .

§2. Індивідуальне завдання 2.

Функції багатьох змінних

Задача 1. [*гл.2, § 1, приклад 1*]

Знайти та побудувати область визначення D даної функції.

Варіанти завдань

1. $u=\sqrt{y^2-2x+4}$.
2. $u=\sqrt{9-x^2-y^2}$.
3. $u=\dfrac{y}{\sqrt{4-x^2-2y^2}}$.
4. $u=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$.
5. $u=\arcsin\dfrac{x}{2}+\sqrt{xy}$.
6. $u=\arccos\dfrac{y}{x}$.
7. $u=\dfrac{x}{\ln(1+z-x^2-y^2)}$.
8. $u=\dfrac{4xy}{x-3y+1}$.
9. $u=\ln(-x^2-y^2+4z)$.
10. $u=\ln(1-x^2-y^2+z^2)$.
11. $u=\sqrt{1-(x^2+y)}$.
12. $u=\sqrt{(x+2)(y-3)}$.
13. $u=\sqrt{1+\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{16}}$.
14. $u=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$.
15. $u=\arcsin(x^2+y^2-5)$.
16. $u=\ln(2z^2-6x^2-3y^2-6)$.
17. $u=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}$.
18. $u=\sqrt{x^2-4}+\sqrt{4-y^2}$.
19. $u=\sqrt{x+y+z}$.
20. $u=\arcsin(x^2+y^2-3)$.
21. $u=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.
22. $u=\arcsin\dfrac{x}{y}$.
23. $u=x+\sqrt{x^2-y^2}$.
24. $u=\sqrt{25-x^2-y^2-z^2}$.
25. $u=\dfrac{1}{z^2-x^2-y^2}$.
26. $u=\dfrac{1}{\ln(1-x^2-y^2-z^2)}$.
27. $u=\ln(-x-y)$.
28. $u=\arcsin(x+y)$.
29. $u=\sqrt{x^2+y^2-1}+\ln(4-x^2-y^2)$.

30. $u=\sqrt{9-x^2-y^2}+\sqrt{x^2+y^2-4}$.
31. $u=\sqrt{1+x-y^2}+\sqrt{1-x-y^2}$.

Задача 2. [*гл.2, § 1, приклади 6, 7*]

Знайти частинні похідні першого порядку $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ і повний диференціал dz функції $z=f(x,y)$.

Варіанти завдань

1. $z=\operatorname{arctg}(x^2+y^2)$.
2. $z=\arccos(x-y^2)$.
3. $z=\ln(3x^2-y^4)$.
4. $z=\arcsin(x^2+y)$.
5. $z=\sin\sqrt{x-y^3}$.
6. $z=\sqrt{3x^2-2y^2+5}$.
7. $z=\operatorname{arctg}x^2+\sqrt{y}$.
8. $z=\ln(\sqrt{xy}-1)$.
9. $z=\operatorname{ctg}(3x-2y)$.
10. $z=\operatorname{arctg}(2x-y)$.
11. $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{y^3}$.
12. $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x^3}{y}$.
13. $z=\sqrt{3x^2-y^2+x}$.
14. $z=\sqrt{x^2+y^2-2xy}$.
15. $z=\ln(3x^2-y^2)$.
16. $z=\ln(x+xy-y^2)$.
17. $z=\cos(x^2-y^2)+x^3$.
18. $z=\arcsin xy-3xy^2$.
19. $z=\cos(x^3-2xy)$.
20. $z=\operatorname{tg}(x^3y^4)$.
21. $z=\operatorname{tg}\dfrac{2x-y^2}{x}$.
22. $z=\cos\dfrac{x-y}{x^2+y^2}$.
23. $z=\operatorname{ctg}\dfrac{x}{y}$.
24. $z=\operatorname{ctg}\sqrt{\dfrac{x}{x-y}}$.
25. $z=e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$.
26. $z=\arcsin\sqrt{xy}$.
27. $z=\arcsin(2x^3y)$.
28. $z=\arccos(x^2+y^2)$.
29. $z=\operatorname{ctg}\dfrac{2x+y^2}{x^2}$.
30. $z=\ln(3\sqrt{x}-4y)$.
31. $z=\arcsin\left(x-y^{1/2}\right)$.

Задача 3. [*гл.2, § 1, приклад 20*]

Задана функція $z = f(x, y)$. Перевірити, чи задовольняє ця функція задане рівняння; перевірити, що $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Варіанти завдань

1. $z = y\ln(x^2 - y^2)$; $\qquad \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{y^2}$.

2. $z = \arcsin\dfrac{x}{x+y}$; $\qquad x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

3. $z = \dfrac{x^2}{2y} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$; $\qquad x^2\dfrac{\partial z}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x^3}{y}$.

4. $z = \dfrac{y}{(x^2 - y^2)^5}$; $\qquad \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{y^2}$.

5. $z = x\,\mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}$; $\qquad x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$.

6. $z = \dfrac{x^2 + y^2}{x - y}$; $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x+y}{x-y}$.

7. $z = \ln(x^2 + y^2)$; $\qquad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

8. $z = \sqrt{2xy + y^2}$; $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2y}{z}$.

9. $z = \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}$; $\qquad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

10. $z = e^{-\cos(x+ay)}$; $\qquad a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

11. $z = \ln(x^2 + xy + y^2)$; $\qquad x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2$.

12. $z = x^y \cdot y^x$; $\qquad x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z(x + y + \ln z)$.

13. $z = xy + xe^{\frac{y}{x}}$; $\qquad x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy + z$.

14. $z = \dfrac{2x + 3y}{x^2 + y^2}$; $\qquad x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} + z = 0$.

15. $z = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$; $\qquad x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{2}$.

16. $z = e^{\frac{x}{2}}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{y}{2}\right)$; $\qquad \left(\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \dfrac{1}{2}e^x \sin^2\dfrac{y}{2}$.

17. $z = \sqrt{x}\sin\dfrac{y}{x}$; $\qquad x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{2}$.

18. $z = (x^2 + y^2)\,\mathrm{tg}\dfrac{x}{y}$; $\qquad x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2z$.

19. $z = \ln(e^x + e^y)$; $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 1$.

20. $z = e^{-(x+3y)}\sin(x + 3y)$; $\qquad 9\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

21. $z = e^{xy}$; $\qquad x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

22. $z = x\ln\dfrac{y}{x}$; $\qquad x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$.

23. $z = \ln(x + e^{-y})$; $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$.

24. $z = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1)$; $\qquad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

25. $z = \dfrac{xy}{x + y}$; $\qquad x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2z$.

26. $z = \ln\dfrac{x}{y} + x^3 - y^3$; $\qquad x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 3(x^3 - y^3)$.

27. $z = \ln(x^2 + (y+1)^2)$; $\qquad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

28. $z = y\sqrt{\dfrac{y}{x}}$; $\quad x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

29. $z = \dfrac{y^2}{3x} + \arcsin(xy)$; $\quad x^2\dfrac{\partial z}{\partial x} - xy\dfrac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$.

30. $z = \dfrac{y}{x}$; $\quad x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

31. $z = e^{xy}$; $\quad x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2xyz = 0$.

Задача 4. [*гл.2, § 2, приклади 4, 5*]
Дослідити на екстремум вказані функції.

Варіанти завдань

1. $z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2$.
2. $z = -\dfrac{1}{9}(3x+2y)^3 + \dfrac{3}{2}x^2 + y^2 + 2xy + y$.
3. $z = x^2 + 4y^2 - 2xy + 4$.
4. $z = -\dfrac{1}{6}(2x+3y)^3 + x^2 + \dfrac{3}{2}y^2 + 3xy - y$.
5. $z = x^3 + y^3 - x^2 - 2xy - y^2$.
6. $z = -\dfrac{1}{6}(2x+y)^3 + x^2 + \dfrac{1}{2}y^2 + xy + y$.
7. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.
8. $z = -\dfrac{1}{3}(x+2y)^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + y^2 + 2xy - y$.
9. $z = x^3 - 2y^3 - 3x + 6y$.
10. $z = \dfrac{1}{9}(3x+2y)^3 + \dfrac{3}{2}x^2 + y^2 + 2xy + y$.
11. $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$.
12. $z = \dfrac{1}{6}(-2x+y)^3 - x^2 + \dfrac{1}{2}y^2 + xy - 3y$.
13. $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5$.
14. $z = \dfrac{1}{6}(2x+y)^3 + x^2 + \dfrac{1}{2}y^2 + xy + y$.

15. $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$.
16. $z = \dfrac{1}{3}(x+2y)^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + y^2 + 2xy - y$.
17. $z = -4x^2 - 2y^2 + 2xy + 40x + 60y - 700$.
18. $z = -\dfrac{1}{3}(x-2y)^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - y^2 - 2xy + 3y$.
19. $z = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x$.
20. $z = \dfrac{1}{9}(-3x+2y)^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + y^2 + 2xy - 5y$.
21. $z = x^3 + y^3 - 15xy$.
22. $z = x^3y^2(1-x-y)$.
23. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$.
24. $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$.
25. $z = xy(6-x-y)$.
26. $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$.
27. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$.
28. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.
29. $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$.
30. $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$.
31. $z = 6(x-y) - 3x^2 - 3y^2$.

Задача 5. [*гл.2, § 2, приклад 8*]

Знайти найбільше та найменше значення функції $z = f(x,y)$ у замкненій області D. Зробити рисунок області D.

Варіанти завдань

1. $z = x^2 + 3y^2 + x - y$, $\quad D: x = 1,\ y = 1,\ x + y = 1$.
2. $z = \dfrac{1}{2}x^2 - xy$, $\quad D: y = 8,\ y = 2x^2$.
3. $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$, $\quad D: x = 0,\ y = 0,\ x + y - 1 = 0$.

4. $z = 2x^2 + 3y^2 + 1$, $D: y = 0,\ y = \sqrt{9 - \frac{9}{4}x^2}$.

5. $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1$, $D: x = -3,\ y = 0,\ x + y + 1 = 0$.

6. $z = 3x^2 + 3y^2 - x - y + 1$, $D: x = 5,\ y = 0,\ x - y - 1 = 0$.

7. $z = 2x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 - 4x$, $D: x = 0,\ y = 2,\ y = 2x$.

8. $z = x^2 - 2xy + \frac{5}{2}y^2 - 2x$, $D: x = 0,\ x = 2,\ y = 0,\ y = 2$.

9. $z = xy - 3x - 2y$, $D: x = 0,\ x = 4,\ y = 0,\ y = 4$.

10. $z = x^2 + xy - 2$, $D: y = 4x^2 - 4,\ y = 0$.

11. $z = x^3 + y^3 - 3xy$, $D: x = 0,\ x = 2,\ y = -1,\ y = 2$.

12. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$, $D: x + 2y = 4,\ x - 2y = 4,\ x = 0$.

13. $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$, $D: x = 0,\ y = 0,\ 2x + 3y - 12 = 0$.

14. $z = xy + x + y$, $D: x = 1,\ x = 2,\ y = 2,\ y = 3$.

15. $z = xy$, $D: x^2 + y^2 \le 1$.

16. $z = 1 - x^2 - y^2$, $D: (x-1)^2 + (y-1)^2 \le 1$.

17. $z = xy^2$, $D: x^2 + y^2 \le 1$.

18. $z = x - 2y + 5$, $D: x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le 1$.

19. $z = x + y$, $D: x^2 + y^2 \le 1$.

20. $z = x - 2y + 5$, $D: x \le 0,\ y \ge 0,\ y - x \le 1$.

21. $z = 3x + y - xy$, $D: x = 0,\ y = x,\ y = 4$.

22. $z = xy - x - 2y$, $D: x = 3,\ y = x,\ y = 0$.

23. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$, $D: x = 0,\ x = 1,\ y = 0,\ y = 2$.

24. $z = 5x^2 - 3xy + y^2$, $D: x = 0,\ x = 1,\ y = 0,\ y = 2$.

25. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$, $D: x - y + 1 = 0,\ x = 3,\ y = 0$.

26. $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8$, $D: x = 0,\ y = 0,\ x + y - 1 = 0$.

27. $z = 2x^3 - xy^2 + y^2$, $D: x = 0,\ x = 1,\ y = 0,\ y = 6$.

28. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$, $D: x = 0,\ x = 1,\ y = 0,\ y = 1$.

29. $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$, $D: x = 0,\ y = 0,\ x + y - 3 = 0$.

30. $z = x^2 + 2xy - 10$, $D: y = 0,\ y = x^2 - 4$.

31. $z = xy - 2x - y$, $D: x = 0,\ x = 3,\ y = 0,\ y = 4$.

§3. Індивідуальне завдання 3.

Кратні інтеграли

Задача 1. [*гл.3, § 1, приклад 3*]
Змінити порядок інтегрування в заданих інтегралах.

Варіанти завдань

1. $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{\sqrt{2x-x^2}}^{x} f(x,y)\,dy$.

2. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{x\sqrt{3}} f(x,y)\,dy$.

3. $\int\limits_{a/2}^{a} dx \int\limits_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)\,dy$.

4. $\int\limits_0^a dx \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{a+\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)\,dy$.

5. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{y^2-1}^{y^2/2} f(x,y)\,dx$.

6. $\int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{y^2-1}^{1-y^2} f(x,y)\,dx$.

7. $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x,y)\,dy$.

8. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx$.

9. $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy$.

10. $\int\limits_0^r dx \int\limits_x^{\sqrt{2rx-x^2}} f(x,y)\,dy$.

11. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx$.

12. $\int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{2x} f(x,y)\,dy$.

13. $\int\limits_{-2}^{6} dx \int\limits_{-3-\sqrt{12+4x-x^2}}^{-3+\sqrt{12+4x-x^2}} f(x,y)\,dy$.

14. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{2x} f(x,y)\,dy$.

15. $\int\limits_{-6}^{2} dx \int\limits_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)\,dy$.

16. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^3}^{x^2} f(x,y)\,dy$.

17. $\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy$.

18. $\int\limits_{0}^{a} dx \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\,dy,\ \ a>0$.

19. $\int\limits_{1}^{e} dx \int\limits_{0}^{\ln x} f(x,y)\,dy$.

20. $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)\,dy$.

21. $\int\limits_{0}^{2\pi} dx \int\limits_{0}^{\sin x} f(x,y)\,dy$.

22. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{2x}^{5x} f(x,y)\,dy$.

23. $\int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{y^2-4}^{y-2} f(x,y)\,dx$.

24. $\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{2x}^{2x+3} f(x,y)\,dy$.

25. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy$.

26. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2x}} f(x,y)\,dy$.

27. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x}^{2-x^2} f(x,y)\,dy$.

28. $\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{\sqrt{2x-x^2}}^{x} f(x,y)\,dy$.

29. $\int\limits_{0}^{a} dy \int\limits_{a-y}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx$.

30. $\int\limits_{0}^{a} dx \int\limits_{x}^{\sqrt{2a^2-x^2}} f(x,y)\,dy$.

31. $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{2-x^2} f(x,y)\,dy$.

Задача 2. [*гл.3, § 1, приклади 1, 2, 5*]

Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{D} f(x,y)\,dx\,dy$ за заданою областю D і функцією $f(x,y)$. Область D задана обмежуючими її лініями або системою нерівностей.

Варіанти завдань

1. $D: y=x,\ x=0,\ y=1,\ y=2$; $\quad f(x,y)=x^2+y^2$.
2. $D: x=0,\ x=y^2,\ y=2$; $\quad f(x,y)=3x^2-2xy+y$.
3. $D: y=x,\ y=x^2,\ x=3$; $\quad f(x,y)=x-y$.
4. $D: x^2+y^2\le 9,\ y\ge \frac{2x}{3}+3$; $\quad f(x,y)=3x+y$.

5. $D: x=0,\ y=2-x^2,\ y=2x-1$; $\quad f(x,y)=x-y$.
6. $D: y=2-x,\ y=x,\ x\ge 0$; $\quad f(x,y)=x^2y$.
7. $D: y=x,\ y=\frac{x}{2},\ x=2$; $\quad f(x,y)=(x-2)y$.
8. $D: y=x^3,\ y=8,\ y=0,\ x=3$; $\quad f(x,y)=x+y$.
9. $D: y=x+5,\ x+y+5=0,\ x\le 0$; $\quad f(x,y)=x(y+5)$.
10. $D: y=x^3,\ y=3x$; $\quad f(x,y)=y(1+x^2)$.
11. $D: y=x,\ xy=1,\ y=2$; $\quad f(x,y)=\frac{y^2}{x^2}$.
12. $D: xy=1,\ y=\sqrt{x},\ x=2$; $\quad f(x,y)=y\ln x$.
13. $D: y=\ln x,\ y=0,\ x=2$; $\quad f(x,y)=e^y$.
14. $D: y=2,\ y^2=x,\ x=0$; $\quad f(x,y)=3x^2-2xy+y$.
15. $D: x+y=2,\ x^2+y^2=2y\ (x>0)$; $\quad f(x,y)=xy$.
16. $D: y=\frac{x}{2},\ y=x,\ x=4$; $\quad f(x,y)=y$.
17. $D: x^2=4y,\ y=1,\ x=0\ (x>0)$; $\quad f(x,y)=4-y$.
18. $D: y=e^x,\ y=2,\ x=0$; $\quad f(x,y)=e^{x+y}$.
19. $D: y=\frac{x}{2},\ y=2x,\ y=\frac{2}{x}\ (x>0)$; $\quad f(x,y)=x^2+y^2$.
20. $D: y=1,\ y=2x,\ y+x=6$; $\quad f(x,y)=x^2+y^2$.
21. $D: y=0,\ 3x+y=6,\ 3x+2y=12$; $\quad f(x,y)=6-x-y$.
22. $D: x=0,\ y=0,\ x=4,\ y=4$; $\quad f(x,y)=x^2+y^2+1$.
23. $D: y^2=2x,\ x=1$; $\quad f(x,y)=xy^2$.
24. $D: y=-\frac{\pi}{2},\ y=\frac{\pi}{2},\ x=0,\ x=3\cos y$; $\quad f(x,y)=x^2\sin^2 y$.
25. $D: y=\frac{x^2}{2},\ y=x$; $\quad f(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$.
26. $D: y^2=x,\ x^2+y^2=2,\ y=0\ (y>0)$; $\quad f(x,y)=1$.
27. $D: y^2=x,\ y=1,\ x=0$; $\quad f(x,y)=e^{\frac{x}{y}}$.

28. $D: x=0,\ x=\pi,\ y=0,\ y=1+\cos x$; $\quad f(x,y)=y^2\sin x$.

29. $D: x=0,\ x=\dfrac{\pi}{2},\ y=\cos x,\ y=1$; $\quad f(x,y)=y^4$.

30. $D: y=x,\ y=2x,\ x=2,\ x=4$; $\quad f(x,y)=\dfrac{y}{x}$.

31. $D: y=x^2,\ x=y^2$; $\quad f(x,y)=x^2+y$.

Задача 3. [*гл.3, § 1, приклади 6, 7, 8*]

Перейти до полярних координат або до узагальнених полярних координат та обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ за заданою областю D і функцією $f(x,y)$. Область D задана обмежуючими її лініями або системою нерівностей.

Варіанти завдань

1. $D: x=0,\ y=0,\ y=\sqrt{R^2-x^2}$; $\quad f(x,y)=\ln(1+x^2+y^2)$.

2. $D: x^2+y^2=8x,\ x^2+y^2=4x,\ y=x,\ y=2x$; $\quad f(x,y)=1$.

3. $D: x^2+y^2\le ax,\ x^2+y^2\le by$; $\quad f(x,y)=1$.

4. $D: x+y\ge 2,\ x^2+y^2\le 4$; $\quad f(x,y)=1$.

5. $D: x^2+y^2\le 3,\ -\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3},\ y\ge 0$ $\quad f(x,y)=\sqrt{1+x^2+y^2}$.

6. $D: x^2+y^2\le 1,\ x,y\ge 0$; $\quad f(x,y)=\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}$.

7. $D: x^2+y^2\le Rx$; $\quad f(x,y)=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

8. $D: 1\le x^2+y^2\le 9,\ \dfrac{x}{\sqrt{3}}\le y\le x\sqrt{3}$; $\quad f(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

9. $D: x^2+y^2\le 2,\ -\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$; $\quad f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}$.

10. $D: x^2+y^2=2x,\ y\ge 0$; $\quad f(x,y)=y+1$.

11. $D: \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}\le 1,\ y\ge 0$; $\quad f(x,y)=x^2y$.

12. $D: 1\le x^2+\dfrac{y^2}{16}\le 9,\ y\ge 0,\ y\le 4x$; $\quad f(x,y)=\dfrac{y}{x^3}$.

13. $D: 1\le\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}\le 2,\ y\ge 0,\ y\le\dfrac{4x}{3}$; $\quad f(x,y)=\dfrac{27y}{x^3}$.

14. $D: x^2+y^2\le\pi^2$; $\quad f(x,y)=1-y^2$.

15. $D: y=\sqrt{1-x^2},\ y=0$; $\quad f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2+1}$.

16. $D: x^2+y^2=2ax$; $\quad f(x,y)=x^2+y^2$.

17. $D: x^2+y^2=\dfrac{\pi^2}{9},\ x^2+y^2=\pi^2$; $\quad f(x,y)=\dfrac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

18. $D: x^2+y^2=a^2,\ x^2+y^2=4a^2$; $\quad f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

19. $D: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ \dfrac{x^2}{4a^2}+\dfrac{y^2}{4b^2}=1,\ x,y\ge 0$; $\quad f(x,y)=\sqrt{4-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$.

20. $D: x^2+y^2=1$; $\quad f(x,y)=\sqrt{1-(x^2+y^2)}$.

21. $D: x^2+y^2=\pi^2,\ x^2+y^2=4\pi^2$; $\quad f(x,y)=\sin\sqrt{x^2+y^2}$.

22. $D: x^2+y^2=R^2,\ y=x,\ y=x\sqrt{3}$; $\quad f(x,y)=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

23. $D: x^2+y^2\ge 2x,\ x^2+y^2\le 4x$; $\quad f(x,y)=xy^2$.

24. $D: (x^2+y^2)^2=4(x^2-y^2),\ x\ge 0$; $\quad f(x,y)=x\sqrt{x^2+y^2}$.

25. $D: x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=16$; $\quad f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

26. $D: x^2+y^2=R^2,\ x\ge 0$; $\quad f(x,y)=\dfrac{\operatorname{tg}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

27. $D: x^2+y^2\le 1,\ y\ge 0,\ y\le x\sqrt{3}$; $\quad f(x,y)=y+2x$.

28. $D: 0\le x\le 3,\ y=\sqrt{9-x^2},\ y=0$; $\quad f(x,y)=\ln(1+x^2+y^2)$.

29. $D: 1\le x^2+y^2\le 4$; $\quad f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

30. $D: (x-2)^2+y^2=4$; $\quad f(x,y)=2x-y+4$.

31. $D: x^2+y^2=2y$; $\quad f(x,y)=3-x-y$.

Задача 4. [*гл.3, § 2, приклад 2*]

Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$, де G – задана область, а $f(x,y,z)$ – задана функція. Область G задається рівняннями поверхонь, які її обмежують, або системою нерівностей.

Варіанти завдань

1. $G: 0 \le x \le \frac{1}{2},\ x \le y \le 2x,\ 0 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}$; $f(x,y,z) = z$.
2. $G: 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b,\ 0 \le z \le c$; $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$.
3. $G: z = xy,\ y = x,\ x = 1,\ z = 0$; $f(x,y,z) = xy^2z^3$.
4. $G: z = 0,\ z = 5,\ x = 0,\ y = 0,\ x+y = 2$; $f(x,y,z) = 2x+3y-z$.
5. $G: 0 \le x \le 1,\ y = 0,\ y = x,\ z = 0,\ z = x^2+y^2$; $f(x,y,z) = z$.
6. $G: 0 \le x \le 3,\ y = 0,\ y = 2x,\ z = 0,\ z^2 = xy$; $f(x,y,z) = z$.
7. $G: 0 \le x \le 1,\ y = 0,\ y^2 = x,\ z = 1-x,\ z = 2-2x$; $f(x,y,z) = y$.
8. $G: x+y+z = a,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$; $f(x,y,z) = x+y+z$.
9. $G: y = x^2,\ x = y^2,\ z = xy,\ z = 0$; $f(x,y,z) = xyz$.
10. $G: z = y^2-x^2,\ z = 0,\ y = 1$; $f(x,y,z) = x^2+y^2$.
11. $G: 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 1,\ -2 \le z \le 1$; $f(x,y,z) = x-y-z$.
12. $G: x = 0,\ x = a,\ y = 0,\ y = x,\ z = 0,\ z = xy$; $f(x,y,z) = x^3y^2z$.
13. $G: x = 0,\ y = 1,\ y = x,\ z = 0,\ z = 1$; $f(x,y,z) = 2y^2e^{x+y}$.
14. $G: x = 0,\ y = 1,\ y = 2x,\ z = 0,\ z = 1$; $f(x,y,z) = y^2\cos(\pi xy)$.
15. $G: z = 0,\ z = xy,\ x+y = 1\ (z \ge 0)$; $f(x,y,z) = xy$.
16. $G: y^2 = x,\ y = 0,\ z = 0,\ x+z = \frac{\pi}{2}$; $f(x,y,z) = y\cos(z+x)$.
17. $G: x = 0,\ y = -2,\ y = 4x,\ z = 0,\ z = 1$; $f(x,y,z) = y^2e^{-xy}$.
18. $G: x = 1,\ y = 0,\ y = 2x,\ z = 0,\ z = 6$; $f(x,y,z) = yz\cos y$.
19. $G: x = 0,\ y = 0,\ x+y = 1,\ z = 0,\ z = x+y$; $f(x,y,z) = 15(y^2+z^2)$.
20. $G: y = 16\sqrt{2x},\ y = \sqrt{2x},\ z = 0,\ z+x = 2$; $f(x,y,z) = 1$.
21. $G: x = 1,\ y = 0,\ y = x,\ z = 0,\ z = 3x^2+2y^2$; $f(x,y,z) = 8y+12z$.

22. $G: z^2 = 4x,\ y^2 = 4x,\ x = 1$; $f(x,y,z) = z$.
23. $G: x = 2,\ y = 0,\ y = x,\ z = 0,\ z = xy$; $f(x,y,z) = xyz$.
24. $G: z = y,\ z = 0,\ x = 0,\ x = 4,\ y = \sqrt{25-x^2}$; $f(x,y,z) = 1$.
25. $G: x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ 3x+2y+3z = 6$; $f(x,y,z) = x$.
26. $G: 2x+3y+z = 2,\ x = y = z = 0$; $f(x,y,z) = yz$.
27. $G: x+y+z = 3,\ x = y = z = 0$; $f(x,y,z) = x$.
28. $G: z^2 = xy,\ x = 5,\ y = 5,\ z = 0$; $f(x,y,z) = y$.
29. $G: 2x+3y-12 = 0,\ x = y = z = 0,\ z = \frac{y^2}{2}$; $f(x,y,z) = y$.
30. $G: x = 1,\ y = 0,\ y = x,\ z = 0,\ z = x^2+3y^2$; $f(x,y,z) = 15x+30z$.
31. $G: z = y^2-x^2,\ z = 0,\ y = 1$; $f(x,y,z) = x^2+y^2$.

Задача 5. [*гл.3, § 2, приклади 3, 4*]

Перейти до циліндричних або сферичних координат та обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ за заданою областю G і функцією $f(x,y,z)$. Область G задається рівняннями поверхонь, які її обмежують, або системою нерівностей.

Варіанти завдань

1. $G: x^2+y^2+z^2 = 4,\ \ x,y,z \ge 0$; $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$.
2. $G: z \ge 0,\ z = 2,\ y \ge \pm x,\ z^2 = 4(x^2+y^2)$; $f(x,y,z) = y\sqrt{x^2+y^2}$.
3. $G: 1 \le x^2+y^2 \le 36,\ y \ge x,\ x \ge 0,\ 0 \le z \le 2$; $f(x,y,z) = z^2$.
4. $G: x^2+y^2+z^2 = 32,\ y^2 = x^2+z^2,\ y \ge 0$; $f(x,y,z) = y$.
5. $G: x^2+y^2+z^2 = 8,\ x^2 = y^2+z^2,\ x \ge 0$; $f(x,y,z) = x$.
6. $G: 4 \le x^2+y^2+z^2 \le 16,\ y \le x\sqrt{3},\ \ y,z \ge 0$; $f(x,y,z) = y$.
7. $G: z = \sqrt{8-x^2-y^2},\ z = \sqrt{x^2+y^2},\ y \ge 0$; $f(x,y,z) = y$.
8. $G: z = x^2+y^2,\ y \ge 0,\ y \le x,\ z = 4$; $f(x,y,z) = \frac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$.

9. $G: z = 2(x^2 + y^2),\ y \ge 0,\ y \le \dfrac{x}{\sqrt{3}},\ z = 18$; $\quad f(x,y,z) = \dfrac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

10. $G: x^2 + y^2 = 2x,\ x + z = 2,\ \ y,z \ge 0$; $\quad f(x,y,z) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

11. $G: 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 16,\ y \le x$; $\quad f(x,y,z) = x^2$.

12. $G: x^2 + y^2 + z^2 = 36,\ y \le -x,\ \ y,z \ge 0$; $\quad f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

13. $G: x^2 = 2(y^2 + z^2),\ x = 4,\ x \ge 0$; $\quad f(x,y,z) = x$.

14. $G: x = 0,\ y = 0,\ z = \dfrac{h}{2},\ z^2 = \dfrac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2)$; $\quad f(x,y,z) = \dfrac{xz}{x^2 + y^2 - R^2}$.

15. $G: y = \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2 + z^2},\ y = 2$; $\quad f(x,y,z) = y$.

16. $G: x = 2,\ y = \sqrt{2x - x^2},\ z = a,\ \ x,y,z \ge 0$; $\quad f(x,y,z) = z\sqrt{x^2 + y^2}$.

17. $G: x^2 + y^2 = R^2,\ z = 0,\ z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$; $\quad f(x,y,z) = x^2 + y^2$.

18. $G: (x-1)^2 + y^2 = 1,\ z \ge 0,\ z^2 + x^2 + y^2 = 4$; $\quad f(x,y,z) = x^2 + y^2$.

19. $G: x^2 + y^2 + z^2 \le x$; $\quad f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

20. $G: 4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 16,\ y \le x\sqrt{3},\ \ y,z \ge 0$; $\quad f(x,y,z) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

21. $G: z^2 = \dfrac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2),\ z = h$; $\quad f(x,y,z) = z$.

22. $G: x^2 + y^2 = 2x,\ z = 3,\ y,z \ge 0$; $\quad f(x,y,z) = z\sqrt{x^2 + y^2}$.

23. $G: x^2 + y^2 + z^2 \le R^2,\ x^2 + y^2 + z^2 \le 2Rz$; $\quad f(x,y,z) = z^2$.

24. $G: x^2 + y^2 = 2ax,\ x^2 + y^2 = 2az,\ z = 0$; $\quad f(x,y,z) = 1$.

25. $G: z = \sqrt{18 - x^2 - y^2},\ z = \sqrt{x^2 + y^2},\ x \ge 0$; $\quad f(x,y,z) = x$.

26. $G: x^2 = 2(y^2 + z^2),\ x = 4,\ x \ge 0$; $\quad f(x,y,z) = x$.

27. $G: 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 9,\ y \le x,\ \ y,z \ge 0$; $\quad f(x,y,z) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

28. $G: x = \dfrac{x^2 + y^2}{2},\ y = z = 0,\ z = 1$; $\quad f(x,y,z) = z(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$.

29. $G: x^2 - 2x + y^2 = 0,\ x + z = 2,\ \ y,z \ge 0$; $\quad f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

30. $G: z = x^2 + y^2,\ y \ge 0,\ z = 2$; $\quad f(x,y,z) = \dfrac{xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$.

31. $G: x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ \ x,y,z \ge 0$; $\quad f(x,y,z) = xyz^2$.

Задача 6. [*гл.3, § 3, приклад 1*]
Обчислити площу плоскої області D, обмеженої заданими лініями.

Варіанти завдань

1. $D: y^2 = 4x,\ x + y = 3,\ y \ge 0$.
2. $D: y = 6x^2,\ x + y = 2,\ x \ge 0$.
3. $D: y^2 = x + 2,\ x = 2$.
4. $D: x = -2y^2,\ x = 1 - 3y^2,\ x \le 0,\ y \ge 0$.
5. $D: y = \dfrac{8}{x^2 + 4},\ x^2 = 4y$.
6. $D: y = x^2 + 1,\ x + y = 3$.
7. $D: y^2 = 4x,\ x^2 = 4y$.
8. $D: y = \cos x,\ y \le x + 1,\ y \ge 0$.
9. $D: x = \sqrt{4 - y^2},\ y = \sqrt{3x},\ x \ge 0$.
10. $D: y = x^2 + 2,\ x \ge 0,\ x = 2,\ y = x$.
11. $D: y = 4x^2,\ 9y = x^2,\ y \le 2$.
12. $D: y = x^2,\ y = -x$.
13. $D: x = y^2,\ x = \dfrac{3}{4}y^2 + 1$.
14. $D: y = \sqrt{2 - x^2},\ y = x^2$.
15. $D: y = x^2 + 4x,\ y = x + 4$.
16. $D: 2y = \sqrt{x},\ x + y = 5,\ x \ge 0$.
17. $D: y = 2^x,\ y = 2x - x^2,\ x = 2,\ x = 0$.
18. $D: y = -2x^2 + 2,\ y \ge -6$.

19. $D: y^2 = 4x,\ x = \dfrac{8}{y^2+4}$.
20. $D: y = 4 - x^2,\ y = x^2 - 2x$.
21. $D: x = y^2 + 1,\ x + y = 3$.
22. $D: x^2 = 3y,\ y^2 = 3x$.
23. $D: x = \cos y,\ x \le y + 1,\ x \ge 0$.
24. $D: x = 4 - y^2,\ x - y + 2 = 0$.
25. $D: x = y^2,\ x = \sqrt{2 - y^2}$.
26. $D: \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1,\ y \le \dfrac{1}{2}x,\ y \ge 0$.
27. $D: y^2 = 4 - x,\ y = x + 2,\ y = 2,\ y = -2$.
28. $D: y = x^2,\ y = \dfrac{3}{4}x^2 + 1$.
29. $D: x = y^2,\ y^2 = 4 - x$.
30. $D: xy = 1,\ x^2 = y,\ y = 2,\ x = 0$.
31. $D: y = x^2 - 3x,\ 3x + y - 4 = 0$.

Задача 7. [*гл.3, § 3, приклади 3, 4, 6, 7*]
Знайти об'єм тіла G, обмеженого заданими поверхнями.

Варіанти завдань

1. $G:\ z = x^2 + y^2,\ z = x^2 + 2y^2,\ y = x,\ y = 2x,\ x = 1$.
2. $G:\ z = y,\ x = 4,\ y = \sqrt{25 - x^2},\ x \ge 0,\ z \ge 0$.
3. $G:\ x^2 + y^2 = 2z,\ x^2 + y^2 = 2x,\ z = 0$.
4. $G:\ x^2 + y^2 = 3z,\ x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
5. $G:\ y = x^2,\ x = y^2,\ z = 3x + 2y + 6,\ z = 0$.
6. $G:\ z = 2 - (x^2 + y^2),\ x + y = 1,\ x,\ y,\ z \ge 0$.
7. $G:\ z = x^2 - y^2,\ z = 0,\ x = 3$.

8. $G:\ x^2 + y^2 = 4,\ z = x^2 + y^2,\ z \ge 0$.
9. $G:\ z = x^2 + y^2,\ y = x^2,\ y = 1,\ z = 0$.
10. $G:\ z = x^2,\ x - 2y + 2 = 0,\ x + y = 7,\ x \ge 0$.
11. $G:\ z = 10 + x^2 + 2y^2,\ y = x,\ x = 1,\ y \ge 0,\ z \ge 0$.
12. $G:\ x^2 + y^2 = R^2,\ Rz = 2R^2 + x^2 + 2y^2,\ z = 0$.
13. $G:\ z = 2x^2 + y^2 + 1,\ x + y = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.
14. $G:\ z = x^2 - y^2,\ x = 1,\ x \ge 0,\ z = 0$.
15. $G:\ x^2 + z^2 = a^2,\ y = 0,\ z = 0,\ y = x$.
16. $G:\ z = 4 - y^2,\ x^2 + y^2 = 4,\ z \ge 0$.
17. $G:\ y = \sqrt{x},\ y = 2\sqrt{x},\ x + z = 6,\ z = 0$.
18. $G:\ x - y + z - 6 = 0,\ x + y - 2 = 0,\ x - y = 0,\ y = 0,\ z = 0$.
19. $G:\ x + y + z = 6,\ x - y = 0,\ x = 3,\ y = 0,\ z = 0$.
20. $G:\ z = 2x^2 + y^2,\ x + y = 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$.
21. $G:\ 5z = x^2 + y^2,\ z - 5 = 0$.
22. $G:\ 3y + 2x = 6,\ z = 0,\ x = 0,\ z = y^2$.
23. $G:\ 2x = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z = 0$.
24. $G:\ x^2 + y^2 = 4,\ y + z = 2,\ z \ge 0$.
25. $G:\ x^2 + y^2 - z^2 = 0,\ z = 6 - x^2 - y^2$.
26. $G:\ 2z = x^2 + y^2,\ x + y = 2,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.
27. $G:\ z = x^2 + y^2,\ 2z = 1 - x^2 - y^2$.
28. $G:\ z = 1 - x,\ y^2 = x,\ z = 0$.
29. $G:\ y = x^2,\ z = y,\ z + y = 2$.
30. $G:\ z = x^2 + y^2,\ z = 2(x^2 + y^2),\ y = x,\ y^2 = x$.
31. $G:\ z^2 - x^2 = 4,\ z^2 - y^2 = 4,\ z = 2\sqrt{2}$.

Задача 8. [*гл.3, § 3, приклади 8, 11*]
Розв'язати задану фізичну задачу.

Варіанти завдань

1. Знайти масу і середню густину пластинки, яка має форму прямокутного трикутника із катетами $OB = a$, $OA = b$, якщо густина в кожній точці дорівнює відстані точки від катета OA.

2. Знайти масу і середню густину тіла, яке обмежено поверхнями $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$, якщо густина $\mu(x, y, z) = x + y + z$.

3. Знайти масу і середню густину круглої пластинки радіуса R, якщо її густина пропорційна квадрату відстані точки від центра і дорівнює δ на межі пластинки.

4. Знайти масу і середню густину тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, $z = 0$, $z = 1$, якщо густина в кожній точці пропорційна аплікаті z і в площині $z = 1$ дорівнює γ_0.

5. Знайти масу і середню густину круглого конуса з радіусом R і висотою $H = 4$, якщо густина в кожній точці пропорційна квадрату відстані від точки до площини, яка проходить через вершину конуса паралельно площині основи, і у центрі основи дорівнює γ_0.

6. Знайти масу і середню густину тіла, обмеженого поверхнями $x^2 - y^2 = z$, $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ $(z > 0)$, якщо густина в кожній точці пропорційна аплікаті z, а найбільше значення густини дорівнює γ_0.

7. Знайти масу і середню густину сферичного шару між поверхнями $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ і $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, якщо густина в кожній точці пропорційна квадрату відстані від точки до початку координат, а найбільше значення густини дорівнює γ_0.

8. Знайти масу і середню густину сегмента параболоїда обертання із радіусом R і висотою H, якщо густина в кожній точці пропорційна кореню квадратному із відстані від точки до площини основи сегмента і у вершині сегмента дорівнює γ_0.

9. Знайти масу і середню густину тіла, яке обмежено поверхнями $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 8z$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ $(x \ge 0,\ y \ge 0)$, якщо густина $\mu(x, y, z) = 5x$.

10. Знайти масу і середню густину тіла, яке обмежено поверхнями $x^2 + y^2 = \frac{4}{25}z^2$, $x^2 + y^2 = \frac{2}{5}z$, $x = 0$, $y = 0$ $(x \ge 0,\ y \ge 0)$, якщо густина $\mu(x, y, z) = 28xz$.

11. Знайти масу і середню густину тіла, яке обмежено поверхнями $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 = z^2$, $x = 0$, $y = 0$ $(x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0)$, якщо густина $\mu(x, y, z) = 6z$.

12. Знайти масу і середню густину тіла, яке обмежено поверхнями $25(x^2 + y^2) = z^2$, $x^2 + y^2 = 4$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ $(x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0)$, якщо густина $\mu(x, y, z) = 2(x^2 + y^2)$.

13. Знайти масу і середню густину тіла, яке обмежено поверхнями $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ і $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$, якщо густина в кожній точці дорівнює відстані точки від початку координат.

14. Знайти масу і середню густину тіла, обмеженого поверхнями $x^2 - y^2 + z^2 = 0$, $y = h$, якщо густина в кожній точці його $\mu(x, y, z) = y$.

15. Знайти масу і середню густину тіла, обмеженого поверхнями $2x + z = 2a$, $x + z = a$, $y^2 = ax$, $y = 0$ $(y \ge 0)$, якщо густина $\mu(x, y, z) = y$.

16. Знайти масу і середню густину квадратної пластинки із стороною $2a$, якщо густина в кожній точці пропорційна квадрату відстані від точки перетину діагоналей і на кутах квадрата дорівнює одиниці.

17. На фігурі, яка обмежена еліпсом з півосями a і b, маса розподілена так, що густина її пропорційна відстані від більшої осі, причому на одиниці відстані від цієї осі вона дорівнює γ. Знайти масу і середню густину.

18. Обчислити масу і середню густину тіла, обмеженого круговим циліндром радіуса R, висоти H, якщо густина в кожній точці дорівнює квадрату відстані від цієї точки до центра основи циліндра.

19. Обчислити масу і середню густину тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 = 2az$, $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ $(z > 0)$, якщо густина в кожній точці дорівнює сумі квадратів координат.

20. Густина кулі $x^2 + y^2 + z^2 \le 2Rz$ в кожній точці чисельно дорівнює квадрату відстані від точки до початку координат. Знайти масу і середню густину тіла.

21. Знайти масу і середню густину тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$, $z = 0$, $z = a$ $(a > 0)$, якщо густина в кожній точці пропорційна аплікаті z і в площині $z = a$ дорівнює γ_0.

22. Знайти масу і середню густину тіла, обмеженого поверхнями $x^2 - y^2 = az$, $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ $(z > 0)$, якщо густина в кожній точці пропорційна аплікаті z, а найбільше значення густини γ_0.

23. Знайти масу і середню густину тіла G: $64(x^2 + y^2) = z^2$, $y = 0$, $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ $(y \ge 0,\ z \ge 0)$, якщо густина $\mu(x, y, z) = \frac{5}{4}(x^2 + y^2)$.

24. Знайти масу і середню густину тіла $G: x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2\le 1,$ $x\ge 0$, якщо густина $\mu(x,y,z)=4|z|$.

25. Знайти масу і середню густину тіла $G: x^2+y^2=\frac{4}{25}z^2,\ x^2+y^2=\frac{2}{5}z,$ $x=0,\ y=0\ (x\ge 0,\ y\ge 0)$, якщо густина $\mu(x,y,z)=28xz$.

26. Обчислити масу і середню густину пластинки, яка обмежена лінією $\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}\right)^2=\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}$ і має густину, що дорівнює одиниці.

27. Обчислити масу і середню густину пластинки, яка обмежена лініями $(x^2+y^2-ax)^2=a^2(x^2+y^2)$, $x^2+y^2=ay\sqrt{3}$ і має густину, що дорівнює одиниці.

28. Знайти масу і середню густину пластинки $D: \frac{x^2}{4}+y^2\le 1$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, якщо густина $\mu(x,y)=x^3y^3$.

29. Знайти масу і середню густину тіла, яке утворено від перетину поверхонь: сфери $x^2+y^2+z^2=c^2$ $(x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0)$, координатних площин, площини $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, причому, початок координат належить тілу, якщо густина дорівнює аплікаті в кожній точці.

30. Тіло має форму півкулі $x^2+y^2+z^2\le a^2$, $z\ge 0$, густина дорівнює відстані точки від центра. Знайти масу і середню густину тіла.

31. Знайти масу і середню густину пластинки $D:\ 1\le \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\le 2$, $y\ge 0$, $y\le \frac{2}{3}x$, якщо густина $\mu(x,y)=\frac{y}{x}$.

§4. Індивідуальне завдання 4.

Криволінійні інтеграли. Поверхневі інтеграли. Теорія поля

Задача 1. [*гл.4, § 1, приклади 1, 2, 3, 4*]

Обчислити криволінійний інтеграл першого роду по заданій кривій L.

Варіанти завдань

1. $\int_L (x^2+y^2)\,dl$, L – коло $x=3\cos t$, $y=3\sin t$.

2. $\int_L \frac{z^2}{x^2+y^2}\,dl$, L – перший виток гвинтової лінії $x=9\cos t$, $y=9\sin t$, $z=9t$, $0\le t\le 2\pi$.

3. $\int_L (x-y)\,dl$, L – коло $x^2+y^2=2x$.

4. $\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, L – коло $x^2+y^2=2y$.

5. $\int_L (z^2+y^2)\,dl$, L – коло $z^2+y^2=4$.

6. $\int_L \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dl$, L – дуга кардіоїди $\rho=2(1+\cos\varphi)$, $0\le\varphi\le\pi/2$.

7. $\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, L – дуга лемніскати Бернуллі $\rho=a\sqrt{\cos 2\varphi}$, $0\le\varphi\le\pi/4$.

8. $\int_L (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\,dl$, L – дуга лемніскати Бернуллі $\rho=a\sqrt{\sin 2\varphi}$, $0\le\varphi\le\pi/2$.

9. $\int_L (4\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{y})\,dl$, L – дуга астроїди $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$ між точками $A(1,0)$ і $B(0,1)$.

10. $\int_L \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dl$, L – дуга кардіоїди $\rho=1+\cos\varphi$, $0\le\varphi\le\pi/2$.

11. $\int_L (x+2y-3z)\,dl$, L – відрізок прямої між точками $A(1,3,-1)$ і $B(3,5,-1)$.

12. $\int_L (3x-5y+z+2)\,dl$, L – відрізок прямої між точками $A(4,1,6)$ і $B(5,3,8)$.

13. $\int_{L_{ABO}} (x+y)\,dl$, L_{ABO} – контур трикутника з вершинами $A(1,0)$, $B(0,1)$, $O(0,0)$.

14. $\int_L \sqrt{1+4y+9xz}\,dl$, L – дуга кривої $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$, $0\le t\le 1$.

15. $\int_{L_{OABC}} (x+y)\,dl$, L_{OABC} – контур прямокутника з вершинами у точках $O(0,0)$, $A(5,0)$, $B(5,3)$, $C(0,3)$.

16. $\int\limits_L y\,dl$, L – дуга параболи $y^2=2x$, що відтинається параболою $x^2=2y$.

17. $\int\limits_L xyz\,dl$, L – дуга кривої $x=\frac{1}{2}t^2$, $y=t$, $z=\frac{1}{3}\sqrt{8t^3}$, $0\le t\le 1$.

18. $\int\limits_L \sqrt{2y}\,dl$, L – перша арка циклоїди $x=2(t-\sin t)$, $y=2(1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$.

19. $\int\limits_L (x+y)\,dl$, L – перший виток лемніскати Бернуллі $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$.

20. $\int\limits_L xy\,dl$, L – перша чверть еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

21. $\int\limits_L (x+y)\,dl$, L – чверть кола $x^2+y^2+z^2=R^2$, $y=x$, що лежить в першому октанті.

22. $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{8-x^2-y^2}}$, L – відрізок прямої, що з'єднує точки $O(0,0)$ і $B(2,2)$.

23. $\int\limits_L (x^2+y^2+z^2)\,dl$, L – дуга гвинтової лінії $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=t\sqrt{3}$, $0\le t\le 2\pi$.

24. $\int\limits_L xy\,dl$, L – дуга еліпса $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$.

25. $\int\limits_L z\,dl$, L – дуга конічної гвинтової лінії $x=t\cos t$, $y=t\sin t$, $z=t$, $0\le t\le\pi$.

26. $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, L – коло $x^2+y^2=Rx$.

27. $\int\limits_L \sqrt{2y^2+z^2}\,dl$, L – коло $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x=y$.

28. $\int\limits_{L_{OABC}} yz\,dl$, L_{OABC} – контур прямокутника з вершинами у точках $O(0,0,0)$, $A(0,4,0)$, $B(0,4,2)$, $C(0,0,2)$.

29. $\int\limits_L y\,dl$, L – дуга параболи $y^2=6x$, що відтинається параболою $x^2=6y$.

30. $\int\limits_L (x+y+z)\,dl$, L – відрізок прямої між точками $A(0,0,0)$ і $B(1,1,1)$.

31. $\int\limits_L \frac{\cos^2 x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\,dl$, L – дуга синусоїди $y=\sin x$, $0\le x\le\pi$.

Задача 2. [*гл.4, § 1, приклади 8, 9, 10, 11*]

Обчислити криволінійний інтеграл другого роду по заданій кривій L.

Варіанти завдань

1. $\int\limits_L \cos^2 x\,dx+\frac{1}{y^3}dy$, L – дуга кривої $y=\mathrm{tg}\,x$ від точки $A(\pi/4,\,1)$ до точки $B(\pi/3,\,\sqrt{3})$.
2. $\int\limits_L (x^2+y^2)\,dx+xy\,dy$, L – дуга кривої $y=e^x$ від точки $A(0,1)$ до точки $B(1,e)$.
3. $\int\limits_{L_{ACB}} (x^2+y)dx+(x+y^2)dy$, L_{ACB} – ламана, де $A(2,0)$, $C(5,0)$, $B(5,3)$.
4. $\int\limits_L x\,dy-y\,dx$, де L – контур трикутника ABC, де $A(-1,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$ при додатному напрямі обходу.
5. $\int\limits_L z\,dx+x\,dy-\frac{xy}{z}dz$, L – дуга кривої $x=t\cos t$, $y=t\sin t$, $z=t$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$ у напрямі зростання параметра t.
6. $\int\limits_L z\,dx+y\,dy+(x^2-y^2)\,dz$, L – дуга кривої $x=a\,\mathrm{ch}\,t$, $y=a\,\mathrm{sh}\,t$, $z=bt$, $0\le t\le 1$ у напрямі зростання параметра t.
7. $\int\limits_{L_{OA}} 2xy\,dx-x^2dy+z\,dz$, L_{OA} – відрізок прямої, що з'єднує точки $O(0,0,0)$ і $A(2,1,-1)$.
8. $\int\limits_{L_{AB}} (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$, L_{AB} – ламана лінія $y=|x|$ від точки $A(-1,1)$ до точки $B(2,2)$.
9. $\int\limits_{L_{OA}} 2xy\,dx-x^2dy$, L_{OA} – дуга параболи $y=\frac{x^2}{4}$ від точки $O(0,0)$ до точки $A(2,1)$.

10. $\int\limits_L y\,dx - x\,dy$, L – еліпс $x=3\cos t$, $y=2\sin t$ при додатному напрямі обходу.

11. $\int\limits_L x^2dx+(x+z)dy+xy\,dz$, L – дуга кривої $x=\sin t$, $y=\sin^2 t$, $z=\sin^3 t$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$ у напрямі зростання параметра t.

12. $\int\limits_{L_{AB}}(x^2+y+z)dx+z^2dy+(x+y^2)dz$, L_{AB} – відрізок прямої, що з'єднує точки $A(2,1,0)$ і $B(4,3,1)$.

13. $\int\limits_L y\,dx+x^2dy+z\,dz$, L: $x=t$, $y=t^3$, $z=t^5$, $0\le t\le 1$ у напрямі зростання параметра t.

14. $\int\limits_L \frac{y}{x}dx+x\,dy$, L – дуга лінії $y=\ln x$ у напрямі від точки $A(1,0)$ до точки $B(e,1)$.

15. $\int\limits_L 2xy\,dx+y^2dy+z^2dz$, L – дуга одного витка гвинтової лінії $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=2t$ у напрямі від точки $A(1,0,0)$ до точки $B(1,0,4\pi)$.

16. $\int\limits_L (xy-1)dx+x^2y\,dy$, L – відрізок прямої AB у напрямі від точки $A(1,1)$ до точки $B(0,2)$.

17. $\int\limits_L (xy-x)\,dx+\frac{1}{2}x^2dy$, L – дуга параболи $y^2=4x$ від точки $A(0,0)$ до точки $B(1,2)$.

18. $\int\limits_L y^2dx+xy\,dy$, L – дуга еліпса $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$ у напрямі зростання параметра t.

19. $\int\limits_L \sin^2 x\,dx+\frac{1}{y^2}dy$, L – дуга кривої $y=\mathrm{ctg}\,x$, $0\le x\le\frac{\pi}{3}$ у напрямі зростання змінної x.

20. $\int\limits_L (x+y)dx+(x-y)dy$, L – дуга кола $x=R\cos t$, $y=R\sin t$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$ у напрямі зростання параметра t.

21. $\int\limits_L x\,dy-y\,dx$, L – дуга астроїди $x=2\cos^3 t$, $y=2\sin^3 t$ у напрямі від точки $A(2,0)$ до точки $B(0,2)$.

22. $\int\limits_L (xy-y^2)dx+x\,dy$, L – дуга параболи $y=x^2$ у напрямі від точки $O(0,0)$ до точки $B(1,1)$.

23. $\int\limits_{L_{OBA}} 2yz\,dy-y^2dz$, L_{OBA} – ламана OBA, де $O(0,0,0)$, $B(0,2,0)$, $A(0,2,1)$.

24. $\int\limits_L (xy-1)dx+x^2y\,dy$, L – дуга параболи $y^2=4-4x$ від точки $A(1,0)$ до точки $B(0,2)$.

25. $\int\limits_L 2xz\,dy-y^2dz$, L – дуга параболи $z=\frac{x^2}{4}$ від точки $O(0,0,0)$ до точки $B(2,0,1)$.

26. $\int\limits_{L_{AB}} \cos z\,dx-\sin x\,dz$, L_{AB} – відрізок прямої, що з'єднує точки $A(2,0,-2)$ і $B(-2,0,2)$.

27. $\int\limits_L x\,dy$, L – контур трикутника, утвореного прямими $y=x$, $x=2$, $y=0$ при додатному напрямі обходу контура.

28. $\int\limits_L x\,dx+xy\,dy$, L – верхня половина кола $x^2+y^2=2x$ при додатному напрямі обходу контура.

29. $\int\limits_L (x^2-y)dx$, L – контур прямокутника, що утворений прямими $x=0$, $y=0$, $x=1$, $y=2$ при додатному напрямі обходу контура.

30. $\int\limits_{L_{OB}} xy^2dx+yz^2dy-x^2z\,dz$, L_{OB} – відрізок прямої OB, де $O(0,0,0)$, $B(-2,4,5)$.

31. $\int\limits_L y\,dx+x\,dy$, L – дуга кола $x=R\cos t$, $y=R\sin t$ у напрямі від точки $A(R,0)$ до точки $B(0,R)$.

Задача 3. [*гл.4, § 2, приклади 1, 2*]

Обчислити поверхневий інтеграл першого роду по заданій поверхні σ.

Варіанти завдань

1. $\iint\limits_{\sigma}(x^2+y^2+3z^2)d\sigma$, σ – частина поверхні конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $0\le z\le 2$.
2. $\iint\limits_{\sigma}(x+3y+2z)d\sigma$, σ – частина площини $2x+y+2z=2$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.
3. $\iint\limits_{\sigma}\left(x^2+y^2+z^2-\frac{1}{2}\right)d\sigma$, σ – частина поверхні параболоїда $2z=2-x^2-y^2$, $z\ge 0$.
4. $\iint\limits_{\sigma}(5x-y+5z)d\sigma$, σ – частина площини $3x+2y+z=6$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.
5. $\iint\limits_{\sigma}z(x+y)d\sigma$, σ – частина поверхні циліндра $z=\sqrt{9-x^2}$, $0\le y\le 2$.
6. $\iint\limits_{\sigma}(2x+3y+z)d\sigma$, σ – частина площини $2x+2y+z=2$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.
7. $\iint\limits_{\sigma}(x^2+y^2+z^2)d\sigma$, σ – півсфера $y=\sqrt{R^2-x^2-z^2}$.
8. $\iint\limits_{\sigma}(5x^2+3y^2+3z^2+4)d\sigma$, σ – частина поверхні конуса $x=\sqrt{y^2+z^2}$, $0\le x\le 2$.
9. $\iint\limits_{\sigma}(3x+10y-z)d\sigma$, σ – частина площини $x+3y+2z=6$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.
10. $\iint\limits_{\sigma}(2x+15y+z)d\sigma$, σ – частина площини $x+2y+2z=2$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.
11. $\iint\limits_{\sigma}(x^2+y^2)d\sigma$, σ – сфера $x^2+y^2+z^2=a^2$.
12. $\iint\limits_{\sigma}\sqrt{1+4y^2+4z^2}\,d\sigma$, σ – частина поверхні параболоїда $x=4-y^2-z^2$, $x\ge 0$.
13. $\iint\limits_{\sigma}(2z^2-x^2-y^2)d\sigma$, σ – частина поверхні конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $0\le z\le 1$.
14. $\iint\limits_{\sigma}(2x+5y+10z)d\sigma$, σ – частина площини $2x+y+3z=6$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.

15. $\iint\limits_{\sigma}(5x+2y+2z)d\sigma$, σ – частина площини $x+2y+z=2$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.
16. $\iint\limits_{\sigma}(4x-y+4z)d\sigma$, σ – частина площини $2x+2y+z=4$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.
17. $\iint\limits_{\sigma}xyz\,d\sigma$, σ – частина поверхні параболоїда $z=x^2+y^2$, $0\le z\le 1$.
18. $\iint\limits_{\sigma}(x^2+y^2)d\sigma$, σ – частина поверхні конуса $z^2=x^2+y^2$, $0\le z\le 1$.
19. $\iint\limits_{\sigma}y(x+z)d\sigma$, σ – частина поверхні циліндра $y=\sqrt{c^2-x^2}$, $0\le z\le a$.
20. $\iint\limits_{\sigma}(2x+5y+z)d\sigma$, σ – частина площини $x+y+2z=2$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.
21. $\iint\limits_{\sigma}(4x-4y-z)d\sigma$, σ – частина площини $x+2y+2z=4$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.
22. $\iint\limits_{\sigma}(x^2+y^2)d\sigma$, σ – частина поверхні конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $0\le z\le 1$.
23. $\iint\limits_{\sigma}(6x-y+8z)d\sigma$, σ – частина площини $x+y+2z=2$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.
24. $\iint\limits_{\sigma}(4x-y+z)d\sigma$, σ – частина площини $x+y+z=2$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.
25. $\iint\limits_{\sigma}\frac{d\sigma}{(1+x+y+z)^2}$, σ – частина площини $x+y+z=1$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.
26. $\iint\limits_{\sigma}x\,d\sigma$, σ – частина поверхні параболоїда $x=y^2+z^2$, $0\le x\le 1$.
27. $\iint\limits_{\sigma}z^2d\sigma$, σ – частина поверхні конуса $z^2=4(x^2+y^2)$, $0\le z\le 4$.
28. $\iint\limits_{\sigma}xyz\,d\sigma$, σ – частина поверхні конуса $z^2=x^2+4y^2$, $0\le z\le 2$.
29. $\iint\limits_{\sigma}(R^2-z^2)^{\frac{3}{2}}d\sigma$, σ – півсфера $x^2+y^2+z^2=R^2$, $z\ge 0$.
30. $\iint\limits_{\sigma}(4-z^2)d\sigma$, σ – півсфера $z=\sqrt{4-x^2-z^2}$.
31. $\iint\limits_{\sigma}(16-4z)d\sigma$, σ – частина поверхні параболоїда $z=4-\frac{1}{4}(x^2+y^2)$, $z\ge 0$.

Задача 4. [*гл.4, § 2, приклади 5, 6, 7, 8*]

Обчислити поверхневий інтеграл другого роду по заданій стороні поверхні σ.

Варіанти завдань

1. $\iint\limits_{\sigma}(y^2+z^2)dydz-y^2dxdz+2yz^2dxdy$, σ – частина поверхні конуса $x^2+z^2=y^2$, нормальний вектор $\vec{n}$ якої утворює тупий кут із ортом $\vec{j}$, що відтинається площинами $y=0$ і $y=1$.
2. $\iint\limits_{\sigma}(x^2+y^2+z^2)dxdy$, σ – зовнішня сторона півсфери $y=\sqrt{1-x^2-z^2}$, яка відтинається конусом $y=\sqrt{x^2+z^2}$.
3. $\iint\limits_{\sigma}x^2dydz+z^2dxdz+y\,dxdy$, σ – частина поверхні параболоїда $x^2+y^2=4-z$, нормальний вектор $\vec{n}$ якої утворює гострий кут із ортом $\vec{k}$, яка відтинається площиною $z=0$.
4. $\iint\limits_{\sigma}(x^2+z^2)dydz$, σ – зовнішня сторона поверхні циліндра $x=\sqrt{9-y^2}$, яка відтинається площинами $z=0$ і $z=2$.
5. $\iint\limits_{\sigma}(1+2x^2)dydz+y^2dxdz+z\,dxdy$, σ – частина поверхні конуса $x^2+y^2=z^2$, нормальний вектор $\vec{n}$ якої утворює тупий кут із ортом $\vec{k}$, що відтинається площинами $z=0$ і $z=4$.
6. $\iint\limits_{\sigma}(2x+3y+4z)dxdy$, σ – верхня сторона частини площини $x+y+z-6=0$, яка вирізається циліндром $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$.
7. $\iint\limits_{\sigma}3x^2dydz-y^2dxdz-z\,dxdy$, σ – частина поверхні параболоїда $x^2+y^2=1-z$, нормальний вектор $\vec{n}$ якої утворює гострий кут із ортом $\vec{k}$, яка відтинається площиною $z=0$.

8. $\iint\limits_{\sigma}(y-x)dydz+(z-y)dxdz+(x-z)dxdy$, σ – внутрішня сторона замкненої поверхні, утвореної конусом $x^2=y^2+z^2$ і площиною $x=1$.
9. $\iint\limits_{\sigma}3x\,dydz-y\,dxdz-z\,dxdy$, σ – частина поверхні параболоїда $x^2+y^2=9-z$, нормальний вектор $\vec{n}$ якої утворює гострий кут із ортом $\vec{k}$, що відтинається площиною $z=0$.
10. $\iint\limits_{\sigma}(x^2-2y^2+6z)dxdy$, σ – зовнішня сторона частини поверхні циліндра $y^2=6z$, яка відтинається площинами $x=0$ і $x=3$, $z=1$.
11. $\iint\limits_{\sigma}\left(\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}\right)dxdy$, σ – нижня сторона частини поверхні параболоїда $z=4-\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}$, яка відтинається площиною $z=0$.
12. $\iint\limits_{\sigma}(x+z)dydz+(z+y)dxdy$, σ – зовнішня сторона поверхні циліндра $x^2+y^2=1$, яка відтинається площинами $z=0$ і $z=2$.
13. $\iint\limits_{\sigma}4x\,dydz+2y\,dxdz-z\,dxdy$, σ – зовнішня сторона поверхні сфери $x^2+y^2+z^2=4$.
14. $\iint\limits_{\sigma}(x^2+y^2+3z^2)dxdy$, σ – верхня сторона поверхні конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, яка відтинається площинами $z=0$ і $z=2$.
15. $\iint\limits_{\sigma}(5x^2+5y^2+z^2)dxdy$, σ – верхня сторона поверхні сфери $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, яка вирізається конусом $z=\sqrt{x^2+y^2}$.
16. $\iint\limits_{\sigma}2x\,dydz-y\,dxdz+z\,dxdy$, σ – зовнішня сторона замкненої поверхні, утвореної параболоїдом $3z=x^2+y^2$ і півсферою $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$.

17. $\iint\limits_{\sigma} 2x\,dydz+(1-z)\,dxdy$, σ – внутрішня сторона поверхні циліндра $x^2+y^2=4$, яка відтинається площинами $z=0$ і $z=1$.

18. $\iint\limits_{\sigma} yz\,dydz-x^2dxdz-y^2dxdy$, σ – частина поверхні конуса $x^2+z^2=y^2$, нормальний вектор $\vec{n}$ якої утворює тупий кут із ортом $\vec{j}$, що відтинається площинами $y=0$ і $y=1$.

19. $\iint\limits_{\sigma} x^2\,dydz+z^2dxdy$, σ – нижня сторона конуса $x^2+z^2=y^2$, яка відтинається площинами $y=0$ і $y=1$.

20. $\iint\limits_{\sigma} -x\,dydz+z\,dxdz+5dxdy$, σ – верхня частина площини $2x+3y+z=6$, яка лежить у першому октанті.

21. $\iint\limits_{\sigma} x^2dydz+2y^2dxdz-z\,dxdy$, σ – частина поверхні параболоїда $z=x^2+y^2$, нормальний вектор $\vec{n}$ якої утворює гострий кут із ортом $\vec{k}$, що відтинається площиною $z=1$.

22. $\iint\limits_{\sigma} x^2dydz-z^2dxdz+z\,dxdy$, σ – частина поверхні параболоїда $z=3-x^2-y^2$, нормальний вектор $\vec{n}$ якої утворює гострий кут із ортом $\vec{k}$, що відтинається площиною $z=0$.

23. $\iint\limits_{\sigma} y\,dydz+x\,dxdz+z\,dxdy$, σ – зовнішня сторона трикутника, утвореного в перетині площини $x-y+z=1$ з координатними площинами.

24. $\iint\limits_{\sigma} (y-z)\,dydz+(z-x)\,dxdz+(x-y)\,dxdy$, σ – зовнішня сторона конічної поверхні $x^2+y^2=z^2$, яка відтинається площинами $z=0$ і $z=h$.

25. $\iint\limits_{\sigma} x\,dydz+y\,dxdz+z\,dxdy$, σ – зовнішня сторона сфери $x^2+y^2+z^2=a^2$.

26. $\iint\limits_{\sigma} x^2dydz+y^2dxdz-z\,dxdy$, σ – частина поверхні конуса $z^2=x^2+y^2$, нормальний вектор $\vec{n}$ якої утворює гострий кут із ортом $\vec{k}$, що відтинається площинами $z=0$ і $z=1$.

27. $\iint\limits_{\sigma} x^2dydz+z\,dxdy$, σ – частина поверхні параболоїда $z=x^2+y^2$, нормальний вектор $\vec{n}$ якої утворює тупий кут із ортом $\vec{k}$, що відтинається площиною $z=4$.

28. $\iint\limits_{\sigma} \dfrac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$, σ – частина поверхні гіперболоїда $x^2+y^2=z^2+1$, нормальний вектор $\vec{n}$ якої утворює тупий кут із ортом $\vec{k}$, що відтинається площинами $z=0$ і $z=\sqrt{3}$.

29. $\iint\limits_{\sigma} xy\,dydz+yz\,dxdz+xz\,dxdy$, σ – зовнішня сторона сфери $x^2+y^2+z^2=1$, яка лежить у першому октанті.

30. $\iint\limits_{\sigma} (x^2+y^2)z\,dxdz$, σ – зовнішня сторона нижньої половини сфери $x^2+y^2+z^2=9$.

31. $\iint\limits_{\sigma} xz\,dydz+xy\,dxdz+yz\,dxdy$, σ – зовнішня сторона поверхні циліндра $x^2+y^2=1$, що відтинається площинами $z=0$ і $z=5$.

Задача 5. [*гл.4, § 3, приклади 5, 6, 7, 9*]

Обчислити потік векторного поля $\vec{a}=\vec{a}(M)$ через зовнішню сторону замкненої поверхні σ.

Варіанти завдань

1. $\vec{a}=xy\vec{i}+yz\vec{j}+zx\vec{k}$;
$\sigma: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=16, \\ x^2+y^2=z^2\ (z\ge 0). \end{cases}$

2. $\vec{a}=z\vec{i}+(x+y)\vec{j}+y\vec{k}$;
$\sigma: \begin{cases} 2x+y+2z=2, \\ x=0,\ y=0,\ z=0. \end{cases}$

3. $\vec{a}=(x+z)\vec{i}+(x+y)\vec{k}$;
$\sigma: \begin{cases} x^2+y^2=9, \\ z=x,\ z=0\ (z\ge 0). \end{cases}$

4. $\vec{a}=2x\vec{i}+2y\vec{j}+z\vec{k}$;
$\sigma: \begin{cases} y=x^2,\ y=4x^2,\ y=1, \\ z=y,\ z=0\ (x\ge 0). \end{cases}$

5. $\vec{a}=(y+z)\vec{i}+y\vec{j}-x\vec{k}$;
$\sigma: \begin{cases} x^2+z^2=2y, \\ y=2. \end{cases}$

6. $\vec{a}=2(z-y)\vec{i}+(x-z)\vec{k}$;
$\sigma: \begin{cases} z=x^2+3y^2+1,\ z=0, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$

7. $\vec a = x\vec i + z\vec j - y\vec k$; $\sigma: \begin{array}{l} z = 4-2(x^2+y^2), \\ z = 2(x^2+y^2). \end{array}$

8. $\vec a = z\vec i - 4y\vec j + 2x\vec k$; $\sigma: \begin{array}{l} z = x^2+y^2, \\ z = 1. \end{array}$

9. $\vec a = z\vec i + (3y-x)\vec j - z\vec k$; $\sigma: \begin{array}{l} x^2+y^2 = 1, \\ z = x^2+y^2+2,\ z = 0. \end{array}$

10. $\vec a = (2x+y)\vec i + (y+2z)\vec k$; $\sigma: \begin{array}{l} z = 2-4(x^2+y^2), \\ z = 4(x^2+y^2). \end{array}$

11. $\vec a = z\vec i + yz\vec j - xy\vec k$; $\sigma: \begin{array}{l} x^2+y^2 = 4, \\ z = 0,\ z = 1. \end{array}$

12. $\vec a = 2x\vec i - (z-1)\vec k$; $\sigma: \begin{array}{l} x^2+y^2 = 4, \\ z = 0,\ z = 1. \end{array}$

13. $\vec a = x\vec i + 2y\vec j - z\vec k$; $\sigma:\ x^2+y^2+z^2 = 4$.

14. $\vec a = 3x\vec i + 2y\vec j - e^x\vec k$; $\sigma:\ x^2+y^2+z = 3,\ z = 0$.

15. $\vec a = 2x\vec i - 2^x\vec j + (z+1)\vec k$; $\sigma: \begin{array}{l} z+4 = x^2+y^2, \\ z = 8. \end{array}$

16. $\vec a = x\vec i - 2y\vec j - z\vec k$; $\sigma: \begin{array}{l} x^2+y^2+z = 1, \\ z = 0. \end{array}$

17. $\vec a = -2x\vec i + z\vec j + (x+y)\vec k$; $\sigma: \begin{array}{l} x^2+y^2 = 2y, \\ z = x^2+y^2,\ z = 0. \end{array}$

18. $\vec a = (x+z)\vec i + y\vec k$; $\sigma: \begin{array}{l} z = 8-x^2-y^2, \\ z = x^2+y^2. \end{array}$.

19. $\vec a = (2+3x)\vec i - y\vec j + 2z\vec k$; $\sigma: \begin{array}{l} x^2+y^2 = z^2, \\ z = 3,\ z = 0. \end{array}$

20. $\vec a = (y^2+z^2)\vec i + y^2\vec j - 3yz\vec k$; $\sigma: \begin{array}{l} y^2+z^2 = x^2, \\ x = 1,\ x = 0. \end{array}$

21. $\vec a = x^3\vec i + y^3\vec j + z^3\vec k$; $\sigma: \begin{array}{l} x^2+y^2 = \dfrac{R^2}{H^2}z^2, \\ z = 0,\ z = H. \end{array}$

22. $\vec a = (y^2+z^2)\vec i - y^2\vec j + 2yz\vec k$; $\sigma: \begin{array}{l} x^2+z^2 = y^2, \\ y = 1,\ y = 0. \end{array}$

23. $\vec a = y\vec i + y^2\vec j + yz\vec k$; $\sigma: \begin{array}{l} x^2+y^2 = 2z, \\ z = 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0. \end{array}$

24. $\vec a = 5x\vec i + 2z\vec j - y\vec k$; $\sigma: \begin{array}{l} x+y+z = 3, \\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0. \end{array}$

25. $\vec a = xy^2\vec i + yz^2\vec j + x^2z\vec k$; $\sigma: x^2+y^2+z^2 = 1$.

26. $\vec a = x^3\vec i + y^3\vec j + z^3\vec k$; $\sigma: x^2+y^2+z^2 = R^2$

27. $\vec a = (x+y)\vec i + (y+z)\vec j + (z+x)\vec k$; $\sigma: y = 2x,\ y = 4x,\ x = 1,\ z = y^2,\ z = 0$.

28. $\vec a = (y+\sqrt{z})\vec i + 3x\vec j + (3z+5x)\vec k$; $\sigma: z^2 = 8(x^2+y^2),\ z = 2,\ z = 0$.

29. $\vec a = (2x+z)\vec i + (2y+x)\vec j + (y+2z)\vec k$; $\sigma: x^2+y^2 = 4,\ x = z,\ z = 0$.

30. $\vec a = (x+y^2)\vec i + (xz+y)\vec j + (\sqrt{x^2+1}+z)\vec k$; $\sigma: x^2+y^2 = z^2,\ z = 2,\ z = 3$.

31. $\vec a = (2y-3z)\vec i + (3x+2z)\vec j + (x+y+z)\vec k$; $\sigma: \begin{array}{l} x^2+y^2 = 1, \\ z = 4-x-y,\ z = 0. \end{array}$

Задача 6. [*гл.4, § 3, приклади 10, 11*]

Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec a = \vec a(M)$ по замкненій кривій L (обхід кривої проти годинникової стрілки або у напрямі, що відповідає зростанню параметра t).

Варіанти завдань

1. $\vec a = (y-x)\vec i + (x-z)\vec j + (z-y)\vec k$; $L: \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 16, \\ y = z\sqrt{3}. \end{cases}$

2. $\vec a = yz\vec i + xy\vec j + xz\vec k$; $L: \begin{cases} y^2+z^2 = 1, \\ x+y+z = 1. \end{cases}$

3. $\vec a = xy\vec i + x\vec j + y^2\vec k$; $L: \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = \sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$

4. $\vec a = 7z\vec i - x\vec j + yz\vec k$; $L: \begin{cases} x = 6\cos t, \\ y = 6\sin t, \\ z = 1/3, \quad 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$

5. $\vec a = z\vec i - y\vec k$; $L: \begin{cases} x^2+y^2 = 16, \\ x+z = 4. \end{cases}$

6. $\vec a = y^2z^3\vec i + \vec j + z\vec k$; $L: \begin{cases} x^2+y^2 = 9, \\ z = 1. \end{cases}$

7. $\vec a = y^2\vec i + x^2\vec j - z^2\vec k$; $L: \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 16, \\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0. \end{cases}$

8. $\vec a = -3z\vec i + y^2\vec j + 2y\vec k$; $L: \begin{cases} x^2+y^2 = 4, \\ x-3y-2z = 1. \end{cases}$

9. $\vec a = y^2z^2\vec i + x^2z^2\vec j + x^2y^2\vec k$;
$$L:\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\cos 2t, \\ z = 2\cos 3t, \quad 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$$

10. $\vec a = -x^2y^3\,\vec i + 3\,\vec j + y\,\vec k$;
$$L:\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = 5, \quad 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$$

11. $\vec a = (y-z)\vec i + (z-x)\,\vec j + (x-y)\vec k$;
$$L:\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \\ z = 3(1-\cos t), \quad 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$$

12. $\vec a = -x^2y^2\vec i + 3\,\vec j + y\,\vec k$;
$$L:\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = 5, \quad 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$$

13. $\vec a = (x-y)\vec i + x\,\vec j + z^2\vec k$;
$$L:\begin{cases} x^2 + y^2 - 4z^2 = 0, \\ z = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

14. $\vec a = 2yz\,\vec i + xz\,\vec j - x^2\,\vec k$;
$$L:\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ x^2 + y^2 = 9, \quad z > 0. \end{cases}$$

15. $\vec a = -x^2y^3\vec i + \vec j + z\,\vec k$;
$$L:\begin{cases} x = \sqrt[3]{4}\cdot\cos t, \\ y = \sqrt[3]{4}\cdot\sin t, \\ z = 3, \quad 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$$

16. $\vec a = (y-z)\vec i + (z-x)\,\vec j + (x-y)\vec k$;
$$L:\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = 2(1-\cos t), \; 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$$

17. $\vec a = x\,\vec i + z^2\,\vec j + y\,\vec k$;
$$L:\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 2\sin t, \\ z = 2\cos t - 2\sin t - 1, \; 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$$

18. $\vec a = 3y\,\vec i - 3x\,\vec j + x\,\vec k$;
$$L:\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 3\sin t, \\ z = 3 - 3\cos t - 3\sin t, 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$$

19. $\vec a = (y-z)\vec i + (z-x)\,\vec j + (x-y)\vec k$;
$$L:\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x + \dfrac{z}{2} = 1. \end{cases}$$

20. $\vec a = xy\,\vec i + yz\,\vec j + xz\,\vec k$;
$$L:\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ x + y + z = 3. \end{cases}$$

21. $\vec a = 2y\,\vec i - z\,\vec j + x\,\vec k$;
$$L:\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = 4 - \cos t - \sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$$

22. $\vec a = 4y\,\vec i - 3x\,\vec j + x\,\vec k$;
$$L:\begin{cases} x = 4\cos t, \\ y = 4\sin t, \\ z = 4 - 4\cos t - 4\sin t, 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$$

23. $\vec a = yz\,\vec i + xy\,\vec j + xz\,\vec k$;
$$L:\begin{cases} x^2 + z^2 = 1, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

24. $\vec a = xz\,\vec i - \vec j + y\,\vec k$;
$$L:\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ z = 1. \end{cases}$$

25. $\vec a = 4x\,\vec i + 2\,\vec j - xy\,\vec k$;
$$L:\begin{cases} 2(x^2 + y^2) = 1, \\ z = 7. \end{cases}$$

26. $\vec a = (2-xy)\vec i - yz\,\vec j - xz\,\vec k$;
$$L:\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

27. $\vec a = y\,\vec i - x\,\vec j + 2z\,\vec k$;
$$L:\begin{cases} x^2 + y^2 - \dfrac{z^2}{4} = 0, \\ z = 2. \end{cases}$$

28. $\vec a = (x+y)\vec i - x\,\vec j + 6\,\vec k$;
$$L:\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 2. \end{cases}$$

29. $\vec a = yz\,\vec i - xz\,\vec j + xy\,\vec k$;
$$L:\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x^2 + y^2 = 9. \end{cases}$$

30. $\vec a = 4\vec i + 3x\,\vec j + 3xz\,\vec k$;
$$L:\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0, \\ z = 3. \end{cases}$$

31. $\vec a = -2z\,\vec i - x\,\vec j + x^2\vec k$;
$$L:\begin{cases} x = \cos t/3, \\ y = \sin t/3, \\ z = 8, \quad 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$$

Задача 7. [*гл.4, § 3, приклад 12*]

Довести, що векторне поле $\vec a = \vec a(M)$ потенціальне та знайти його потенціал.

Варіанти завдань

1. $\vec a = 6x^2\vec i + 3\cos(3x+2z)\,\vec j + \cos(3y+2z)\vec k$.
2. $\vec a = (y+z)\vec i + (x+z)\,\vec j + (x+y)\vec k$.
3. $\vec a = e^{yz}\,(\vec i + x\,\vec j + xy\,\vec k)$.
4. $\vec a = (y\,\vec i + x\,\vec j)\,\mathrm{arctg}\, z + \dfrac{xy}{1+z^2}\vec k$.
5. $\vec a = 2xyz\,(z\,\vec i + x\,\vec k) + x^2z^2\,\vec j$.
6. $\vec a = y^2z^2\vec i + 2xyz\,(z\,\vec j + y\,\vec k)$.
7. $\vec a = y^2z\,\vec i + 2xyz\,\vec j + xy^2\vec k$.

8. $\vec{a} = 2xyz(z\vec{i} + x\vec{k}) + x^2z^2\vec{j}$.

9. $\vec{a} = \dfrac{e^x\vec{i} + e^y\vec{j} + e^z\vec{k}}{e^x + e^y + e^z}$.

10. $\vec{a} = 2xy^2z\vec{i} + 2x^2yz\vec{j} + x^2y^2\vec{k}$.

11. $\vec{a} = (2xy + z)\vec{i} + (x^2 - 2y)\vec{j} + x\vec{k}$.

12. $\vec{a} = \dfrac{x\vec{i} + y\vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$.

13. $\vec{a} = xy(3x - 4y)\vec{i} + x^2(x - 4y)\vec{j}$.

14. $\vec{a} = (ye^{xy} - 2x\sin(x^2 - y^2))\vec{i} + (xe^{xy} + 2y\sin(x^2 - y^2))\vec{j}$.

15. $\vec{a} = e^y(z\vec{i} + xz\vec{j} + x\vec{k})$.

16. $\vec{a} = (y\vec{i} + x\vec{j})\cos xy - (z\vec{j} + y\vec{k})\sin yz$.

17. $\vec{a} = e^y\vec{i} + (xe^y - 2y)\vec{j}$.

18. $\vec{a} = yx^{y-1}\vec{i} + x^y\ln x\,\vec{j}$.

19. $\vec{a} = (1 + x\sqrt{x^2 + y^2})\vec{i} + (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)y\vec{j}$.

20. $\vec{a} = \dfrac{1 - y}{x^2y}\vec{i} + \dfrac{1 - 2x}{xy^2}\vec{j}$.

21. $\vec{a} = \dfrac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt[3]{x^2 + y^2 + z^2}}$.

22. $\vec{a} = \dfrac{yz}{1 + x^2}\vec{i} + (z\vec{j} + y\vec{k})\operatorname{arctg} x$.

23. $\vec{a} = (3x^2 - 2xy + y^2)\vec{i} + (2xy - x^2 - 3y^2)\vec{j}$.

24. $\vec{a} = \dfrac{1 - y}{x^2y}\vec{i} + \dfrac{1 - 2x}{xy^2}\vec{j}$.

25. $\vec{a} = (y^2e^{xy^2} + 3)\vec{i} + (2xye^{xy^2} - 1)\vec{j}$.

26. $\vec{a} = \left(\sin^2 y - y\sin 2x + \dfrac{1}{2}\right)\vec{i} + (x\sin 2y + \cos^2 x + 1)\vec{j}$.

27. $\vec{a} = \left(e^{-x} - \dfrac{2}{x^3y}\right)\vec{i} + \left(\sin 3y - \dfrac{1}{x^2y^2}\right)\vec{j}$.

28. $\vec{a} = \left(\dfrac{2}{x^2} + \cos^2 y\right)\vec{i} + (y - x\sin 2y)\vec{j}$.

29. $\vec{a} = \left(\dfrac{1}{y}\sin\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x} + 1\right)\vec{i} + \left(\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y^2}\sin\dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{y^2}\right)\vec{j}$.

30. $\vec{a} = \left(\dfrac{y}{1 + x^2y^2} - 1\right)\vec{i} + \left(\dfrac{x}{1 + x^2y^2} - 10\right)\vec{j}$.

31. $\vec{a} = \left(12x^2y + \dfrac{1}{y^2}\right)\vec{i} + \left(4x^2 - \dfrac{2x}{y^3}\right)\vec{j}$.

ГЛАВА 6. ДОВІДКОВИЙ МАТЕРІАЛ

§1. Основні формули інтегрального числення функцій однієї змінної

I. Невизначений інтеграл

Основна таблиця інтегралів

1. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $(\alpha \neq -1)$, $\int 1 \cdot dx = \int dx = x + C$.
2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$, $(a > 0, a \neq 1)$.
4. $\int e^x dx = e^x + C$.
5. $\int \cos x \; dx = \sin x + C$.
6. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$.
7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.
8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.
9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.
10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$.
11. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$.
12. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C$.
13. $\int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C$.

14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$.
15. $\int \dfrac{x\, dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2} + C$.
16. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left| \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} \right| + C$.
17. $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left| \operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) \right| + C$.
18. $\int \operatorname{tg} x \; dx = -\ln|\cos x| + C$.
19. $\int \operatorname{ctg} \; x \, dx = \ln|\sin x| + C$.
20. $\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C$.
21. $\int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C$.
22. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$.
23. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$.

Заміна змінної

$$\int f(x)\, dx = \left| \begin{array}{c} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)\, dt \end{array} \right| = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt .$$

Інтегрування частинами

$$\int u\, dv = u v - \int v\, du .$$

Інтегрування найпростіших дробів

1) $\int \dfrac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C$.

2) $\int \dfrac{A}{(x-a)^k} dx = \dfrac{A}{1-k} \dfrac{1}{(x-a)^{k-1}} + C$.

3) $\int \dfrac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \dfrac{A}{2} \ln(x^2+px+q) + \dfrac{\left(B - A\dfrac{p}{2}\right)}{\sqrt{q - \dfrac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \dfrac{x + \dfrac{p}{2}}{\sqrt{q - \dfrac{p^2}{4}}} + C$.

4) $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \frac{A}{2}\,\frac{(t^2+a^2)^{-k+1}}{-k+1} + \left(B - A\frac{p}{2}\right) I_k$, де

$$I_k = \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \left| \begin{array}{c} x = t - \dfrac{p}{2} \\ dx = dt \\ q - \dfrac{p^2}{4} = a^2 > 0 \end{array} \right| = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} =$$

$$= \frac{t}{2a^2(k-1)}\,\frac{1}{(t^2+a^2)^{k-1}} + \frac{1}{a^2}\,\frac{2k-3}{2k-2} I_{k-1},\ k>1.$$

При $k=1$: $I_1 = \displaystyle\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C$.

Інтегрування ірраціональних функцій

Інтеграл	Підстановка
$\int R\left(x, x^{\frac{r_1}{s_1}}, x^{\frac{r_2}{s_2}}, \ldots, x^{\frac{r_n}{s_n}}\right) dx$	$x = t^k$, де k – загальний знаменник дробів $\frac{r_i}{s_i}$, $i = \overline{1, n}$.
$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_1}{s_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_2}{s_2}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_n}{s_n}}\right) dx$	$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$, де k – загальний знаменник дробів $\frac{r_i}{s_i}$, $i = \overline{1, n}$.
$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$	Підстановки Ейлера: а) $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x\sqrt{a}$, $a>0$; б) $\sqrt{ax^2+bx+c} = x\,t \pm \sqrt{c}$, $c>0$; в) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = t(x-x_1)$.

Диференціальний біном

$\int x^m (a+bx^n)^p\,dx$	
а) p – ціле число	а) $t = \sqrt[s]{x}$, де s – загальний знаменник дробів m і n

б) $\frac{m+1}{n}$ – ціле число	б) $a+bx^n = t^s$, де s – знаменник дробу p
в) $\frac{m+1}{n} + p$ – ціле число	в) $ax^{-n} + b = t^s$, де s – знаменник дробу p

Інтегрування тригонометричних функцій

$\int R(\sin x, \cos x)\,dx$	$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$; $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
$\int R(\sin x, \cos x)\,dx$, де а) $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ б) $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ в) $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$	 $t = \cos x$ $t = \sin x$ $t = \operatorname{tg} x$
$\int R(\operatorname{tg} x)\,dx$	$t = \operatorname{tg} x$
$\int R(\sin^n x, \cos^m x)\,dx$, n, m – парні, хоча б одне з них від'ємне	$t = \operatorname{tg} x$; $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$; $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$
$\int R(\sin^n x, \cos^m x)\,dx$, $n = 2k$, $m = 2p$	$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$; $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$
$\int \cos mx \cos nx\,dx$	$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]$
$\int \sin mx \cos nx\,dx$	$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]$
$\int \sin mx \sin nx\,dx$	$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$

Тригонометричні підстановки

$\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right) dx$	$x = a\sin t$ або $x = a\cos t$
$\int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right) dx$	$x = a \operatorname{tg} t$ або $x = a \operatorname{ctg} t$
$\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right) dx$	$x = \frac{a}{\cos t}$

Інтегрування гіперболічних функцій	
Аналогічно інтегруванню тригонометричних функцій з урахуванням формул: $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$; $\mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x = \mathrm{ch} 2x$; $2\,\mathrm{sh}\,x \cdot \mathrm{ch}\,x = \mathrm{sh}\,2x$; $\mathrm{sh}^2 x = \frac{\mathrm{ch}\,2x - 1}{2}$; $\mathrm{ch}^2 x = \frac{\mathrm{ch}\,2x + 1}{2}$; $1 - \mathrm{th}^2 x = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$; $\mathrm{cth}^2 x - 1 = \frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$	
II. Визначений інтеграл	
Формула Ньютона-Лейбніца	
$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big\|_a^b = F(b) - F(a)$	
Заміна змінної	
$\int_a^b f(x)\,dx = \left\| \begin{array}{l} x = \varphi(t),\ dx = \varphi'(t)\,dt \\ \varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b \end{array} \right\| = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt$	
Інтегрування частинами	
$\int_a^b u\,dv = uv\Big\|_a^b - \int_a^b v\,du$	
III. Застосування визначеного інтеграла	
Площа плоскої фігури D	
Декартова система координат $D: y = f(x),\ f(x) \ge 0,$ $x = a,\ x = b,\ y = 0$.	$S = \int_a^b f(x)\,dx$
$D: y = f_1(x), y = f_2(x),$ $f_1(x) \le f_2(x),$ $x = a,\ x = b,\ a \le b$.	$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx$
Полярна система координат $D: \rho = \rho(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta$.	$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,d\varphi$

Параметричне задання $D: y = f(x),\ x \in [a,b],$ $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \alpha \le t \le \beta$.	$S = \int_a^b y(x)\,dx = \left\| \begin{array}{l} x = x(t), \\ y = y(t), \\ dx = x'(t)dt, \\ x = a,\ t = \alpha, \\ x = b,\ t = \beta. \end{array} \right\| = \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt$
Довжина кривої L	
Декартова система координат $L: y = f(x),\ a \le x \le b$.	$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\ dx$
Полярна система координат $L: \rho = \rho(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta$.	$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\ d\varphi$
Параметричне задання $L \subset \mathbf{R}^2$ $L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \alpha \le t \le \beta$;	$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\ dt$
$L \subset \mathbf{R}^3$ $L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t),\ \alpha \le t \le \beta. \\ z = z(t), \end{cases}$	$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\ dt$
Об'єм тіла за площами паралельних перерізів	
$S(x)$ – площа перерізу тіла площиною, перпендикулярною осі Ox, $a \le x \le b$	$V = \int_a^b S(x)\,dx$
Об'єм тіла обертання	
Декартова система координат $D: y = f(x), y = 0,\ x = a, x = b,$ вісь обертання – Ox	$V_x = \pi\int_a^b y^2(x)\,dx$
$D: y_1 = f_1(x),\ y_2 = f_2(x),$ $0 \le f_1(x) \le f_2(x),$ $x = a,\ x = b,$ вісь обертання – Ox	$V_x = \pi\int_a^b [f_2^{\,2}(x) - f_1^{\,2}(x)]\,dx$
$D: x = \varphi(y),\ x = 0,\ y = c, y = d,$ вісь обертання – Oy	$V_y = \pi\int_c^d \varphi^2(y)\,dy$

$D: x_1 = \varphi_1(y),\ x_2 = \varphi_2(y),$ $0 \le \varphi_1(y) \le \varphi_2(y),$ $y = c,\ y = d,$ вісь обертання – Oy	$V_y = \pi \int_c^d [\varphi_2^{\,2}(y) - \varphi_1^{\,2}(y)]dy$
Полярна система координат $D: \rho = \rho(\varphi),$ $\varphi_1 = \alpha,\ \varphi_2 = \beta\ (\alpha < \beta)$	$V = \frac{2}{3}\pi \int_\alpha^\beta \rho^3(\varphi) \cdot \sin\varphi\, d\varphi$
Площа поверхні обертання	
Декартова система координат $l: y = f(x) \ge 0,\ a \le x \le b.$	$P_x = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$
Полярна система координат $l: \rho = \rho(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta.$	$P_x = 2\pi \int_\alpha^\beta \rho \sin\varphi \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\, d\varphi$
Параметричне задання $l: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \alpha \le t \le \beta;$	$P_x = 2\pi \int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt$
Статичні моменти плоскої кривої l відносно координатних осей	
$l: y = f(x),\ a \le x \le b;$ відносно осі Ox	$M_x = \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$
$l: y = f(x),\ a \le x \le b;$ відносно осі Oy	$M_y = \int_a^b x\sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$
Статичні моменти плоскої фігури D відносно координатних осей	
$D: y = f(x), y = 0,\ x = a, x = b;$ відносно осі Ox	$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\, dx$
$D: y = f(x), y = 0,\ x = a, x = b;$ відносно осі Oy	$M_y = \int_a^b x \cdot f(x)\, dx$
Моменти інерції плоскої кривої l відносно координатних осей	
$l: y = f(x),\ a \le x \le b;$ відносно осі Ox	$I_x = \int_a^b f^2(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$
$l: y = f(x),\ a \le x \le b;$ відносно осі Oy	$I_y = \int_a^b x^2 \cdot \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$

Моменти інерції плоскої фігури D відносно координатних осей	
$D: y = f(x), y = 0,\ x = a, x = b;$ відносно осі Ox	$I_x = \frac{1}{3}\int_a^b f^3(x)\, dx$
$D: y = f(x), y = 0,\ x = a, x = b;$ відносно осі Oy	$I_y = \int_a^b x^2 f(x)\, dx$
Координати центра ваги плоскої кривої l	
$l: y = f(x),\ a \le x \le b$	$x_c = \frac{M_y}{M} = \frac{\int_a^b x\sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx}{\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx}$
	$y_c = \frac{M_x}{M} = \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx}{\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx}$
Координати центра ваги плоскої фігури D	
$D: y = f(x),\ y = 0,\ x = a,\ x = b$	$x_c = \frac{M_y}{M} = \frac{\int_a^b x f(x)\, dx}{\int_a^b f(x)\, dx}$
	$y_c = \frac{M_x}{M} = \frac{\int_a^b f^2(x)\, dx}{2\int_a^b f(x)\, dx}$
Робота змінної сили $F = F(x)$	
$a \le x \le b$	$A = \int_a^b F(x)\, dx$

IV. Невласні інтеграли	
Невласні інтеграли I роду	
Типи	$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$; $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$; $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$, $c \in \mathbf{R}$
Означення	$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$, інтеграл збігається за умови існування скінченної границі справа
Обчислення	$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = F(x)\Big\vert_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a)$, $F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$, $F(x)$ – первісна функції $f(x)$ на проміжку $[a, +\infty)$
Ознаки порівняння	$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ (1) $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ (2) 1) $0 \le f(x) \le g(x)$ $\forall x \in [a, +\infty)$ а) інтеграл (2) збіжний $\Rightarrow$ інтеграл (1) збіжний; б) інтеграл (1) розбіжний $\Rightarrow$ інтеграл (2) розбіжний; 2) $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ $\forall x \in [a, +\infty)$ $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A > 0$ $\Rightarrow$ інтеграли (1), (2) обидва збігаються або обидва розбігаються
Інтеграл для порівняння	$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ – $\begin{cases}\text{збігається, якщо } p > 1,\\ \text{розбігається, якщо } p \le 1.\end{cases}$
$f(x)$ – знакозмінна функція на проміжку $[a, +\infty)$	
Достатня ознака порівняння	$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ (1) $\int_a^{+\infty} \vert f(x)\vert\,dx$ (2) інтеграл (2) збігається $\Rightarrow$ інтеграл (1) збігається

Абсолютно збіжний інтеграл	$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ – абсолютно збіжний, якщо $\int_a^{+\infty} \vert f(x)\vert\,dx$ – збіжний
Умовно збіжний інтеграл	$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ – умовно збіжний, якщо $\int_a^{+\infty} \vert f(x)\vert\,dx$ – розбіжний, а $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ – збіжний
Невласні інтеграли II роду	
Типи	$\int_a^b f(x)\,dx$, $x = a$ – особлива точка функції $f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$; $\int_a^b f(x)\,dx$, $x = b$ – особлива точка функції $f(x)$, $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \infty$; $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$, $x = c$, $a < c < b$ – особлива точка функції $f(x)$, $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$
Означення	$\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$, де $x = a$ – особлива точка функції $f(x)$. Інтеграл збігається за умови існування скінченної границі справа
Обчислення	$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big\vert_{a+0}^{b} = F(b) - F(a+0)$, $F(a+0) = \lim\limits_{x\to a+0} F(x)$, $F(x)$ – первісна функції $f(x)$ на проміжку $(a, b]$, $x = a$ – особлива точка функції $f(x)$

Ознаки порівняння	$\int_a^b f(x)\,dx \quad (1) \qquad \int_a^b g(x)\,dx \quad (2)$, точка $x=a$ – особлива точка функцій $f(x)$ та $g(x)$ 1) $0 \le f(x) \le g(x) \quad \forall x \in (a,b]$ а) інтеграл (2) збіжний $\Rightarrow$ інтеграл (1) збіжний; б) інтеграл (1) розбіжний $\Rightarrow$ інтеграл (2) розбіжний; 2) $f(x) > 0, \quad g(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b]$ $\exists \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A > 0 \Rightarrow$ інтеграли (1), (2) обидва збіжні або обидва розбіжні
Інтеграл для порівняння	$\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ – $\begin{cases} \text{збігається, якщо } p<1, \\ \text{розбігається, якщо } p \ge 1. \end{cases}$
$f(x)$ – знакозмінна функція на проміжку $(a,b]$, $x=a$ – особлива точка функції $f(x)$	
Достатня ознака збіжності	$\int_a^b f(x)\,dx \quad (1) \qquad \int_a^b \lvert f(x)\rvert\,dx \quad (2)$ інтеграл (2) збігається $\Rightarrow$ інтеграл (1) збігається
Абсолютно збіжний інтеграл	$\int_a^b f(x)\,dx$ – абсолютно збіжний, якщо $\int_a^b \lvert f(x)\rvert\,dx$ – збіжний
Умовно збіжний інтеграл	$\int_a^b f(x)\,dx$ – умовно збіжний, якщо $\int_a^b \lvert f(x)\rvert\,dx$ – розбіжний, а $\int_a^b f(x)\,dx$ – збіжний

§2. Диференціальне числення функцій багатьох змінних

Поняття або співвідношення, що визначаються	Формула
1	2
Функція n змінних	$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(\vec{x}) = f(P)$
Функція двох змінних	$z = f(x,y)$
Повний приріст	$\Delta u = f(x_1+\Delta x_1, \ldots, x_n+\Delta x_n) - f(x_1,\ldots,x_n)$
Частинний приріст по змінній x_k	$\Delta_{x_k} u = f(x_1,\ldots,x_k+\Delta x_k,\ldots,x_n) - f(x_1,\ldots,x_n)$
Частинна похідна	$u = f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ $\frac{\partial u}{\partial x_k} = \lim\limits_{\Delta x_k\to 0} \frac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k}$
	$z = f(x,y)$ $\frac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y\to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$
Повний диференціал	$u = f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ $du = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i$
	$z = f(x,y)$ $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$
Формула повної похідної	$u = f(x_1,x_2,\ldots,x_n), \; x_i = \varphi_i(x_1), \; i = \overline{2,n}$ $\frac{du}{dx_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} + \sum\limits_{i=2}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dx_1}$
	$u = f(x,y,z), \; y = y(x), \; z = z(x)$ $\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dx}$

1	2
Формула для похідної складної функції	$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_i = \varphi_i(t_1, \ldots, t_m)$ $\dfrac{\partial u}{\partial t_j} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \dfrac{\partial x_i}{\partial t_j}$, $j = \overline{1, m}$
	$z = f(x, y)$, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ $\dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}$; $\dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v}$
Похідні функції, заданої неявно	
а) $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = 0$	$\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = -\dfrac{F'_{x_i}}{F'_u}$, $i = \overline{1, n}$
б) $F(x, y) = 0$	$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{F'_x}{F'_y}$
в) $F(x, y, z) = 0$	$\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F'_x}{F'_z}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F'_y}{F'_z}$
Диференціал другого порядку	
а) $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$	$d^2u = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$
б) $z = f(x, y)$	$d^2z = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx\,dy + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$
в) $u = f(x, y, z)$	$d^2u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2 + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}dz^2 +$ $+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}dxdz + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}dydz$
Рівняння дотичної площини K до поверхні P в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$	$P: F(x, y, z) = 0$ $K:\ F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) +$ $+F'_z(M_0)(z - z_0) = 0$
	$P:\ z = f(x, y)$ $K:\ f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) -$ $-(z - z_0) = 0$

1	2
Рівняння нормалі N до площини P в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$	$P: F(x, y, z) = 0$ $N:\ \dfrac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \dfrac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \dfrac{z - z_0}{F'_z(M_0)}$
	$P: z = f(x, y)$ $N:\ \dfrac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \dfrac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \dfrac{z - z_0}{-1}$
Формула Тейлора розкладу функції в околі точки M_0	$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = u(M)$ $(m+1)$ раз диференційовна в околі точки M_0 $O(M_0)$ $u(M) = u\big\|_{M_0} + \sum\limits_{k=1}^{m}\dfrac{1}{k!}d^k u\big\|_{M_0} + \dfrac{1}{(m+1)!}d^{m+1}u\big\|_N$, $N \in O(M_0)$
	$z = f(x, y)$ $f(x, y) = f(M_0) +$ $+\dfrac{1}{1!}\left(\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial x}(x - x_0) + \dfrac{\partial f(M_0)}{\partial y}(y - y_0)\right) +$ $+\dfrac{1}{2!}\left(\dfrac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2}(x - x_0)^2 +\right.$ $+2\dfrac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial y}(x - x_0)(y - y_0) +$ $\left.+\dfrac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2}(y - y_0)^2\right) + \ldots +$ $+\dfrac{1}{m!}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}(x - x_0) + \dfrac{\partial}{\partial y}(y - y_0)\right)^m f(M_0) + o(\rho^m)$, $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$
Необхідні умови екстремуму в точці M_0	$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\bigg\|_{M_0} = 0$, $i = \overline{1, n}$ $du\big\|_{M_0} = 0$

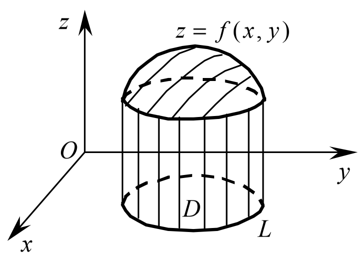
1	2
Достатні умови екстремуму в точці M_0	$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $d^2u\big\|_{M_0} > 0 \Rightarrow u(M_0) = u_{\min}$; $d^2u\big\|_{M_0} < 0 \Rightarrow u(M_0) = u_{\max}$; $d^2u\big\|_{M_0} \neq 0,\ d^2u\big\|_{M_0}$ – знакозмінна квадратична форма $\Rightarrow u(M_0) \neq u_{\min},\ u(M_0) \neq u_{\max}$; $d^2u\big\|_{M_0} = 0$ – потрібне додаткове дослідження.
	$z = f(x, y)$ $a_{11} = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right\|_{M_0},\ a_{12} = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\ \partial y}\right\|_{M_0},\ a_{22} = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right\|_{M_0}$ $\Delta_1 = a_{11},\quad \Delta_2 = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2$ $d^2z\big\|_{M_0} > 0 \Rightarrow \Delta_1 > 0,\quad \Delta_2 > 0 \Rightarrow z(M_0) = z_{\min}$; $d^2z\big\|_{M_0} < 0 \Rightarrow \Delta_1 < 0,\quad \Delta_2 > 0 \Rightarrow z(M_0) = z_{\max}$; $\forall \Delta_1,\ \Delta_2 < 0 \Rightarrow z(M_0) \neq z_{\min},\quad z(M_0) \neq z_{\max}$; $\Delta_2 = 0 \Rightarrow$ потрібне додаткове дослідження.
Умовний екстремум	$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \underset{\vec{x} \in \Omega}{\to} \max\ (\min)$ $\Omega:\ \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) = 0,\quad i = \overline{1, m},\quad m < n$
Функція Лагранжа	$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) +$ $+ \sum_{k=1}^{m} \lambda_k\, \varphi_k(x_1, \ldots, x_n)$, λ_k – множники Лагранжа
Необхідні умови умовного екстремуму	$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0,\ i = \overline{1, n}; \\ \varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,\ k = \overline{1, m}. \end{cases}$
Достатні умови умовного екстремуму в точці M_0	$d^2L(M_0) > 0 \Rightarrow u(M_0) = u_{\min}$ $d^2L(M_0) < 0 \Rightarrow u(M_0) = u_{\max}$

§3. Кратні інтеграли

Таблиця 3.1 – Подвійний інтеграл та його застосування

Поняття або співвідношення, що визначаються	Формула
1	2
Подвійний інтеграл від функції $f(x, y)$ по області D	$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta S_i$
Обчислення подвійного інтеграла: а) область D : $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$, $a \le x \le b$;	$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy$
б) область D : $\psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)$, $c \le y \le d$.	$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,dx$
Якобіан перетворення: $\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v). \end{cases}$	$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$
Заміна змінних у подвійному інтегралі: а) перехід до криволінійних координат u та v $\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v). \end{cases}$	$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v))\,\|I\|\,du dv$
б) перехід до полярних координат ρ та φ $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases}$ $0 \le \rho < +\infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi$.	$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\, d\rho d\varphi$

Продовження таблиці 3.1

1	2
в) перехід до узагальнених полярних координат $\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi, \\ y = b\rho\sin\varphi, \quad a>0,\ b>0 \end{cases}$ $0 \le \rho < +\infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi$	$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D'} f(a\rho\cos\varphi, b\rho\sin\varphi)\,ab\rho\,d\rho d\varphi$
Площа S_D області $D \subset \mathbf{R}^2$	$S_D = \iint\limits_D dx\,dy$
Об'єм тіла G, обмеженого поверхнями: $\sigma_1:\ z = f(x,y) \ge 0$, $\text{пр}_{xOy}\sigma_1 = D$, $\sigma_2:\ z = 0$, σ_3: циліндрична поверхня з твірною, паралельною осі Oz, і напрямною L – межею області D	$V = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ 
Об'єм тіла G, обмеженого поверхнями: $\sigma_1:\ z = f_1(x,y)$, $\sigma_2:\ z = f_2(x,y)$, $f_1(x,y) \le f_2(x,y)$, $\text{пр}_{xOy}\sigma_1 = \text{пр}_{xOy}\sigma_2 = D$.	$V = \iint\limits_D [f_2(x,y) - f_1(x,y)]\,dxdy$
Площа S_σ поверхні $\sigma: z = f(x,y)$, $\text{пр}_{xOy}\sigma = D$	$S_\sigma = \iint\limits_D \sqrt{1 + f_x'^2(x,y) + f_y'^2(x,y)}\,dxdy$
Маса m матеріальної пластинки $D \subset \mathbf{R}^2$ з густиною $\mu(x,y)$	$m = \iint\limits_D \mu(x,y)\,dx\,dy$
Середня густина $\mu_{\text{сер}}$ матеріальної пластинки, яка має масу m, площу S і густину $\mu(x,y)$	$\mu_{\text{сер}} = \dfrac{m}{S} = \dfrac{\iint\limits_D \mu(x,y)\,dx\,dy}{\iint\limits_D dx\,dy}$

Таблиця 3.2 – Потрійний інтеграл та його застосування

Поняття або співвідношення, що визначаються	Формула
1	2
Потрійний інтеграл від функції $f(x,y,z)$ по області $G \subset \mathbf{R}^3$.	$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\,\Delta V_i$
Обчислення потрійного інтеграла по області G: $G:\ z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)$, $y_1(x) \le y \le y_2(x)$, $a \le x \le b$.	$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$
Якобіан перетворення: $\begin{cases} x = x(u,v,w), \\ y = y(u,v,w), \\ z = z(u,v,w). \end{cases}$	$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$
Заміна змінних у потрійному інтегралі: а) перехід до криволінійних координат u, v, w $\begin{cases} x = x(u,v,w), \\ y = y(u,v,w), \\ z = z(u,v,w). \end{cases}$	$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{G'} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))\,\|I\|\,dudvdw$
б) перехід до циліндричних координат ρ, φ, z $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z, \end{cases}$ $0 \le \rho < +\infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$	$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{G'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\,\rho\,d\rho d\varphi dz$

Продовження таблиці 3.2

1	2
в) перехід до сферичних координат r, φ, θ $\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\theta, \end{cases}$ $0 \le r < +\infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,$ $0 \le \theta \le \pi$	$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{G'} f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)\,r^2\sin\theta\,drd\varphi d\theta$
Об'єм V тіла $G \subset \mathbf{R}^3$	$V = \iiint\limits_G dxdydz$
Маса m тіла $G \subset \mathbf{R}^3$ з густиною $\mu(x,y,z)$	$m = \iiint\limits_G \mu(x,y,z)\,dxdydz$
Середня густина $\mu_{\text{сер}}$ тіла, яке має масу m, об'єм V і густину $\mu(x,y,z)$	$\mu_{\text{сер}} = \dfrac{m}{V} = \dfrac{\iiint\limits_G \mu(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint\limits_G dxdydz}$

§4. Криволінійні інтеграли. Поверхневі інтеграли. Теорія поля

Таблиця 4.1 – Криволінійні інтеграли

Поняття або співвідношення, що визначаються	Формула
1	2
Криволінійний інтеграл першого роду	
Криволінійний інтеграл першого роду від функції $f(x,y,z)$ по дузі AB	$\int\limits_{AB} f(x,y,z)\,dl = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta l_i$
Обчислення криволінійного інтеграла першого роду	
а) $AB \subset \mathbf{R}^3$ $AB: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t),\ t_1 \le t \le t_2 \end{cases}$	$\int\limits_{AB} f(x,y,z)\,dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt$
б) $AB \subset \mathbf{R}^2$ $AB: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t),\ t_1 \le t \le t_2 \end{cases}$	$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f[x(t),y(t)]\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt$
$AB: y = y(x),\ a \le x \le b$	$\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl = \int\limits_{a}^{b} f[x,y(x)]\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx$
$AB: x = x(y),\ c \le y \le d$	$\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl = \int\limits_{c}^{d} f[x(y),y]\sqrt{x'^2(y)+1}\,dy$
$AB: \rho = \rho(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta$	$\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}\,d\varphi$
Застосування криволінійного інтеграла першого роду	
а) довжина l дуги AB	$l = \int\limits_{AB} dl$

Продовження таблиці 4.1

1	2
б) маса m матеріальної дуги AB з густиною $\mu=\mu(x,y,z)$	$m = \int\limits_{AB} \mu(x,y,z)\,dl$
Криволінійний інтеграл другого роду	
Криволінійний інтеграл другого роду від вектор-функції $\vec{F}(x,y,z)=$ $=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ по дузі AB	$\int\limits_{AB} P\,dx+Q\,dy+R\,dz = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}(\vec{F}(M_i),\overrightarrow{\Delta S_i})$
Обчислення криволінійного інтеграла другого роду	
а) $AB \subset \mathbf{R}^3$ $AB{:}x=x(t), y=y(t), z=z(t)$, t змінюється від t_A до t_B	$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=$ $=\int\limits_{t_A}^{t_B}[P(x(t),y(t),z(t))x'(t)+$ $+Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)+R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]dt$
б) $AB \subset \mathbf{R}^2$ $AB: x=x(t),\ y=y(t)$, t змінюється від t_A до t_B;	$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy =$ $=\int\limits_{t_A}^{t_B}[P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t)]dt$
$AB: y=y(x)$, x змінюється від x_A до x_B;	$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy =$ $=\int\limits_{x_A}^{x_B}[P(x,y(x))+Q(x,y(x))y'(x)]\,dx$
$AB: x=x(y)$, y змінюється від y_A до y_B	$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy =$ $=\int\limits_{y_A}^{y_B}[P(x(y),y)x'(y)+Q(x(y),y)]\,dy$
Формула Гріна	$\oint\limits_{L} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy = \iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$

Продовження таблиці 4.1

1	2
Застосування криволінійного інтеграла другого роду	
а) площа плоскої області D, обмеженої кривою L	$S=-\oint\limits_{L} y\,dx$; $S=\oint\limits_{L} x\,dy$; $S=\frac{1}{2}\oint\limits_{L} x\,dy-y\,dx$
б) робота сили $\vec{F}=(P,Q,R)$ вздовж лінії L	$A=\int\limits_{L} P\,dx+Q\,dy+R\,dz$

Таблиця 4.2 – Поверхневі інтеграли

Поняття або співвідношення, що визначаються	Формула
1	2
Поверхневий інтеграл першого роду	
Поверхневий інтеграл першого роду від функції $f(x,y,z)$ по поверхні σ	$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)\,d\sigma = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta\sigma_i$
Обчислення поверхневого інтеграла першого роду	
$\sigma: z=z(x,y)$, пр$_{xOy}\sigma = D_{xy}$	$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)\,d\sigma =$ $=\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2(x,y)+z_y'^2(x,y)}\ dxdy$
$\sigma: y=y(x,z)$, пр$_{xOz}\sigma = D_{xz}$	$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)\,d\sigma =$ $=\iint\limits_{D_{xz}} f(x,y(x,z),z)\sqrt{1+y_x'^2(x,z)+y_z'^2(x,z)}\ dxdz$
$\sigma: x=x(y,z)$, пр$_{yOz}\sigma = D_{yz}$	$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)\,d\sigma =$ $=\iint\limits_{D_{yz}} f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+x_y'^2(y,z)+x_z'^2(y,z)}\ dydz$

Продовження таблиці 4.2

1	2
Застосування поверхневого інтеграла першого роду	
а) площа поверхні σ	$S=\iint\limits_{\sigma} d\sigma$
б) маса матеріальної поверхні σ з густиною $\mu=\mu(x,y,z)$	$m=\iint\limits_{\sigma}\mu(x,y,z)\,d\sigma$
Поверхневий інтеграл другого роду	
Поверхневий інтеграл другого роду від вектор-функції $\vec{F}(x,y,z)=$ $=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ по стороні поверхні σ, визначеної одиничним нормальним вектором $\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$.	$\iint\limits_{\sigma}(\vec{F},\vec{n})\,d\sigma=$ $=\iint\limits_{\sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,d\sigma=$ $=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}(\vec{F}(M_i),\vec{n}(M_i))\,\Delta\sigma_i$
Обчислення поверхневого інтеграла другого роду	
а) проектування на всі три координатні площини $\sigma: z=z(x,y)$, $\text{пр}_{xOy}\sigma=D_{xy}$ $\sigma: y=y(x,z)$, $\text{пр}_{xOz}\sigma=D_{xz}$ $\sigma: x=x(y,z)$, $\text{пр}_{yOz}\sigma=D_{yz}$	$\iint\limits_{\sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,d\sigma=$ $=\pm\iint\limits_{D_{yz}}P(x(y,z),y,z)\,dydz\,\pm$ $\pm\iint\limits_{D_{xz}}Q(x,y(x,z),z)dxdz\,\pm\iint\limits_{D_{xy}}R(x,y,z(x,y))dxdy$ знак вибирається відповідно до знаку $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ на σ
б) проектування на одну з координатних площин $\sigma: z=z(x,y)$, $\text{пр}_{xOy}\sigma=D_{xy}$ $\sigma: y=y(x,z)$, $\text{пр}_{xOz}\sigma=D_{xz}$ $\sigma: x=x(y,z)$, $\text{пр}_{yOz}\sigma=D_{yz}$	$\iint\limits_{\sigma}(\vec{F},\vec{n})\,d\sigma=\iint\limits_{D_{xy}}\left.\dfrac{(\vec{F},\vec{n})}{\lvert\cos\gamma\rvert}\right\|_{z=z(x,y)}dxdy$ $\iint\limits_{\sigma}(\vec{F},\vec{n})\,d\sigma=\iint\limits_{D_{xz}}\left.\dfrac{(\vec{F},\vec{n})}{\lvert\cos\beta\rvert}\right\|_{y=y(x,z)}dxdz$ $\iint\limits_{\sigma}(\vec{F},\vec{n})\,d\sigma=\iint\limits_{D_{yz}}\left.\dfrac{(\vec{F},\vec{n})}{\lvert\cos\alpha\rvert}\right\|_{x=x(y,z)}dydz$

Продовження таблиці 4.2

1	2
Формула Остроградського-Гаусса	$\iint\limits_{\sigma}P\,dydz+Q\,dxdz+R\,dxdy=$ $=\iiint\limits_{G}\left(\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$ σ – зовнішня сторона замкненої поверхні, що обмежує тіло G
Формула Стокса	$\oint\limits_{L}P\,dx+Q\,dy+R\,dz=$ $=\iint\limits_{\sigma}\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy+\left(\dfrac{\partial R}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+$ $+\left(\dfrac{\partial P}{\partial z}-\dfrac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz$ орієнтація кривої L узгоджена з вибором сторони поверхні σ
Застосування поверхневого інтеграла другого роду	
Обчислення кількості рідини Π, що протікає через поверхню σ в одиницю часу в сторону, визначену напрямом вектора нормалі $\vec{n}$, якщо $\vec{F}(x,y,z)=\vec{v}(x,y,z)$ – швидкість руху рідини	$\Pi=\iint\limits_{\sigma}(\vec{v},\vec{n})\,d\sigma$

Таблиця 4.3 – Теорія поля

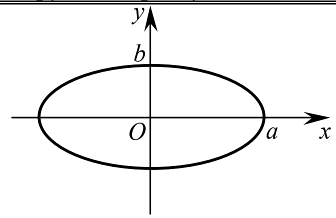
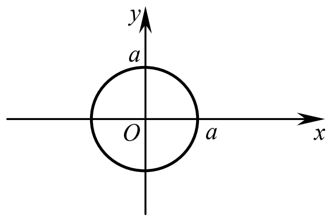
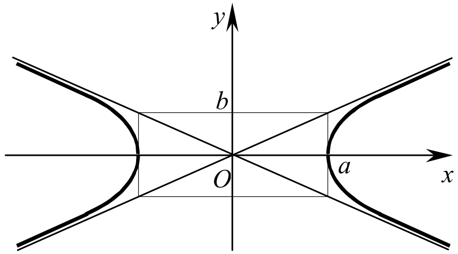
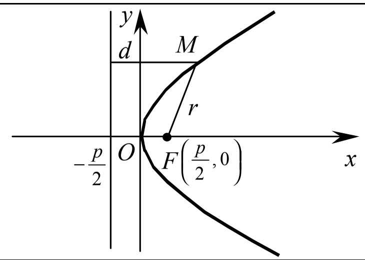
Поняття або співвідношення, що визначаються	Формула
1	2
Скалярне поле	
Скалярне поле $u(M)$	$u(M)=u(x,y,z)$
Поверхня рівня	$u(x,y,z)=C$
Лінія рівня	$u(x,y)=C$
Похідна за напрямом $\vec{l}=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$	$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$
Градієнт	$\operatorname{grad}u(x,y,z)=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$
Векторне поле	
Векторне поле $\vec{a}(M)$	$\vec{a}(M)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$
Дивергенція	$\operatorname{div}\vec{a}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$
Ротор	$\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+$ $+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$
Потік	$\Pi=\iint\limits_{\sigma}(\vec{a},\vec{n})\,d\sigma=$ $=\iint\limits_{\sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,d\sigma=\iint\limits_{\sigma}a_n\,d\sigma$
Лінійний інтеграл	$\int\limits_{L}(\vec{a},d\vec{r})=\int\limits_{L}P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\int\limits_{L}a_\tau\,dl$
Циркуляція	$\mathrm{C}=\oint\limits_{L}(\vec{a},d\vec{r})$
Формула Остроградського-Гаусса	$\Pi=\iint\limits_{\sigma}(\vec{a},\vec{n})\,d\sigma=\iiint\limits_{G}\operatorname{div}\vec{a}\,dV$

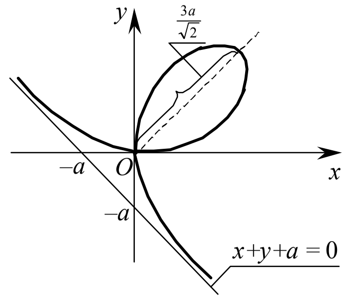
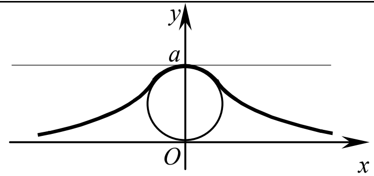
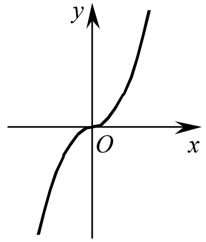
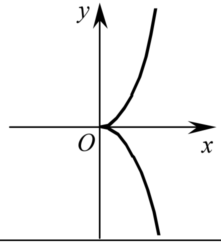
Продовження таблиці 4.3

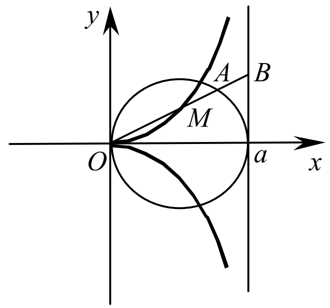
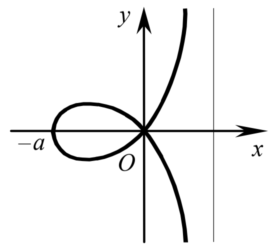
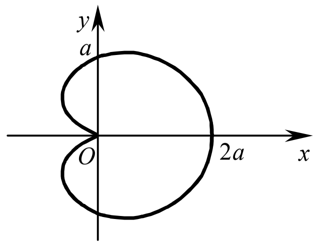
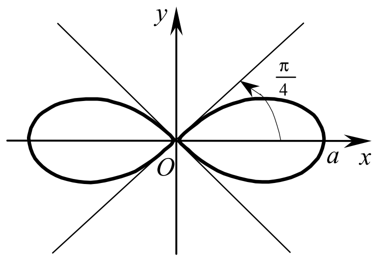
Формула Стокса	$\mathrm{C}=\oint\limits_{L}(\vec{a},d\vec{r})=\iint\limits_{\sigma}(\operatorname{rot}\vec{a},\vec{n})\,d\sigma$
Потенціальне векторне поле	$\vec{a}(M)=\operatorname{grad}u(x,y,z)$
Соленоїдальне векторне поле	$\operatorname{div}\vec{a}(M)=0$
Оператор Гамільтона ∇ а) градієнт б) дивергенція в) ротор	$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ $\operatorname{grad}u=\nabla u$ $\operatorname{div}\vec{a}=\nabla\cdot\vec{a}$ $\operatorname{rot}\vec{a}=\nabla\times\vec{a}$

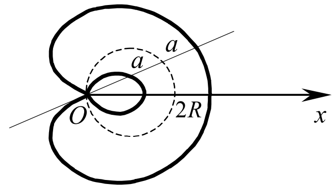
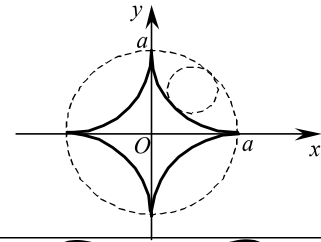
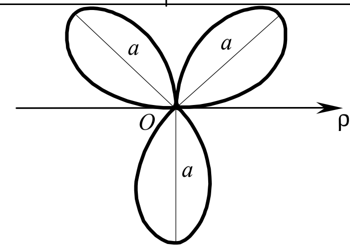
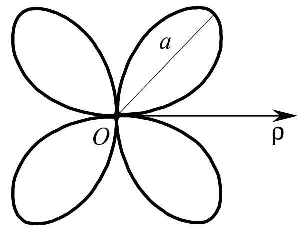
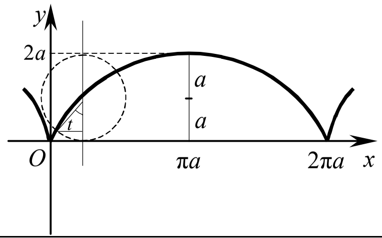
§5. Деякі важливі криві та поверхні

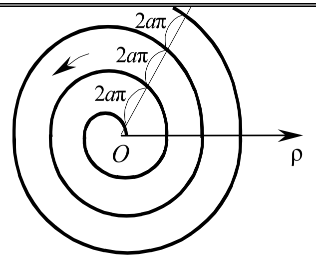
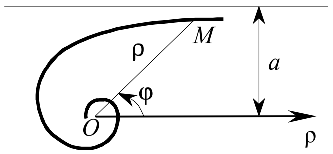
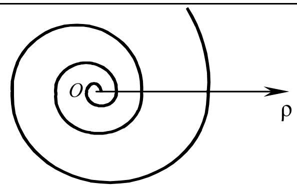
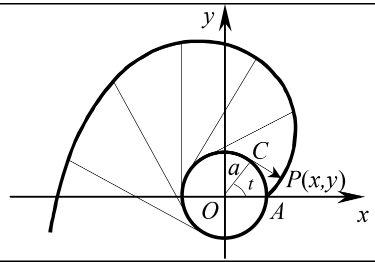
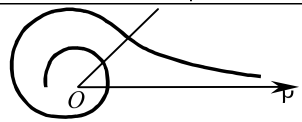
5.1 Деякі важливі криві

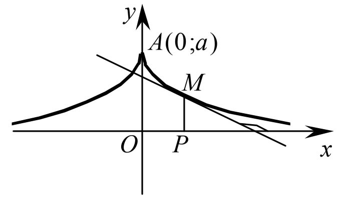
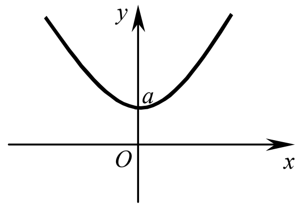
	Назва, рівняння	Графік
1	2	3
Алгебраїчні криві другого порядку		
1	Еліпс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$; $\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t.\end{cases}$	
	При $b=a$ коло $x^2+y^2=a^2$	
2	Гіпербола $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$; $\begin{cases}x=a\,\mathrm{ch}\,t,\\ y=b\,\mathrm{sh}\,t\end{cases}$ (для правої гілки)	
3	Парабола $y^2=2px$	

1	2	3
Алгебраїчні криві третього порядку		
4	Декартів лист $x^3+y^3-3axy=0$; $\begin{cases}x=\dfrac{3at}{1+t^3},\\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}.\end{cases}$	
5	Локон Аньєзі (верзієра) $y=\dfrac{a^3}{a^2+x^2}$.	
6	Кубічна парабола $y=x^3$.	
7	Напівкубічна парабола $y=x^{\frac{3}{2}}$.	

1	2	3
8	Цисоїда Діоклеса $y^2 = \dfrac{x^3}{a-x}$; $\begin{cases} x = \dfrac{at^2}{1+t^2}, \\ y = \dfrac{at^3}{1+t^2}; \end{cases}$ $\rho = \dfrac{a\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$.	
9	Строфоїда $y^2 = x^2 \dfrac{a+x}{a-x}$; $\rho = -\dfrac{a\cos 2\varphi}{\cos\varphi}$.	
	Алгебраїчні криві четвертого і вищих порядків	
10	Кардіоїда $(x^2+y^2-2ax)^2 = 4a(x^2+y^2)$; $\rho = a(1+\cos\varphi)$.	
11	Лемніската Бернуллі $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$; $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$.	

1	2	3
12	Завиток Паскаля $(x^2+y^2-2Rx)^2 = a^2(x^2+y^2)$; $\rho = 2R\cos\varphi + a$.	
13	Гіпоциклоїда (астроїда) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$; $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$.	
14	Трипелюсткова троянда $\rho = a\sin 3\varphi$ $(\rho \geq 0)$.	
15	Чотирипелюсткова троянда $\rho = a\lvert\sin 2\varphi\rvert$.	
	Трансцендентні криві	
16	Циклоїда $\begin{cases} x = a(t-\sin t), \\ y = a(1-\cos t). \end{cases}$	

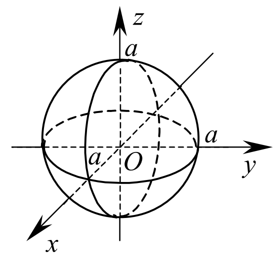
1	2	3
17	Спіраль Архімеда $\rho = a\varphi \ (\rho \ge 0)$.	
18	Гіперболічна спіраль $\rho = \dfrac{a}{\varphi} \ (\rho > 0)$.	
19	Логарифмічна спіраль $\rho = e^{a\varphi}$.	
20	Евольвента (розгортка) кола $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t). \end{cases}$	
21	Жезл $\rho = \dfrac{a}{\sqrt{\varphi}}$.	

1	2	3
22	Трактриса $x = a\ln\dfrac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y} + \sqrt{a^2 - y^2}$; $\begin{cases} x = a\left(\ln \operatorname{tg}\dfrac{t}{2} + \cos t\right), \\ y = a\sin t. \end{cases}$	
23	Ланцюгова лінія $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = a\,\mathrm{ch}\dfrac{x}{a}$.	

5.2 Поверхні другого порядку

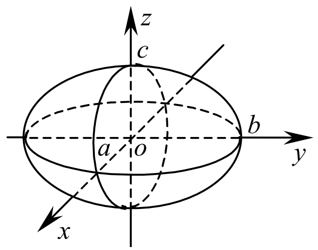
1. Сфера

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$



2. Еліпсоїд

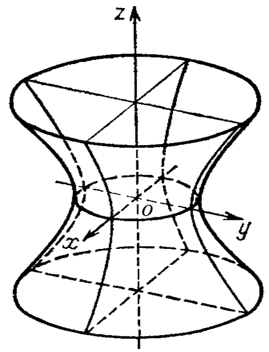
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



Еліпсоїд обертання (вісь обертання Oz: $b = a$):

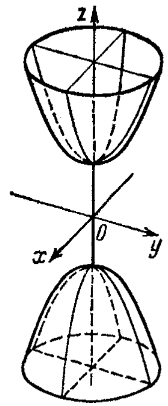
$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

3. Гіперболоїди



а) однопорожнинний

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\,;$$



б) двопорожнинний

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1\,.$$

Гіперболоїди обертання (вісь обертання Oz: $b=a$) :

а) однопорожнинний

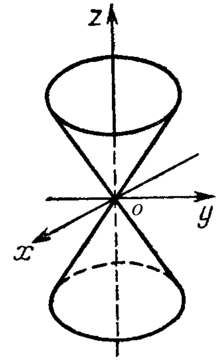
$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\,;$$

б) двопорожнинний

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

4. Конус другого порядку

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0\,.$$



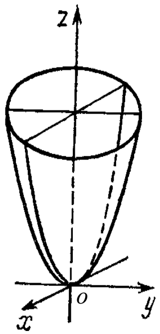
Круговий конус (вісь обертання Oz: $b=a$) :

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0\,,$$

зокрема при $a=b=c=1$:

$$x^2+y^2-z^2=0$$

5. Параболоїди

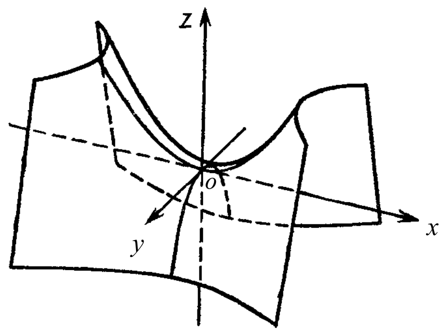


а) еліптичний

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z\,,\quad pq>0\,.$$

Параболоїд обертання (вісь обертання Oz: $q=p$) :

$$x^2+y^2=2pz\,;$$



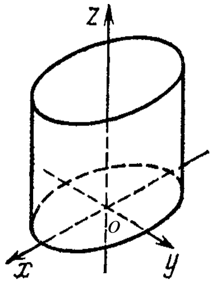
б) гіперболічний

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z\,,\quad pq>0$$

6. Циліндри другого порядку

а) еліптичний

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \forall z\ .$$

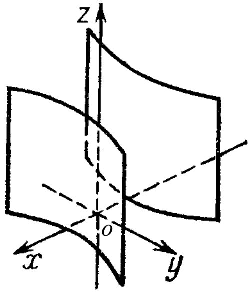


Круговий циліндр (вісь обертання Oz: $b=a$):

$$x^2+y^2=a^2,\quad \forall z\ ;$$

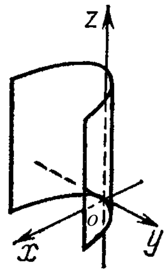
б) гіперболічний

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \forall z\ ;$$



в) параболічний

$$y^2=2px,\quad p>0,\quad \forall z$$



§6. Границі. Неперервність

Таблиця 6.1

Поняття або співвідношення, що визначаються	Формула
1	2
Число e	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$
Границя суми, добутку, частки за умови: $\exists\lim\limits_{x\to a}f(x)$, $\exists\lim\limits_{x\to a}g(x)$	$\lim\limits_{x\to a}c\,f(x)=c\lim\limits_{x\to a}f(x),\ c=\text{const}$; $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to a}f(x)\pm\lim\limits_{x\to a}g(x)$; $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)$; $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)},\ \lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$
Перша важлива границя	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$
Наслідки з першої важливої границі	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=1$
Друга важлива границя	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$
Наслідки з другої важливої границі	$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\mu$

Продовження таблиці 6.1

1	2
Еквівалентні нескінченно малі	$x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1$ $x \to 0$
	$u(x) \sim \sin u(x) \sim \operatorname{tg} u(x) \sim \arcsin u(x) \sim \operatorname{arctg} u(x) \sim$ $\sim \ln(1+u(x)) \sim e^{u(x)} - 1$, $u(x) \to 0$ при $x \to a$
	$a^x - 1 \sim x \ln a$, $\log_a(1+x) \sim \dfrac{x}{\ln a}$, $(1+x)^{\mu} - 1 \sim \mu x$ при $x \to 0$
Еквівалентні нескінченно великі	$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \sim a_0 x^n$ при $x \to \infty$
Таблиця визначеностей	1) $\dfrac{c}{0} = \infty,\ c \neq 0$; 2) $\dfrac{\infty}{0} = \infty$; 3) $\dfrac{c}{\infty} = 0$; 4) $\dfrac{0}{\infty} = 0$; 5) $c \cdot \infty = \infty,\ c \neq 0$; 6) $\infty \cdot \infty = \infty$; 7) $\infty + \infty = \infty$; 8) $0^{\infty} = 0$; 9) $\infty^{\infty} = \infty$.
Типи невизначеностей	$\left\{\dfrac{0}{0}\right\}, \left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}, \{0 \cdot \infty\}, \{\infty - \infty\}, \{1^{\infty}\}, \{\infty^0\}, \{0^0\}$
Неперервність функції в точці $x = a$	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(a) = 0$ $f(a+0) = f(a-0) = f(a)$
Розрив першого роду а) усувний б) стрибок	$\exists\ f(a+0),\ f(a-0)$; $f(a+0) = f(a-0) \neq f(a)$ або $f(a+0) = f(a-0)$, якщо функція $f(x)$ невизначена при $x = a$; $f(a+0) \neq f(a-0)$
Розрив другого роду	Хоча б одна з границь $f(a+0),\ f(a-0)$ не існує або дорівнює нескінченності.

§7. Основні формули диференціального числення функцій однієї змінної

Таблиця 7.1 – Основні правила та формули диференціювання

Основні правила диференціювання
1. $C' = 0$.   2. $(Cu)' = Cu'$.   3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$.   4. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.   5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$, $v \neq 0$.   6. $\left(f(u)\right)'_x = f'_u \cdot u'_x$.   7. $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$, де $x = x(y)$ – обернена функція для функції $y = y(x)$.   Тут C – стала, $u = u(x)$, $v = v(x)$.   Правило диференціювання добутку n функцій $u = u(x)$, $v = v(x)$, $w = w(x), \ldots, z = z(x)$: $(u \cdot v \cdot w \ldots z)' = u' \cdot v \cdot w \ldots z + u \cdot v' \cdot w \ldots z + \ldots + u \cdot v \cdot w \ldots z'$.
Основні формули диференціювання
1. $(u^{\alpha})' = \alpha u^{\alpha - 1} \cdot u'$, $\alpha \in \mathbf{R}$.   2. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \ln a} \cdot u'$.   3. $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$.   4. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$.   5. $(e^u)' = e^u \cdot u'$.   6. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.   7. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.   8. $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$.   9. $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$.

Продовження таблиці 7.1

10. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.
11. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.
12. $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$.
13. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$.
14. $(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$.
15. $(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$.
16. $(\operatorname{th} u)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u'$.
17. $(\operatorname{cth} u)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'$.

Тут $u = u(x)$. Якщо $u(x) = x$, то $u'(x) = x' = 1$.

Таблиця 7.2 – Основні поняття та формули

Поняття або співвідношення, що визначаються	Формула
1	2
Похідна	$y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$
Диференціал	$dy = y' \cdot \Delta x$ або $dy = y' \cdot dx$
Похідна n-го порядку	$\dfrac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$
Формула Лейбніца	$(u \cdot v)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$. Тут $u^{(0)} = u$, $v^{(0)} = v$, C_n^k – число комбінацій з n по k, $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$.

Продовження таблиці 7.2

1	2
Похідні від функції, заданої параметрично $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$	$y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$ $y''_{xx} = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}$
Диференціал n-го порядку	$dy = d(d^{n-1} y)$

Таблиця 7.3 – Застосування похідної

Поняття або співвідношення, що визначаються	Формула
1	2
Рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці (x_0, y_0)	$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$
Рівняння нормалі до кривої $y = f(x)$ у точці (x_0, y_0)	$y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$
Кут між двома кривими $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$ у точці їх перетину (x_0, y_0)	$\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0) \cdot f_2'(x_0)}$
При прямолінійному русі точки з законом руху $s = s(t)$: швидкість v прискорення a	$v = s'(t)$ $a = s''(t)$
Формула Коші (відношення скінчених приростів)	$\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$, $c \in (a, b)$
Формула Лагранжа (формула скінчених приростів)	$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$, $c \in (a, b)$

Продовження таблиці 6.3

1	2
Правило Лопіталя розкриття невизначеностей	
Тип невизначеності	Правило розкриття невизначеності
$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$	Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$: 1) задовольняють умовам теореми Коші в околі точки $x=a$ (неперервні, диференційовні, $g'(x)\neq 0$); 2) $f(x),\ g(x)\to 0$ (або до $\pm\infty$) при $x\to a$; 3) $\exists \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (скінченна або нескінченна, рівна $+\infty$ або $-\infty$), то $\exists \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, причому $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$
$\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x)=\{0\cdot\infty\}$	$f(x)\to 0,\ \ g(x)\to\infty$ при $x\to a$ $f\cdot g=\dfrac{f}{1/g}\ \Rightarrow\ \left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ $f\cdot g=\dfrac{g}{1/f}\ \Rightarrow\ \left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$
$\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)-g(x)\right]=\{\infty-\infty\}$	$f(x)\to+\infty,\ \ g(x)\to+\infty$ при $x\to a$ $f-g=\dfrac{1}{\frac{1}{f}}-\dfrac{1}{\frac{1}{g}}=\dfrac{\frac{1}{g}-\frac{1}{f}}{\frac{1}{f}\cdot\frac{1}{g}}\ \Rightarrow\ \left\{\dfrac{0}{0}\right\}$
$\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}=\{1^{\infty}\}$, або $\{\infty^{0}\}$, або $\{0^{0}\}$	$f^{g}=e^{g\ln f}$; $\begin{cases} f\to 1,\ \ g\to\infty, \text{ або}\\ f\to\infty,\ g\to 0,\ \text{ або}\\ f\to 0,\ \ g\to 0.\end{cases}$ $\lim\limits_{x\to a} f^{g}=\lim\limits_{x\to a} e^{g\ln f}=e^{\lim\limits_{x\to a} g\ln f}$ $\lim\limits_{x\to a} g\ln f=\{0\cdot\infty\}\ \Rightarrow\ \left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ або $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$

Продовження таблиці 6.3

1	2
Формула Тейлора для функції $f(x)$ з центром розкладу в точці $x=a$	$f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^{k}+R_{n}(x)$
Залишковий член у формі Лагранжа	$R_{n}(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, $\xi=a+\theta(x-a)$, $0<\theta<1$
Залишковий член у формі Пеано	$R_{n}(x)=o((x-a)^{n})$, $x\to a$
Формула Маклорена (Тейлора при $a=0$)	$f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^{k}+R_{n}(x)$
Основні розклади функцій за формулою Маклорена	
$e^{x}=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{x^{k}}{k\ !}+o(x^{n})$; $\sin x=\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\dfrac{x^{2k-1}}{(2k-1)\ !}+o(x^{2n})$; $\cos x=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{k}\dfrac{x^{2k}}{(2k)\ !}+o(x^{2n+1})$; $\ln(1+x)=\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\dfrac{x^{k}}{k}+o(x^{n})$; $(1+x)^{m}=1+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{m(m-1)\ \ldots\ (m-k+1)}{k\ !}x^{k}+o(x^{n})$.	
Екстремуми функцій	
Необхідна умова локального екстремуму функції $f(x)$ в точці x_0	
$f'(x_0)=0$ або $f'(x_0)$ не існує	
Достатні умови локального екстремуму в точці x_0	
I правило. $f'(x)$ змінює знак з “+” на “–“ в околі $O(x_0,\delta)\ \Rightarrow\ f(x_0)=y_{\max}$; $f'(x)$ змінює знак з “–” на “+“ в околі $O(x_0,\delta)\ \Rightarrow\ f(x_0)=y_{\min}$; $f'(x)$ не змінює знаку в околі $O(x_0,\delta)\ \Rightarrow\ f(x_0)\neq y_{\max}$, $f(x_0)\neq y_{\min}$. *II правило.* $f''(x_0)<0\ \Rightarrow\ f(x_0)=y_{\max}$; $f''(x_0)>0\ \Rightarrow\ f(x_0)=y_{\min}$; $f''(x_0)=0\ \Rightarrow$ потрібне додаткове дослідження.	

§8. Основні формули елементарної математики

8.1 Алгебраїчні функції

8.1.1 Властивості степенів

Для будь-яких x, y та додатних a, b мають місце такі рівності:

$$a^0 = 1; \qquad (ab)^x = a^x b^x;$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}; \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x};$$

$$a^x : a^y = a^{x-y}; \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x}.$$

$$(a^x)^y = a^{xy};$$

8.1.2 Многочлени

Для будь-яких a, b, c мають місце такі рівності:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b);$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2);$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2);$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

де x_1, x_2 – корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Для $n \in \mathbf{N}$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Якщо n – парне,

$$a^n - b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots + ab^{n-2} - b^{n-1}).$$

Якщо n – непарне,

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

8.1.3 Властивості арифметичних коренів

Для будь-яких натуральних n, k, більших одиниці, та будь-яких невід'ємних a, b мають місце такі рівності:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \ (a \ge 0);$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \ (b \ne 0); \qquad \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}, \text{ якщо } 0 \le a < b;$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}; \qquad \sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & \text{при } a \ge 0, \\ -a & \text{при } a < 0; \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[kn]{a}; \qquad \sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|;$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}; \qquad \sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a} \ (a \ge 0).$$

8.2 Тригонометричні функції

(У всіх формулах, наведених нижче, слід враховувати область припустимих значень лівої та правої частин формул)

8.2.1 Співвідношення між тригонометричними функціями одного і того ж аргументу

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \qquad \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1;$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}; \qquad 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}; \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

8.2.2 Формули додавання

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y;$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y;$$

$$\cos(x+y)=\cos x\,\cos y-\sin x\,\sin y\,;$$

$$\cos(x-y)=\cos x\,\cos y+\sin x\,\sin y\,;$$

$$\mathrm{tg}(x+y)=\frac{\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}\,y}{1-\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,y}\,;\qquad \mathrm{ctg}(x+y)=\frac{\mathrm{ctg}\,x\,\mathrm{ctg}\,y-1}{\mathrm{ctg}\,x+\mathrm{ctg}\,y}\,;$$

$$\mathrm{tg}(x-y)=\frac{\mathrm{tg}\,x-\mathrm{tg}\,y}{1+\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,y}\,;\qquad \mathrm{ctg}(x-y)=\frac{\mathrm{ctg}\,x\,\mathrm{ctg}\,y+1}{\mathrm{ctg}\,y-\mathrm{ctg}\,x}\,.$$

8.2.3 Формули подвійного аргументу

$$\sin 2x=2\sin x\,\cos x\,;$$

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x\,;$$

$$\mathrm{tg}\,2x=\frac{2\,\mathrm{tg}\,x}{1-\mathrm{tg}^2\,x}\,;\qquad \mathrm{ctg}\,2x=\frac{\mathrm{ctg}^2\,x-1}{2\,\mathrm{ctg}\,x}\,.$$

8.2.4 Формули половинного аргументу

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}\,;\qquad \cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}\,;$$

$$\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\,;\qquad \mathrm{ctg}^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\,;$$

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{1-\cos x}{\sin x}\,;\qquad \mathrm{ctg}\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1-\cos x}=\frac{1+\cos x}{\sin x}\,.$$

8.2.5 Формули зниження степеня

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}\,;\qquad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}\,.$$

8.2.6 Формули перетворення суми в добуток

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\,;$$

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\,;$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\,;$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\,;$$

$$\cos x+\sin x=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right);$$

$$\cos x-\sin x=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right).$$

$$\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}\,y=\frac{\sin(x+y)}{\cos x\,\cos y}\,;\qquad \mathrm{ctg}\,x+\mathrm{ctg}\,y=\frac{\sin(x+y)}{\sin x\sin y}\,;$$

$$\mathrm{tg}\,x-\mathrm{tg}\,y=\frac{\sin(x-y)}{\cos x\,\cos y}\,;\qquad \mathrm{ctg}\,x-\mathrm{ctg}\,y=-\frac{\sin(x-y)}{\sin x\sin y}\,.$$

8.2.7 Формули перетворення добутку в суму

$$\sin x\,\sin y=\frac{1}{2}\,(\cos(x-y)-\cos(x+y))\,;$$

$$\cos x\,\cos y=\frac{1}{2}\,(\cos(x-y)+\cos(x+y))\,;$$

$$\sin x\,\cos y=\frac{1}{2}\,(\sin(x-y)+\sin(x+y))\,.$$

8.2.8 Вираження тригонометричних функцій через тангенс половинного кута

$$\sin x=\frac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}\,;\qquad \cos x=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}\,;$$

$$\mathrm{tg}\,x=\frac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}\,;\qquad \mathrm{ctg}\,x=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}\,.$$

8.2.9 Формули зведення

Назва функції не змінюється				Назва функції змінюється на подібну			
u	$-\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
tg	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$
ctg	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$

8.2.10 Значення тригонометричних функцій

Значення кута α		Функції			
град	рад	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$
0^0	0	0	1	0	∞
30^0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
45^0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60^0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$
90^0	$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞	0
180^0	π	0	-1	0	∞
270^0	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	∞	0
360^0	2π	0	1	0	∞

8.2.11 Властивості обернених тригонометричних функцій

$\arcsin(-a) = -\arcsin a, \quad |a| \le 1;$

$\arccos(-a) = \pi - \arccos a, \quad |a| \le 1;$

$\mathrm{arctg}(-a) = -\mathrm{arctg}\, a, \ a \in \mathbf{R};$

$\mathrm{arcctg}(-a) = \pi - \mathrm{arcctg}\, a, \ a \in \mathbf{R};$

$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}, \quad |a| \le 1;$

$\mathrm{arctg}\, a + \mathrm{arcctg}\, a = \frac{\pi}{2}, \ a \in \mathbf{R}.$

8.2.12 Розв'язки найпростіших тригонометричних рівнянь

Рівняння	Розв'язки рівняння
$\sin x = a, \quad |a| \le 1$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \ n \in \mathbf{Z}$
$\cos x = a, \quad |a| \le 1$	$x = \pm\arccos a + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}$
$\mathrm{tg}\, x = a, \quad a \in \mathbf{R}$	$x = \mathrm{arctg}\, a + \pi n, \ n \in \mathbf{Z}$
$\mathrm{ctg}\, x = a, \quad a \in \mathbf{R}$	$x = \mathrm{arcctg}\, a + \pi n, \ n \in \mathbf{Z}$

Окремі розв'язки тригонометричних рівнянь

$\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pi n, \ n \in \mathbf{Z},$

$\sin x = \pm 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z},$

$\cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in \mathbf{Z},$

$\cos x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z},$

$\cos x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pi + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}.$

8.3 Властивості логарифмів

1^0. Основна логарифмічна тотожність :

$$x = a^{\log_a x}, \quad x > 0, \ a > 0, \ a \ne 1.$$

2^0. Логарифм основи дорівнює одиниці :

$$\log_a a = 1.$$

3^0. Логарифм одиниці дорівнює нулю :

$$\log_a 1 = 0.$$

4^0. Формула для логарифма добутку :

$$\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2, \quad x_1 > 0, \ x_2 > 0.$$

5^0. Формула для логарифма частки :

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2, \quad x_1 > 0, \ x_2 > 0.$$

6^0. Формула для логарифма степеня :

$$\log_a x^p = p \log_a x, \quad x > 0, \ p \in \mathbf{R}.$$

7^0. Формула переходу до нової основи логарифма :

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \quad x>0,\ b\in \mathbf{R},\ b>0,\ b\neq 1.$$

Зокрема,

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}; \quad \log_a b\cdot \log_b a = 1.$$

8.4 Прогресії

Арифметична прогресія	Геометрична прогресія
$a_n = a_{n-1}+d,\ n\geq 2$ де d – різниця прогресії	$b_n = b_{n-1}q,\ n\geq 2$ де q – знаменник прогресії
Формула n-го члена	
$a_n = a_1+(n-1)d$ $n=1,2,\ldots$	$b_n = b_1 q^{n-1}$ $n=1,2,\ldots$
Формула суми перших n членів	
$S_n = \frac{a_1+a_n}{2}n$	$S_n = b_1\frac{1-q^n}{1-q},\ q\neq 1$
Формула для різниці	Формула для знаменника
$d = a_n - a_{n-1},\ n\geq 2$	$q = \frac{b_n}{b_{n-1}},\ n\geq 2$
Сума натуральних чисел від 1 до n	Сума нескінченно спадної геометричної прогресії
$S = \frac{n(n+1)}{2}$	$S = \frac{b_1}{1-q},\ \lvert q\rvert<1$

8.5 Основні формули комбінаторики. Біном Ньютона

Число перестановок з n елементів знаходяться за формулою

$$P_n = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)n = n!, \qquad 0!=1.$$

Число розміщень з n елементів по m елементів знаходяться за формулою

$$A_n^m = n(n-1)\ldots(n-(m-1)) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Число комбінацій з n елементів по m елементів знаходяться за формулою

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)\ldots(n-(m-1))}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m}$$

або

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}, \qquad C_n^n = C_n^0 = 1.$$

Властивості комбінацій:

$$C_n^m = C_n^{n-m}; \qquad C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}.$$

Формула бінома Ньютона має вигляд

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m}b^m = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \ldots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^n b^n,$$

де $C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$ – число комбінацій з n елементів по m елементів; $n\in \mathbf{N}$.

Сума біноміальних коефіцієнтів $\sum_{m=0}^{n} C_n^m = 2^n$.

8.6 Числові значення деяких величин

Позначення величини	Числове значення	Позначення величини	Числове значення
π	3,14159	e	2,71828
2π	6,28318	$1/e$	0,36788
$\pi/2$	1,57080	e^2	7,38906
$\pi/3$	1,04720	$\sqrt{e}$	1,64872
$\pi/4$	0,78540	$\lg e$	0,43429
$\pi/6$	0,52360	$\ln 10$	2,30258
$1/\pi$	0,31831	1 радіан	$57^\circ 17' 45''$
π^2	9,86960	1° (град)	0,0174 (рад)
$\sqrt{\pi}$	1,77245	$\sqrt{2}$	1,41421
$\sqrt[3]{\pi}$	1,46459	$\sqrt{3}$	1,73205

СЛОВНИК КЛЮЧОВИХ СЛІВ

Українською мовою	Російською мовою	Англійською мовою
абсолютний	абсолютный	absolute
абсциса	абсцисса	abscissa, x–coordinate
адитивність	аддитивность	additivity
аксіома	аксиома	axiom
алгебраїчний	алгебраический	algebraic
аналіз; математичний аналіз; гармонічний аналіз	анализ; математический анализ; гармонический анализ	analysis; calculus; harmonic analysis
аналізувати	анализировать	analyse
апліката	аппликата	z-coordinate
аргумент	аргумент	argument, independent variable
арксинус	арксинус	arcsine
арктангенс	арктангенс	arctangent
асимптота	асимптота	asymptote
астроїда	астроида	astroid
бета-функція	бета-функция	beta-function
біном	бином	binomial
біном Ньютона	бином Ньютона	binomial formula
будь-який, усякий	любой	any, arbitrary
варіація	вариация	variation
вгнутий	вогнутый	concavity
вгнутість	вогнутость	concave
Вейєрштрас	Вейерштрасс	Weierstrass
величина	величина	quantity, size

Українською мовою	Російською мовою	Англійською мовою
верхній	верхний	upper, top
верхня межа; верхня грань	верхняя граница; верхняя грань	upper bound; supremum
взагалі	вообще	in general, generally
взаємно однозначна відповідність	взаимно однозначное соответствие	one-to-one correspondence
вигляд; у вигляді; явний вигляд	вид; в виде; явный вид	aspect, form, view; in the form, as; explicit form
використання; повторне використання	использование; повторное использование	use, utilization; reuse, reusing
вимагати	требовать	is required
вимірність	размерность	dimension
вимірювання, вимір; число вимірів	измерение; число измерений	measurement, dimension; dimension
виняток; за винятком	исключение; за исключением	exclusion, exception; with the exception of
вираз, вираження	выражение	expression
висновок; робити висновок	вывод; делать вывод	conclusion; draw a conclusion
виходити; вихідний, початковий; вихідне рівняння; вихідні дані; вихідна формула; виходячи	исходить; исходный; исходное уравнение; исходные данные; исходная формула; исходя	come from, start from; initial, original, input; input equation; input data; assumption formula; starting from, beginning from

Українською мовою	Російською мовою	Англійською мовою
вищевикладений; вищевказаний; вищедоведений; вищезгаданий; вищеописаний; вищенаведений	вышеизложенный; вышеуказанный; вышедоказанный; вышеупомянутый; вышеописанный; вышеприведенный	stated above; above-mentioned; proved above; above-cited, above-mentioned; described above; foregoing, above-mentioned
вищий	высший	higher
від'ємний	отрицательный	negative
від'ємник; віднімання; віднімати; відняти	вычитаемое; вычитание; вычитать; вычесть	subtrahend; subtraction, deduction; subtract, deduct; subtract
відновити	восстановить	restore, reestablish
відношення	отношение	ratio, quotient, relation
відповідність; у відповідності	соответствие; в соответствии	correspondence; accordingly
відповідь	ответ	answer, reply, response
відрізок	отрезок	segment, closed interval
відстань	расстояние	distance, space
відтворювати	воспроизводить	reproduce
вісь	ось	axis
вказівка	указание	indication
включно	включительно	inclusively
власний	собственный	characteristic
внаслідок	вследствие	so that, on account of
вперше	впервые	first, for the first time
вправо, праворуч	вправо	to the right

Українською мовою	Російською мовою	Англійською мовою
враховувати	учитывать	consider
вронскіан	вронскиан	wronskian
всередині; рівномірно збігається всередині D	внутри; равномерно сходится внутри D	in, inside, subsets of; uniformly convergent on compact subsets of D
вступ	введение	introduction
гамма-функція	гамма-функция	gamma-function
геометричний	геометрический	geometric
гіперболічний	гиперболический	hyperbolic
гладкий	гладкий	smooth, differentiable
головний; головним чином; головна частина	главный; главным образом; главная часть	principal, essential, main; chiefly, mainly; principal part
градієнт	градиент	gradient
границя; граничний перехід	предел; предельный переход	limit; passage to the limit
громіздкий	громоздкий	cumbersome, bulky
груба помилка	грубая ошибка	gross error
давати	давать	give
Даламбер	Даламбер	d'Alembert
двічі	дважды	twice
двовимірний	двумерный	two-dimensional
двократний	двукратный	repeated, double
двопорожнинний	двуполостный	two-sheeted
Декарт	Декарт	Descartes
декартів	декартов	Cartesian
дивергенція	дивергенция	divergence

Українською мовою	Російською мовою	Англійською мовою
диференціал; диференціювання; диференціювати; диференційовність; диференційовний	дифференциал; дифференцирование; дифференцировать; дифференцируемость; дифференцируемый	differential; differentiation, derivation; differentiate, distinguish; differentiability; differentiable, differentiated
діагональ	диагональ	diagonal
діаметр	диаметр	diameter
дійсний	действительный	real, true
дійсно	действительно	really, in fact
ділене	делимое	dividend
ділення	деление	division
діло	дело	business, matter, case
дільник	делитель	divisor
Діріхле	Дирихле	Dirichlet
добування кореня	извлечение корня	taking the root
добуток	произведение	product, composition
доведемо; доведений; доведення; доводити	докажем; доказанный; доказательство; доказывать	we shall prove, let us prove; proved; proof, demonstration; prove, demonstrate
довизначити	доопределить	define, determine
довідковий	справочный	reference
довільний	произвольный	arbitrary
додавання	прибавление	addition, supplement
доданок	слагаемое	addend
додаток	приложение	application, supplement
доповнення до повного квадрата	дополнение до полного квадрата	completing the square

Українською мовою	Російською мовою	Англійською мовою
допоміжне твердження	вспомогательное утверждение	lemma
допоміжний	вспомогательный	auxiliary, subsidiary
дослідження	исследование	investigation, research
достатньо; достатність	достаточно; достаточность	sufficiently, enough; sufficiency
досягати	достигать	reach, achieve, attain
дріб; найпростіший дріб; похідна дробу; раціональний дріб; правильний дріб	дробь; простейшая дробь; производная дроби; рациональная дробь; правильная дробь	fraction, quotient; partial fraction; derivative of a quotient; rational fraction; proper fraction
дробово-раціональний	дробно-рациональный	rational, bilinear, linear fractional
другий	другой	second
дужка	скобка	parenthesis, brace
еліпс	эллипс	ellipse
еліпсоїд	эллипсоид	ellipsoid
єдиність	единственность	uniqueness
загальний; загальна сума	общий; общая сумма	common, general, total; sum total
задавати; завдання, задання; задання кривих у параметричній формі	задавать; задание; задание кривых в параметрической форме	set, assign, give; task, job, representation; parametric representation of curves
заданий; задамо	заданный; зададим	given, defined; let us give
задача	задача	problem, task
закінчувати	заканчивать	finish, complete

Українською мовою	Російською мовою	Англійською мовою
закривати	закрывать	close, shut
залежність	зависимость	dependence, relation
залишковий	остаточный	residual, remainder
залишковий член	остаточный член	remainder form
заміна; заміна змінних	замена; замена переменных	substitution, change; change of variables
замкнений	замкнутый	closed, isolated
занумерувати	занумеровать	number, index
запис	запись	notation, listing, writing
застосування	применение	application
застосування, додаток	приложение	application, supplement
зафіксувати	зафиксировать	fix, settle
збільшувати	увеличивать	increase
звичайний; звичайне диференціальне рівняння	обыкновенный; обыкновенное дифференциальное уравнение	ordinary, usual; ordinary differential equation
зводити; зводячи подібні члени	приводить; приводя подобные члены	reduce, bring, perform; collecting similar terms
згрупувати	сгруппировать	group, arrange into group
зліва, ліворуч	слева	from the left
зменшуване	уменьшаемое	minuend
зменшувати	уменьшать	reduce
зміна	изменение	change, variation
змінна	переменная	variable, argument
зміст	содержание	contents

Українською мовою	Російською мовою	Англійською мовою
знакододатний	знакоположительный	of positive terms
знакододатний ряд	знакоположительный ряд	series of positive terms
знакозмінний	знакопеременный	with alternating signs
знакопочережний ряд	знакочередующийся ряд	alternating series
знакопочережний, знакопереміжний	знакочередующийся	alternating in sign
знакосталий	знакопостоянный	of constant signs
знаменник; загальний знаменник	знаменатель; общий знаменатель	denominator; common denominator
знаходження	нахождение	determination, finding
значення; мати значення; власне значення	значение; иметь значение; собственное значение	value, significance; to mean; eigenvalue
зобразити	изобразить	represent
зростання; зростати; зростаючий	возрастание; возрастать; возрастающий	increase, rise, growth; increase, grow, ascend; increasing, growing, accelerating, ascending
інваріантність	инвариантность	invariance
індекс; верхній індекс; нижній індекс	индекс; верхний индекс; нижний индекс	index; superscript; subscript
індукція	индукция	induction, displacement
інтеграл; інтегрування; інтегрування частинами; інтегрувати; інтегровний;	интеграл; интегрирование; интегрирование по частям; интегрировать; интегрируемый;	integral; integration; integration by parts; integrate; integrable;

Українською мовою	Російською мовою	Англійською мовою
інтегровність	интегрируемость	integrality;
інтервал	интервал	interval
інтерпретувати	интерпретировать	interpret
ірраціональність	иррациональность	irrationality
квадрант	квадрант	quadrant
квадрат; у квадраті; повний квадрат; квадратний; квадратне рівняння	квадрат; в квадрате; полный квадрат; квадратный; квадратное уравнение	square; squared; perfect square; square, quadratic; quadratic equation
кількість	количество	amount, quantity, number
класифікація	классификация	classification
коло	окружность	circle
комбінаторика	комбинаторика	combinatorial analysis
комбінація, сполучення	сочетание	combination, set
комплексний	комплексный	complex
корінь; знак кореня; квадратний корінь; кубічний корінь; корінь рівняння	корень; знак корня; квадратный корень; кубический корень; корень уравнения	root, radical; radical sign; square root; cube root; solution of an equation, root of an equation
коротко	коротко	briefly
кратний	кратный	multiple, divisible
кратність	кратность	multiplicity
крива	кривая	curve
криволінійний; криволінійний інтеграл	криволинейный; криволинейный интеграл	curvilinear; line integral

Українською мовою	Російською мовою	Англійською мовою
критерій	критерий	criterion
критичний	критический	critical
круг	круг	circle, disk
куля	шар	ball, solid sphere
кусково-гладкий	кусочно-гладкий	piecewise smooth
кусково-неперервний	кусочно-непрерывный	piecewise continuous
кусково-сталий; кусково-стала функція	кусочно-постоянный; кусочно-постоянная функция	piecewise constant; step function
кут	угол	angle, corner
Лагранж; теорема Лагранжа	Лагранж; теорема Лагранжа	Lagrange; Lagrange's theorem
ланцюгова лінія	цепная линия	catenary
лемніската	лемниската	lemniscate
лист; лист Мебіуса; декартів лист	лист; лист Мебиуса; декартов лист	sheet, leaf; Möbius band; folium of Descartes
лінійний	линейный	linear, arcwise
лінійно незалежний розв`язок	линейно независимое решение	linearly independent solution
лінія; лінія рівня	линия; линия уровня	line; level line, level curve
Ліувілль	Лиувилль	Liouville
логарифм; логарифмування	логарифм; логарифмирование	logarithm; taking the logarithm
локальний	локальный	local
Лопіталь	Лопиталь	L'Hospital
мажорантний	мажорантный	majorizing, majorant

Українською мовою	Російською мовою	Англійською мовою
мажоровний	мажорируемый	majorized, majorizable
максимум	максимум	maximum, peak
мала; нескінченно мала	малая; бесконечно малая	small quantity; infinitesimal
математика; математичний	математика; математический	mathematics; mathematical
мати; мати справу; мати значення; мати місце; мати на увазі	иметь; иметь дело; иметь значение; иметь место; иметь в виду	have; deal, have to do(with); mean, have meaning; occur, take place; keep in mind
метод	метод	method
мінімум	минимум	minimum
мішаний	смешанный	mixed, compound
многочлен	многочлен	polynomial
множник; розкладання на множники	множитель; разложение на множители	factor, multiplier; factorization
монотонний	монотонный	monotone
наближений	приближенный	approximate
навколо	вокруг	around, round
надавати	придавать	add, attach, give
надавати значення	придавать значение	attach importance
найбільший	наибольший	greatest, largest
найменший	наименьший	least, smallest
належати	принадлежать	belong, belong to
напрям, напрямок; похідна за напрямом	направление; производная по направлению	direction; derivative in the direction

Українською мовою	Російською мовою	Англійською мовою
невизначений; невизначений інтеграл	неопределенный; неопределенный интеграл	indeterminate, indefinite; indefinite integral
невизначеність	неопределенность	indeterminacy, indefiniteness
невласний інтеграл	несобственный интеграл	improper integral
недиференційовність	недифференцируемость	nondifferentiable
недолік	недостаток	deficiency
недопустимий, неприпустимий	недопустимый	inadmissible
незалежний; незалежна величина	независимый; независимая величина	independent; independent variable
незростаюча	невозрастающий	nonincreasing
необмежений	неограниченный	unlimited, unbounded
необхідність	необходимость	necessity
непарний	нечетный	odd
нескінченний	бесконечный	infinite
нескінченність; до нескінченності	бесконечность; до бесконечности	infinity; ad infinitum
нескінченно	бесконечно	infinitely
нескінченно віддалена точка	бесконечно удаленная точка	point at infinite
нескінченно малі	бесконечно малые	infinitesimal
неспадаючий	неубывающий	nondecreasing
неявний	неявный	implicit
нижня грань	нижняя грань	lower bound, infimum
нуль	нуль	zero, origin

Українською мовою	Російською мовою	Англійською мовою
Ньютон	Ньютон	Newton
об`єм	объём	volume
обвідна	огибающая	envelope
обгрунтування	обоснование	proof, basis, justification
обернений, зворотний; обернене перетворення; обертатися; перетворюватися в нуль; обернення; формули обертання	обратный; обратное преобразование; обращаться; обращаться в нуль; обращение; формулы обращения	inverse, reciprocal; inverse transformation; reduce to revert, turn; vanish; conversion, inversion; inversion formula
область; область визначення; область значень	область; область определения; область значений	domain, region, range; domain of definition; range of values
обмежений; обмежений зверху; обмежений знизу	ограниченный; ограниченный сверху; ограниченный снизу	bounded, limited; bounded above; bounded below
обчислення; обчислювати	вычисление; вычислять	calculation, computation; calculate, compute
одиниця	единица	unit, identity
одиничне коло	единичный круг	unit circle
однобічний, односторонній	односторонний	one-sided, unilateral
однозв'язний	односвязный	simply connected
однозначно	однозначно	identically, uniquely
одностороння поверхня	односторонняя поверхность	one-sided surface
ознака	признак	indication, sign, mark

Українською мовою	Російською мовою	Англійською мовою
означений, визначений; визначений інтеграл	определенный; определенный интеграл	definite, defined, determinate, determined; definite integral
означення; за означенням	определение; по определению	definition, determination; by definition
окіл	окрестность	neighbourhood, vicinity
опуклість; опуклий	выпуклость; выпуклый	convexity; convex
ордината	ордината	ordinate
орієнтовний	ориентируемый	orientable, oriented
ортогональний	ортогональный	orthogonal
особлива точка	особая точка	singular point
особливий	особый	singular, particular
остаточний вираз	окончательное выражение	resultant expression
остаточно	окончательно	final, definitive
Остроградський	Остроградский	Ostrogradski
отже	следовательно	consequently, therefore
отримувати	получать	get, obtain, receive
парабола	парабола	parabola
параболоїд	параболоид	paraboloid
паралелепіпед	параллелепипед	parallelepiped
паралелограм	параллелограмм	parallelogram
параметр	параметр	parameter
параметричний	параметрический	parametric
парний	чётный	even
первісна	первообразная	primitive, antiderivative

Українською мовою	Російською мовою	Англійською мовою
перевірка	проверка	testing, test
перегин; точка перегину	перегиб; точка перегиба	inflection; point of inflection
перегрупування	перегруппировка	regrouping
перелік, перелічення	перечисление	enumeration, transfer
перелічення, перерахування	пересчет	recalculation, recount
перемноження	перемножение	multiplication
перепозначати	переобозначить	rename
перестановка	перестановка	permutation
перетворення; обернене перетворення; перетворення Фур'є	преобразование; обратное преобразование; преобразование Фурье	transformation; inverse transformation; Fourier transformation
перетин; точка перетину	пересечение; точка пересечения	intersection; point of intersection
перехід; перехід до границі	переход; переход к пределу	passage, transfer; passage to the limit
періодичний	периодический	periodic, recurrent
питання	вопрос	question, problem, issue
піввісь	полуось	semiaxis
півколо	полуокружность	semicircle
півкруг	полукруг	half-disk
півпряма	полупрямая	ray, half-line
півсума	полусумма	half-sum
півсфера	полусфера	hemisphere
підбір	подбор	selection, choice
підібрати	подобрать	select, pickout

Українською мовою	Російською мовою	Англійською мовою
підінтегральний вираз	подынтегральное выражение	integrand
підкореневий	подкоренной	subradical
підносити	возводить	raise, erect
підносити до квадрату	возводить в квадрат	square
підносити до третього степеня	возводить в третью степень	raise to the third power
підпослідовність	подпоследовательность	subsequence
підрахунок	подсчет	count, enumeration
підстановка	подстановка	substitution, permutation
підхід	подход	approach
площа	площадь	area, space
площина	плоскость	plane, flat, subspace
побудова	построение	structure, construction
поверхня	поверхность	surface
повторний; повторний інтеграл	повторный; повторный интеграл	repeated, iterated; iterated integral
поділити	разделить	divide, separate
по-друге	во-вторых	second, in the second place
позначення	обозначение	designation, notation
показник; показник степеня; показникова функція	показатель; показатель степени; показательная функция	index, exponent; exponent; exponential function
поле	поле	field
поліном	полином	polynomial
помітити	заметить	notice, remark, note
по-перше	во-первых	in the first place

Українською мовою	Російською мовою	Англійською мовою
порівнювати	сравнивать	compare, equal
послідовність	последовательность	sequence, succession
постановка	постановка	statement, posing, formulation
потенціальний	потенциальный	potential
потік	поток	stream, flow, current, flux
потрійний	тройной	triple, threefold
похибка	погрешность	error, mistake
похідна; частинна похідна	производная; частная производная	derivative; partial derivative
почленно	почленно	termwise
пояснення	пояснение	explanation
правило	правило	rule, principle, law
приклад	пример	example, instance
припущення,допущення	допущение	assumption
прирівнювати	приравнивать	equate, set equal
приріст	приращение	increment, increase
прогресія	прогрессия	progression
продиференціювавши	продифференцировав	having differentiated, after differentiating
проінтегрувати	проинтегрировать	integrate
проінтегрувати за	проинтегрировать по	integrate over
прологарифмувати	прологарифмировать	take the logarithm
проміжний	промежуточный	intermediate
проміжок	промежуток	interval, space
пропорційний	пропорциональный	proportional

Українською мовою	Російською мовою	Англійською мовою
протилежний	противоположный	opposite, inverse
протиріччя	противоречие	contradiction
прямокутна система координат	прямоугольная система координат	Cartesian coordinate system
прямокутний трикутник	прямоугольный треугольник	right-angled triangle
прямокутник	прямоугольник	rectangle
прямувати, прагнути, наближатися	стремиться	strive, try
радіус	радиус	radius
раціональний	рациональный	rational
результат	результат	result
рекурентний	рекуррентный	recurrence, recurrent
рівний; рівність; знак рівності	равный; равенство; знак равенства	equal; equality; equality sign
рівнобедрений	равнобедренный	isosceles
рівномірний	равномерный	uniform
рівносильний	равносильный	equivalence
рівняння	уравнение	equation
рівняння в повних диференціалах	уравнение в полных дифференциалах	exact differential equation
різниця	разность	difference, remainder
робити	делать	make
робити висновок	делать вывод	conclude
розбіжний	расходящийся	divergent
розбіжність	расходимость	divergence

Українською мовою	Російською мовою	Англійською мовою
розв’язок, розв’язання, розв’язування	решение	solution, decision
розглядання	рассмотрение	examination, consideration
розкладання в ряд Фур’є	разложение в ряд Фурье	Fourier-series expansion
розкладання, розклад	разложение	expansion
розкладати	разлагать	expand, factor
розкриття	раскрытие	uncovering, opening
ротор	ротор	rotor, rotation
ряд	ряд	series, row
ряд Фур’є	ряд Фурье	Fourier series
середній	средний	middle, average
система	система	class, system
січна	секущая	secant, transversal
скінченний; скінченний приріст	конечный; конечное приращение	final, finite; finite increment
складна функція	сложная функция	composite function
складний	сложный	complicated, complex
скористатися	воспользоваться	take advantage of use
спадати	убывать	decrease
спадний	убывающий	decreasing
співвідношення	соотношение	relation
спосіб	способ	way, method
справа, праворуч	справа	from the right
спрощення	упрощение	simplification
спрощувати	упрощать	simplify

Українською мовою	Російською мовою	Англійською мовою
сталий; метод варіації сталих	постоянный; метод вариации постоянных	constant, fixed; method of variation
стаціонарний	стационарный	stationary
степеневий	степенной	power, degree
степеневий ряд	степенной ряд	power series
степінь	степень	power, degree, extent
сума; інтегральна сума	сумма; интегральная сумма	sum, union; Riemann sum
сфера	сфера	sphere
сферичний	сферический	spherical
теорема	теорема	theorem
точка; критична точка	точка; критическая точка	point, place; critical point
точний	точный	precise, exact, explicit
точність	точность	exactness, accuracy
трапеція	трапеция	trapezium
тривимірний	трехмерный	three-dimensional
трикратний	трехкратный	triple
трикутник	треугольник	triangle
тричлен	трехчлен	trinomial
трубка	трубка	tube
трубчастий, трубчатий	трубчатый	tubular, tube
у подальшому	впоследствии	afterwards, later on
узагальнення	обобщение	generalization, extension
указати	указать	indicate, find, determine

Українською мовою	Російською мовою	Англійською мовою
умова; достатня умова; необхідна умова	условие; достаточное условие; необходимое условие	condition; sufficient condition; necessary condition
умовний	условный	conditional
фігура	фигура	figure
функціональний; функціональний визначник; функціональний ряд	функциональный; функциональный определитель; функциональный ряд	functional; functional determinant; series of function
функція; обернена функція	функция; обратная функция	function; inverse function
циркуляція	циркуляция	circulation
ціле	целое	integer
частина; права частина; ліва частина	часть; правая часть; левая часть	part, side; right part; left part
частковий	частичный	partial
чисельник	числитель	numeration
число; натуральне число	число; натуральное число	number; natural number
числовий	числовой	numerical
чудовий, визначний	замечательный	remarkable, wonderful
шукане	искомое	unknown, desired, quantity
Якобі	Якоби	Jacobi
якобіан	якобиан	Jacobian

ВІДПОВІДІ

Глава 1

1.1. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C$. **1.2.** $\frac{mx^{\frac{n}{m}+1}}{n+m}+C$. **1.3.** $\sqrt{x}+C$. **1.4.** $-\frac{2}{3x\sqrt{x}}-e^x+\ln|x|+C$.

1.5. $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+x+C$. **1.6.** $z-2\ln|z|-\frac{1}{z}+C$. **1.7.** $\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}-\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C$.

1.8. $3x-\frac{2(1{,}5)^x}{\ln 1{,}5}+C$. **1.9.** $-\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x+C$. **1.10.** $\operatorname{tg}x-x+C$.

1.11. $x-\sin x+C$. **1.12.** $\operatorname{arctg}x-\frac{1}{x}+C$. **1.13.** $\ln|x|+2\operatorname{arctg}x+C$.

1.14. $\operatorname{tg}x+C$. **1.15.** $\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C$. **1.16.** $\frac{\sin^2 x}{2}+C$. **1.17.** $\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}+C$.

1.18. $\frac{(x+1)^{16}}{16}+C$. **1.19.** $-\frac{1}{8(2x-3)^4}+C$. **1.20.** $-\frac{5}{33}(8-3x)^{\frac{11}{5}}+C$.

1.21. $-\frac{\sqrt{(8-2x)^3}}{3}+C$. **1.22.** $-\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}+C$. **1.23.** $\sqrt{x^2+1}+C$.

1.24. $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^4+1)^2}+C$. **1.25.** $\frac{1}{\cos x}+C$. **1.26.** $\operatorname{tg}(1+\ln x)+C$.

1.27. $-\frac{1}{2(\arcsin x)^2}+C$. **1.28.** $\frac{(\operatorname{arctg}x)^3}{3}+C$. **1.29.** $2\sqrt{1+\operatorname{tg}x}+C$.

1.30. $\sin 3x+C$. **1.31.** $\frac{1}{3}\sin 3x+C$. **1.32.** $-\frac{1}{2}\cos(2x-3)+C$.

1.33. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+C$. **1.34.** $\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+a^2)+C$. **1.35.** $\ln|\ln x|+C$.

1.36. $\arcsin\frac{x}{3}+C$. **1.37.** $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}3x+C$. **1.38.** $\arcsin\frac{x}{2}+C$.

1.39. $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{2}+C$. **1.40.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x^2+C$. **1.41.** $\frac{1}{4}\arcsin x^4+C$.

1.42. $\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+C$. **1.43.** $\arcsin x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+C$.

1.44. $\frac{2}{3}\left[x^3-\sqrt{(x^2-1)^3}\right]-x+C$. **1.45.** $-2\sqrt{1-x^2}-\frac{2}{3}\sqrt{(\arcsin x)^3}+C$.

1.46. $-\frac{1}{9}\left[\sqrt{1-9x^2}+(\arccos 3x)^3\right]+C$. **1.47.** $x-4\ln|x+4|+C$.

1.48. $\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2}\ln|2x+1|\right]+C$. **1.49.** $-x-6\ln|3-x|+C$.

1.50. $2x+3\ln|x-2|+C$. **1.51.** $x+\ln(x^2+1)+C$.

1.52. $-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-x-\ln|1-x|+C$.

1.53. $\frac{x^4}{4}-2x^2+8\ln(x^2+4)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$. **1.54.** $\frac{x^2}{2}+\ln|x+1|+C$.

1.55. $\frac{(x-2)^2}{2}+\frac{5}{2}\ln|x^2+2x+2|-\operatorname{arctg}(x+1)+C$.

1.56. $\frac{4x^3}{3}-x^2+x-\ln|2x+1|+C$. **1.57.** $\frac{x^3}{3}-3x+2\operatorname{arctg}x+C$.

1.58. $x^2+14x+103\ln|x-7|+C$. **1.59.** $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-5}{x-2}\right|+C$.

1.60. $\frac{1}{7}\ln\left|\frac{x-2}{x+5}\right|+C$. **1.61.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C$. **1.62.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$.

1.63. $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{2}+C$. **1.64.** $\frac{1}{2}\arcsin(2x+3)+C$.

1.65. $\arcsin(x-2)+C$. **1.66.** $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x-1}{3}+C$. **1.67.** $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x+1}{\sqrt{3}}+C$.

1.68. $-\ln\left[1-x+\sqrt{5-2x+x^2}\right]+C$. **1.69.** $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x-2}{\sqrt{2}}+C$.

1.70. $-8\sqrt{5+2x-x^2}-3\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}}+C$.

1.71. $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)+\operatorname{arctg}(x+1)+C$.

1.72. $\frac{3}{8}\left[\ln(4x^2-4x+17)+\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{4}\right]+C$.

1.73. $3\sqrt{x^2+2x+2}-4\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)+C$. **1.74.** $\ln\frac{(x-4)^2}{|x-3|}+C$.

1.75. $\frac{2}{9}\sqrt{9x^2+6x+2}+\frac{13}{9}\ln\left(3x+1+\sqrt{9x^2+6x+2}\right)+C$.

1.76. $-\frac{3}{10}\ln(5x^2+6x+18)+\frac{29}{45}\operatorname{arctg}\frac{5x+3}{9}+C$.

1.77. $-\ln(1+e^{-x})+C$. **1.78.** $e^x-\ln(e^x+1)+C$. **1.79.** $2\ln(\sqrt{x}+1)+C$.

1.80. $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-2\sqrt{x+1}+C$. **1.81.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{2+\sqrt{4-x^2}}\right|+C$.

1.82. $\frac{1}{\sqrt{2}}\arccos\frac{\sqrt{2}}{x}+C$. **1.83.** $\frac{4}{21}(3e^x-4)\sqrt[4]{(e^x+1)^3}+C$.

1.84. $\ln\left|\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x}\right|+C$. **1.85.** $\frac{1}{25}\left(\frac{(5x-1)^{21}}{21}+\frac{(5x-1)^{20}}{20}\right)+C$.

1.86. $\frac{1}{4}\left[\frac{(2x+5)^{12}}{12}-\frac{5(2x+5)^{11}}{11}\right]+C$. **1.87.** $\frac{1}{2(3-x)^6}-\frac{1}{5(3-x)^5}+C$.

1.88. $-\frac{11}{2(x-2)^2}-\frac{4}{x-2}+C$. **1.89.** $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{\sqrt{1-x^3}+1}\right|+C$.

1.90. $2\sqrt{1+\ln x}-\ln|\ln x|+2\ln\left|\sqrt{1+\ln x}-1\right|+C$.

1.91. $\frac{1}{2}\ln^2\operatorname{tg}x+C$. **1.92.** $-\frac{2}{9}\sqrt{a^3-x^3}(2a^3+x^3)+C$.

1.93. $\frac{x^2-4}{2}-\frac{8}{x^2-4}+4\ln|x^2-4|+C$.

1.94. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C$. **1.95.** $\frac{1}{2}\left(\arccos\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}\right)+C$.

1.96. $\ln\frac{|x|}{1+\sqrt{1+x^2}}+C$. **1.97.** $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\sqrt{x}}{2}\right|+C$.

1.98. $\arccos\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$. **1.99.** $2\arcsin\sqrt{x}+C$.

1.100. $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{2}x\cos 2x+C$. **1.101.** $x\sin x+\cos x+C$.

1.102. $-e^{-x}(x+1)+C$. **1.103.** $\frac{3^x}{\ln^2 3}(x\ln 3-1)+C$.

1.104. $\frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C$. **1.105.** $x(\ln x - 1) + C$.

1.106. $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$. **1.107.** $(x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + C$.

1.108. $2\sqrt{x+1}\arcsin x + 4\sqrt{1-x} + C$. **1.109.** $x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$.

1.110. $x^2\sqrt{1+x^2} - \frac{2}{3}\sqrt{(1+x^2)^3} + C$. **1.111.** $-e^{-x}(2+2x+x^2) + C$.

1.112. $e^x(x^3-3x^2+6x-6)+C$. **1.113.** $a^x\left(\frac{x^2}{\ln a} - \frac{2x}{\ln^2 a} + \frac{2}{\ln^3 a}\right) + C$.

1.114. $x(\arcsin x)^2 + 2\arcsin x \cdot \sqrt{1-x^2} - 2x + C$.

1.115. а) $\frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$; б) $\frac{e^{ax}}{a^2+n^2}(n\sin nx + a\cos nx) + C$.

1.116. $\frac{e^{3x}}{13}(\sin 2x - 5\cos 2x) + C$.

1.117. а) $\frac{x}{2}(\sin\ln x - \cos\ln x) + C$; б) $\frac{x}{2}(\cos\ln x + \sin\ln x) + C$.

1.118. $-2\sqrt{x}\cdot\cos\sqrt{x} + 2\sin\sqrt{x} + C$.

1.119. $\frac{e^x}{2}\left[(x^2-1)\sin x - (x-1)^2\cos x\right] + C$. **1.120.** $\ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + C$.

1.121. $\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{2x+1}} + C$. **1.122.** $\frac{1}{5}\ln\left[(x-2)^2\sqrt{2x+1}\right] + C$.

1.123. $\ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right| + C$.

1.124. $\frac{3}{11}\ln|3x+1| + \frac{2}{33}\ln|2x-3| - \frac{1}{3}\ln|x| + C$.

1.125. $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right| + C$.

1.126. $\frac{x}{4} + \ln|x| - \frac{7}{16}\ln|2x-1| - \frac{9}{16}\ln|2x+1| + C$.

1.127. $\ln|2x-1| - 6\ln|2x-3| + 5\ln|2x-5| + C$.

1.128. а) $4\ln|x| - 3\ln|x-1| - \frac{9}{x-1} + C$; б) $\ln\left|\frac{x^2}{x+1}\right| + \frac{6}{x+1} + C$.

1.129. а) $\ln\left|\frac{x-1}{x}\right| - \frac{1}{(x-1)^2} + C$; б) $\ln|x-5| + \frac{3}{2(x-2)^2} + C$.

1.130. а) $\frac{4}{x+2} + \ln|x+1| + C$; б) $\frac{3}{2x} - \frac{5}{4}\ln|x| + 20\ln|x-3| - \frac{47}{4}\ln|x-2| + C$.

1.131. $x + \frac{1}{x} + \ln\frac{(x-1)^2}{x} + C$. **1.132.** $2\ln\left|\frac{x+4}{x+2}\right| - \frac{5x+12}{x^2+6x+8} + C$.

1.133. $\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + C$. **1.134.** $\frac{1}{4}\ln\frac{x^4}{(x+1)^2(x^2+1)} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$.

1.135. а) $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$;

б) $\frac{1}{3}\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$; в) $\frac{1}{4}\ln\left|(x-1)^3(x+1)\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$.

1.136. а) $\ln\frac{\sqrt{(x^2-2x+5)^3}}{|x-1|} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2} + C$;

б) $\frac{(x+1)^2}{2} + \ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}} - \operatorname{arctg} x + C$. **1.137.** $\frac{1}{4}\left(\frac{x}{x^2+2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$.

1.138. $\frac{2-x}{4(x^2+2)} + \frac{\ln(x^2+2)}{2} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C$.

1.139. $\frac{x-1}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln(1+x^2) + C$.

1.140. $\frac{1}{16}\ln|x| - \frac{1}{18}\ln(x^2+1) + \frac{7}{288}\ln(x^2+4) - \frac{1}{24(x^2+4)} + C$.

1.141. $\frac{1}{4}\left(\frac{2x^6-3x^2}{x^4-1} + \frac{3}{2}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|\right) + C$.

1.142. а) $6\sqrt[6]{x} + 3\sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x} - 6\ln(1+\sqrt[6]{x}) + C$;

б) $x + \frac{6\sqrt[6]{x^5}}{5} + \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} + 2\sqrt{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right| + 3\sqrt[3]{x} + C$.

1.143. а) $\frac{6}{5}\left[\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt[12]{x^5}+2\ln\left|\sqrt[12]{x^5}-1\right|\right]+C$;

б) $\ln\frac{x}{(1+\sqrt[10]{x})^{10}}+\frac{10}{\sqrt[10]{x}}-\frac{5}{\sqrt[5]{x}}+\frac{10}{3\sqrt[10]{x^3}}-\frac{5}{2\sqrt[5]{x^2}}+C$.

1.144. а) $2\sqrt{x-1}\left[\frac{(x-1)^3}{7}+\frac{3(x-1)^2}{5}+x\right]+C$; б) $-2\operatorname{arctg}\sqrt{1-x}+C$.

1.145. а) $6\left[\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{9}-\frac{(x+1)^{\frac{4}{3}}}{8}+\frac{(x+1)^{\frac{7}{6}}}{7}-\frac{(x+1)}{6}+\frac{(x+1)^{\frac{5}{6}}}{5}-\frac{(x+1)^{\frac{2}{3}}}{4}\right]+C$;

б) $2\operatorname{arctg}\sqrt{x+1}+C$. **1.146.** а) $\frac{\sqrt{x^2-1}}{2}(x-2)+\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$;

б) $\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C$;

в) $\ln\frac{|u^2-1|}{\sqrt{u^4+u^2+1}}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{1+2u^2}{\sqrt{3}}+C$, де $u=\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$.

1.147. $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{24}{11}x\sqrt[6]{x^5}+\frac{36}{13}x^2\sqrt[6]{x}+\frac{8}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{6}{17}x^2\sqrt[6]{x^5}+C$.

1.148. $3\left[\ln\left|\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\right|+\frac{2\sqrt[3]{x}+3}{2(1+\sqrt[3]{x})^2}\right]+C$.

1.149. $\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt[3]{x^2+1}-1\right)-\frac{1}{4}\ln\left(\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+\sqrt[3]{x^2+1}+1\right)+$

$+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{x^2+1}+1}{\sqrt{3}}+C$.

1.150. $\frac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^8}-\frac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5}+C$.

1.151. а) $\frac{1}{6}\ln\frac{u^2+u+1}{(u-1)^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2u+1}{\sqrt{3}}+C$, де $u=\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}$;

б) $\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}+C$.

1.152. а) $\frac{3}{7}\left(4\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-3\right)\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}+C$;

б) $-\frac{1}{10}\sqrt{t^5}+\frac{1}{3}\sqrt{t^3}-\frac{1}{2}\sqrt{t}+C$, де $t=\frac{1+x^4}{x^4}$.

1.153. а) $-\ln\left|\frac{2+x+2\sqrt{x^2+x+1}}{2x}\right|+C$; б) $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2+x-x^2}+\sqrt{2}}{x\sqrt{2}}+\frac{1}{4}\right|+C$.

1.154. а) $-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{3+3x+2\sqrt{3(x^2+x+1)}}{6(x-1)}\right|+C$; б) $\sqrt{\frac{x}{x+2}}+C$.

1.155. а) $\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+\sqrt{2}\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{2(x^2+1)}}{2(x+1)}\right|+C$; б) $\frac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x}+C$.

1.156. а) $\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2-2x-1}-\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x-1}\right|+C$;

б) $\frac{1}{2}\left[(x+2)\sqrt{1-4x-x^2}+5\arcsin\frac{x+2}{\sqrt{5}}\right]+C$.

1.157. а) $\frac{3}{2(2z+1)}+\frac{1}{2}\ln\frac{z^4}{(2z+1)^3}$, де $z=x+\sqrt{x^2+x+1}$;

б) $\ln\left|\frac{z-1}{z}\right|-2\operatorname{arctg}z$, де $z=\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}$.

1.158. а) $-\frac{1}{4}\left(\frac{\cos 4x}{2}+\cos 2x\right)+C$;

б) $\frac{1}{8}\left(2x+\sin 2x+\frac{1}{2}\sin 4x+\frac{1}{3}\sin 6x\right)+C$. **1.159.** а) $\frac{x}{8}-\frac{\sin 4x}{32}+C$;

б) $\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}+\frac{\sin^3 2x}{48}+C$. **1.160.** а) $\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C$;

б) $\frac{3x}{8}-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$; в) $\frac{1}{8}\left(\frac{5}{2}x+2\sin 2x+\frac{3}{8}\sin 4x-\frac{1}{6}\sin^3 2x\right)+C$.

1.161. а) $\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C$; б) $-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C$;

в) $\sin x-\frac{4}{3}\sin^3 x+\frac{6}{5}\sin^5 x-\frac{4}{7}\sin^7 x+\frac{1}{9}\sin^9 x+C$.

1.162. а) $\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{3\sin^3 x}+C$; б) $\frac{\sin^2 x}{2}-\frac{1}{2\sin^2 x}-2\ln|\sin x|+C$.

1.163. а) $\operatorname{tg}x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+C$; б) $-\operatorname{ctg}x-\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}+C$.

1.164. а) $-\frac{1}{8}\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{8}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+C$;

б) $-\frac{\cos x}{4\sin^4 x}-\frac{3\cos x}{8\sin^2 x}+\frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$.

1.165. а) $\frac{1}{2}(\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{ctg}^2 x)+2\ln|\operatorname{tg}x|+C$; б) $\operatorname{tg}x+\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}-2\operatorname{ctg}2x+C$.

1.166. а) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg}x+x+C$; б) $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x-\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x-\ln|\cos x|+C$;

в) $x-\frac{1}{7}\operatorname{ctg}^7 x+\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+\operatorname{ctg}x+C$; г) $\frac{1}{2}\left(x+\ln|\sin x+\cos x|\right)+C$.

1.167. $-\frac{1}{1+\operatorname{tg}x}+C$. **1.168.** $\frac{1}{15}\cos^3 x\,(3\cos^2 x-5)+C$.

1.169. $\ln|\operatorname{tg}x|-\frac{1}{2\sin^2 x}+C$. **1.170.** $\frac{1}{\cos x-1}+C$. **1.171.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C$.

1.172. $\ln(2+\cos x)+\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C$. **1.173.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}+C$.

1.174. $\frac{1}{2-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+C$. **1.175.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}x)+C$. **1.176.** $2\sqrt{\operatorname{tg}x}+C$.

1.177. $4\sqrt[4]{\operatorname{tg}x}+C$. **1.178.** $-\frac{1}{3}\operatorname{tg}x(2+\operatorname{tg}^2 x)\sqrt{4-\operatorname{ctg}^2 x}+C$. **1.179.** а) $x+C$;

б) $\frac{1}{2a}\operatorname{sh}2ax+C$. **1.180.** а) $\frac{\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{ch}x-x}{2}+C$; б) $\frac{1}{3}\operatorname{ch}^3 x-\operatorname{ch}x+C$;

в) $\frac{1}{3}\operatorname{sh}^3 x+\operatorname{sh}x+C$. **1.181.** а) $x-\operatorname{th}x+C$; б) $x-\frac{1}{3}\operatorname{th}^3 x-\operatorname{th}x+C$;

в) $x-\operatorname{cth}x+C$. **1.182.** а) $\frac{\operatorname{sh}^3 x}{3}+\frac{\operatorname{sh}^5 x}{5}+C$; б) $\ln|\operatorname{th}x|+C$;

в) $\frac{1}{2}\operatorname{th}\frac{x}{2}-\frac{1}{6}\operatorname{th}^3\frac{x}{2}+C$.

1.183. а) $-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2 x}+C$; б) $\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C$.

1.184. а) $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+C$; б) $-\frac{1}{a}\arcsin\frac{a}{x}+C$.

1.185. а) $2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+C$; б) $\ln(x+\sqrt{2+x^2})+\frac{x}{2}\sqrt{2+x^2}+C$.

1.186. а) $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-4}-2\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right|+C$; б) $3\ln\left|\frac{3-\sqrt{9-x^2}}{x}\right|+\sqrt{9-x^2}+C$.

1.187. а) $\left(\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\right)\cos 2x+\left(\frac{x^2}{2}+\frac{3x}{2}+\frac{9}{4}\right)\sin 2x+C$;

б) $3e^{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2\right)+C$.

1.188. а) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\frac{\sqrt{(1+x^2)^5}}{5x^5}-\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$;

б) $3\left(\ln|u|-\ln\left(1+\sqrt{1-u^2}\right)-\arcsin u\right)+C$, где $u=\sqrt[3]{x}$.

1.189. а) $-\frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{8\sin^2\frac{x}{2}}+C$; б) $\frac{1}{2}x^2\ln|1+x^3|-\frac{3}{4}x^2+$

$+\frac{1}{4}\ln(x^2-x+1)-\frac{1}{2}\ln(x+1)+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$. **1.190.** а) $\frac{2}{3}\frac{\operatorname{tg}^2 x-3}{\sqrt{\operatorname{tg}x}}+C$;

б) $\ln\left|1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$. **1.191.** $x-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1+2\operatorname{tg}x}{\sqrt{3}}+C$.

1.192. $\frac{1}{6}\ln\frac{1+x^2}{x^2}-\frac{\operatorname{arctg}x}{3x^3}-\frac{1}{6x^2}+C$.

1.193. $x-\log_2|1-2^x|+\frac{1}{\ln 2}\left[\frac{1}{1-2^x}+\frac{1}{2(1-2^x)^2}+\frac{1}{3(1-2^x)^3}\right]+C$.

1.194. $\frac{35x}{128}-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{7}{128}\sin 4x+\frac{\sin^3 2x}{24}+\frac{\sin 8x}{1024}+C$.

1.195. $\dfrac{8}{49(x-5)}-\dfrac{27}{49(x+2)}+\dfrac{30}{343}\ln\left|\dfrac{x-5}{x+2}\right|+C$. **1.196.** $x\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+C$.

1.197. $x+\ln\left|e^x-3\right|+C$. **1.198.** $\dfrac{2}{\ln 2}\left(\sqrt{2^x-1}-\operatorname{arctg}\sqrt{2^x-1}\right)+C$.

1.199. $\sin(e^x)-e^x\cos(e^x)+C$. **1.200.** $\dfrac{1}{\sqrt5}\ln\left|\operatorname{tg}x+\sqrt{\operatorname{tg}^2x+\dfrac{2}{5}}\right|+C$.

1.201. $\dfrac{1}{ab}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{b}{a}\operatorname{tg}x\right)+C$.

1.202. $\dfrac{4x+5}{8}\sqrt{2x^2+5x+7}+\dfrac{31}{16\sqrt2}\ln\left|4x+5+2\sqrt{4x^2+10x+14}\right|+C$.

1.203. $\dfrac{x}{x^2+x+1}+\dfrac{2}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt3}-2\ln(x^2+x+1)+\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{2x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+2x+C$.

1.204. $\dfrac{1+x}{2(1+x^2)^2}+\dfrac{x-2}{4(x^2+1)}+\dfrac{1}{4}\operatorname{arctg}x+C$.

1.205. $-\dfrac{57x^4+103x^2+32}{8x(x^2+1)^2}-\dfrac{57}{8}\operatorname{arctg}x+C$. **1.206.** $\dfrac{2}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{5\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+4}{3}+C$.

1.207. $\begin{cases} 2\left(\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}\right)+C, \text{ якщо } \sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}\ge 0, \\ -2\left(\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}\right)+C, \text{ якщо } \sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}\le 0. \end{cases}$

1.208. $\dfrac{1}{\sqrt2}\left(\ln(\sin x+\cos x-\sqrt{\sin 2x})+\arcsin(\sin x-\cos x)\right)+C$.

1.209. $-\dfrac{1}{2}(3x-19)\sqrt{3-2x-x^2}+14\arcsin\dfrac{x+1}{2}+C$.

1.210. $\dfrac{3(4x-3a)\sqrt[3]{(a+x)^4}}{28}+C$. **1.211.** $\dfrac{2}{3}(\sqrt8-1)$. **1.212.** $7\dfrac{2}{3}$.

1.213. $0{,}2(e-1)^5$. **1.214.** $1+\dfrac{1}{2}\lg e$. **1.215.** $\dfrac{2}{5}$. **1.216.** $e-\sqrt e$. **1.217.** $1-\dfrac{2}{e}$.

1.218. $\dfrac{\pi(9-4\sqrt3)}{36}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}$. **1.219.** $\pi^3-6\pi$. **1.220.** 1. **1.221.** $2-\dfrac{\pi}{2}$.

1.222. $7+2\ln 2$. **1.223.** $\dfrac{32}{3}$. **1.224.** $\dfrac{3\pi}{16}$. **1.225.** $8\ln 3-15\ln 2+\dfrac{13}{8}$.

1.226. $0{,}2\ln\dfrac{4}{3}$. **1.227.** $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{8}{5}$. **1.228.** $\ln\dfrac{3}{2}$. **1.229.** 2. **1.230.** $\dfrac{2}{7}$. **1.231.** $\dfrac{4}{3}$.

1.232. а) $\dfrac{1}{3}$; б) розбігається. **1.233.** а) $\dfrac{1}{a}$; б) $\dfrac{1}{2}$. **1.234.** а) Розбігається; б) π.

1.235. а) $1-\ln 2$; б) $\dfrac{1}{2}$. **1.236.** а) $\dfrac{\pi}{4}$; б) $\ln(\sqrt2+1)$. **1.237.** а) Розбіжний; б) 2.

1.238. Розбіжний. **1.239.** $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\ln 2$. **1.240.** $\dfrac{\pi}{2}$. **1.241.** а) Збіжний; б) розбіжний. **1.242.** Збіжний. **1.243.** Розбіжний. **1.244.** Розбіжний.

1.245. Розбіжний. **1.246.** а) $\dfrac{\pi}{2}$; б) розбіжний. **1.247.** а) Розбіжний; б) 2.

1.248. $\dfrac{8}{3}$. **1.249.** $-\dfrac{1}{4}$. **1.250.** $\dfrac{33\pi}{2}$. **1.251.** $\dfrac{\pi}{3\sqrt3}$. **1.252.** $14\dfrac{4}{7}$.

1.253. Розбіжний. **1.254.** $-\dfrac{2}{e}$. **1.255.** Розбіжний. **1.256.** Збіжний.
1.257. Збіжний. **1.258.** Збіжний. **1.259.** Розбіжний. **1.260.** Збіжний.

1.261. а) $\dfrac{1}{3}$; б) $\dfrac{9}{4}$. **1.262.** $\dfrac{32}{3}\sqrt6$. **1.263.** $2\pi+\dfrac{4}{3}$ і $6\pi-\dfrac{4}{3}$.

1.264. $S_1=S_3=\pi-\dfrac{\sqrt2}{2}\ln 3-2\arcsin\sqrt{\dfrac{2}{3}}\approx 0{,}46$, $S_2=2(\pi-S_1)$. **1.265.** $\dfrac{1}{12}$.

1.266. $\dfrac{1}{12}$. **1.267.** $\dfrac{8}{15}$. **1.268.** $e+\dfrac{1}{e}-2$. **1.269.** а) $\dfrac{1}{3}+\ln\dfrac{\sqrt3}{2}$; б) $\sqrt2-1$.

1.270. $3\pi a^2$. **1.271.** $\dfrac{3}{8}\pi a^2$. **1.272.** $6\pi a^2$. **1.273.** $S=169\pi$. **1.274.** а) $\dfrac{72}{5}\sqrt3$; б) $\dfrac{8}{15}$. **1.275.** $\dfrac{\pi a^2}{2}$. **1.276.** $\dfrac{\pi a^2}{4}$. **1.277.** $\dfrac{37\pi}{6}-5\sqrt3$. **1.278.** π. **1.279.** 2.

1.280. а) a^2; б) $a^2\left(1+\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt3}{2}\right)$. **1.281.** $\pi\sqrt2$. **1.282.** a^2. **1.283.** а) $a\operatorname{sh}\dfrac{b}{a}$; б) $\dfrac{y}{2p}\sqrt{y^2+p^2}+\dfrac{p}{2}\ln\dfrac{y+\sqrt{y^2+p^2}}{p}$. **1.284.** а) $1+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}$; б) $\ln 3-\dfrac{1}{2}$.

1.285. $4\dfrac{26}{27}$. **1.286.** $4a\sqrt3$. **1.287.** $5a\left[1+\dfrac{1}{2\sqrt3}\ln(2+\sqrt3)\right]$. **1.288.** $\dfrac{\pi^2R}{2}$.

1.289. $\frac{\pi^3}{3}$. **1.290.** $4\sqrt{3}$. **1.291.** $\frac{1}{8}(2\pi-3\sqrt{3})$.

1.292. $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$. **1.293.** $\sqrt{2}(e^{2\pi}-1)$.

1.294. $\frac{1}{2}(4+\ln 3)$. **1.295.** $\frac{\pi abh}{3}$. **1.296.** $\pi\sqrt{2}$. **1.297.** 36π.

1.298. $V_1=\pi\sqrt{2}\left(2\sqrt{6}-\frac{11}{3}\right)$, $V_2=\pi\sqrt{2}\left(2\sqrt{6}+\frac{11}{3}\right)$.

1.299. $V_1=V_3=4\pi(\sqrt{6}+\sqrt{3}-4)$, $V_2=8\pi(4-\sqrt{3})$. **1.300.** $\frac{8\pi\sqrt{6}}{3}$. **1.301.** 8π.

1.302. $\pi a^2\sqrt{pq}$. **1.303.** 2π. **1.304.** $\frac{\pi}{4}[\mathrm{sh}2b-\mathrm{sh}2a+2(b-a)]$.

1.305. $\frac{\pi}{4}(e^2-1)$. **1.306.** $\frac{3\pi}{10}$. **1.307.** $V_x=\frac{\pi}{2}, V_y=2\pi$. **1.308.** $\frac{\pi}{2}(15-16\ln 2)$.

1.309. $\frac{4\pi a^3}{21}$. **1.310.** $\frac{\pi a^3}{4}\left[\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})-\frac{2}{3}\right]$. **1.311.** а) $\frac{\pi a^3}{2}$, б) $\frac{\pi a^3}{4}$.

1.312. $\frac{8\pi a^3}{15}$. **1.313.** $5\pi^2a^3$. **1.314.** а) $\frac{56\pi a^2}{3}$; б) $\frac{\pi}{9}(\sqrt{(1+a^4)^3}-1)$.

1.315. $\frac{\pi a^2}{4}(e^2-e^{-2}+4)$. **1.316.** $2\pi\left[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\right]$. **1.317.** $3\pi a^2$.

1.318. 48π. **1.319.** $\pi\left(\sqrt{5}+4\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. **1.320.** $\frac{2\pi\sqrt{2}}{5}(e^{\pi}-2)$.

1.321. а) $9\pi^2a^2$, б) $24\pi a^2$. **1.322.** $3\pi a^2$. **1.323.** $4\pi a^2$. **1.324.** $4\pi^2R^2$.

1.325. $\frac{8\pi a^2}{3}(2\sqrt{2}-1)$. **1.326.** $\frac{32\pi a^2}{5}$. **1.327.** $\frac{ah^2}{2}$.

1.328. 1) $M_x=\frac{b}{2}\sqrt{a^2+b^2}$, $M_y=\frac{a}{2}\sqrt{a^2+b^2}$; 2) $M_x=2a^2$, $M_y=0$;

3) $M_x=0$, $M_y=\frac{9\sqrt{5}}{4}+\frac{1}{8}\ln(2+\sqrt{5})$; 4) $M_x=0$,

$M_y=-\frac{p^2}{8}\left(\sqrt{2}+5\ln(1+\sqrt{2})\right)$; 5) $M_x=b\left(b+\frac{a}{e}\arcsin e\right)$, $M_y=0$,

$e=\frac{1}{a}\sqrt{a^2-b^2}$; 6) $M_x=\frac{ab}{2e}\left(e\sqrt{1-e^2}+\arcsin e\right)$,

$M_y=\frac{a^2}{2}\left(1+\frac{1-e^2}{2e}\ln\frac{1+e}{1-e}\right)$, $e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$; 7) $M_x=M_y=\frac{3a^2}{5}$;

8) $M_x=\frac{32a^2}{3}$, $M_y=8\pi a^2$; 9) $M_x=2a^2$, $M_y=\pi a^2$; 10) $M_x=0$,

$M_y=\frac{32a^2}{5}$; 11) $M_x=\frac{\sqrt{2}}{5}(1-e^{4\pi})a^2$, $M_y=\frac{2\sqrt{2}}{2}(e^{4\pi}-1)a^2$.

1.329. 1) $M_x=\frac{\pi}{4}$, $M_y=0$; 2) $M_x=M_y=\frac{3}{20}$; 3) $M_x=\frac{2}{5}+\frac{\pi}{4}$,

$M_y=\ln 2-\frac{1}{4}$; 4) $M_x=\frac{2ab^2}{3}$, $M_y=0$; 5) $M_x=\frac{5\pi a^3}{2}$, $M_y=3\pi^2a^3$;

6) $M_x=\frac{\pi a^3}{3}(\pi^2-6)$, $M_y=a^3(4-\pi^2)$; 7) $M_x=0$, $M_y=\frac{5\pi a^3}{4}$.

1.330. $\frac{\sqrt{(1+e)^3}-2\sqrt{2}}{3}$. **1.331.** $I_x=\frac{256a^3}{15}$, $I_y=16a^3\left(\pi^2-\frac{128}{45}\right)$.

1.332. $\frac{\pi R^4}{8}$. **1.333.** $I_x=\frac{\pi ab^3}{4}$, $I_y=\frac{\pi a^3b}{4}$. **1.334.** $\frac{\pi R^4h}{10}$.

1.335. $I_x=\frac{R^3}{4}(2\alpha-\sin 2\alpha)$. **1.336.** Центр ваги лежить на осі симетрії сегмента на відстані $\frac{2h}{5}$ до основи. **1.337.** а) $x_c=0$, $y_c=\frac{2r}{\pi}$; б) $x_c=0$, $y_c=\frac{4r}{3\pi}$. **1.338.** а) $x_c=y_c=\frac{2}{5}a$; б) $x_c=y_c=\frac{4r}{3\pi}$; в) $x_c=0$, $y_c=\frac{4r}{3\pi}$;

г) $x_c=0$, $y_c=\frac{\pi}{8}$. **1.339.** 1) $x_c=y_c=\frac{2a}{5}$; 2) $x_c=\pi a$, $y_c=\frac{4a}{3}$;

3) $x_c=y_c=\frac{4a}{5}$; 4) $x_c=-\frac{a}{5}\cdot\frac{2e^{2\pi}+e^{\pi}}{e^{\pi}-e^{\pi/2}}$, $y_c=\frac{a}{5}\cdot\frac{e^{2\pi}-2e^{\pi}}{e^{\pi}-e^{\pi/2}}$.

1.340. $x_c=\frac{\pi}{2}$, $y_c=\frac{\pi}{8}$. **1.342.** 1) $x_c=\frac{6a}{\pi^3}(4-\pi^2)$, $y_c=\frac{2a}{\pi^2}(\pi^2-6)$;

2) $x_c=\frac{\sqrt{2}}{8}\pi a$, $y_c=0$; 3) $x_c=y_c=\frac{128a}{105\pi}$. **1.343.** 353250 кгм.

1.344. $\frac{\pi d R^4}{4} \approx 101{,}8$ кгм. **1.345.** $\frac{16\sqrt{2}}{15} a p^3$. **1.346.** $\frac{a b^3 d \gamma \omega^2}{6} \approx 1{,}16$ кгм.

1.347. $\frac{a h^3 d \gamma \omega^2}{24} \approx 0{,}05$ кгм. **1.348.** 161700π Н $= 161{,}7\pi$ кН. **3.349.** $22{,}2m$.

1.350. $\approx 0{,}206$ см^2. **1.351.** ≈ 1 година 6 хвилин 53 секунди.

1.352. $\frac{2}{3}\sqrt{2g}\, b\left[(H+h)^{\frac{3}{2}} - H^{\frac{3}{2}}\right]$.

Глава 2

2.1. $D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$. **2.2.** $D:\ y^2 > 4x - 8$. **2.3.** $D: (x, y) \in \mathrm{R}^2, x^2 + y^2 \ne r^2$. **2.4.** $D: -1 \le x + y \le 1$. **2.5.** $D:\ x > 0, y > 0; x < 0, y < 0$. **2.6.** $D: x > 0, y > 0, z > 0$. **2.7.** $D:\ x + y + z \ge 0$. **2.8.** $D:\ x^2 + y^2 + z^2 < 1$.

2.9. $D: r^2 < x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$. **2.10.** Сім'я паралельних прямих $2x + y = c$. **2.11.** Сім'я прямих $y = cx$. **2.12.** Сім'я прямих $y = e^{2c} x$, або $y = c_1 x$ $(c_1 > 0)$. **2.13.** Сім'я прямих $x = c\,y$. **2.14.** Сім'я гіпербол $xy = c$ (при $c \ne 0$), сукупність координатних осей Ox і Oy (при $c = 0$). **2.15.** Сім'я площин $x + y + 3z = c$. **2.16.** Сім'я сфер $x^2 + y^2 + z^2 = c$ $(c \ge 0)$. **2.17.** Сім'я двопорожнинних гіперболоїдів $x^2 - y^2 - z^2 = c$ (при $c > 0$); сім'я однопорожнинних гіперболоїдів $x^2 - y^2 - z^2 = c$ (при $c < 0$); конус $x^2 - y^2 - z^2 = 0$ (при $c = 0$). **2.18.** 0. **2.19.** -6. **2.20.** 0. **2.21.** 0. **2.22.** Границя не існує.

2.23. Границя не існує. **2.24.** Границя не існує. **2.25.** 1. **2.26.** Границя не існує. **2.27.** $(1, -1)$. **2.28.** Лінії розриву – прямі $x = k\pi$, $y = m\pi$, де $k, m \in Z$. **2.29.** Лінії розриву – кола $x^2 + y^2 = 1$ **2.30.** Лінії розриву – пряма $x + y = 0$ і парабола $y^2 = x$. **2.31.** Поверхня розриву – еліпсоїд $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

2.32. Поверхня розриву – конус $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. **2.33.** Поверхня розриву – однопорожнинний гіперболоїд $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. **2.34.** 1) Неперервна; 2) розривна; 3) неперервна; 4) розривна; 5) розривна; 6) розривна.

2.35. $\frac{\partial z}{\partial x} = 5x^4 - 15x^2 y^3$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 5y^4 - 15x^3 y^2$. **2.36.** $\frac{\partial z}{\partial x} = y - \frac{y}{x^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x + \frac{1}{x}$. **2.37.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$.

2.38. $\frac{\partial z}{\partial x} = (1 - xy)\,e^{-xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -x^2 e^{-xy}$. **2.39.** $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\cos y^2}{x^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y \sin y^2}{x}$. **2.40.** $\frac{\partial z}{\partial x} = y^x \ln y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x y^{x-1}$. **2.41.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}$. **2.42.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{(x^2 + y^2)\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{(x^2 + y^2)\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)^2}$. **2.43.** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{x + y + z}$.

2.44. $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$. **2.45.** $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{z}{x}\left(\frac{y}{x}\right)^z$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{z}{y}\left(\frac{y}{x}\right)^z$, $\frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{y}{x}\right)^z \ln\frac{y}{x}$. **2.46.** $\frac{\partial u}{\partial x} = yz(\sin x)^{yz-1} \cdot \cos x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = z(\sin x)^{yz} \ln\sin x$, $\frac{\partial u}{\partial z} = y(\sin x)^{yz} \ln\sin x$. **2.47.** $\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z^3 t^4 + 3$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2xyz^3 t^4 - 4$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 3xy^2 z^2 t^4 + 2$, $\frac{\partial u}{\partial t} = 4xy^2 z^3 t^3 - 1$. **2.48.** 1 і -1. **2.49.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **2.50.** $\frac{3}{2}$.

2.51. $dz = (2xy^4 - 3x^2 y^3 + 4x^3 y^2)dx + (4x^2 y^3 - 3x^3 y^2 + 2x^4 y)dy$.

2.52. $dz = \frac{x}{x^2 + y^2} dx + \frac{y}{x^2 + y^2} dy$. **2.53.** $dz = \frac{-2y}{(x - y)^2} dx + \frac{2x}{(x - y)^2} dy$.

2.54. $dz = \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}} dx - \frac{x}{y\sqrt{y^2 - x^2}} dy$. **2.55.** $dz = \frac{y}{1 + x^2 y^2} dx + \frac{x}{1 + x^2 y^2} dy$.

2.56. $du = yzx^{yz-1} dx + zx^{yz} \ln x\, dy + yx^{yz} \ln x\, dz$. **2.57.** 1,08. **2.58.** $-0{,}03$.

2.59. 1,013 . **2.60.** 3,037 . **2.61.** 1,05 . **2.62.** $\frac{dz}{dt}=e^{\sin t-2t^3}(\cos t-6t^2)$.

2.63. $\frac{dz}{dt}=\sin 2t+2e^{2t}+e^t(\sin t+\cos t)$. **2.64.** $\frac{dz}{dt}=\frac{3-12t^2}{\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}}$.

2.65. $\frac{du}{dt}=\frac{t^2-1+2\ln t\cdot t^2-\ln t\cdot(t^2-1)t}{te^t}$. **2.66.** $\frac{dz}{dx}=\frac{e^x(x+1)}{1+x^2e^{2x}}$.

2.67. $\frac{dz}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$. **2.68.** $\frac{dz}{dt}=\left(3-\frac{4}{t^3}-\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)\frac{1}{\cos^2(3t+2t^{-2}-\sqrt{t})}$.

2.69. $\frac{du}{dx}=e^{ax}\sin x$. **2.70.** $\frac{\partial z}{\partial u}=3u^2\sin\nu\cos\nu(\cos\nu-\sin\nu)$, $\frac{\partial z}{\partial v}=u^3(\sin v+\cos v)(1-3\cos v\sin v)$. **2.71.** $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{2u}{v^2}\ln(3u-2v)+\frac{3u^2}{v^2(3u-2v)}$, $\frac{\partial z}{\partial v}=-\frac{2u^2}{v^3}\ln(3u-2v)-\frac{2u^2}{v^2(3u-2v)}$. **2.72.** $\frac{\partial z}{\partial u}=4u$, $\frac{\partial z}{\partial v}=4v$. **2.73.** $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{2}{u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{2(v^4-1)}{v(v^4+1)}$. **2.74.** а) $\frac{7}{5}$; б) 0 ; в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **2.75.** а) $\frac{7}{9}$; б) -22 ; в) 5 .

2.76. а) $6\vec{i}+4\vec{j}$; б) $\frac{1}{3}(2\vec{i}+\vec{j})$; в) $\frac{-y_0\vec{i}+x_0\vec{j}}{x_0^2+y_0^2}$. **2.77.** а) $3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$; б) $\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$. **2.78.** $\vec{l}=-\vec{j}$. **2.79.** $\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2y-y^3}{3xy^2-x^3}$.

2.80. $\frac{dy}{dx}=\frac{ye^{xy}-ye^x-e^y}{xe^y+e^x-xe^{xy}}$. **2.81.** $\frac{dy}{dx}=-\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3}$. **2.82.** $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{1-xy}$.

2.83. $\frac{dy}{dx}=\frac{a^2}{(x+y)^2}$. **2.84.** $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c^2x}{a^2z}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{c^2y}{b^2z}$. **2.85.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2-x}{z+1}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{z+1}$. **2.86.** $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{yz}{xy+z^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xz}{xy+z^2}$. **2.87.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{x(z-1)}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y(z-1)}$. **2.88.** $\frac{dy}{dx}=-\frac{3}{2}$; $\frac{dz}{dx}=\frac{5}{3}$; $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{3}{8}$; $\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{5}{18}$.

2.89. $dy=-\frac{4x}{5y}dx$; $dz=\frac{x}{5z}dx$; $d^2y=-\frac{4}{25y^3}(4x^2+5y^2)dx^2$;

$d^2z=\frac{1}{25z^3}(5z^2-x^2)dx^2$. **2.90.** $du=\frac{(y-u)dx+(y-v)dv}{x-y}$; $dv=\frac{(x-u)dx+(x-v)dv}{y-x}$; $d^2v=-d^2u=\frac{2}{(x-y)^2}((y-u)dx^2+(y-v+u-x)dxdy+(v-x)dy^2)$.

2.91. $\frac{\partial z}{\partial x}=uv^2+u^2v$, $\frac{\partial z}{\partial y}=uv^2-u^2v$. **2.92.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{c}{a}\cos u\cdot\operatorname{cth}v$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{c}{b}\sin u\cdot\operatorname{cth}v$. **2.93.** $dz=e^{-u}((v\cos v-u\sin v)dx+(u\cos v+v\sin v)dy)$.

2.94. $dz=-3uv\,dx+\frac{3}{2}(u+v)dy$. **2.95.** $\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2u}{\partial y\partial x}=6(x+y)$.

2.96. $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=-\sin(x+y)$. **2.97.** $\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2u}{\partial y\partial x}=-\frac{4\cos(2x+2y)}{\sin^2(2x+2y)}$.

2.98. $\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=\frac{x(x+2y)}{(x+y)^2}$. **2.99.** $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=y(2-y^2)\cos xy-xy^2\sin xy$.

2.100. $\frac{\partial^3u}{\partial x^2\partial y}=\sin y\cdot\cos(x+\cos y)$.

2.101. $\frac{\partial^3z}{\partial x\partial y^2}=ae^y[e^y\sin(ax+e^y)-\cos(ax+e^y)]$.

2.102. $d^2z=-\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx^2-\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}dxdy+\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy^2$.

2.103. $d^2z=-\cos(x+y)(dx+dy)^2$. **2.104.** $d^2u=e^{xy}[(ydx+xdy)^2+2dxdy]$.

2.105. $d^3u=-\frac{6}{x^4}(ydx-xdy)dx^2$. **2.106.** $d^3u=6\,dx\,dy\,dz$.

2.107. $d^4u=\frac{2}{y^4}(4ydx-3xdy)^3dy^3$. **2.108.** $8x-8y-z=4$; $\frac{x-2}{8}=\frac{y-1}{-8}=\frac{z-4}{-1}$. **2.109.** $x+y-z-1=0$; $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-1}$.

2.110. $z-2x+2=0$; $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{0}=\frac{z}{-1}$. **2.111.** $2x+2y-3z+1=0$; $\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{-3}$. **2.112.** $x+11y+5z-18=0$; $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{11}=\frac{z+1}{5}$.

2.113. $x+4y+6z\pm 21=0$. **2.114.** $f(x+h,y+k)=xy^2+y^2h+2xyk+2yhk+$ $+xk^2+hk^2$. **2.115.** $f(x,y)=12+15(x-2)+6(x-2)^2+3(x-2)(y-1)-$ $-6(y-1)^2+(x-2)^2-2(y-1)^3$. **2.116.** $z=1+(x-1)+(x-1)(y-1)+$ $+\frac{1}{2}(x-1)^2(y-1)+\ldots$. **2.117.** $f(x,y,z)=8-8(y+1)+4(z-2)+(x-1)^2+$ $+(y+1)^2+(z-2)^2-2(x-1)(y+1)-2(x-1)(z-2)-2(y+1)(z-2)$.

2.118. $f(x,y)=1+y+\frac{1}{2!}(y^2-x^2)+\frac{1}{3!}(y^3-3x^2y)+o(\rho^3)$, де $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$. **2.119.** $f(x,y)=xy+\frac{1}{3!}(xy^3-x^3y)+o(\rho^4)$, де $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$.

2.120. $f(x,y,z)=(x-1)+(y-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2-\frac{1}{2}(y-1)^2+z^2+o(\rho^2)$, де $\rho=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+z^2}$.

2.121. $z=1+\frac{2}{3}(x-1)-\frac{1}{2}(y-1)-\frac{2}{9}(x-1)^2-\frac{1}{8}(y-1)^2+o(\rho^2)$, де $\rho=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$. **2.122.** $(0,0)$. **2.123.** $(2,-2)$. **2.124.** $(1,-1)$.

2.125. $(0,3)$, $z_{\min}=-9$. **2.126.** $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$, $z_{\max}=\frac{1}{64}$. **2.127.** $(5,2)$, $z_{\min}=30$. **2.128.** $(2,1)$, $z_{\min}=-28$; $(-2,-1)$, $z_{\max}=28$. В стаціонарних точках $(1,2)$, $(-1,-2)$ екстремумів нема. **2.129.** $(2,-3,1)$, $u_{\min}=-14$. **2.130.** $\left(\frac{1}{7},\frac{1}{7},\frac{1}{7}\right)$, $u_{\max}=\left(\frac{1}{7}\right)^7$. **2.131.** $\left(2^{\frac{1}{4}},2^{\frac{1}{2}},2^{\frac{3}{4}}\right)$, $u_{\min}=2^{\frac{9}{4}}$. **2.132.** $(1,1)$, $z_{\min}=2$.
2.133. $\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$, $z_{\min}=-\frac{19}{4}$. **2.134.** $(1,1)$, $z_{\min}=2$. **2.135.** $(1,0)$, $z_{\min}=0$; $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$, $z_{\max}=\frac{1}{27}$. **2.136.** $(-4,-2,4)$, $u_{\min}=-18$; $(4,2,-4)$, $u_{\max}=18$. **2.137.** $(2,2,2)$, $u_{\max}=2^6$. **2.138.** $(3,3,3)$, $u_{\min}=9$. **2.139.** $z_{\text{найб}}=4$ в точках $(2,0)$ і $(-2,0)$, $z_{\text{найм}}=-4$ в точках $(0,2)$ і $(0,-2)$. **2.140.** $z_{\text{найб}}=17$

в точці $(1,2)$, $z_{\text{найм}}=-3$ в точці $(1,0)$. **2.141.** $z_{\text{найб}}=4$ в точці $(2,1)$, $z_{\text{найм}}=-64$ в точці $(4,2)$. **2.142.** $z_{\text{найб}}=6$ при $x=3, y=0$ і при $x=0$, $y=3$, $z_{\text{найм}}=-1$ при $x=1$, $y=1$. **2.143.** $z_{\text{найб}}=\frac{3}{e}$ в точках $(0,\pm 1)$, $z_{\text{найм}}=0$ в точці $(0,0)$.

Глава 3

3.1. 1 . **3.2.** $\frac{4}{3}a^2b^3$. **3.3.** $\frac{\pi}{12}$. **3.4.** $\frac{3}{2}$. **3.5.** $(e-1)^2$. **3.6.** $\frac{2}{3}\sqrt{a^3}$. **3.7.** 0,5 .

3.8. 9 . **3.9.** $\ln\frac{4}{3}$. **3.10.** $\int\limits_2^5 dx\int\limits_0^3 f(x,y)\,dy$.

3.11. а) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x} f(x,y)\,dy$; б) $\int\limits_0^2 dx\int\limits_{\frac{x}{2}}^{2x} f(x,y)\,dy+\int\limits_2^4 dx\int\limits_{\frac{x}{2}}^{6-x} f(x,y)\,dy$.

3.12. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x-1}^{1-x} f(x,y)\,dy$. **3.13.** $\int\limits_3^5 dx\int\limits_{\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}x+2} f(x,y)\,dy$. **3.14.** $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy$.

3.15. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx\int\limits_{x^2}^{4-x^2} f(x,y)\,dy$. **3.16.** $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy$. **3.17.** $\int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_{x^2}^{\frac{2}{1+x^2}} f(x,y)\,dy$.

3.18. $\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{\sqrt{2x}} f(x,y)\,dy$. **3.19.** $\int\limits_{-2}^2 dx\int\limits_{-\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy$.

3.20. $\int\limits_1^2 dy\int\limits_1^y f(x,y)\,dx+\int\limits_2^4 dy\int\limits_{\frac{y}{2}}^2 f(x,y)\,dx$. **3.21.** $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^x f(x,y)\,dy$.

3.22. $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx$. **3.23.** $\int\limits_0^r dy\int\limits_{r-\sqrt{r^2-y^2}}^{y} f(x,y)\,dx$.

3.24. $\int\limits_2^4 dy\int\limits_2^y f(x,y)\,dx+\int\limits_4^5 dy\int\limits_2^4 f(x,y)\,dx+\int\limits_5^7 dy\int\limits_{y-3}^4 f(x,y)\,dx$.

3.25. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\arccos y} f(x,y)\,dx$. **3.26.** $\int\limits_0^{R\sqrt{2}/2} dy \int\limits_y^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x,y)\,dx$. **3.27.** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)\,dx$.

3.28. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y^3}}^{2-\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)\,dx$. **3.29.** $\int\limits_0^4 dy \int\limits_0^{y/2} f(x,y)\,dx + \int\limits_4^6 dy \int\limits_0^{6-y} f(x,y)\,dx$. **3.30.** $\frac{26}{105}$.

3.31. $\frac{752}{5}$. **3.32.** $\frac{121}{486}$. **3.33.** 9. **3.34.** $\frac{208}{15}$. **3.35.** $\frac{176\sqrt{2}+409}{3}$. **3.36.** $-\frac{93}{120}$.

3.37. $\frac{1}{6}$. **3.38.** $\frac{1}{2}$. **3.39.** а) $\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{b\sin\varphi} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho$;

б) $\int\limits_{\pi/4}^{\mathrm{arctg}\,2} d\varphi \int\limits_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho$; в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho$;

г) $\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{\frac{2}{\sin\varphi+\cos\varphi}}^{2} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho$; д) $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho$.

3.40. а) $\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{R} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho$; б) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{\frac{R}{2\sin\varphi}}^{2R\sin\varphi} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho$.

3.41. $\frac{16}{3}\pi$. **3.42.** 2π. **3.43.** $\frac{a^3}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{16\sqrt{2}-20}{9}\right)$. **3.44.** $\frac{3}{2}\pi a^4$. **3.45.** $\frac{\pi^2}{6}$.

3.46. $\frac{a^3}{12}$. **3.47.** πR^2. **3.48.** а) $6\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{1} f(2\rho\cos\varphi, 3\rho\sin\varphi)\rho d\rho$;

б) $ab\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_1^{2} f(\sqrt{4-\rho^2})\rho d\rho$. **3.49.** $\frac{a^2b^2}{8}$. **3.50.** $\frac{1}{\sqrt[4]{6}}$. **3.51.** а) 6;

б) $\frac{abc(a+b+c)}{2}$; в) $\frac{a^6}{48}$; г) $\frac{a^{12}}{144}$. **3.52.** $-\frac{5}{72}$. **3.53.** $\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}$.

3.54. $\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}$. **3.55.** $\frac{1}{96}$.

3.56. а) $\int\limits_0^1 dz \int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi \int\limits_0^{R} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\rho d\rho$; б) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \rho d\rho \int\limits_0^{\rho^2} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\,dz$;

в) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{R} f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)\, r^2 dr$. **3.57.** $\frac{\pi}{4}$.

3.58. $\frac{4}{15}+\frac{\pi}{12}$. **3.59.** $\frac{1}{12}$. **3.60.** $\frac{\pi a}{2}$. **3.61.** $\frac{8}{9}a^2$. **3.62.** $\frac{4}{15}R^5\pi$. **3.63.** $\frac{\pi}{8}$.

3.64. $\frac{8}{3}a^3\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$. **3.65.** $\frac{\pi}{32}$. **3.66.** $\frac{8}{9}a^2$. **3.67.** $\frac{4}{15}R^5\pi$. **3.68.** $\frac{4\pi}{15}(R^5-a^5)$.

3.69. $\frac{\pi}{10}$. **3.70.** $\pi\left(3\sqrt{10}+\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{10}-3}-\sqrt{2}-8\right)$. **3.71.** 2. **3.72.** $\frac{1}{2}$. **3.73.** πab.

3.74. $\frac{16}{3}$. **3.75.** $\frac{9}{2}$. **3.76.** 3. **3.77.** $\frac{8}{3}$. **3.78.** $2\pi-\frac{4}{3}$.

3.79. $a^2(\pi-1)$. **3.80.** $\frac{5}{8}\pi a^2$. **3.81.** $\frac{3}{4}\pi$. **3.82.** $\frac{3\sqrt{3}-\pi}{3}a^2$.

3.83. $\frac{3\pi}{4}+\frac{3}{2}$. **3.84.** $\pi+\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **3.85.** $\frac{4\pi}{3}+\sqrt{3}$. **3.86.** $186\frac{2}{3}$.

3.87. $\frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{p}+\frac{b^2}{q}\right)$. **3.88.** $\frac{1}{6}$. **3.89.** $\frac{1}{6}$. **3.90.** $78\frac{15}{32}$. **3.91.** 45. **3.92.** $13\frac{1}{3}$.

3.93. 40π. **3.94.** $\frac{a^3}{3}$. **3.95.** $\frac{3}{4}$. **3.96.** $\frac{88}{105}$. **3.97.** 27. **3.98.** $\frac{1}{6}$. **3.99.** 14.

3.100. 36. **3.101.** 8π. **3.102.** $\frac{2\pi}{3}(\sqrt{8}-1)$. **3.103.** $2R^2(\pi-2)$. **3.104.**

$\frac{16}{3}\pi a^2$. **3.105.** 8. **3.106.** $\frac{7}{12}$. **3.107.** $\frac{3}{35}$. **3.108.** $\frac{\pi a^3}{6}$. **3.109.** πa^3. **3.110.**

$\frac{32\pi}{3}$. **3.111.** $\frac{512}{15}$. **3.112.** $\frac{176}{15}$. **3.113.** 8π. **3.114.** $\frac{8}{5}$. **3.115.** $4(4-3\ln 3)$.

3.116. $\frac{\pi}{8}$. **3.117.** $\frac{19}{6}\pi$ та $\frac{15}{2}\pi$. **3.118.** $\frac{\pi a^3}{3}$. **3.119.** $\frac{1}{2}$. **3.120.** $\frac{21(2-\sqrt{2})}{4}$.

3.121. а) $\frac{1}{2}\pi\delta R^2$; б) $\frac{a^2b}{6}$. **3.122.** а) $\frac{ab^2}{2}$; б) $\frac{2R^3}{3}$; в) $M_x=\frac{\pi}{24}$,

$M_y=1-\frac{\pi^2}{12}$. **3.123.** а) $x_c=\frac{2}{5}a$, $y_c=\frac{a}{2}$; б) $x_c=\frac{2}{5}$, $y_c=0$;

в) $x_c=\left(1-\frac{\pi}{4}\right)(\sqrt{2}+1)$, $y_c=\frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)(\sqrt{2}+2)$; г) $x_c=0$, $y_c=\frac{4b}{3\pi}$.

3.124. а) 4; б) $\frac{21\pi}{4}$; в) $I_x=\frac{1}{12}$, $I_y=\frac{7}{12}$, $I_0=\frac{2}{3}$; г) $I_x=\frac{ka^5}{5}$, $I_y=\frac{3ka^5}{20}$, $I_0=\frac{7ka^5}{20}$; д) $I_x=\frac{\pi ab^3}{4}$, $I_y=\frac{\pi a^3 b}{4}$, $I_0=\frac{\pi ab}{4}(a^2+b^2)$.

3.125. а) $\frac{3}{2}$; б) $\frac{\pi R^4}{16}$; в) 8π; г) $\frac{13}{4}\pi$. **3.126.** а) $m=\frac{3}{4}\pi\gamma_0 a^3$, $\mu_{\text{сер}}=\frac{9}{16}\gamma_0$;

б) $m=\frac{31}{5}\pi\gamma_0 a^3$, $\mu_{\text{сер}}=\frac{93}{140}\gamma_0$. **3.127.** а) $\frac{a^2bc}{2}$, $\frac{ab^2c}{2}$, $\frac{abc^2}{2}$; б) $\frac{\pi R^2 H^2}{4}$;

в) $\frac{\pi abc^2}{2}$. **3.128.** а) $x_c=\frac{14}{15}$, $y_c=\frac{26}{15}$, $z_c=\frac{8}{3}$; б) $x_c=\frac{3}{8}a$, $y_c=\frac{3}{8}b$, $z_c=\frac{3}{8}c$; в) $x_c=\frac{6}{5}$, $y_c=\frac{12}{5}$, $z_c=\frac{8}{5}$. **3.129.** а) $\frac{9\pi}{2}$; б) $\frac{16\pi}{5}$; в) $\frac{32\pi}{3}$.

Глава 4

4.1. $\sqrt{5}\ln 2$. **4.2.** 24. **4.3.** $\sqrt{2}+1$. **4.4.** $\ln\frac{\sqrt{5}+3}{2}$. **4.5.** $\frac{5\sqrt{5}-1}{3}$. **4.6.** $-\frac{14\sqrt{2}}{3}$.

4.7. $\frac{\pi a^3}{4}$. **4.8.** $\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$. **4.9.** $2\pi a^{2n+1}$. **4.10.** $4\pi a\sqrt{a}$. **4.11.** $\frac{\pi a^2}{2}$.

4.12. $\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. **4.13.** $\frac{a^5\sqrt{10}}{15}$. **4.14.** $\frac{1}{12}\left((R^2+4)^{\frac{3}{2}}-8\right)$. **4.15.** $\frac{8a\pi^3\sqrt{2}}{3}$.

4.16. $\frac{R^4\sqrt{3}}{32}$. **4.17.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **4.18.** $\frac{e^2-1}{2e}$. **4.19.** $\frac{13}{3}$. **4.20.** $10a\pi$. **4.21.** $a\sqrt{3}$.

4.22. $\frac{19}{3}$. **4.23.** δa. **4.24.** $\frac{14}{9}$. **4.25.** $k\pi a^2$. **4.26.** $\frac{a}{8}\left[(3\sqrt{3}-1)+\frac{3}{2}\ln\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right]$.

4.27. $-\frac{56}{15}$. **4.28.** $-\frac{1}{20}$. **4.29.** 12. **4.30.** $\frac{ab}{2}$. **4.31.** 4π. **4.32.** 3. **4.33.** $37\frac{1}{3}$.

4.34. 0. **4.35.** $-2\pi ab$. **4.36.** $-2\pi a^2$. **4.37.** -2π. **4.38.** $\sqrt{1+a^2}-\sqrt{1+b^2}$.

4.39. 13. **4.40.** 0. **4.41.** $-\frac{3a^2}{2}$. **4.42.** $\frac{1}{2}$. **4.43.** $-\frac{4}{3}$. **4.44.** $\frac{\pi R^4}{2}$. **4.45.** $\frac{\pi R^4}{2}$.

4.46. а) 0; б) $-\frac{\pi a^3}{8}$. **4.47.** 8. **4.48.** 4. **4.49.** $\ln\frac{13}{5}$. **4.50.** 62. **4.51.** 4.

4.52. $\frac{10}{3}$. **4.53.** 0. **4.54.** $u=\frac{x^3+y^3}{3}+C$. **4.55.** $u=(x^2-y^2)^2+C$.

4.56. $u=\ln|x+y|-\frac{y}{x+y}+C$. **4.57.** $u=x^2\cos y+y^2\cos x+C$.

4.58. $u=\ln|x+y+z|+C$. **4.59.** $u=\frac{1}{3}(x^2+y^2+z^2)-2xyz+C$.

4.60. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}+C$. **4.61.** πab. **4.62.** $3\pi a^2$. **4.63.** $\frac{3}{8}\pi a^2$.

4.64. $\frac{3}{2}a^2$. **4.65.** $6\pi a^2$. **4.66.** $\frac{1}{60}$. **4.67.** $\frac{1}{210}$. **4.68.** πab. **4.69.** $0{,}7$.

4.70. $\frac{11}{6}a^2$. **4.71.** $8a^2$. **4.72.** $\frac{91}{60}$. **4.73.** $2\pi^2 a^2 h$. **4.74.** $\frac{2\pi R^2}{\sqrt{3}}$.

4.75. $\left(2\sqrt{2}-\frac{7}{3}\right)a^3$. **4.76.** $4\sqrt{61}$. **4.77.** $\frac{\sqrt{3}}{120}$. **4.78.** $\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}$. **4.79.** 2π.

4.80. 4π. **6.81.** $\frac{\pi R^3}{4}$. **4.82.** πR^3. **4.83.** $\frac{2\pi R^6}{15}$. **4.84.** 9. **4.85.** $\frac{\pi}{2}(1+\sqrt{2})$.

4.86. $\frac{3-\sqrt{3}}{2}+(\sqrt{3}-1)\ln 2$. **4.87.** 13. **4.88.** $\frac{8\sqrt{2}}{3}a^2$. **4.89.** $2\pi a^2$.

4.90. $\frac{14}{3}\pi a^2$. **4.91.** $2\pi p^2\sqrt{2}$. **4.92.** $\frac{3}{4}$. **4.93.** $\frac{2\pi(1+6\sqrt{3})}{15}$. **4.94.** $\frac{4\pi}{3}$.

4.95. $\frac{128\pi}{15}$. **4.96.** $\frac{32\pi\sqrt{2}}{3}$. **4.97.** $\frac{a^3}{6}$. **4.98.** 54. **4.99.** $\frac{1}{8}$. **4.100.** $2\pi a$.

4.101. $\frac{\pi R^4}{2}$. **4.102.** 3. **4.103.** $\frac{2\pi R^7}{105}$. **4.104.** $\frac{4}{3}\pi abc$. **4.105.** 0.

4.106. $\frac{4HR^3}{15}$. **4.107.** $\frac{8\pi}{3}$. **4.108.** $R^2H\left(\frac{2R}{3}+\frac{\pi H}{8}\right)$. **4.109.** $\frac{1}{8}$. **4.110.** $\frac{1}{2}$.

4.111. $R^2H\left(\frac{2R}{3}+\frac{\pi H}{8}\right)$. **4.112.** $\frac{1}{3}\pi H^3$. **4.113.** $3a^4$. **4.114.** $\frac{12}{5}\pi a^5$. **4.115.** $\frac{\pi}{8}$.

4.116. 0 . **4.117.** $-\dfrac{\pi R^6}{8}$. **4.118.** 0 . **4.119.** $-a^3$. **4.120.** $2\pi R r^2$. **4.121.** $-\pi a^2$.

4.122. 0 . **4.123.** а) Параболи $y^2 = C - x$; б) гіперболи $xy = C$ (при $C = 0$ – сукупність координатних осей); в) прямі $y = Cx$. **4.124.** а) Паралельні площини $x + y + z = C$; б) однопорожнинні та двопорожнинні гіперболоїди $x^2 + y^2 - z^2 = \pm C^2$ (при $C = 0$ – конус $x^2 + y^2 - z^2 = 0$);

в) параболоїди обертання $x^2 + y^2 = z + C$. **4.125.** а) $\dfrac{\vec r}{|\vec r|} = \dfrac{x\vec i + y\vec j + z\vec k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$;

б) $\dfrac{\vec r}{|\vec r|^2}$; в) $\vec a$. **4.126.** а) $\dfrac{\vec r}{|\vec r|}$; б) $2\vec r$; в) $-\dfrac{\vec r}{r^3}$; г) $f'(r)\dfrac{\vec r}{r}$.

4.127. $\operatorname{grad} u(A) = 9\vec i - 3\vec j - 3\vec k$; $|\operatorname{grad} u(A)| = 3\sqrt{11}$; $z^2 = xy$; $x = y = z$.

4.128. $\cos\varphi = -\dfrac{4}{\sqrt{41}}$. **4.129.** а) $\dfrac{13}{5}$; б) $\dfrac{4}{\sqrt5}$; в) $\dfrac{6}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

4.130. $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 2\sqrt6$; $\vec n = \dfrac{1}{\sqrt6}(2\vec i + \vec j + \vec k)$. **4.131.** $\dfrac{1}{\sqrt{17}}(2\vec i + 3\vec j - 2\vec k)$.

4.132. Кола $x^2 + y^2 = C^2$. **4.133.** Гіперболи $xy = C$ (при $C = 0$ – сукупність координатних осей). **4.134.** Параболи $y^2 = 2(x + C)$. **4.135.** Прямі $\dfrac{x}{l} = \dfrac{y}{m} = \dfrac{z}{n}$. **4.136.** Лінії перетину гіперболічних циліндрів $y^2 - x^2 = C_1$ з такими ж циліндрами $z^2 - x^2 = C_2$. **4.137.** Кола, що є лініями перетину сфер $x^2 + y^2 + z^2 = C_1^2$ з площинами $x + y + z = C_2$. **4.138.** $\operatorname{div}\vec a = 3$, $\operatorname{rot}\vec a = 0$. **4.139.** $\operatorname{div}\vec a = 0$, $\operatorname{rot}\vec a = 2((y - z)\vec i + (z - x)\vec j + (x - y)\vec k)$.

4.140. $\operatorname{div}\vec a = 6xyz$, $\operatorname{rot}\vec a = x(z^2 - y^2)\vec i + y(x^2 - z^2)\vec j + z(y^2 - x^2)\vec k$.

4.141. $\operatorname{div}\vec a = 6$, $\operatorname{rot}\vec a = 0$. **4.142.** 14 . **4.143.** 1 . **4.144.** a^5 . **4.145.** $4\pi R^2$.

4.146. $\dfrac{R^5}{3}$. **4.147.** $\dfrac{\pi R^4 H}{2}$. **4.148.** -4π . **4.149.** $\dfrac{12}{5}\pi R^5$. **4.150.** $-\pi$.

4.151. $\dfrac{81\pi}{8}$. **4.153.** $3\pi R^2 H$. **4.154.** $2\pi R^2 H$. **4.155.** 4π . **4.156.** $\dfrac{1}{6}$. **4.157.** $\dfrac{26}{3}$.

4.158. 1 . **4.159.** -18π . **4.160.** $\dfrac{\pi}{8}$. **4.161.** 8π . **4.162.** $-\dfrac{R^2 H}{3}$. **4.163.** 0 .

4.164. $\dfrac{91}{60}$. **4.165.** $2\pi^2 a^2 h$. **4.166.** $\dfrac{5}{2}$. **4.167.** 4π . **4.168.** π . **4.169.** $\dfrac{R^3}{3}$.

4.170. $\dfrac{4}{3}\pi R^3$. **4.171.** $\dfrac{3}{2}\pi R^4$. **4.172.** $-\pi$. **4.173.** $u = x^3 y - xy^3 + C$.

4.174. $u = xyz + C$. **4.175.** $u = xy + xz + yz + C$. **4.176.** $u = x^2 y - y^2 z + C$.

4.177. $u = xyz - \dfrac{x^2 y}{2} + \dfrac{y^2 z^2}{2} + C$. **4.178.** Так. **4.179.** Так. **4.180.** Так.

4.181. Так.

Предметний вказівник

Біном диференціальний 20

Векторна лінія 269
Визначник Якобі 172, 186
Властивості градієнта 123, 268
– визначеного інтеграла 61
– невизначеного інтеграла 11
– подвійного інтеграла 169

Градієнт функції 123, 268

Дивергенція векторного поля 270
Диференціал функції повний 120
Диференціювання
– неявних функцій 123
– параметрично заданих функцій 124
– складних функцій 121
Дріб раціональний 14
– найпростіший 15
– правильний (неправильний) 14

Заміна змінних
– – у подвійному інтегралі 172
– – у потрійному інтегралі 186
Застосування інтеграла
– – визначеного 80
– – криволінійного другого роду 228
– – – першого роду 222
– – поверхневого другого роду 251
– – – першого роду 247
– – подвійного 196
– – потрійного 199
– повного диференціала 121

Інтеграл визначений 59
– криволінійний другого роду 222
– – першого роду 220
– невизначений 11
– невласний другого роду 66
– – першого роду 63
– поверхневий другого роду 247
– – першого роду 246
– повторний 170, 185
– подвійний 168
– – у полярних координатах 172
– потрійний 183
– – у сферичних координатах 187
– – у циліндричних координатах 186
Інтегрування
– гіперболічних функцій 23
– ірраціональних функцій 18
– найпростіших дробів 16
– раціональних дробів 14
– тригонометричних функцій 20

Лінія рівня 118

Метод
– задання частинних значень 16
– інтегрування частинами 14
– заміни змінної 13
– множників Лагранжа 153
– невизначених коефіцієнтів 16
– підведення під знак
диференціала 13

Область визначення функції 118
– однозв'язна 225
– поверхнево-однозв'язна 226
– правильна в напрямі осі 170
Обчислення
– довжини дуги 81
– координат центра ваги 84, 199, 200
– моментів інерції 84, 199, 200
– об'ємів тіл 82, 197, 199
– площі плоскої області 80, 196

– – поверхні 83, 198
– потоку векторного поля 278
– статичних моментів 84, 198, 200
Обчислення інтеграла
– – визначеного 62
– – криволінійного другого роду 224
– – – першого роду 221
– – поверхневого другого роду 249
– – – першого роду 246
– – подвійного 170
– – потрійного 184
Оператор Гамільтона 272
– Лапласа 274

Первісна функції 11
Підстановки Ейлера 20
– тригонометричні 23
Площина дотична до поверхні 148
Поверхня рівня 118, 267
Поле векторне 269
– – потенціальне 271
– – соленоїдальне 272
– скалярне 267
Потік векторного поля 270
Похідна функції
– за напрямом 122, 267
– частинна 119

Ротор векторного поля 270

Теорема про середнє значення
функції 62, 170
Точка екстремуму 150

Умови екстремуму
– – необхідні 150
– – достатні 150
Умовний екстремум 152

Формула для обчислення повної
похідної 121
– Гріна 226
– заміни змінної 13, 62
– інтегрування частинами 14, 62
– Маклорена 150
– Ньютона-Лейбніца 62
– Тейлора 149
– Остроградського-Гаусса 250, 271
– Стокса 250, 271

Циркуляція векторного поля 271

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1985. – 446с.

2. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1980. – 432с.

3. *Будак Б.М., Фомин С.В.* Кратные интегралы и ряды. – М.: Наука, 1965. – 607с.

4. *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2 ч. – М.: Высш.шк., 1986. – Ч.1. – 304с., Ч.2. – 415с.

5. *Дубовик В.П., Юрик І.І.* Вища математика. – К.: Вища шк., 1993. – 648с.

6. *Задачи* и упражнения по математическому анализу для втузов. /Под ред. Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1970. – 472с.

7. *Кузнецов Л.А.* Сборник заданий по высшей математике. – М.: Высш.шк., 1983. –175с.

8. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисление. В 2 т. – М.: Наука, 1985. – Т.1 – 432с.; Т.2 – 576с.

9. *Сборник* задач по математике для втузов. Ч.1. Линейная алгебра и основы математического анализа /Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1986. – 464с.

10. *Сборник* задач по математике для втузов. Ч.2. Специальные разделы математического анализа. /Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1986. – 368с.

11. *Сборник* индивидуальных заданий по высшей математике. /Под ред. А.П. Рябушко: В 3 ч. – Мн.: Выш. шк, 1991. – Ч.2 – 352с.; Ч.3 – 288с.

12. *Тевяшев А.Д., Литвин О.Г.* Вища математика. Загальний курс: Збірник задач та вправ. – Х.: Рубікон, 1999. – 320с.

13. *Фихтенгольц Г.М.* Основы математического анализа: В 2 т. – М.: Наука, 1985. – Т.1 – 440с.; Т.2 – 463с.

Навчальне видання

ТЕВЯШЕВ Андрій Дмитрович
ЛИТВИН Олександра Григорівна
КРИВОШЕЄВА Галина Миколаївна
ОБУХОВА Людмила Володимирівна
СЕРЕДА Олена Григорівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА У ПРИКЛАДАХ ТА ЗАДАЧАХ

Частина 2.
Інтегральне числення функцій однієї змінної.
Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних

Продюсер видавничого проекту С.М. Смоленський
Коректор

Підп. до друку Формат 60×84/16. Папір офсетний.
Друк офсетний. Умов. друк. арк. 00,0. Наклад 0000 прим.
Замовлення №

Віддруковано у